Chapitre 16

Un module de formation : Géométrie Ecrite et Algèbre Visuelle

Introduction du module

« *L'algèbre est de la géométrie écrite, et la géométrie est de l'algèbre visuelle.* »

Sophie Germain (1776-1831)

« *Je ne suis pas encore content de l'Algèbre, en ce qu'elle ne donne ny les plus courtes voyes, ni les plus belles constructions de Géométrie. C'est pourquoy lorsqu'il s'agit de cela, je croy qu'il nous faut encore une autre analyse proprement géométrique ou linéaire, qui nous exprime directement situm, comme l'Algèbre exprime magnitudinem. Et je croy d'en avoir le moyen, et qu'on pourroit représenter des figures . . . en caractères, comme l'algèbre représente les nombres ou grandeurs.* »

G. W. Leibniz, dans une lettre à C. Huygens, datée du 8 septembre 1679.

Ce qui caractérise le thème « Géométrie/Algèbre » du nouveau programme de 5^{e}, c'est la **diversité des matières** et donc des **points de vue** : géométrie synthétique, analytique et vectorielle, géométrie des transformations, représentation matricielle, . . .

Le (long) module qui suit propose à l'attention des enseignants des pistes de travail (aperçus théoriques, exercices et problèmes, références bibliographiques, . . .) qui permettent d'unifier ces points de vue si divers. Grosso modo, il concerne l'ensemble des matières du thème « Géométrie/Algèbre » du cours à 6 ou 4 périodes/semaine.

Au cœur de ce projet, il y a la volonté de construire une **géométrie effective**, c'est-à-dire de rendre les objets géométriques élémentaires (point, droite, plan, longueur, angle, aire, volume, . . .) **accessibles au calcul**, suivant le souhait de Leibniz.

On fait ici le choix de partir de la représentation d'un point par le triplet de ses coordonnées. Cela permet de faire référence à ce qui a été acquis dès le premier degré en termes de géométrie dans un quadrillage. On ne se limitera évidemment pas à ce seul aspect, comme la suite le fera voir.

Mais il ne suffit pas de rendre effectifs ces *objets* élémentaires du plan ou de l'espace pour savoir résoudre toutes les questions de géométrie. Il reste à intégrer les *relations* entre ces objets, ou plus précisément les transformations du plan ou de l'espace qui respectent certaines propriétés de ces objets. C'est ce que réalise la **représentation matricielle** ([1]). Et dans un tel projet, la représentation matricielle occupe une place privilégiée pour au moins deux raisons :

([1]) Le terme « représentation matricielle » a été préféré à la terminologie plus courante de « calcul

- elle est en effet une source inépuisable de **relations** profondes entre algèbre et géométrie, entre figures et calculs,
- mais elle est aussi — et peut-être surtout — une clé de la **modélisation linéaire** d'un grand nombre de **phénomènes complexes**, ce qui explique son importance dans les programmes d'études supérieures à dominante scientifique.

Pour l'élève, une première étude suffisamment ouverte et variée de cette méthode de modélisation offre ainsi l'occasion de développer quelques compétences caractéristiques de l'activité mathématique au carrefour de la géométrie, de l'algèbre et même de l'analyse.

Mais il n'est heureusement pas nécessaire d'attendre que la représentation matricielle soit disponible pour résoudre des problèmes concrets : comme on va s'en rendre compte dès le début du module, des situations variées révèlent vite l'efficacité d'une géométrie effective.

*

* *

Ce module est inspiré entre autres des résultats obtenus dans le cadre d'un contrat de recherche portant sur la géométrie de l'algèbre linéaire à la fin du secondaire, réalisé à l'Université de Mons-Hainaut pendant l'année académique 1996-97 ([2]).

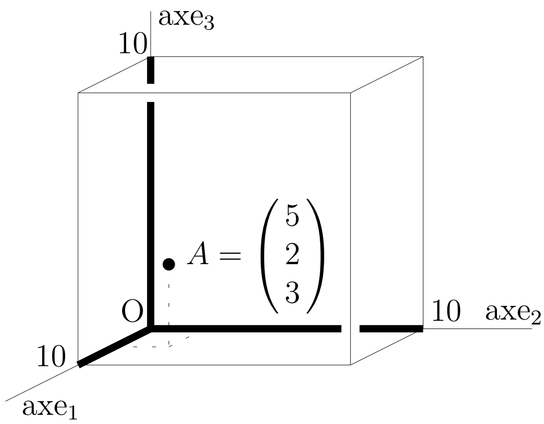
matriciel », afin de souligner qu'une matrice est un outil de **traduction**, de **changement** de cadre (algèbre/géométrie) et de registre (symbolique/graphique), et par là de **modélisation**. En ce sens, la représentation matricielle est au cœur de ce couple géométrie écrite/algèbre visuelle, dont le nom actuel est : l'algèbre linéaire.

([2]) Les résultats détaillés de ce travail sont en cours de publication ... Cfr. la bibliographie en fin de ce module.

16.1. Les deux opérations fondamentales

16.1.1 Les coordonnées d'un point

Les énoncés des questions 4, 5, 6 et 7 et de l'exercice 16 ci-après font référence à une figure élémentaire appelée « cube standard » :



Les coordonnées d'un point dans le système d'axes orthonormés correspondants sont souvent notées en colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

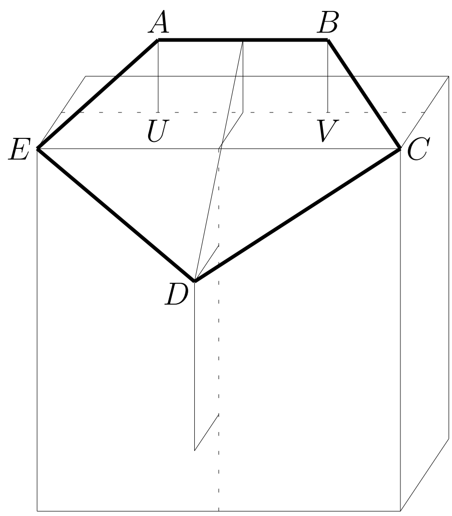
16.1.2 Quelques exercices et problèmes

Exercice 14 *Déterminer les coordonnées de 4 points pour qu'ils soient les sommets d'un tétraèdre régulier.*

Exercice 15 *Déterminer les coordonnées de 6 points pour qu'ils soient les sommets d'un octaèdre régulier.*

Problème 10 *Déterminer les coordonnées de 20 points pour qu'ils soient les sommets d'un dodécaèdre régulier.*

Indications. *Utiliser la méthode des « languettes d'Euclide » : on élève au milieu de chaque face d'un cube une languette rectangulaire $UVBA$ — dont les dimensions sont à déterminer — de telle sorte que le pentagone $ABCDE$ soit régulier . . .*

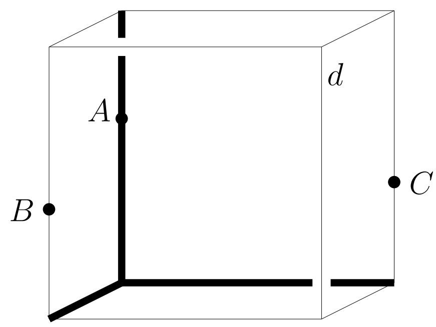


16.1.3 Les premières questions

Question 4 *Dans le cube standard ci-dessous, déterminer les coordonnées du point d'intersection X du plan ABC avec l'arête verticale d. On donne*

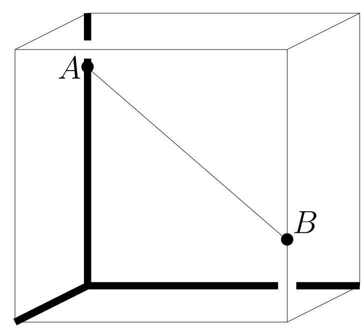
$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Question 5 *Dans le cube standard ci-dessous, déterminer les coordonnées du point X situé au $\frac{3}{4}$ du segment AB. On donne*

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$



16.1.4 Une synthèse

On généralise à l'espace ce qui a déjà été étudié dans le cours de géométrie (plane) de quatrième.

16.1.4.1 Définitions et propriétés des opérations sur les points de l'espace

On identifie un point de l'espace à un triplet de nombres : ses coordonnées par rapport à un système d'axes orthonormés d'origine O.

L'addition des coordonnées de deux points définit l'addition de ces points :

$$\text{si } A \ := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ et } B \ := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ alors } A+B \ := \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$$

La multiplication des coordonnées d'un point par un nombre réel définit la multiplication de ce point par ce nombre :

$$\text{si } A \ := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ alors } kA \ := \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$$

Les deux opérations ainsi définies sur l'ensemble des points de l'espace vérifient les propriétés suivantes :

- l'associativité de l'addition,
- l'existence d'un neutre : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ associé aux coordonnées de l'origine O,
- l'existence pour tout point $A := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ du point opposé $-A := \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$,
- la commutativité de l'addition,
- l'associativité de la multiplication par un réel,
- la distributivité de la multiplication par un réel sur l'addition,
- la distributivité de l'addition sur la multiplication par un réel,
- l'égalité de la multiplication par 1 avec l'identité.

16.1.4.2 Définitions et propriétés des opérations sur les translations de l'espace

Si A et B sont deux points de l'espace, il existe une et une seule translation τ qui amène A sur B ; on écrit souvent $\overrightarrow{AB}$ au lieu de τ .

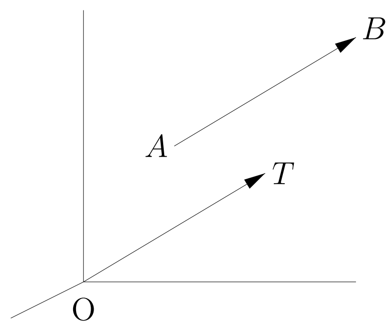
Dès qu'un système d'axes d'origine O est fixé, une translation — s'appliquant à tous les points de l'espace — est entièrement déterminée par son effet sur le point O. On a

$$\begin{cases} \tau(O) = T \\ \tau(A) = B \end{cases} \iff B - A = T - O = T$$

On écrit alors

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OT}$$

On dit encore que les couples (A, B) et (O, T) sont équipollents.



Lorsqu'on associe ainsi un point à une translation, on observe

- que la composée de deux translations correspond à la somme des deux points représentatifs,
- que le produit d'une translation par un nombre correspond au produit du point représentatif par ce nombre.

En particulier, la relation de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

correspond alors à l'identité

$$(B - A) + (C - B) = C - A$$

Les deux opérations ainsi définies sur l'ensemble des translations de l'espace jouissent des mêmes propriétés que celles des opérations définies sur l'ensemble des points de l'espace.

Remarque.

Le calcul géométrique en termes de points ou en termes de translation constitue les deux facettes d'une même réalité. Mais le calcul en termes de points dépend du choix préalable d'un système d'axes alors que le calcul en termes de translations en est indépendant.

Suivant le contexte, l'un de ces points de vue présentera un avantage sur l'autre ...

16.1.4.3 La notion de vecteur

Les définitions et règles de calcul dégagées pour l'ensemble des points ou des translations de l'espace s'appliquent aussi à d'autres objets mathématiques.

On appelle **vecteur** n'importe quel objet mathématique porteur d'un calcul linéaire, c'est-à-dire d'une addition et d'une multiplication par un réel, ces opérations respectant les propriétés décrites plus haut, et on donne le nom d'espace vectoriel à tout ensemble structuré de cette manière.

On appelle **combinaison linéaire** d'un ensemble fini $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de vecteurs n'importe quelle expression du type

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$$

où les coefficients a_i sont des nombres réels.

Dans l'espace usuel, quel que soit le point X et dès que A, B, C et D sont 4 points non coplanaires, le vecteur $\overrightarrow{AX}$ s'écrit d'une et d'une seule manière comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Les nombres k, ℓ et m tels que

$$\overrightarrow{AX} = k\overrightarrow{AB} + \ell\overrightarrow{AC} + m\overrightarrow{AD}$$

s'appellent les **composantes** du vecteur $\overrightarrow{AX}$ dans le **repère** ([3]) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$

Cfr. aussi l'annexe à la fin de la section suivante.

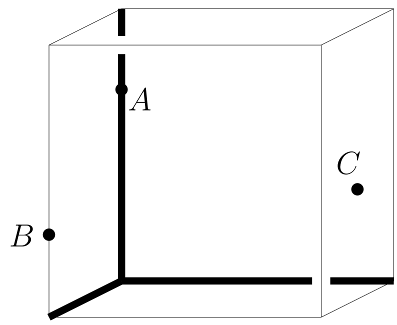
([3]) Ou la **base** ...

16.1.5 Quelques exercices et problèmes

Exercice 16

Dans le cube standard ci-dessous, déterminer les coordonnées des points d'intersection des arêtes du cube avec le plan ABC. On donne

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Exercice 17 *On considère deux parallélogrammes quelconques $ABCD$ et $EFGH$ dans l'espace. Caractériser la figure formée par les milieux des segments AE, BF, CG et DH.*

Problème 11 *On considère un tétraèdre quelconque $ABCD$. On note I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[DA]$, $[BD]$ et $[AC]$.*

Démontrer que les segments $[IJ]$, $[KL]$ et $[MN]$ sont concourants en leur milieu O.

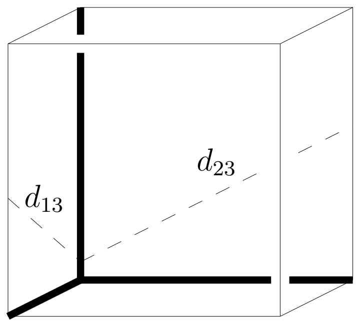
Ecrire $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OK}$.

16.2. Les droites et les plans

16.2.1 Les premières questions

Question 6 *On considère un plan dont on connaît les traces d_{13} et d_{23} sur les plans de coordonnées verticaux du cube standard :*

$$\begin{aligned} d_{13} &: x_3 = 0.3x_1 + 1 \\ d_{23} &: x_3 = 0.5x_2 + 1 \end{aligned}$$



Calculer la troisième coordonnée (la hauteur) d'un point quelconque de ce plan en fonction de ses deux autres coordonnées.

Question 7 *Par rapport au cube standard ci-dessous, la direction des rayons solaires est celle de la droite ST, où*

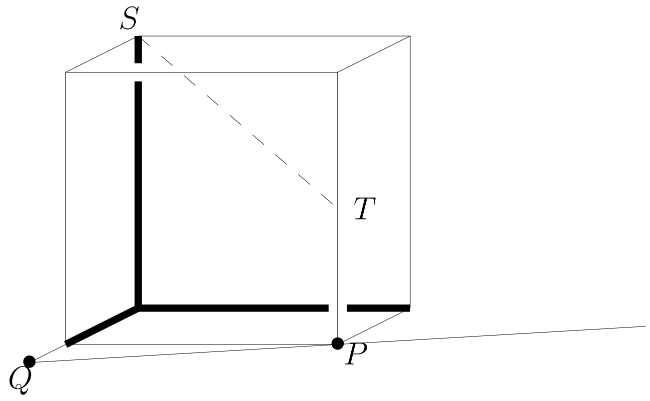
$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Déterminer les coordonnées de **tous** *les points de l'espace dont l'ombre est*

- *un point donné, par exemple le point P,*
- *une droite donnée, par exemple la droite PQ.*

On donne

$$P = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$


S
T
Q
P

16.2.2 Une synthèse

16.2.2.1 La description effective d'une droite

Quel que soit le système d'axes choisis (en particulier son origine), une **équation vectorielle** d'une droite d déterminée par deux points P et Q s'écrit :

$$X \in d \iff \text{il existe un et un seul nombre } k \text{ tel que } X = P + k(Q - P)$$

ou

$$X \in d \iff \text{il existe un et un seul nombre } k \text{ tel que } \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{PQ}$$

ou encore

$$X \in d \iff \text{il existe un et un seul nombre } k \text{ tel que } \overrightarrow{PX} = k\overrightarrow{PQ}$$

Le nombre réel k est appelé l'abscisse du point X dans le repère (P, Q) — ou la composante du vecteur $\overrightarrow{PX}$ dans le repère $\overrightarrow{PQ}$ — de la droite en question. On appelle aussi $\overrightarrow{PQ}$ le vecteur directeur de cette droite.

En fixant un système de coordonnées, on déduit d'une équation vectorielle des **équations paramétriques** de la droite considérée. Si $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$, en posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, on obtient

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + k(q_1 - p_1) \\ x_2 = p_2 + k(q_2 - p_2) \\ x_3 = p_3 + k(q_3 - p_3) \end{cases}$$

En éliminant k dans ces équations, on obtient des **équations cartésiennes** de la droite :

$$\frac{x_1 - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{x_2 - p_2}{q_2 - p_2} = \frac{x_3 - p_3}{q_3 - p_3}$$

pourvu évidemment qu'aucun des dénominateurs ne soit nul ! Ces équations s'écrivent plus généralement sous la forme

$$\begin{cases} (q_2 - p_2)(x_1 - p_1) = (q_1 - p_1)(x_2 - p_2) \\ (q_3 - p_3)(x_1 - p_1) = (q_1 - p_1)(x_3 - p_3) \end{cases}$$

16.2.2.2 La description effective d'un plan

Pareillement, une **équation vectorielle** d'un plan π déterminé par trois points (non alignés) P, Q et R s'écrit :

$$X \in \pi \iff \text{il existe deux, et seulement deux, nombres } k \text{ et } \ell \text{ tels que}$$
$$X = P + k(Q-P) + \ell(R-P)$$

ou

$$X \in \pi \iff \text{il existe deux, et seulement deux, nombres } k \text{ et } \ell \text{ tels que}$$
$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{PQ} + \ell\overrightarrow{PR}$$

ou encore

$$X \in \pi \iff \text{il existe deux, et seulement deux, nombres } k \text{ et } \ell \text{ tels que}$$
$$\overrightarrow{PX} = k\overrightarrow{PQ} + \ell\overrightarrow{PR}$$

Les nombres k et ℓ sont appelés l'abscisse et l'ordonnée ou, plus simplement, les coordonnées [4] du point X dans le repère (P, Q, R) — ou les composantes du vecteur $\overrightarrow{PX}$ dans le repère $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$ — du plan en question. On appelle aussi $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ les vecteurs directeurs de ce plan.

En fixant un système de coordonnées, on déduit d'une équation vectorielle des **équations paramétriques** du plan considéré. Si $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$, en posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, on obtient ainsi

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + k(q_1 - p_1) + \ell(r_1 - p_1) \\ x_2 = p_2 + k(q_2 - p_2) + \ell(r_2 - p_2) \\ x_3 = p_3 + k(q_3 - p_3) + \ell(r_3 - p_3) \end{cases}$$

En éliminant k et ℓ dans ces équations paramétriques, on obtient une **équation cartésienne** du plan, dont la forme générale s'écrit :

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

où a, b, c et d sont des nombres appropriés.

---

[4] Le contexte permet de faire la distinction entre les deux occurrences du mot « coordonnées » dans cette situation. On pourrait qualifier les nombres k et ℓ de *coordonnées locales* du point X dans le plan considéré.

Remarque.

Il peut être intéressant de faire observer qu'à partir des équations paramétriques du plan

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + ku_1 + \ell v_1 \\ x_2 = p_2 + ku_2 + \ell v_2 \\ x_3 = p_3 + ku_3 + \ell v_3 \end{cases}$$

dont $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ sont les deux vecteurs directeurs, une équation cartésienne de ce plan s'écrit sous la forme remarquable :

$$(u_2v_3 - u_3v_2)(x_1 - p_1) + (u_3v_1 - u_1v_3)(x_2 - p_2) + (u_1v_2 - u_2v_1)(x_3 - p_3) = 0$$

Cfr. à ce sujet l'exercice 23 et le problème 18 plus loin.

16.2.3 Quelques exercices et problèmes

Exercice 18 *Déterminer les équations des plans diagonaux et des droites diagonales (principales) du cube standard.*

Exercice 19 *Déterminer les équations du plan PQR et de ses intersections avec les 6 faces (éventuellement prolongées) du cube standard, si*

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Pour une figure, cfr. l'exercice 16.

Comment le seul examen des équations de ces droites et de ce plan permet-il de savoir que ces droites sont bien situées dans le plan donné ?

Exercice 20 *Ecrire les équations des arêtes, et des faces, d'un tétraèdre régulier, puis d'un octaèdre régulier. On se reportera aux résultats des exercices 14, 15.*

Problème 12 *Ecrire les équations des arêtes, resp. des faces, d'un dodécaèdre régulier. On se reportera très utilement (!) aux résultats du problème 10.*

Problème 13 *Ecrire l'équation d'une droite passant par l'origine et formant un angle de 45° avec la verticale.*

Quelle est la forme générale de n'importe quelle droite passant par l'origine et formant un angle de 45° avec la verticale ?

Quel est le lieu géométrique décrit par cet ensemble de droites ? Ecrire une relation vérifiée par les coordonnées de tous les points de ce lieu.

Traiter les mêmes questions dans le cas d'un angle de 30° , resp. 60° avec la verticale.

Problème 14 *La confidentialité des communications téléphoniques est une composante importante des libertés individuelles ([5]). Mais les écoutes téléphoniques peuvent se révéler nécessaires, par exemple pour la répression d'activités criminelles.*

Le système suivant se fonde sur la nécessité de la coopération de trois services (supposés compétents) pour obtenir un code d'accès à de telles écoutes.

([5]) Ce problème est inspiré de : T. Beth — La confidentialité des communications ; Pour La Science 220 (février 1996), 52-57.

Ce code d'accès (secret) est composé de trois nombres entiers dans un ordre donné. Ces trois nombres sont considérés comme les coordonnées d'un point dans l'espace.

Ce code peut alors être ouvert au départ de deux renseignements :

- *d'abord, une « droite publique », connue de tous, et contenant* a priori *le point secret en question (même « publique », cette droite reste sûre !)*
- *ensuite, chacun des trois services responsables de l'accès à l'écoute reçoit une clé partielle sous la forme des coordonnées de seulement deux points d'un plan ; les trois clés partielles ne sont compatibles que si elles déterminent un seul et même plan et dans ce cas l'intersection de ce plan avec la droite publique fournit alors le code d'accès recherché.*

On considère les données suivantes :

- *la droite « publique », définie par les deux points*

$$P = \begin{pmatrix} 111026 \\ 30910 \\ 951105 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 929980 \\ 1729898 \\ 830551 \end{pmatrix}$$

- *la clé partielle du premier service responsable de l'accès à l'écoute, définie par les deux points*

$$\begin{pmatrix} 530215 \\ 110626 \\ 820323 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 260915 \\ 60506 \\ 230521 \end{pmatrix}$$

- *la clé partielle du deuxième service responsable de l'accès à l'écoute, définie par les deux points*

$$\begin{pmatrix} 530215 \\ 110626 \\ 820323 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1029967 \\ 3289978 \\ 2281947 \end{pmatrix}$$

- *la clé partielle du troisième service responsable de l'accès à l'écoute, définie par les deux points*

$$\begin{pmatrix} 1279843 \\ 4879654 \\ 3012759 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 260915 \\ 60506 \\ 230521 \end{pmatrix}$$

Ces données permettent-elles d'accéder à un code d'accès (secret) ? Et si oui, quel est-il ?

16.2.4 Annexe

Les axiomes de la géométrie synthétique permettent de caractériser les droites et les plans de l'espace.

Les équations vectorielles de la droite et du plan sont en effet des formes effectives des axiomes :

- par deux points de l'espace passe une et une seule droite (axiome de droite),
- par trois points non alignés de l'espace passe un et un seul plan, et toute droite passant par deux points d'un plan est entièrement incluse à ce plan (axiome de plan),

Les deux axiomes « de dimension » :

- il existe quatre points non coplanaires,
- deux plans qui ont un point commun ont une droite commune passant par ce point,

peuvent alors être traduits dans ce qu'on appellera ultérieurement la définition ou la caractérisation d'une **base** d'un espace vectoriel (de dimension trois).

La traduction du premier axiome de dimension

On montre d'abord que l'axiome « il existe quatre points non coplanaires » se traduit de la manière suivante :

si A, B, C et D sont quatre points non coplanaires, alors :

$$k\overrightarrow{AB} + \ell\overrightarrow{AC} + m\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0} \iff k = \ell = m = 0$$

L'implication « $\Leftarrow$ » est triviale.

Quant à « $\Rightarrow$ », on raisonne par l'absurde : si un des coefficients k, ℓ ou m est $\neq 0$ — le coefficient k par exemple — alors on a

$$\overrightarrow{AB} = -\frac{l}{k}\overrightarrow{AC} - \frac{m}{k}\overrightarrow{AD}$$

Mais alors le point B est dans le plan ACD : contradiction !

Cette propriété vectorielle s'énonce sous la forme : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont **linéairement indépendants** (ou libres).

La traduction du deuxième axiome de dimension

On montre ensuite que l'axiome « deux plans qui ont un point commun ont une droite commune passant par ce point » se traduit de la manière suivante :

si A, B, C et D sont quatre points non coplanaires et si X est un point quelconque, alors il existe trois — et seulement trois — nombres k, ℓ et m tels que :

$$\overrightarrow{AX} = k\overrightarrow{AB} + \ell\overrightarrow{AC} + m\overrightarrow{AD}$$

Pour le montrer, on considère les plans ([6]) ABC et ADX. Le point A étant commun aux deux plans, ils ont une droite commune, donc un vecteur commun, noté $\overrightarrow{AU}$. Il existe alors des nombres α, β, γ et δ tels que $\overrightarrow{AU} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} = \gamma\overrightarrow{AD} + \delta\overrightarrow{AX}$

d'où

$$\delta\overrightarrow{AX} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} - \gamma\overrightarrow{AD}$$

Or, $\delta \neq 0$ puisque les points A, B, C et D sont non coplanaires. On achève alors en posant $k = \frac{\alpha}{\delta}$, $\ell = \frac{\beta}{\delta}$ et $m = -\frac{\gamma}{\delta}$.

Cette propriété vectorielle s'énonce sous la forme : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment une **partie génératrice** des vecteurs de l'espace.

Les deux propriétés vectorielles de l'espace ainsi déduites des axiomes de dimension se résument dans l'expression : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment une **base** de l'espace vectoriel « usuel », qui est ainsi — et heureusement ! — de dimension 3.

([6]) Si le point X est aligné avec les points A et D, ces trois points ne déterminent pas un plan, mais le résultat annoncé est alors immédiat. On suppose donc dans la suite que les points A, D et X ne sont pas alignés.

16.3. Une question d'équilibre

16.3.1 Les premières questions

En physique, on appelle **centre d'inertie** d'un solide le point unique de ce solide qui est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme lorsque le solide se déplace sans frottement sur un plan horizontal — ou suivant un état de mouvement équivalent — quelles que soient les conditions initiales de ce mouvement.

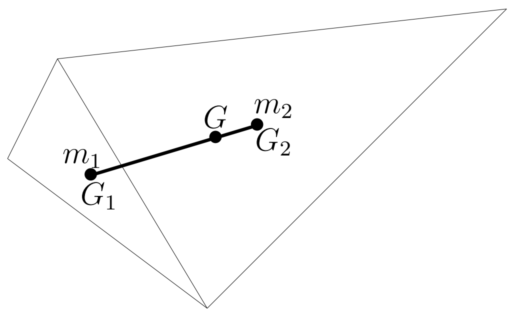
On calcule la position du centre d'inertie d'une plaque polygonale homogène à partir des deux principes suivants.

- Le **principe des centres élémentaires** : le centre d'inertie d'une plaque triangulaire homogène est le point d'intersection des médianes de ce triangle.
- Le **principe de juxtaposition** : le centre d'inertie d'une plaque homogène définie par juxtaposition de deux plaques de masses m_1 et m_2 et de centres d'inertie G_1 et G_2 est le point d'équilibre G du levier correspondant, caractérisé par la relation

$$\frac{|GG_1|}{|GG_2|} = \frac{m_2}{m_1}$$

ou

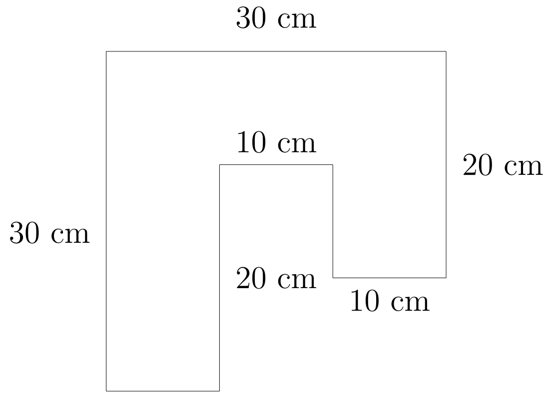
$$m_1\overrightarrow{GG_1} + m_2\overrightarrow{GG_2} = \overrightarrow{0}$$



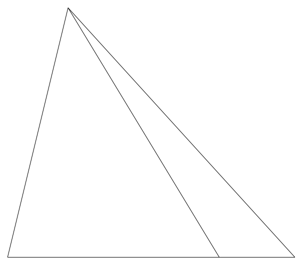
et affecté de la masse $m_1 + m_2$.

Question 8 *Démontrer à partir des deux principes précédents que le centre d'inertie d'une plaque rectangulaire homogène est le centre du rectangle.*

Question 9 *Calculer à partir des deux principes précédents la position du centre d'inertie de la plaque homogène représentée ci-contre, sachant que la masse y est proportionnelle à la mesure de l'aire.*



Question 10 *Les deux principes sont-ils cohérents ? Par exemple, le centre d'inertie de deux plaques triangulaires homogènes juxtaposées pour n'en plus former qu'une seule (toujours triangulaire) est-il bien le même suivant qu'on le calcule à partir du principe des centres élémentaires ou à partir du principe de juxtaposition ?*



16.3.2 Une synthèse

Cette synthèse étend les résultats obtenus ci-dessus aux corps solides homogènes et donc à l'espace !

16.3.2.1 La définition du barycentre

A un ensemble de couples $\{(A_i; m_i)\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ formés chacun

- d'un point A_i de l'espace,
- et d'un nombre réel m_i qualifié de masse de ce point,

on associe — pourvu que $m := \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \neq 0$ — un (nouveau) point G défini par la condition vectorielle :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$$

Ce point G s'appelle le **barycentre** ([7]) des n points « massifs » $\{(A_i; m_i)\}_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Ce point G est bien défini : il n'y en a qu'un seul qui vérifie cette relation ! Pour le voir, on suppose qu'il existe un autre point, noté G', tel que $\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{G'A_i} = \overrightarrow{0}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{0} &= \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{G'A_i} - \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{GA_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overrightarrow{G'A_i} - \overrightarrow{GA_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{G'G} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\overrightarrow{G'G}
\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{G'G} = \overrightarrow{0}$ puisque $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \neq 0$, d'où $G = G'$.

([7]) Lorsque les « masses » ou coefficients m_i sont tous égaux entre eux, on parle parfois d'isobarycentre. L'isobarycentre de trois points (non alignés), qui est le point d'intersection des médianes du triangle associé, a probablement été rencontré dans le cours de quatrième, ou même avant. Cfr. aussi le principe des centres élémentaires ci-dessus.

16.3.2.2 La construction du barycentre

Le barycentre de n points massifs est facilement construit par récurrence.

- Dans le cas de deux points massifs, le théorème de Thalès fait tout le travail !
- Le calcul du barycentre G de n points massifs $\{(A_i; m_i)\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ peut toujours se réduire à celui de 2 points massifs. En effet, si on note A' le barycentre des $n-1$ premiers points massifs $\{(A_i; m_i)\}_{1\leqslant i\leqslant n-1}$, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{0} &= \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{GA_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} m_i\overrightarrow{GA_i} + m_n\overrightarrow{GA_n} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} m_i\left(\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A_i}\right) + m_n\overrightarrow{GA_n} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-1} m_i\right)\overrightarrow{GA'} + \sum_{i=1}^{n-1} m_i\overrightarrow{A'A_i} + m_n\overrightarrow{GA_n} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-1} m_i\right)\overrightarrow{GA'} + m_n\overrightarrow{GA_n}
\end{aligned}$$

  puisque par définition de A' : $\sum_{i=1}^{n-1} m_i\overrightarrow{A'A_i} = \overrightarrow{0}$.
  Or, l'égalité $\left(\sum_{i=1}^{n-1} m_i\right)\overrightarrow{GA'} + m_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$ ainsi obtenue signifie bien que G est le barycentre des **deux** points massifs $\left(A', \sum\limits_{i=1}^{n-1} m_i\right)$ et (A_n, m_n).

  Ce résultat peut s'interpréter comme une traduction vectorielle du principe de juxtaposition.
- On construit ainsi par récurrence le barycentre d'un nombre quelconque de points massifs, en observant que l'ordre dans lequel on regroupe ces points n'a aucune influence sur le résultat final, grâce au résultat d'unicité obtenu plus haut !

16.3.3 Quelques exercices et problèmes

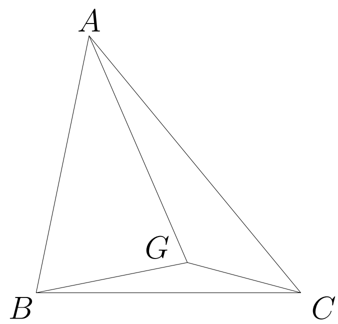
Question 11 *Démontrer que dans l'espace, le barycentre de trois points massifs* (A, h), (B, k) *et* (C, ℓ) *non alignés est toujours (et heureusement !) situé dans le plan* ABC.

Question 12 *Déterminer l'isobarycentre de quatre points non coplanaires.*

Question 13 *Un système d'axes étant fixé, calculer les coordonnées du barycentre* G *d'un système de* n *points massifs* $\{(A_i; m_i)\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ *en fonction des coordonnées des points* A_i.

Problème 15

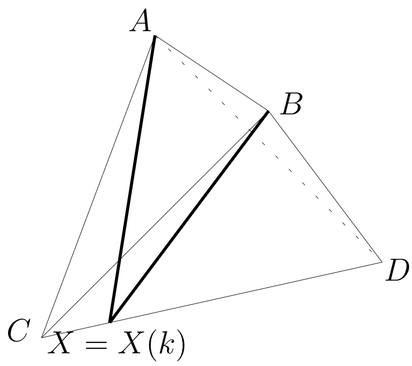
Démontrer que si G *est le barycentre de trois points massifs* (A, h), (B, k) *et* (C, ℓ) *non alignés, alors la mesure des aires des triangles* AGB, BGC, CGA *est proportionnelle aux nombres* ℓ, h *et* k.
N. B. : *il y a un énoncé correspondant — en termes de mesure de volumes — dans le cas de quatre points massifs non coplanaires.*



16.4. Des angles au produit scalaire

16.4.1 Une première question

Question 14 *Si $ABCD$ est un tétraèdre régulier, on demande d'étudier les variations des angles $\widehat{AXB}$ et $\widehat{CXB}$ en fonction de l'abscisse k du point $X = X(k)$ sur la droite passant par les points C et D.*
De plus, caractériser géométriquement la position des droites d_{XA} et d_{XB} qui déterminent la — ou les — valeur(s) extrémale(s) de l'angle $A\widehat{X}B$.

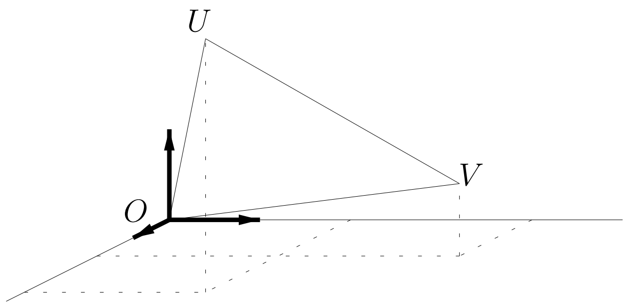


16.4.2 Une synthèse

Cette synthèse concerne le produit scalaire dans l'espace : le cas du plan en est un cas particulier dont l'étude préalable n'est pas indispensable !

16.4.2.1 La définition du produit scalaire

On travaille dans un système de coordonnées orthonormé d'origine O.



Si $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ sont deux points dans l'espace, la traduction de la forme généralisée du théorème de Pythagore (ou formule du cosinus) pour le triangle OUV

$$|UV|^2 = |OU|^2 + |OV|^2 - 2 \cdot |OU| \cdot |OV| \cdot \cos U\widehat{O}V$$

fournit presque immédiatement :

$$(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2 \cdot |OU| \cdot |OV| \cdot \cos U\widehat{O}V$$

Dès lors, en développant le membre de gauche :

$$v_1^2 - 2v_1u_1 + u_1^2 + v_2^2 - 2v_2u_2 + u_2^2 + v_3^2 - 2v_3u_3 + u_3^2 =$$
$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2 \cdot |OU| \cdot |OV| \cdot \cos U\widehat{O}V$$

et en simplifiant :

$$-2v_1u_1 - 2v_2u_2 - 2v_3u_3 = -2 \cdot |OU| \cdot |OV| \cdot \cos U\widehat{O}V$$

On obtient ainsi la définition/formule fondamentale du produit scalaire :

$$\overrightarrow{OU} \bullet \overrightarrow{OV} \text{ ou } U \bullet V \ =: \ |OU| \cdot |OV| \cdot \cos U\widehat{O}V = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

On observe que l'avant-dernier membre de cette relation est **indépendant** du choix d'un système de coordonnées — pourvu qu'il reste orthonormé d'origine O — alors que le dernier membre en dépend, et agréablement. Cette seule égalité

$$|OU| \cdot |OV| \cdot \cos U\widehat{O}V = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

est la source de la grande majorité des propriétés et des applications du produit scalaire.

Un raisonnement analogue à celui effectué ci-dessus permet d'obtenir le résultat correspondant pour des vecteurs d'origine un point $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ quelconque :

$$|AU| \cdot |AV| \cdot \cos U\widehat{A}V = (u_1 - a_1)(v_1 - a_1) + (u_2 - a_2)(v_2 - a_2) + (u_3 - a_3)(v_3 - a_3)$$

ce qui légitime donc qu'on note

$$\overrightarrow{AU} \bullet \overrightarrow{AV} = |AU| \cdot |AV| \cdot \cos U\widehat{A}V = \sum_{i=1}^{3} (u_i - a_i)(v_i - a_i)$$

16.4.2.2 Les propriétés élémentaires du produit scalaire

Puisqu'on dispose dès le début de la relation fondamentale, les énoncés et les démonstrations de ces propriétés élémentaires peuvent être repoussés jusqu'au moment où on estimera leur apparition indispensable. Dans tous les cas, à partir de la relation fondamentale, ces démonstrations sont de simples exercices de calcul !

Pour mémoire, ces propriétés sont

- le produit scalaire est symétrique :

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}$$

- le produit scalaire est bilinéaire :

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w}$$

$$\overrightarrow{u} \bullet (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w}$$

$$(k\overrightarrow{u}) \bullet \overrightarrow{v} = k(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet (k\overrightarrow{v})$$

- le produit scalaire est (défini) positif : $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u} \geqslant 0$ et

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u} = 0 \iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

- le produit scalaire détecte l'orthogonalité : si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, alors

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0 \iff \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$$

On note souvent $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u}$, et on appelle le nombre (positif) $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u}}$ la longueur ou norme du vecteur $\overrightarrow{u}$.

16.4.3 Quelques exercices et problèmes

Exercice 21 *On appelle angle déterminé par deux plans sécants, le plus petit angle formé par deux droites distinctes*

- *sécantes sur la droite commune aux deux plans,*
- *et perpendiculaires à celle-ci dans un des deux plans.*

Quel(s) angle(s) forment entre eux les plans diagonaux d'un cube ?

Problème 16 *Déterminer la perpendiculaire commune — si elle existe — à deux arêtes gauches (c'est-à-dire non coplanaires) d'un octaèdre régulier.*

On trouvera encore d'autres énoncés d'exercices et de problèmes concernant le produit scalaire dans les sections suivantes . . .

16.5. Le produit scalaire . . . dans tous ses états

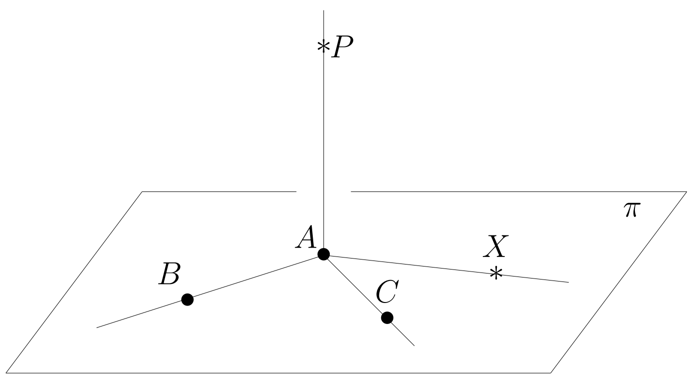
Cette section est consacrée à quelques applications géométriques du produit scalaire. Comme toutes les notions précédemment étudiées s'y rencontrent aussi, c'est l'occasion d'une belle synthèse.

16.5.1 Le critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan

On dit qu'une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est perpendiculaire à toutes les droites passant par son pied dans ce plan. Cette définition ne garantit pas l'existence de telles droites. En vue de réduire cette difficulté, un résultat important est le critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan, qui s'énonce classiquement comme suit :

> *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan est qu'elle soit perpendiculaire à deux droites passant par son pied dans ce plan.*

La condition nécessaire est triviale, et la condition suffisante est une simple **traduction géométrique** de la linéarité du produit scalaire.



On considère pour cela un plan π déterminé par les trois points non-alignés A, B et C, et la droite d_{AP} passant par A et perpendiculaire aux droites d_{AB} et d_{AC}. On a donc

$$\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{AB} = 0 \text{ et } \overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$$

Or, quel que soit le point X dans le plan π, il existe deux nombres réels k et ℓ tels que

$$\overrightarrow{AX} = k\overrightarrow{AB} + \ell\overrightarrow{AC}$$

Dès lors, pour savoir si la droite d_{AP} est perpendiculaire à une droite quelconque d_{AX} passant par les points A et X dans le plan π, il suffit de calculer

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AP} \bullet \left(k\overrightarrow{AB} + \ell\overrightarrow{AC}\right) \\ &= k\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{AB} + \ell\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{AC} \\ &= k \cdot 0 + \ell \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

La cause est entendue !

Par ailleurs, pourvu que $P \notin \pi$, si une droite d_{AY} est perpendiculaire à la droite d_{AP}, alors elle est incluse dans le plan π. En effet, il existe des nombres r, s et t tels que

$$\overrightarrow{AY} = r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{AP}$$

Au départ de l'hypothèse, on calcule

$$\begin{aligned}0 = \overrightarrow{AY} \bullet \overrightarrow{AP} &= \left(r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{AP}\right) \bullet \overrightarrow{AP} \\ &= r\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AP} + s\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AP} + t\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{AP} \\ &= t\left\|\overrightarrow{AP}\right\|^2\end{aligned}$$

Comme $P \notin \pi$: $\left\|\overrightarrow{AP}\right\|^2 \neq 0$, d'où $t = 0$.

16.5.2 Quelques exercices et problèmes

Exercice 22 *Démontrer que, si d'un point on mène deux droites, l'une perpendiculaire à un plan, l'autre perpendiculaire à une droite de ce plan, le plan des deux perpendiculaires est perpendiculaire à la droite du plan.*

Ce résultat est connu sous le nom de « théorème des trois perpendiculaires ».

Exercice 23 *On considère un plan π déterminé par une équation cartésienne*

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

Démontrer que toute droite dont le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *est un vecteur directeur, est perpendiculaire au plan π.*

Si $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ *sont deux vecteurs directeurs du plan π, on a déjà signalé* ([8]) *qu'une équation cartésienne de ce plan s'écrit sous la forme remarquable :*

$$(u_2v_3 - u_3v_2)(x_1 - p_1) + (u_3v_1 - u_1v_3)(x_2 - p_2) + (u_1v_2 - u_2v_1)(x_3 - p_3) = 0$$

où $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in \pi$.

Quelle signification peut-on alors donner au vecteur $\begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$ *?*

Exercice 24 *On appelle vecteur normal à un plan tout vecteur orthogonal à ce plan et de longueur (ou norme) égale à 1.*

Démontrer que si π_1 et π_2 sont deux plans sécants formant entre eux un angle θ $\left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ *, et dont $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont des vecteurs normaux respectifs, alors*

$$|\overrightarrow{n_1} \bullet \overrightarrow{n_2}| = \cos\theta$$

([8]) Cfr. la synthèse de la section 2.

A l'aide des résultats de l'exercice 23 ci-dessus, vérifier alors les résultats de l'exercice 21.

Problème 17 *Donner un exemple de tétraèdre dont les quatre hauteurs ne sont pas concourantes.*

Enoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante pour que les quatre hauteurs d'un tétraèdre (quelconque) soient concourantes.

Problème 18 *On travaille dans un système de coordonnées orthonormé d'origine* O*. Si* $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ *et* $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ *sont deux points dans l'espace, calculer la mesure de l'aire du parallélogramme* $OUTV$ *où* $T = U + V$*.*

En utilisant les résultats de l'exercice 23, calculer alors la mesure du volume du prisme de base $OUTV$ *et d'arête* OP *, où* $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ *est extérieur au plan de la base.*

Démontrer que si G *est le barycentre de quatre points massifs* (A, h)*,* (B, k)*,* (C, ℓ) *et* (D, m) *non coplanaires, alors la mesure des volumes des tétraèdres* $ABDG$*,* $ACDG$*,* $ABCG$ *et* $BCDG$ *est proportionnelle aux nombres* ℓ*,* k*,* m *et* h*. Cfr. aussi le problème 15.*

16.6. Un peu de programmation linéaire

La programmation linéaire étudie certains problèmes d'optimisation par des méthodes mélangeant algèbre et géométrie. On se limite ici à fournir deux énoncés simples ([9]), c'est-à-dire qui se ramènent à des problèmes de géométrie dans l'espace usuel. Mais il est bon de savoir que ces méthodes sont vraiment utiles et performantes : elles s'adaptent particulièrement bien aux situations réalistes (en économie par exemple), qui nécessitent (beaucoup) plus de trois variables. C'est là une des raisons d'être — parmi d'autres — des espaces vectoriels de dimension supérieure à 3.

Problème 19 *Une machine-outil peut fabriquer deux types de pièces, A et B. Elle met 2 minutes pour fabriquer une pièce de type A et 1 minute pour fabriquer une pièce de type B.*

L'usure, et donc le remplacement, des parties mobiles de la machine, interdit de fabriquer plus de 24 pièces de types A par heure et plus de 36 pièces de type B par heure. Par ailleurs, le refroidissement de la machine lui interdit de fabriquer plus de 45 pièces (en tout) par heure. Enfin, le profit réalisé sur une pièce de type A est de 100 F, sur une pièce de type B de 200 F.

On demande de déterminer la production horaire permettant de réaliser le profit maximal.

Problème 20 *Une société fabrique de la poudre à lessiver. Elle désire commercialiser son produit dans une région pour laquelle une étude de marché a montré que l'impact d'une annonce publicitaire était décrit par le tableau suivant :*

médium	*audience (en millions)*	*audience féminine (en millions)*	*coût par annonce (en unités monétaires)*
télévision	*10*	*7*	*500*
radio	*1*	*0,6*	*60*
presse écrite	*2*	*0,8*	*65*

Le directeur commercial cherche à déterminer le budget de publicité qui lui permette d'atteindre le public qu'il s'est fixé : il voudrait toucher au moins 20 millions de personnes, dont au moins 14 millions de femmes. Comment peut-il rendre minimum le coût de sa campagne publicitaire compte tenu des contraintes qu'il s'impose ?

([9]) Ils sont tirés d'un ouvrage de la série *Fractales* et d'un livre de J. Bair, R. Hinnion et D. Justens ; cfr. la bibliographie pour les références détaillées.

16.7. Les statistiques et le calcul des distances minimales

16.7.1 Un problème classique

Le problème suivant consiste encore à minimiser géométriquement une grandeur.

Problème 21 *Dans l'espace rapporté à un système d'axes orthonormé d'origine O, on considère le plan π contenant l'origine et passant par les points $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.*

Quelle est la plus courte distance qui sépare le point $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ du plan π ?

Généraliser au cas où $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ est quelconque.

16.7.2 Un peu plus qu'une synthèse ...

Au départ du problème précédent, le produit scalaire permet d'étudier géométriquement la méthode des moindres carrés utilisée pour l'ajustement linéaire en statistique !

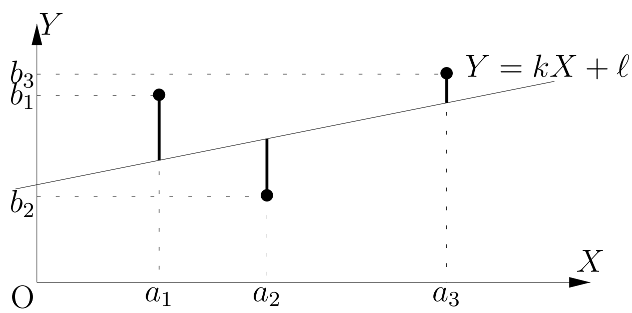
16.7.2.1 L'ajustement sur trois points

On travaille dans un système de coordonnées orthonormé du plan. On considère trois points — de préférence non-alignés — de coordonnées $\{(a_i; b_i)\}_{1\leqslant i\leqslant 3}$ dans ce plan.

Il s'agit de déterminer une droite d'équation $Y = kX + \ell$ de telle sorte que la distance quadratique

$$\triangle(k,\ell) := \sum_{i=1}^{3} (ka_i + \ell - b_i)^2$$

soit minimale.



16.7.2.2 La traduction géométrique

L'idée est — au départ du théorème de Pythagore — d'identifier l'expression $\triangle(k,\ell) = \sum_{i=1}^{3} (ka_i + \ell - b_i)^2$ au carré d'une véritable distance entre deux objets géométriques (à définir !) dans l'espace usuel à 3 dimensions.

Or, et en effet, si on note

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} ka_1 + \ell \\ ka_2 + \ell \\ ka_3 + \ell \end{pmatrix}$$

en considèrant k et ℓ comme des paramètres, on a bien

$$\triangle\,(k,\ell) = (\text{distance}(B,P))^2$$

Mais les coordonnées du point P s'expriment **linéairement** en fonction de k et ℓ : le point P décrit donc un plan, qu'on note π. Ce plan contient l'origine des coordonnées et les points $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de telle sorte que son équation est bien

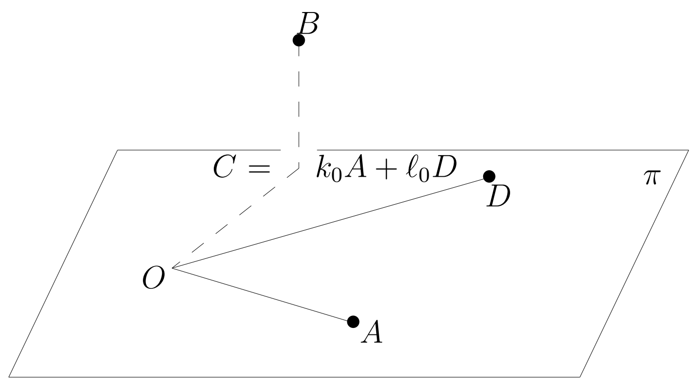
$$P = O + k \cdot A + \ell \cdot D = \begin{pmatrix} ka_1 + \ell \\ ka_2 + \ell \\ ka_3 + \ell \end{pmatrix}$$

En d'autres termes encore : le point P admet les coordonnées (k, ℓ) dans le repère (O, A, D) du plan π.

Si on note alors (k_0, ℓ_0) les valeurs qui rendent la distance $\triangle(k, \ell)$ minimale, on a

$$\triangle(k_0, \ell_0) \text{ est minimal} \iff \triangle(k_0, \ell_0) = (\text{distance}(B, \pi))^2$$

Le calcul de k_0 et ℓ_0 se ramène ainsi à une question de plus courte distance du point B au plan π : k_0 et ℓ_0 sont les coordonnées dans le repère (O, A, D) du point de percée C de la perpendiculaire au plan π issue du point B.



Ce raisonnement permet en particulier de se convaincre — sans aucun calcul — de l'existence et de l'unicité de la solution du problème !

16.7.2.3 Le traitement géométrique et algébrique

Même si la justification de la méthode des moindres carrés n'est pas au programme, le problème géométrique qu'on vient d'y associer est, quant à lui, dans le domaine des exercices que le programme suggère d'étudier : cfr. toujours le problème 21.

Voici le résumé de sa solution, parce que cette solution met en valeur quelques très belles interprétations géométriques des notions de base de la statistique.

Par construction, le segment BC est perpendiculaire au plan π. Cela équivaut aux deux relations

$$\begin{cases} (C - B) \bullet A = 0 \\ (C - B) \bullet D = 0 \end{cases}$$

Comme $k_0A + \ell_0D = C$, on en déduit le système de deux équations du premier degré dont les deux inconnues sont k_0 et ℓ_0 :

$$\begin{cases} (k_0 A + \ell_0 D) \bullet A - B \bullet A = 0 \\ (k_0 A + \ell_0 D) \bullet D - B \bullet D = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} k_0 \cdot \|A\|^2 + \ell_0 \cdot (A \bullet D) = A \bullet B \\ k_0 \cdot (A \bullet D) + \ell_0 \cdot \|D\|^2 = B \bullet D \end{cases}$$

et dont la solution règle définitivement le problème !

On vérifie que ce système admet une et une seule solution dès que les coordonnées des points A et D ne sont pas proportionnelles, ce qui est toujours le cas dans la situation qui nous occupe.

16.7.2.4 Une interprétation géométrique de notions statistiques

On note

$$\overline{a} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \qquad \text{et} \qquad \overline{b} = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}$$

$$\sigma_a^2 = \frac{(a_1 - \overline{a})^2 + (a_2 - \overline{a})^2 + (a_3 - \overline{a})^2}{3}$$

$$\sigma_b^2 = \frac{(b_1 - \overline{b})^2 + (b_2 - \overline{b})^2 + (b_3 - \overline{b})^2}{3}$$

$$\sigma_{ab} = \frac{(a_1 - \overline{a})(b_1 - \overline{b}) + (a_2 - \overline{a})(b_2 - \overline{b}) + (a_3 - \overline{a})(b_3 - \overline{b})}{3}$$

les **moyennes**, les **variances**, et la **covariance**, des abscisses et des ordonnées des points donnés.

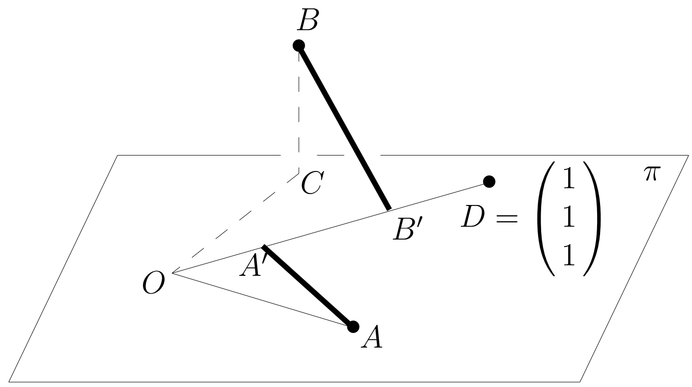
On a d'abord, et immédiatement

$$A \bullet D = a_1 + a_2 + a_3 = 3\overline{a}$$

$$B \bullet D = b_1 + b_2 + b_3 = 3\overline{b}$$

Si A' est la projection orthogonale du point A, et B' la projection orthogonale du point B, sur la droite OD, on obtient facilement

$$A' = \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{a} \\ \overline{a} \end{pmatrix} \qquad B' = \begin{pmatrix} \overline{b} \\ \overline{b} \\ \overline{b} \end{pmatrix}$$



On en déduit le carré de la longueur du segment $A'A$:

$$\|A - A'\|^2 = (a_1 - \overline{a})^2 + (a_2 - \overline{a})^2 + (a_3 - \overline{a})^2 = 3\sigma_a^2$$

et le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OAA' fournit alors la relation :

$$\|A\|^2 = \|A - A'\|^2 + \|A'\|^2 = 3\sigma_a^2 + 3\overline{a}^2 = 3(\sigma_a^2 + \overline{a}^2)$$

Enfin, comme on a quasiment par définition

$$(A - A') \bullet (B - B') = 3\sigma_{ab}$$

on en déduit, grâce aux propriétés usuelles du produit scalaire :

$$A \bullet B - A' \bullet B - A \bullet B' + A' \bullet B' = 3\sigma_{ab}$$
$$A \bullet B - \overline{a}D \bullet B - A \bullet \overline{b}D + 3\overline{a}\overline{b} = 3\sigma_{ab}$$
$$A \bullet B - \overline{a} \cdot 3\overline{b} - \overline{b} \cdot 3\overline{a} + 3\overline{a}\overline{b} = 3\sigma_{ab}$$

d'où, finalement

$$A \bullet B = 3(\sigma_{ab} + \overline{a}\overline{b})$$

16.7.2.5 La droite des moindres carrés flirte avec un barycentre

Avec ces traductions, la solution du système obtenu plus haut s'écrit, tous calculs faits :

$$k_0 = \frac{\sigma_{ab}}{\sigma_a^2}$$

$$\ell_0 = \overline{b} - \overline{a} \cdot \frac{\sigma_{ab}}{\sigma_a^2}$$

On vérifie en particulier que la droite des moindres carrés, dont l'équation est donc

$$Y = \frac{\sigma_{ab}}{\sigma_a^2} \cdot X + \overline{b} - \overline{a} \cdot \frac{\sigma_{ab}}{\sigma_a^2} = \frac{\sigma_{ab}}{\sigma_a^2} \left(X - \overline{a}\right) + \overline{b}$$

passe par le point du plan de coordonnées $\big(\overline{a}; \overline{b}\big)$. Ce point est le **barycentre** du triangle dont les sommets sont les points $\{(a_i; b_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant 3}$.

Remarque.

Dans l'interprétation géométrique signalée ci-dessus, le **coefficient de corrélation** des abscisses et des ordonnées des points considérés

$$c_{ab} = \frac{\sigma_{ab}}{\sigma_a \cdot \sigma_b}$$

est égal au cosinus de l'angle déterminé par les segments $B'B$ et $A'A$.

16.7.3 Le cas d'un nuage de points

La généralisation du raisonnement géométrique précédent à un nuage $\{(a_i ; b_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de points, avec $n > 3$ ne présente aucune difficulté dès qu'on est convaincu de l'intérêt d'une géométrie à plus de 3 dimensions ...

16.8. La représentation matricielle

Cette section est consacrée à l'étude d'un problème d'écologie qui permet d'introduire la représentation matricielle dans un contexte concret, significatif et inattendu.

On se limite ici à mettre ce problème en équations, à le résoudre — mais sans vraiment le « tuer » — et à relever quelques nouvelles questions, paradoxales, qui découlent de cette résolution.

Les éclaircissements définitifs à ce sujet seront l'objet de la dernière section de ces notes, après que la représentation matricielle aura été suffisamment mise en situation.

16.8.1 L'évolution d'une population d'oiseaux

Problème 22 *Dans une population donnée d'oiseaux, on étudie comment le nombre de femelles évolue au fil des ans. Sur chaque cycle d'observation d'une année, on distingue les femelles adultes ou matures (c'est-à-dire en état de se reproduire), et les femelles immatures.*

Certaines des femelles immatures meurent durant l'année en cours. Seule une proportion p_0 d'entre elles survit et devient adulte au printemps de l'année suivante. Plus tard en saison, chaque femelle adulte donne naissance en moyenne à 2 oiseaux femelles (nécessairement immatures).

Mais tout au long de l'année, des femelles adultes meurent aussi, et la proportion d'adultes qui survivent, d'une année à l'autre, est égale à p_1.

On demande de décrire l'évolution du nombre de femelles (adultes) de cette population, ainsi que l'évolution du rapport

$$\frac{\textit{nombre de femelles adultes}}{\textit{nombre de femelles immatures}}$$

en fonction du nombre d'années écoulées depuis le début de l'observation, si on comptait au départ

- *1000 adultes femelles et aucune immature,*
- *1000 adultes femelles et 200 immatures,*
- *1000 adultes femelles et 400 immatures,*
- *etc ...,*

et sachant qu'on estime que $p_0 = 0,3$ et $p_1 = 0,5$.

On demande aussi de représenter graphiquement tous les résultats, année après année, en situant sur l'axe des abscisses le nombre de femelles immatures, et sur l'axe des ordonnées le nombre de femelles adultes.

16.8.1.1 Une évolution mise en équations

On note :

- i_n : le nombre de femelles immatures durant l'année n,
- a_n : le nombre de femelles adultes durant l'année n.

Comme chaque femelle adulte donne naissance à 2 oiseaux femelles (immatures), et que c'est là la seule manière dont peuvent apparaître de jeunes oiseaux, on a la relation :

$$i_{n+1} = 2 \cdot a_n$$

Par contre, le nombre d'oiseaux adultes observés durant l'année $n+1$ s'obtient en additionnant :

- le nombre d'oiseaux immatures l'année précédente et arrivés à l'âge adulte pendant l'année $n+1$: à savoir $p_0 \cdot i_n$,
- le nombre d'oiseaux adultes l'année précédente et qui ont survécu durant l'année $n+1$: à savoir $p_1 \cdot a_n$.

On en déduit la relation :

$$a_{n+1} = p_0 \cdot i_n + p_1 \cdot a_n$$

Comme on sait que $p_0 = 0,3$ et $p_1 = 0,5$, l'évolution de la population d'oiseaux est donc décrite par les deux relations

$$\begin{cases} i_{n+1} = 2 \cdot a_n \\ a_{n+1} = 0,3 \cdot i_n + 0,5 \cdot a_n \end{cases}$$

On peut entamer les calculs de proche en proche. On part de :

$$\begin{aligned} i_1 &= 2 \cdot a_0 \\ a_1 &= 0,3 \cdot i_0 + 0,5 \cdot a_0 \end{aligned}$$

ensuite :

$$\begin{aligned} i_2 &= 2 \cdot a_1 \\ &= 2\,(0,3 \cdot i_0 + 0,5 \cdot a_0) \\ &= 2 \cdot 0,3 \cdot i_0 + 2 \cdot 0,5 \cdot a_0 \\ &= 0,6 \cdot i_0 + a_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= 0,3 \cdot i_1 + 0,5 \cdot a_1 \\ &= 0,3 \cdot 2 \cdot a_0 + 0,5\,(0,3 \cdot i_0 + 0,5 \cdot a_0) \\ &= 0,5 \cdot 0,3 \cdot i_0 + (0,3 \cdot 2 + 0,5 \cdot 0,5) \cdot a_0 \\ &= 0,15 \cdot i_0 + 0,85 \cdot a_0 \end{aligned}$$

Etc.

Mais ce genre de calcul devient vite fastidieux, sans qu'on en découvre pour autant le ressort ...

Or, il y a moyen — en faisant un petit détour par la géométrie — de se tirer d'affaire beaucoup beaucoup beaucoup beaucoup ... beaucoup mieux !

16.8.1.2 Le modèle d'évolution de la population d'oiseaux est linéaire

Il y a une **interprétation géométrique remarquable** de deux relations précédentes.

Dans un repère orthonormé, on porte en abscisse le nombre de femelles immatures et en ordonnée le nombre de femelles adultes.

Dans ce plan des oiseaux, les relations

$$\begin{cases} i_{n+1} = 2 \cdot a_n \\ a_{n+1} = 0,3 \cdot i_n + 0,5 \cdot a_n \end{cases}$$

font correspondre au point de coordonnées $\begin{pmatrix} i_n \\ a_n \end{pmatrix}$ le point de coordonnées $\begin{pmatrix} i_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$.

On note R cette correspondance ou **transformation** du plan :

$$R\begin{pmatrix} i_n \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

Par rapport à ce qu'on connait du calcul sur les (coordonnées de) points du plan, cette transformation jouit d'une propriété remarquable : elle est **linéaire**.

Plus précisément :

- si à une population donnée $\begin{pmatrix} i_n \\ a_n \end{pmatrix}$ s'ajoute [10] une autre population $\begin{pmatrix} i'_n \\ a'_n \end{pmatrix}$, on vérifie immédiatement que la transformation R **respecte** cette addition au sens où :

$$R\left(\begin{pmatrix} i_n \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i'_n \\ a'_n \end{pmatrix}\right) = R\begin{pmatrix} i_n \\ a_n \end{pmatrix} + R\begin{pmatrix} i'_n \\ a'_n \end{pmatrix}$$

- de même, si une population d'oiseaux est doublée, triplée ou plus généralement multipliée par un nombre réel k, on vérifie immédiatement que la transformation R **respecte** cette multiplication au sens où :

$$R\left(k \cdot \begin{pmatrix} i_n \\ a_n \end{pmatrix}\right) = k \cdot R\begin{pmatrix} i_n \\ a_n \end{pmatrix}$$

[10] Par suite d'une migration, de l'introduction d'une population-témoin, etc.

Tout ceci explique que les relations

$$\begin{cases} i_{n+1} = 2 \cdot a_n \\ a_{n+1} = 0,3 \cdot i_n + 0,5 \cdot a_n \end{cases}$$

sont aussi connues sous l'appellation de « relations **linéaires** de récurrence » ou « relations de récurrence **linéaire** ».

Il faut remarquer que **toute** l'évolution de la population d'oiseaux suit ainsi un modèle linéaire, puisque la **composée** de transformations linéaires est évidemment une transformation linéaire.

16.8.1.3 La représentation matricielle

L'interprétation géométrique du modèle permet d'**organiser** les calculs de population d'oiseaux pour des valeurs de plus en plus grandes de l'indice n (qui représente les années qui passent ...).

Les raisons d'être d'une telle organisation se découvrent en 4 étapes.

- On écrit les relations de récurrence linéaire sous la forme

$$\begin{cases} i_{n+1} = 0 \cdot i_n + 2 \cdot a_n \\ a_{n+1} = 0,3 \cdot i_n + 0,5 \cdot a_n \end{cases}$$

  et on se concentre en particulier sur la « **matrice** des coefficients » de ces relations :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$$

- On observe alors que l'effet de ces relations sur les deux « populations élémentaires » $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ se lit immédiatement en termes de **colonnes** de la matrice des coefficients :

$$R\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

- On observe ensuite que l'effet de ces relations sur une population quelconque $\begin{pmatrix} i_n \\ a_n \end{pmatrix}$ s'obtient en termes de « produits scalaires formels » des « vecteurs-lignes » de la matrice des coefficients avec le « vecteur-colonne » $\begin{pmatrix} i_n \\ a_n \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{cc|c}
0 \cdot i_n & & i_n \\
& + & \\
& 2 \cdot a_n & a_n \\
\hline
0 & 2 & \searrow
\end{array}
\qquad \boxed{i_{n+1} = 0 \cdot i_n + 2 \cdot a_n}$$

$$\begin{array}{cc|c}
0,3 \cdot i_n & & i_n \\
& + & \\
& 0,5 \cdot a_n & a_n \\
\hline
0,3 & 0,5 & \searrow
\end{array}
\qquad \boxed{a_{n+1} = 0,3 \cdot i_n + 0,5 \cdot a_n}$$

- On observe enfin — et c'est le plus important ! — que l'effet d'une **composition** de ces relations sur une population quelconque $\begin{pmatrix} i_n \\ a_n \end{pmatrix}$ s'obtient encore en termes de « produits scalaires formels » des « vecteurs-lignes » par les « vecteurs-colonnes » de la matrice des coefficients.

  C'est une conséquence de ce qui précède ! En effet, grâce à la linéarité de la transformation R, on peut calculer l'effet de $R \circ R$ ou R^2 sur $\begin{pmatrix} i_n \\ a_n \end{pmatrix}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
R \circ R \begin{pmatrix} i_n \\ a_n \end{pmatrix} &= R \circ R \left(i_n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= i_n \cdot R \left(R \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + a_n \cdot R \left(R \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$$= i_n \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0,3 \end{pmatrix} \right\} + a_n \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 0,5 \end{pmatrix} \right\}$$

  Comme on sait — en vertu de l'observation précédente — que i_n doit être le coefficient de la première colonne et a_n le coefficient de la deuxième colonne de la matrice associée à $R \circ R$, on en déduit que cette matrice s'obtient en effectuant les « produits scalaires formels » des « vecteurs-lignes » par les « vecteurs-colonnes » de la matrice des coefficients :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0,3 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0,5 \\ 0,3 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0,3 & 0,3 \cdot 2 + 0,5 \cdot 0,5 \end{pmatrix}$$

Ce genre de raisonnement peut suffire pour introduire la représentation et le produit matriciel, puisqu'il permet d'observer qu'il s'agit essentiellement — pour des raisons géométriques — d'effectuer certains calculs du type « produits scalaires formels » sur les lignes ou les colonnes de la « matrice »

$$R := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$$

associée au problème.

16.8.1.4 Deux remarques

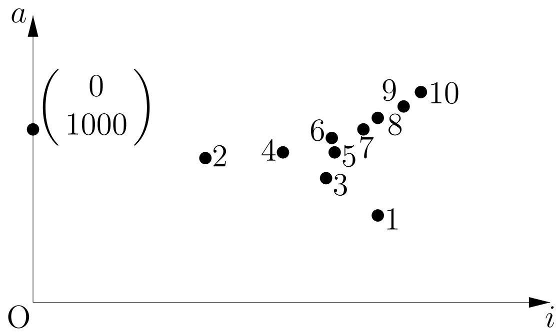
Dans toute la suite, le repère étant fixé, on **identifiera** la matrice à la transformation qu'elle décrit (et réciproquement). On dira donc indistinctement : la transformation R ou la matrice R.

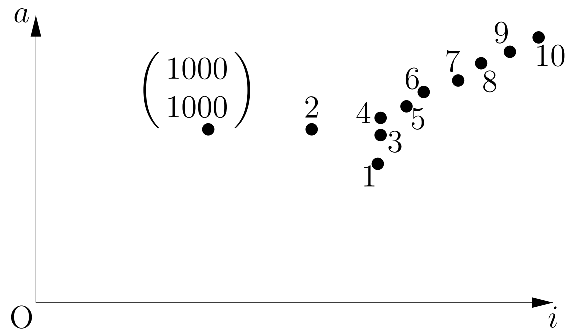
A ce stade du travail, la calculatrice (graphique) permet déjà de ne pas perdre trop de temps dans des calculs répétitifs, et d'aller au cœur de ce qui importe : la **signification** des calculs.

16.8.1.5 Des calculs et des représentations graphiques

Dès que ce nouveau mode de calcul et l'usage correspondant de la calculatrice (graphique) sont adoptés, on obtient les résultats repris dans le tableau et les graphiques ci-dessous.

R^n	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 200 \\ 1000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 400 \\ 1000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 800 \\ 1000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2000 \\ 500 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2000 \\ 560 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2000 \\ 620 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2000 \\ 740 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2000 \\ 800 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0,6 & 1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1000 \\ 850 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1120 \\ 880 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1240 \\ 910 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1480 \\ 970 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1600 \\ 1000 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0,3 & 1,7 \\ 0,26 & 0,73 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1700 \\ 725 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1760 \\ 776 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1820 \\ 827 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1940 \\ 929 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2000 \\ 980 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0,51 & 1,45 \\ 0,22 & 0,87 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1450 \\ 873 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1552 \\ 916 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1654 \\ 960 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1858 \\ 1047 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1960 \\ 1090 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0,44 & 1,75 \\ 0,26 & 0,87 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1745 \\ 871 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1832 \\ 924 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1920 \\ 976 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2094 \\ 1081 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2180 \\ 1133 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0,52 & 1,74 \\ 0,26 & 0,96 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1743 \\ 959 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1848 \\ 1011 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1952 \\ 1064 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2162 \\ 1168 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2266 \\ 1221 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0,52 & 1,92 \\ 0,29 & 1,00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1918 \\ 1002 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2022 \\ 1060 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2128 \\ 1117 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2336 \\ 1233 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2442 \\ 1290 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0,58 & 2,00 \\ 0,30 & 1,08 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2005 \\ 1076 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2120 \\ 1137 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2234 \\ 1197 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2466 \\ 1317 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2580 \\ 1377 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0,60 & 2,15 \\ 0,32 & 1,14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2153 \\ 1140 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2274 \\ 1204 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2394 \\ 1269 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2634 \\ 1398 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2754 \\ 1463 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0,65 & 2,28 \\ 0,34 & 1,22 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2279 \\ 1216 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2408 \\ 1284 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2538 \\ 1353 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2796 \\ 1489 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2926 \\ 1558 \end{pmatrix}$
a_{10}/i_{10}	0,53357	0,53322	0,53310	0,53255	0,53247





16.8.1.6 Une solution . . . paradoxale

A l'issue de tout ce travail, on observe que, malgré la grande **variabilité** des conditions initiales

$$\begin{pmatrix} i_0 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 200 \\ 1000 \end{pmatrix}, \ldots$$

le rapport $\frac{a_{10}}{i_{10}}$ est **remarquablement stable** et semble tendre vers $0,53\ldots$.

16.8.1.7 Quelques exercices supplémentaires

Exercice 25 *La stabilité observée ne résulterait-elle pas de ce que, pour toutes les valeurs initiales choisies, on a $a_0 = 1000$?*

Avant de tirer trop vite des conclusions, il convient donc de reproduire les calculs précédents pour des valeurs de $a_0 \neq 1000$.

Qu'en conclure ?

Exercice 26 *Calculer R^n pour $n > 10$ et en déduire une (des) valeur(s) possible(s) de $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{i_n}$.*

Exercice 27 *Reprendre les calculs précédents avec $p_0 = 0,2$ et $p_1 = 0,6$. Qu'observe-t-on cette fois ?*

16.8.1.8 Deux remarques et un prolongement

- Le problème illustre que la complexité apparente, au départ d'une situation, n'est souvent que le résultat de la combinaison linéaire d'effets divers simples.

- Le problème est un peu trop simple, et par là peu réaliste : les calculs montrent en effet que la population globale augmente sans arrêt !

  En réalité, les populations d'oiseaux ont tendance à s'auto-réguler : les pourcentages de naissances et de morts varient avec la taille de la population. Par ailleurs, les conditions climatiques d'une année peuvent avoir des effets significatifs sur ces pourcentages, etc.

- La solution du problème n'est pas non plus satisfaisante pour des raisons cette fois-ci strictement mathématiques : la **stabilité** du résultat final — **indépendamment des conditions initiales choisies** — est surprenante, sinon paradoxale !

  Comment expliquer cette imperturbable stabilité ?

  A ce stade de l'étude du problème, les **raisons n'**en sont **pas** apparentes ...

16.8.2 Une synthèse

Il s'agit tout au plus de fixer le vocabulaire et la signification d'une opération.

16.8.2.1 La notion de matrice

Une matrice 2×2 est un tableau

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2}$$

de 4 nombres. On note a_{ij} le terme situé à la i^{e} ligne et à la j^{e} colonne.

On considère pareillement des matrices 2×1, c'est-à-dire comportant 2 lignes et 1 colonne (on parle alors souvent de matrice-, ou vecteur-colonne), et des matrices 1×2, c'est-à-dire comportant 1 ligne et 2 colonnes (on parle alors souvent de matrice-, ou vecteur-ligne).

16.8.2.2 Les matrices et les transformations du plan

A toute matrice 2×2 est associée une transformation linéaire du plan rapporté à un repère fixé :

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \longmapsto \quad A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} \cdot v_1 + a_{12} \cdot v_2 \\ a_{21} \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 \end{pmatrix}$$

La première colonne de la matrice A est l'image du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ par la transformation linéaire correspondante. La deuxième colonne de cette matrice est l'image du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par la transformation linéaire correspondante.

Toute transformation linéaire du plan est entièrement déterminée par son effet sur deux vecteurs non colinéaires (ou linéairement indépendants) de ce plan.

A toute transformation linéaire du plan rapporté à un repère fixé est associée une matrice 2×2 dont la première colonne est l'image du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ par la transformation linéaire en question, et la deuxième colonne est l'image du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par cette transformation linéaire.

16.8.2.3 La composition des transformations linéaires et le produit matriciel

Par rapport à un repère fixé du plan, la composée de deux transformations linéaires associées à des matrices 2×2 A et B est une transformation linéaire dont la matrice — notée $A \circ B$ — est appelée le produit matriciel des matrices A et B.

Si $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ sont deux matrices 2×2, alors le produit matriciel $A \circ B$ se calcule en faisant les produits scalaires formels des vecteurs-lignes qui constituent A par les vecteurs-colonnes qui constituent B :

$$A \circ B := \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

On a des définitions analogues pour les produits de matrices d'autres types, pourvu que ces produits soient possibles en termes des produits scalaires formels sous-jacents.

16.9. Le début d'un herbier . . .

16.9.1 Le miroir tournant

Dans le plan, les symétries centrales et axiales (en particulier les réflexions), les rotations, les isométries, les similitudes, . . . sont rencontrées dès le premier degré de l'enseignement secondaire, dans un quadrillage par exemple.

Quelques transformations de l'espace ont déjà été abordées, mais pas nécessairement dans le cours de mathématiques : la réflexion dans un miroir est étudiée au cours de physique.

L'étude de phénomènes tels que les palais de glaces, les kaléidoscopes, les billards, . . . sont des sources de problèmes à partir desquels on peut dégager les principales propriétés des réflexions et des **composées** de réflexions dans l'espace.

Dans ce contexte, la question suivante est toute simple, et déjà bien intéressante.

Question 15 *Donner une définition*

- *de réflexion dans un plan de l'espace,*
- *de rotation dans l'espace.*

Lorsqu'un miroir tourne autour d'un axe situé dans son plan, comment se déplace en conséquence l'image d'un objet ?

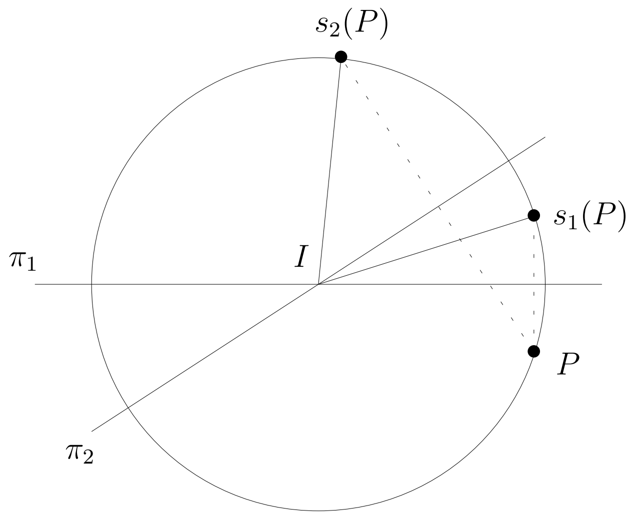
16.9.1.1 Une solution classique (résumée)

On note :

- π_1 : le plan du miroir avant rotation,
- π_2 : le plan du miroir après rotation,
- i : l'axe de rotation,
- $s_1(P)$: l'image de l'objet P dans le miroir π_1 ,
- $s_2(P)$: l'image de l'objet P dans le miroir π_2 .

Par définition de réflexion :

- les trois points P, $s_1(P)$ et $s_2(P)$ sont situés dans un même plan perpendiculaire à l'axe de rotation,
- si on note I le point d'intersection de ce plan avec l'axe de rotation, les trois points précités appartiennent à une même circonférence située dans ce plan et de centre le point I (une réflexion est une isométrie).



Quelques calculs d'angles (inscrits, au centre, ...) fournissent alors :

$$\begin{aligned} 2 \cdot \text{angle}(s_1(P), P, s_2(P)) &= \text{angle}\,(s_1(P), I, s_2(P)) \\ \text{angle}\,(s_1(P), I, s_2(P)) &= \text{angle}(\pi_1, \pi_2) \end{aligned}$$

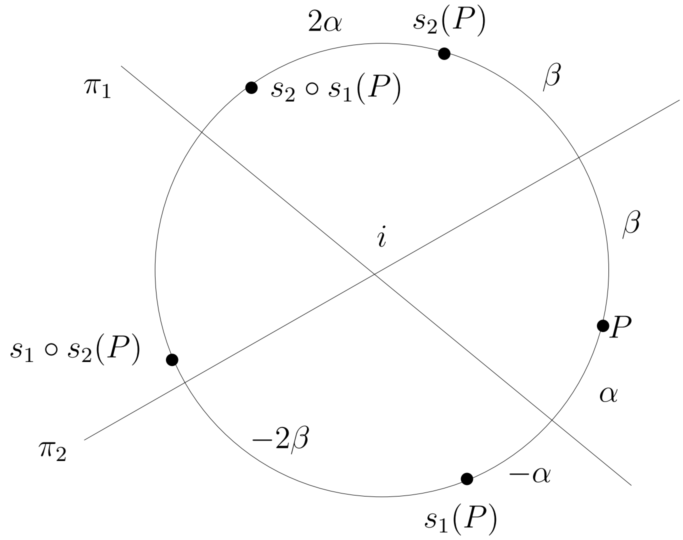
Ainsi, lorsqu'un miroir tourne, l'image d'un objet tourne deux fois plus vite !

16.9.1.2 Une solution plus . . .« réfléchie »

On peut résoudre la question précédente en raisonnant à partir de **la composée de deux réflexions dans des plans sécants**.

A cet effet, on considère d'abord :

- deux plans π_1 et π_2 qui se coupent suivant une droite i,
- les réflexions s_1 et s_2 dans les plans π_1 et π_2,
- un point P situé sur un plan comprenant i et formant des angles α et β avec les plans π_1 et π_2.



Alors, l'angle déterminé par P et l'image de P par la composée $s_2 \circ s_1$:

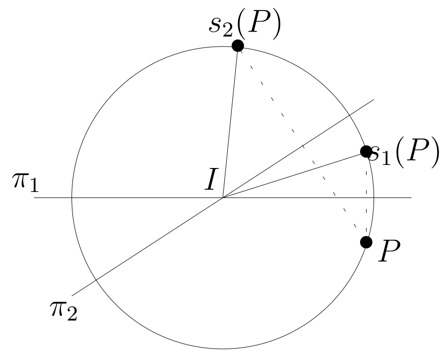
$$\text{angle}\,(P, i, s_2 \circ s_1(P)) = 2\alpha + 2\beta = 2\theta$$
$$\text{angle}\,(P, i, s_1 \circ s_2(P)) = -2\alpha - 2\beta = -2\theta$$

est **indépendant de la position initiale** du point P, c'est-à-dire des angles α et β.

La composée de deux réflexions dans des plans sécants, formant entre eux un angle θ, est donc une **rotation** d'angle 2θ ou -2θ suivant l'**ordre** dans lequel on considère les réflexions.

Dans le cas du problème du miroir tournant, ce résultat devient :

$$\begin{aligned} & \text{angle}\,(s_1(P), i, s_2(P)) \\ = \; & -\text{angle}\,\left(s_1^2(P), i, s_1 \circ s_2(P)\right) \\ = \; & -\text{angle}\,(P, i, s_1 \circ s_2(P)) \\ = \; & 2 \cdot \text{angle}(\pi_1, \pi_2) \end{aligned}$$



16.9.1.3 Une réciproque

Exercice 28 *Démontrer qu'une rotation d'amplitude α et d'axe i est la composée de deux réflexions dans des plans π_1 et π_2 . . . qu'il s'agit de caractériser. En déduire qu'une rotation est une isométrie de l'espace.*

16.9.2 Quelques exercices . . . tout plats

Dans tous les énoncés qui suivent, le plan est rapporté à un repère orthonormé dont l'origine est notée O. L'objectif de ces exercices est de constituer un « herbier » de transformations linéaires parmi les plus simples, accompagnées de leur représentation matricielle.

Exercice 29 *La symétrie centrale de centre l'origine O est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?*

Une symétrie centrale de centre un point P quelconque est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?

Exercice 30 *Si k est un nombre réel, l'homothétie de rapport k et de centre O est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?*

Plus généralement, l'homothétie de rapport k et de centre un point P quelconque du plan est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?

Exercice 31 *La réflexion à travers la première bissectrice est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?*

Plus généralement, une réflexion à travers une droite d'équation $y = ax + b$ est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?

Exercice 32 *La projection orthogonale sur la première bissectrice ($y = x$) est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?*

Plus généralement, une projection orthogonale sur une droite d'équation $y = ax + b$ est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?

Exercice 33 *La projection (oblique) sur la première bissectrice parallèlement à la droite $y = kx$ — où k est un nombre réel différent de 1 — est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?*

Plus généralement, une projection sur une droite d'équation $y = ax+b$ parallèlement à la droite $y = kx$ — où k est un nombre réel différent de a — est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?

Exercice 34 *Une translation de vecteur $v := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?*

Exercice 35 *Une rotation de centre O et d'amplitude $\frac{\pi}{6}$ est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?*

Plus généralement, une rotation de centre un point P quelconque du plan et d'amplitude α est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?

Exercice 36 *Pour chacune des transformations T considérées dans les exercices précédents, comment caractériser leurs itérés $T^2 := T \circ T$, $T^3 := T \circ T \circ T$, . . . ?*

Quelle est la traduction matricielle de ces résultats ?

Exercice 37 *Déterminer toutes les transformations linéaires qui laissent (globalement) invariant un triangle équilatéral dont O est le barycentre.*

Montrer que deux de ces transformations permettent de les engendrer toutes.

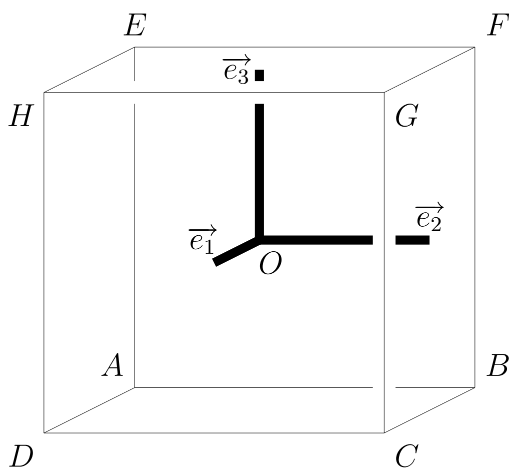
16.9.3 La conquête de l'espace

Il s'agit maintenant d'étendre la représentation matricielle à l'espace.

Cette généralisation ne présente aucune difficulté particulière, et peut donc être laissée comme exercice (intelligent) à l'élève. La question suivante permet d'entamer cette transition.

Question 16 *Déterminer les plans de symétrie d'un cube, les droites d'intersection de ces plans (pris deux à deux) ainsi que le(s) point(s) commun(s) à tous ces plans.*

Dans la suite de cette question, on considère un cube dont la longueur des arètes égale 2. On fixe un repère orthonormé (direct) d'origine le centre O du cube, et dont les vecteurs de base sont perpendiculaires aux faces du cube.

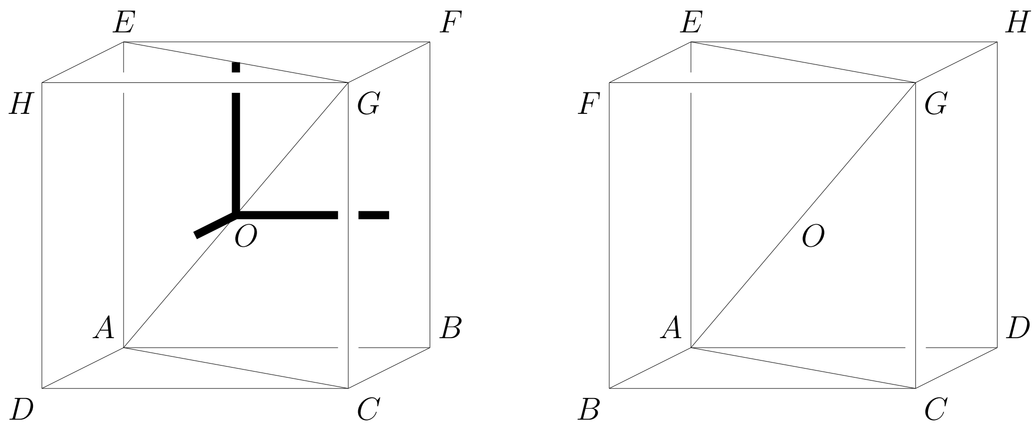


Ecrire les matrices des réflexions dans quelques uns de ces plans de symétrie.

Ecrire les matrices des composées de ces réflexions, en particulier lorsque ces composées sont des rotations. Identifier l'axe et l'amplitude de ces rotations.

Un exemple de solution.

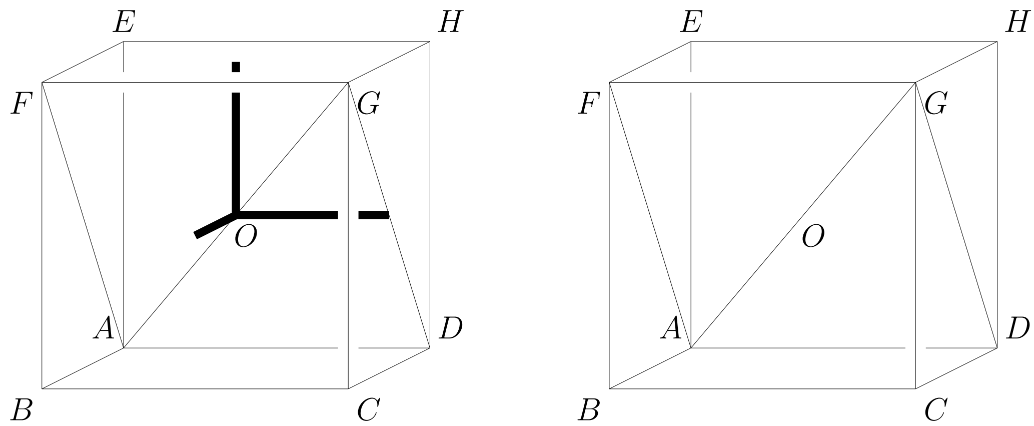
La réflexion s_{ACGE} dans le plan $ACGE$:



est représentée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

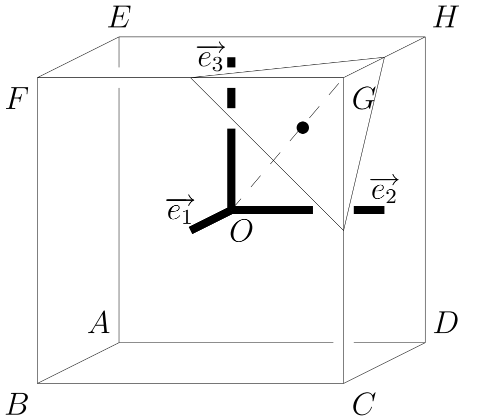
La réflexion s_{ADGF} dans le plan $ADGF$:

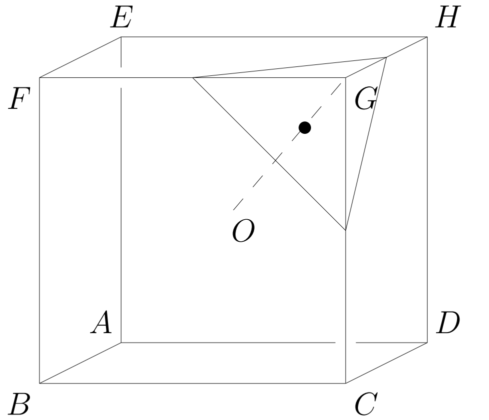


est représentée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La composée $s_{ADGF} \circ s_{ACGE}$ de ces deux réflexions est une rotation d'axe AOG et d'amplitude $\frac{2\pi}{3}$:





elle est représentée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etc.

16.9.4 Ces exercices sont-ils vraiment neufs ?

Dès que la représentation matricielle des transformations de l'espace est disponible, on peut reprendre — en les transposant quand c'est nécessaire — les exercices qui ont créé l'« herbier » des transformations du plan et de leur représentation. On se limite ici aux plus faciles . . .

Dans tous ces énoncés, l'espace est rapporté à un repère orthonormé dont l'origine est notée O.

Exercice 38 *Quelle est la matrice qui représente :*

- *la symétrie centrale de centre O ?*
- *l'homothétie de rapport k (où k est un nombre réel) et de centre O ?*
- *la réflexion à travers le plan d'équation $x_3 = ax_1 + bx_2$?*
- *la projection orthogonale sur le plan d'équation $x_3 = ax_1 + bx_2$?*
- *la projection orthogonale sur la droite des multiples du vecteur $v := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$?*
- *la projection (oblique) sur le plan d'équation $x_3 = ax_1 + bx_2$ parallèlement au vecteur $v := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$?*
- *une rotation d'amplitude α dont l'axe est un des axes de coordonnées ?*
- *la composée de deux rotations (d'axes différents) dans l'énoncé précédent ?*

16.9.5 Quelques problèmes

Problème 23 *Déterminer le lieu géométrique des points de l'espace équidistants de deux droites d et d' non coplanaires et orthogonales.*

La détermination des plans de symétrie du lieu est éclairante.

Problème 24 *Montrer que la composée de deux rotations d'axes et d'amplitudes quelconques est encore une rotation de l'espace.*

En particulier, caractériser l'axe et l'amplitude de cette rotation composée en termes de l'axe et de l'amplitude des rotations initiales.

Problème 25 *Le cuboctaèdre (d'Archimède) est un solide dont les sommets sont les milieux des arêtes d'un cube C.*

Montrer que les centres de gravité des huit faces triangulaires du cuboctaèdre sont les images des sommets du cube C par une homothétie dont on donnera le centre et le rapport.

Quel est le solide S formé par les huit centres de gravité ?

Quel est le rapport des mesures des volumes de S et C ?

Problème 26 *La mesure du volume d'une pyramide (à base triangulaire, pour fixer les idées) est égale au tiers de la mesure du volume du prisme de même base et de même hauteur.*

Démontrer cette formule « aussi géométriquement que possible ».

Problème 27 *Dans une caisse dont l'intérieur est un cube d'arête 20 cm, on a placé une grosse boule B de diamètre 20 cm, et 8 petites billes touchant B et 3 faces de la caisse.*

Quel est le diamètre des petites billes ?

16.9.6 Une synthèse

16.9.6.1 La représentation matricielle

Les définitions et constructions associées à la représentation matricielle des transformations linéaires de l'espace — à partir de ce qui a déjà été fait pour la représentation matricielle des transformations linéaires du plan — n'appellent aucun commentaire particulier.

Mais c'est cette facilité de généralisation qui fait toute la force de ce qu'on appelle l'algèbre linéaire.

16.9.6.2 Les règles de calcul

On note $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 3×3 à coefficients réels.

Munie des opérations d'addition termes à termes et de multiplication de chaque terme par un même nombre réel, l'ensemble $M_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension 9. Une base est formée des 9 matrices deux à deux distinctes formées chacune de 8 termes nuls et d'un seul terme égal à 1.

On peut interpréter ces opérations et leurs propriétés en termes de l'ensemble des transformations linéaires de l'espace ...

Le produit matriciel correspond à la composition des transformations linéaires. Il est distributif par rapport à l'addition des matrices, et à la multiplication des matrices par un nombre réel.

Par **définition** de ce produit, en notant $\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a, quel que soit la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$:

$$A \circ \mathbf{1} = \mathbf{1} \circ A = A$$

16.9.6.3 Les étrangetés du produit matriciel

Le produit matriciel n'est pas commutatif.

Avec les notations de la solution de la question 16, on peut par exemple observer que

$$s_{ADGF} \circ s_{ACGE} \neq s_{ACGE} \circ s_{ADGF}$$

Les deux rotations possèdent en effet le même axe, mais leurs amplitudes sont opposées. La matrice associée à la rotation de droite est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Il y a beaucoup de diviseurs de 0 dans $M_3(\mathbb{R})$.

En effet, **toute** projection orthogonale $p_{a,b}$ sur un plan quelconque (passant par l'origine) $x_3 = ax_1 + bx_2$ vérifie la relation :

$$p_{a,b}^2 := p_{a,b} \circ p_{a,b} = p_{a,b}$$

Donc

$$p_{a,b}^2 - p_{a,b} = p_{a,b} \circ (p_{a,b} - \mathbf{1}) = \mathbf{0}$$

où $\mathbf{0} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Néanmoins

$$p_{a,b} \neq \mathbf{0} \qquad \text{et} \qquad p_{a,b} \neq \mathbf{1}$$

Ces transformations ont été rencontrées dans l'exercice 38.

Il y a beaucoup de racines carrées de 1 dans $M_3(\mathbb{R})$.

En effet, **toute** réflexion $s_{a,b}$ dans un plan quelconque (passant par l'origine) $x_3 = ax_1 + bx_2$ vérifie la relation :

$$s_{a,b}^2 := s_{a,b} \circ s_{a,b} = \mathbf{1}$$

Ces transformations ont aussi été rencontrées dans l'exercice 38.

16.10. La marche-arrière

On a déjà rencontré des transformations — donc des matrices — dont la réciproque — ou l'inverse — sont faciles à décrire : les réflexions, les homothéties, les rotations, ...Cfr. les exercices 29, 31, 30, 35, 37 et 38.

Pour d'autres transformations — les projections par exemple — la réciproque ou l'inverse est manifestement impossible à construire. Cfr. les exercices 32, 33 et 38.

On se propose de régler ce problème définitivement par le biais de l'étude des systèmes d'équations linéaires.

16.10.1 Une combine économique

Question 17 *Trois ouvriers — un charpentier, un électricien et un plombier — deviennent chacun propriétaires d'une maison, et s'organisent pour partager entre eux les travaux de réparations qu'il faut y faire.*

Ils conviennent de consacrer chacun 10 jours à ces travaux, en suivant le schéma ci-dessous :

	Travail réalisé par *le charpentier*	*l'électricien*	*le plombier*
Nombre de jours de travail dans la maison du charpentier	*2*	*1*	*6*
Nombre de jours de travail dans la maison de l'électricien	*4*	*5*	*1*
Nombre de jours de travail dans la maison du plombier	*4*	*4*	*3*

Mais il leur faut déclarer le salaire perçu pour ce travail, y compris pour celui que chacun d'entre eux va réaliser dans sa propre maison. Les trois compères se mettent d'accord pour que, les travaux achevés, aucun d'entre eux n'ait cependant rien à débourser, c'est-à-dire que chacun reçoive exactement le salaire correspondant à ce qu'il doit payer aux autres (lui-même compris).

Comment doivent-ils s'y prendre ? En particulier, quel salaire journalier chaque ouvrier doit-il déclarer ?

16.10.1.1 Solution résumée

On note :

- c : le salaire journalier, en unité monétaire (abrégé en « *um* »), déclaré par le charpentier,
- e : le salaire journalier, en *um*, déclaré par l'électricien,
- p : le salaire journalier, en *um*, déclaré par le plombier.

Pour les travaux réalisés dans sa maison, le charpentier doit payer à ses collègues

$$2c + 1e + 6p$$

Or le charpentier a travaillé au total 10 jours dans les trois maisons, ce qui lui a rapporté une somme égale à $10c$.

Le charpentier n'aura rien à débourser dès que ces deux sommes s'équilibreront, ce qui s'écrit :

$$2c + e + 6p = 10c$$

En raisonnant pareillement dans le cas de l'électricien et du plombier, on trouve respectivement les équations

$$\begin{aligned} 4c + 5e + p &= 10e \\ 4c + 4e + 3p &= 10p \end{aligned}$$

Les équations ainsi obtenues forment un système de trois équations du premier degré à trois inconnues :

$$\begin{cases} -8c + e + 6p = 0 \\ 4c - 5e + p = 0 \\ 4c + 4e - 7p = 0 \end{cases}$$

Ces équations **ne** sont **pas** indépendantes (par exemple, la troisième équation est la somme des deux premières). La solution du système réduit :

$$\begin{cases} -8c + e = -6p \\ 4c - 5e = -p \end{cases}$$

s'obtient sans grande difficulté :

$$\begin{cases} c = \frac{31}{36}p \\ e = \frac{8}{9}p \end{cases}$$

Cette solution permet de déterminer le salaire journalier que le charpentier et l'électricien devront déclarer, dès qu'ils seront d'accord sur celui du plombier.

16.10.2 Une synthèse

Pour fixer les idées, l'interprétation géométrique ([11]) de tout ce qui suit se fait dans l'espace rapporté à un repère orthonormé (direct) d'origine notée O, et cela même si de telles hypothèses ne sont pas toujours essentielles.

16.10.2.1 L'interprétation matricielle d'un système d'équations 3×3

Un système de 3 équations du premier degré à 3 inconnues

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3 \end{cases}$$

s'écrit matriciellement

$$A \cdot x = b$$

où $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Ici, la question géométrique sous-jacente est : la transformation linéaire A admet-elle une transformation réciproque — qu'on note A^{-1} — et qui est donc caractérisée par la relation :

$$A \circ A^{-1} = \mathbf{1}$$

Cela **équivaut** — en termes de système d'équations — à obtenir une formule de résolution qui soit **linéaire** en b_1, b_2 et b_3. Un peu de perspicacité dans la conduite des calculs permet déjà de s'en convaincre !

16.10.2.2 L'interprétation vectorielle d'un système d'équations 3×3

On peut aussi traduire le problème en langage vectoriel.

([11]) L'interprétation de la résolution d'un système de 3 équations du premier degré à 3 inconnues en termes d'intersections de plans, de droites, ... est suffisamment connue pour qu'on n'y revienne pas ici.

On considère les vecteurs-colonnes $A_1 := \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $A_2 := \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$ et $A_3 := \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$, ce qui permet d'écrire le système sous la forme :

$$x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + x_3 \cdot A_3 = b$$

Cette relation exprime que le vecteur-colonne b doit s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs-colonnes A_1, A_2 et A_3 .

Dès que ces 3 vecteurs-colonnes sont **non coplanaires** ou **linéairement indépendants**, on sait que la solution existe et est unique (cfr. l'annexe de la première partie, pp. 44-45).

16.10.2.3 Le calcul des aires et des volumes

D'autre part, on a aussi obtenu dans la première partie les résultats de géométrie écrite/algèbre visuelle suivants (cfr. le problème 9 et l'exercice 10 des pp. 33-34).

Si $U := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $V := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $W := \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ sont 3 points de l'espace, alors :

- le vecteur

$$\begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ -(u_1v_3 - u_3v_1) \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

  noté $U \times V$, est perpendiculaire au plan déterminé par les points O, U et V (pourvu — évidemment — qu'il ne soit pas identiquement nul) ;

- la norme de ce vecteur $U \times V$ est la mesure de l'aire du parallélogramme OUTV, où $T := U + V$;

- la mesure du volume **orienté** du prisme d'arêtes OU, OV et OW est égale au produit scalaire du vecteur $U \times V$ par le vecteur W, on note $\det(U, V, W)$ ce produit scalaire et on a donc la formule :

$$\det(U, V, W) := (u_2v_3 - u_3v_2) \cdot w_1 - (u_1v_3 - u_3v_1) \cdot w_2 + (u_1v_2 - u_2v_1) \cdot w_3$$

En conséquence, on appelle déterminant d'une matrice $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ le volume orienté déterminé par ses vecteurs-colonnes :

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det(A_1, A_2, A_3)$$

$$= (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \cdot a_{13} - (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) \cdot a_{23} + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \cdot a_{33}$$

On retrouve alors les propriétés (classiques) d'antisymétrie et de (multi)linéarité du déterminant.

On peut aussi vérifier la formule remarquable :

$$\det(A \circ B) = \det A \cdot \det B$$

16.10.2.4 La formule de Cramer et l'existence de l'inverse d'une matrice

On en revient alors au système d'équations originel, écrit sous forme vectorielle :

$$x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + x_3 \cdot A_3 = b$$

En calculant le volume orienté du prisme déterminé par ce(s) vecteur(s) et les vecteurs-colonnes A_2 et A_3, on obtient :

$$\det(x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + x_3 \cdot A_3, A_2, A_3) = \det(b, A_2, A_3)$$

d'où, par antisymétrie :

$$\det(x_1 \cdot A_1, A_2, A_3) = \det(b, A_2, A_3)$$

et par linéarité :

$$x_1 \cdot \det(A_1, A_2, A_3) = \det(b, A_2, A_3)$$

c'est-à-dire $x_1 \cdot \det A = \det(b, A_2, A_3)$. C'est la (première) formule de Cramer.

Etc.

On en déduit l'expression bien connue de l'inverse d'une matrice 3×3 en termes des cofacteurs et du déterminant.

Quant au **calcul** du déterminant, la méthode du pivot est plus économique que la méthode de Cramer, bien que les calculatrices (graphiques) mettent tout le monde d'accord ! Mais on notera que si la méthode du pivot travaille en termes de dépendance linéaire des lignes, la méthode de Cramer utilise quant à elle la dépendance linéaire des colonnes.

16.10.3 Un exercice et deux problèmes . . . économiques

La solution de la question 17 n'est pas entièrement satisfaisante : il se fait que

$$\begin{cases} c = \frac{31}{36}p \\ e = \frac{8}{9}p \end{cases}$$

implique que $p \geqslant 0 \implies c \geqslant 0$ et $e \geqslant 0$. Mais rien n'explique *a priori* pourquoi le système obtenu admet **toujours** une solution positive.

Or, les équations obtenues lors de la résolution peuvent aussi s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{2}{10}c + \frac{1}{10}e + \frac{6}{10}p = c \\ \frac{4}{10}c + \frac{5}{10}e + \frac{1}{10}p = e \\ \frac{4}{10}c + \frac{4}{10}e + \frac{3}{10}p = p \end{cases}$$

ou encore, sous forme matricielle :

$$C \cdot x = x$$

avec $C := \begin{pmatrix} \frac{2}{10} & \frac{1}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{4}{10} & \frac{5}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{4}{10} & \frac{4}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$ et $x := \begin{pmatrix} c \\ e \\ p \end{pmatrix}$.

Ces considérations introduisent le problème suivant.

Problème 28 *On considère une matrice 3×3 C dont tous les termes sont positifs (ce qu'on note $C \geqslant 0$), et dont la somme des termes dans chaque colonne égale 1 ; quelle(s) condition(s) supplémentaire(s) faut-il imposer à la matrice C pour que l'équation*

$$C \cdot x = x$$

admette au moins une solution dont toutes les composantes sont positives (ce qu'on note — pareillement — $x \geqslant 0$) ?

16.10.3.1 Solution résumée

Le système d'équations $(C - \mathbf{1}) \cdot x = 0$ est linéaire homogène. Par hypothèse, la somme des termes dans chaque colonne de la matrice $(C - \mathbf{1})$ égale 0 : ce système admet donc des solutions non identiquement nulles. Il y a alors deux cas possibles.

Supposons d'abord que le système soit de rang 1, c'est-à-dire que **toute** l'information soit concentrée dans **une** équation ([12]), par exemple la première :

$$c_{12} \cdot x_2 + c_{13} \cdot x_3 = (1 - c_{11}) \cdot x_1$$

A tout choix arbitraire de x_2 et x_3 positifs correspond alors une valeur positive de x_1 puisque, par hypothèse : $c_{12} \geqslant 0$, $c_{13} \geqslant 0$ et $1 - c_{11} \geqslant 0$ (car $c_{11} + c_{21} + c_{31} = 1$, $c_{21} \geqslant 0$ et $c_{31} \geqslant 0$). Mais il existe autant de valeurs de x_1, x_2 et x_3 dont les signes **ne** sont **pas** simultanément positifs : géométriquement, cela correspond à ce qu'un plan passant par l'origine ne peut pas être parallèle aux **trois** plans de coordonnées !

Supposons maintenant que le système soit de rang 2, c'est-à-dire que **toute** l'information soit concentrée dans **deux** équations **linéairement indépendantes**, par exemple :

$$\begin{cases} (c_{11} - 1) \cdot x_1 + c_{12} \cdot x_2 = -c_{13} \cdot x_3 \\ c_{21} \cdot x_1 + (c_{22} - 1) \cdot x_2 = -c_{23} \cdot x_3 \end{cases}$$

dont on peut donc supposer que le déterminant $\Delta := (c_{11} - 1)\,(c_{22} - 1) - c_{21}c_{12}$ est $\neq 0$. Les formules de Cramer fournissent les équations paramétriques de la droite d'intersection des deux plans correspondants :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} c_{12} & c_{13} \\ c_{22} - 1 & c_{23} \end{vmatrix}}{\Delta} \cdot x_3 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \cdot x_3 \\[2ex] x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} c_{13} & c_{11} - 1 \\ c_{23} & c_{21} \end{vmatrix}}{\Delta} \cdot x_3 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \cdot x_3 \end{cases}$$

Les hypothèses faites sur la matrice C permettent de vérifier que **tous** les déterminants qui interviennent dans ces formules sont **positifs**. Par exemple, dans le cas de Δ , cela résulte de ce que $0 \leqslant c_{12} \leqslant 1 - c_{22}$ et $0 \leqslant c_{21} \leqslant 1 - c_{11}$, d'où $0 \leqslant c_{12}c_{21} \leqslant (1 - c_{22})\,(1 - c_{11}) = (c_{11} - 1)\,(c_{22} - 1)$.

En conséquence, il n'y a aucune condition supplémentaire à imposer à la matrice C.

L'exercice suivant reprend, en le généralisant un peu, le schéma déjà présent dans la question 17.

Exercice 39 *Un complexe industriel se développe autour de trois activités principales : une centrale électrique au fuel, une raffinerie et une ligne de chemin de fer.*

Pour produire 1 um (:= unité monétaire) d'électricité, la centrale utilise :

([12]) Concrètement, ce cas est le plus facilement détecté.

- *0,60 um de fuel provenant de la raffinerie,*
- *0,05 um de transport par le chemin de fer,*
- *0,05 um de sa propre production.*

Pour produire 1 um de fuel, la raffinerie utilise :

- *0,25 um d'électricité,*
- *0,10 um de transport par le chemin de fer.*

La ligne de chemin de fer, pour réaliser un service de transport valant 1 um, utilise :

- *0,55 um d'électricité,*
- *0,20 um de fuel.*

Ce complexe industriel doit livrer à l'extérieur du fuel pour une valeur de 600 000 um et de l'électricité pour une valeur de 250 000 um. Combien devra-t-il produire (en um) d'électricité, de fuel et de service de transport pour réaliser cette commande ?

16.10.3.2 Solution résumée

On note :

- e : la production d'électricité (évaluée en um) nécessaire pour réaliser la commande,
- f : la production de fuel (évaluée en um) nécessaire pour réaliser la commande,
- t : le service de transport (évalué en um) nécessaire pour réaliser la commande.

La valeur de la production d'électricité nécessaire e se décompose en deux parties :

- une partie destinée à honorer la commande, dont la valeur égale donc 250 000 um,
- une partie destinée à la production d'électricité à l'usage interne du complexe, et qui vaut

$$0,05e + 0,25f + 0,55t$$

On en déduit une première équation :

$$0,05e + 0,25f + 0,55t + 250000 = e$$

Pareillement, pour la valeur de la production de fuel f, on obtient l'équation :

$$0,60e + 0,2t + 600000 = f$$

De la même manière, la valeur du service de transport nécessaire à réaliser la commande est décrite par l'équation

$$0,05e + 0,1f = t$$

Après simplification, on obtient un système de trois équations du premier degré à trois inconnues :

$$\begin{cases} 0,95e - 0,25f - 0,55t = 250000 \\ -0,60e + f - 0,2t = 600000 \\ 0,05e + 0,1f - t = 0 \end{cases}$$

Une calculatrice (graphique) en fournit immédiatement la solution :

$$\begin{cases} e = 596100,2786 \ (um) \\ f = 983286,9081 \ (um) \\ t = 128133,7047 \ (um) \end{cases}$$

Mais encore une fois, la solution de ce problème-ci n'est pas entièrement satisfaisante. La solution obtenue est manifestement positive sans que rien n'explique *a priori* **pourquoi** un système de ce genre admet nécessairement une solution positive : y aurait-il par exemple des commandes qui ne soient pas réalisables ?

Or, on peut écrire le système d'équations obtenu lors de la résolution du problème sous la forme matricielle :

$$x - C \cdot x = d$$

ou encore $(\mathbf{1} - C) \cdot x = d$ où $\mathbf{1}$ est la matrice unité, et avec les données du problème original

$$C := \begin{pmatrix} 0,05 & 0,25 & 0,55 \\ 0,60 & 0 & 0,2 \\ 0,05 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \text{ (c'est la « matrice de consommation »),}$$

$$d := \begin{pmatrix} 250000 \\ 600000 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (c'est le « vecteur de demande »),}$$

$$x := \begin{pmatrix} e \\ f \\ t \end{pmatrix} \text{ (c'est le « vecteur de production [13] »).}$$

[13] Cette terminologie provient des sciences économiques, où le type de problème en question est connu comme « le modèle de production ouvert de Leontief ». W. W. Leontief (1906-) est un économiste américain d'origine russe. Son tableau d'échanges inter-industriels (entrées-sorties) lui valut le prix Nobel de sciences économiques en 1973. Leontief a défini les entrées comme étant

Considérons plus généralement une matrice de consommation $C := (c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ positive et un vecteur de demande positif $d := \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$, et cherchons à quelle(s) condition(s) le système

$$(\mathbf{1} - C)\cdot x = d$$

admet comme solution un vecteur de production positif ?

Il est clair que, si la matrice $\mathbf{1} - C$ est inversible, le vecteur de production recherché x est donné par :

$$x = (\mathbf{1} - C)^{-1}\cdot d$$

La question est de savoir à quelle(s) condition(s) ce vecteur de production est positif ?

Problème 29 *Démontrer le résultat suivant : il existe un vecteur de production x qui soit positif, et tel que $x > C\cdot x$* ***si et seulement si*** *la matrice $\mathbf{1} - C$ est inversible et son inverse est une matrice positive.*

En déduire l'agréable corollaire suivant : si la matrice de consommation C est telle que la somme de chacune de ses lignes est moindre que 1, alors la matrice $\mathbf{1} - C$ est inversible et son inverse est une matrice positive

Un résumé de la solution du problème 29

Il s'agit de démontrer :

$$\exists\, x \geqslant 0 \text{ avec } x > C\cdot x \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} 1 - C \text{ est inversible} \\ (1-C)^{-1} \geqslant 0 \end{cases}$$

L'implication « $\Longleftarrow$ » est presque immédiate.

On **choisit** $x := (\mathbf{1} - C)^{-1}\cdot d$. Comme $x - C\cdot x = d \geqslant 0$, il reste à montrer que $x = C\cdot x$ est impossible.
Or, $x = C\cdot x \implies (\mathbf{1} - C)\cdot x = 0$. Mais la relation $(\mathbf{1} - C)\cdot x = 0$ signifie que les colonnes de la matrice $\mathbf{1} - C$ ne sont pas linéairement indépendantes, d'où $\det(\mathbf{1} - C) = 0$, et cela contredit que la matrice $\mathbf{1} - C$ soit inversible !

L'implication « $\Longrightarrow$ » est moins évidente.

---

les biens et services que chaque secteur de l'économie acquiert auprès des autres secteurs, et les sorties comme étant les produits vendus par une branche aux autres. Cette technique permet ainsi de représenter graphiquement les échanges de biens entre les différentes industries, et permet également aux experts d'analyser, de planifier et de prédire les mutations économiques. Référence : *Encyclopédie Encarta 99.*

On peut d'abord se permettre de supposer que $x > 0$. En effet, si au contraire il existe un indice i pour lequel $x_i = 0$, alors l'hypothèse $x > C \cdot x$ implique que la i^{e} ligne de la matrice $C \cdot x$ est **strictement** négative, ce qui est impossible puisque pour toutes les valeurs des indices : $c_{ij} \geqslant 0$ et $x_j \geqslant 0$.
On considère alors la droite passant par les points de coordonnées $-C \cdot x$ et $x - C \cdot x$: c'est l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées s'écrivent

$$-C \cdot x + k\,(x - C \cdot x - (-C \cdot x)) = -C \cdot x + kx$$

Ainsi, pour $k = 0$, la droite passe par un point dont **toutes** les coordonnées sont **négatives**, tandis que pour $k = 1$, la droite passe par un point dont **toutes** les coordonnées sont **strictement positives**. Si on note λ la plus petite valeur de k telle que le point $-C \cdot x + kx$ ait encore toutes ses coordonnées positives, on a donc $0 \leqslant \lambda < 1$ et $C \cdot x \leqslant \lambda x$. On en déduit $\lim_{n \to \infty} C^n \cdot x = 0$. Cela permet de poser

$$(\mathbf{1} - C)^{-1} = \mathbf{1} + C + C^2 + C^3 + \ldots$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque. La convergence du membre de droite dans $(\mathbf{1} - C)^{-1} = \mathbf{1} + C + C^2 + C^3 + \ldots$ résulte de

$$(\mathbf{1} + C + C^2 + C^3 + \ldots) \cdot x \leqslant (1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \ldots)x = \frac{1}{1-\lambda}x$$

Quant au corollaire, il s'obtient en posant $x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, etc.

16.11. Un retour aux sources

16.11.1 Retour au problème des oiseaux

16.11.1.1 Etude expérimentale de la matrice R

Le logiciel TRANSAFF ([14]) permet d'entreprendre une étude dynamique de la matrice $R := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$ associée à la récurrence linéaire étudiée.

16.11.1.2 Des directions caractéristiques qui sont leur propre image

Une droite passant par l'origine est déterminée comme ensemble des multiples du point ou du vecteur $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Elle est invariante sous l'action de la matrice R si et seulement si il existe un nombre k tel que :

$$R \cdot x = k \cdot x$$

ce qui s'explicite sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} 2x_2 = kx_1 \\ 0,3x_1 + 0,5x_2 = kx_2 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} -kx_1 + 2x_2 = 0 \\ 0,3x_1 + (0,5 - k)\, x_2 = 0 \end{cases}$$

qu'on appelle « système caractéristique » de la matrice R.

Il ne faut pas que ce système soit de rang 2, parce que sinon la seule solution possible serait identiquement nulle, ce qui ne permet pas de déterminer une droite.

Le système est de rang 1 si et seulement si son déterminant est nul, ce qui fournit la condition :

([14]) TRANSAFF est un logiciel du C.D.S. d'un emploi extraordinairement simple et visuellement très instructif concernant la géométrie des transformations linéaires du plan.

$$-k(0,5-k) - 2 \cdot 0,3 = k^2 - 0,5 \cdot k - 0,6 = 0$$

Les deux racines de cette équation du second degré sont :

$$\begin{aligned} k' &= \frac{0,5+\sqrt{2,65}}{2} = 1,06394103\ldots \\ k'' &= \frac{0,5-\sqrt{2,65}}{2} = -0,5639410298\ldots \end{aligned}$$

On peut en déduire, pour chaque valeur de k obtenue, la direction « propre » recherchée. Son coefficient angulaire est facile à calculer , grâce à la forme simple de la première équation du système caractéristique :

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{k}{2}$$

On retrouve ainsi les deux directions observées grâce à TRANSAFF :

$$\begin{aligned} \frac{0,5+\sqrt{2,65}}{4} &= 0,5319705149\ldots \\ \frac{0,5-\sqrt{2,65}}{4} &= -0,2819705149\ldots \end{aligned}$$

Le premier de ces coefficients avait déjà été obtenu lors de la résolution du problème initial.

16.11.1.3 Le miracle de la linéarité

Ce miracle, c'est que l'on puisse **comprendre toute la transformation** associée à la matrice R, — c'est-à-dire son effet sur n'importe quel point du plan (des oiseaux) — **à partir de son seul effet sur deux directions** propres.

Notons :

- u : un vecteur directeur de la droite « propre » associée à $k' = 1,06\ldots$,
- v : un vecteur directeur de la droite « propre » associée à $k'' = -0,5\ldots$.

Comme TRANSAFF le fait voir, l'itération de la transformation R envoie le vecteur u à l'infini (en restant dans la propre direction de u).

En effet, comme $R \cdot u = k' \cdot u$, on en tire

$$R^2 \cdot u = R\,(R \cdot u) = R\,(k' \cdot u) = k' \cdot R \cdot u = k' \cdot k' \cdot u = k'^2 \cdot u$$

et, plus généralement

$$R^n \cdot u = k'^n \cdot u$$

Or, comme $k' > 1$, on a $\lim_{n\to\infty} k'^n = \infty$, d'où la conclusion.

Pareillement, et toujours comme TRANSAFF le fait voir, l'itération de la transformation R envoie le vecteur v à l'origine (en restant dans la propre direction de v).

En effet, comme $R \cdot v = k'' \cdot v$, on en tire

$$R^2 \cdot v = R\,(R \cdot v) = R\,(k'' \cdot v) = k'' \cdot R \cdot v = k' \cdot k'' \cdot v = k''^2 \cdot v$$

et, plus généralement

$$R^n \cdot v = k''^n \cdot v$$

Or, comme $|k''| < 1$, on a $\lim_{n\to\infty} k''^n = 0$, d'où la conclusion.

Ce que TRANSAFF montre enfin, c'est que, quelles que soient les données initiales $d := \begin{pmatrix} i_0 \\ a_0 \end{pmatrix}$ d'une itération, son image dans le plan des oiseaux finira par « se coucher » sur la droite de coefficient angulaire 0,53..., parce que la racine k' l'« emporte à l'infini » !

Plus précisément, le vecteur d est une combinaison linéaire des vecteurs u et v, c'est-à-dire qu'il existe deux nombres d_1 et d_2 tels que :

$$d = d_1 \cdot u + d_2 \cdot v$$

On calcule alors l'effet de la transformation R sur le vecteur choisi :

$$\begin{aligned} R \cdot d &= R \cdot (d_1 \cdot u + d_2 \cdot v) \\ &= d_1 \cdot R \cdot u + d_2 \cdot R \cdot v \\ &= d_1 \cdot k' \cdot u + d_2 \cdot k'' \cdot v \end{aligned}$$

En itérant, on trouve :

$$\begin{aligned} R^2 \cdot d &= R \cdot (d_1 \cdot k' \cdot u + d_2 \cdot k'' \cdot v) \\ &= d_1 \cdot k' \cdot R \cdot u + d_2 \cdot k'' \cdot R \cdot v \\ &= d_1 \cdot k' \cdot k' \cdot u + d_2 \cdot k'' \cdot k'' \cdot v \\ &= d_1 \cdot k'^2 \cdot u + d_2 \cdot k''^2 \cdot v \end{aligned}$$

Et, plus généralement :

$$R^n \cdot d = d_1 \cdot k'^n \cdot u + d_2 \cdot k''^n \cdot v$$

Comme $\lim_{n\to\infty} k'^n = \infty$ et $\lim_{n\to\infty} k''^n = 0$, la conclusion s'ensuit.

Ce calcul montre aussi que le signe négatif de k'' — dont la valeur absolue est < 1 — se traduit dans l'oscillation des images autour de la droite propre « dominante » (une asymptote d'hyperbole ...)

16.11.2 Les lois de mariage chez les indiens Natchez

Dans des domaines inattendus, la représentation matricielle se révèle pertinente.

Problème 30 *La tribu des indiens Natchez comporte quatre clans ou classes d'individus : les Soleils, les Nobles, les Honorables et les Malodorants (sic !) Les règles de mariage et de descendance propres à cette tribu sont résumées dans le tableau ci-dessous, où « H » signifie homme, « F » signifie femme, « E » signifie enfant et « x » signifie que le mariage de ce type est interdit.*

	H. Soleil	*H. Noble*	*H. Honorable*	*H. Malodorant*
F. Soleil	*x*	*x*	*x*	*E. Soleil*
F. Noble	*x*	*x*	*x*	*E. Noble*
F. Honorable	*x*	*x*	*x*	*E. Honorable*
F. Malodorant(e)	*E. Noble*	*E. Honorable*	*E. Malodorant*	*E. Malodorant*

La question est de savoir si la répartition des classes d'individus reste (approximativement) stable dans cette tribu ?

Afin de simplifier un peu la situation, on fait les hypothèses additionnelles suivantes :

- *à chaque génération, chaque clan comporte un nombre égal de femmes et d'hommes,*
- *chaque individu ne se marie qu'une et une seule fois, et le mariage est obligatoire (!),*
- *chaque couple donne naissance à exactement un fils et une fille,*
- *la population totale est stable, c'est-à-dire : les naissances compensent les décès.*

16.11.2.1 Solution (résumée)

On note :

- S_n : le nombre d'hommes du clan du Soleil à la génération n,
- N_n : le nombre d'hommes du clan des Nobles à la génération n,
- H_n : le nombre d'hommes du clan des Honorables à la génération n,
- M_n : le nombre d'hommes du clan des Malodorants à la génération n.

Il est utile de disposer d'une liste de tous les types de mariages possibles, avec le clan des enfants qui en naissent (on a noté en gras les représentants mâles) :

$$\overbrace{\mathbf{S}-\mathrm{S}}^{\mathbf{M}/\mathrm{S}} \qquad \overbrace{\mathbf{N}-\mathrm{N}}^{\mathbf{M}/\mathrm{N}} \qquad \overbrace{\mathbf{H}-\mathrm{H}}^{\mathbf{M}/\mathrm{H}} \qquad \overbrace{\mathbf{M}-\mathrm{M}}^{\mathbf{M}/\mathrm{M}} \qquad \overbrace{\mathbf{N}-\mathrm{N}}^{\mathbf{S}/\mathrm{M}} \qquad \overbrace{\mathbf{H}-\mathrm{H}}^{\mathbf{N}/\mathrm{M}} \qquad \overbrace{\mathbf{M}-\mathrm{M}}^{\mathbf{H}/\mathrm{M}}$$

On observe d'abord que le nombres d'hommes du clan des Soleils est constant de générations en générations, donc :

$$S_{n+1} = S_n$$

Comment déterminer le nombre d'hommes du clan des Nobles à la génération $n+1$?

Ils proviennent de couples du type **M**/N ou **S**/M, mais le **nombre** de tels couples égale la somme du nombre d'**hommes** du clan des Nobles et du nombre d'hommes du clan des Soleils à la génération n, d'où la relation :

$$N_{n+1} = N_n + S_n$$

Pareillement les hommes du clan des Honorables à la génération $n+1$ proviennent de couples du type **M**/H ou **N**/M, et le **nombre** de tels couples égale la somme du nombre d'hommes du clan des Nobles et du nombre d'**hommes** du clan des Honorables à la génération n, d'où la relation :

$$H_{n+1} = N_n + H_n$$

Un raisonnement analogue pour déterminer le nombre d'hommes du clan des Malodorants à la génération $n+1$ est malaisé. Mais comme la population totale est supposée stable, on a la relation :

$$S_{n+1} + N_{n+1} + H_{n+1} + M_{n+1} = S_n + N_n + H_n + M_n$$

d'où on tire :

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= S_n + N_n + H_n + M_n - S_{n+1} - N_{n+1} - H_{n+1} \\ &= S_n + N_n + H_n + M_n - S_n - (S_n + N_n) - (N_n + H_n) \\ &= -S_n - N_n + M_n \end{aligned}$$

On en déduit les relations de récurrence linéaire :

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n \\ N_{n+1} = S_n + N_n \\ H_{n+1} = N_n + H_n \\ S_{n+1} = -S_n - N_n + M_n \end{cases}$$

auxquelles est associée la matrice 4×4 :

$$L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une calculatrice graphique donne immédiatement

$$L^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ -6 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 \\ -10 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 1 & 0 \\ -15 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & 6 & 1 & 0 \\ -21 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etc.

On déduit de ces résultats :

$$L^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 & 0 \\ 1+2+\ldots-(n-1) & n & 1 & 0 \\ -(1+2+\ldots+n) & -n & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2} & n & 1 & 0 \\ -\frac{n(n+1)}{2} & -n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice permet de décrire la répartition des hommes de chaque clan en fonction de la répartition initiale :

$$\begin{cases} S_n = S_0 \\ N_n = n \cdot S_0 + N_0 \\ H_n = \frac{n(n-1)}{2} \cdot S_0 + n \cdot N_0 + H_0 \\ M_n = M_0 - \frac{n(n+1)}{2} \cdot S_0 - n \cdot N_0 \end{cases}$$

On en déduit que le système de mariage ([15]) adopté dans la tribu des indiens Natchez devait mener à l'extinction du clan des Malodorants, et donc de la tribu. En effet, il existe un nombre (entier) n tel que

$$M_n = M_0 - \frac{n(n+1)}{2} \cdot S_0 - n \cdot N_0 \leqslant 0$$

([15]) ... Du moins sous la forme présentée ici ...

puisque cette condition revient à déterminer n de telle sorte que

$$M_0 \leqslant n \left(N_0 + \frac{n+1}{2} \cdot S_0 \right)$$

ce qui est évidemment toujours possible.

Comme tous les mariages autorisés doivent comporter un homme ou une femme du clan des Malodorants, dès que ceux-ci ont disparu les mariages deviennent impossibles et la tribu elle-même est alors menacée d'extinction.

16.11.2.2 Une remarque et un prolongement

On peut observer que $L = \mathbf{1} + T$, où $\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice unité 4×4 et $T := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme on vérifie facilement que $T^3 = \mathbf{O}$, on en tire

$$L^n = \mathbf{1} + n \cdot T + \frac{n(n-1)}{2} \cdot T^2$$

Etc.

D'autre part, si on connait la répartition des clans dans la tribu à une époque (une génération) quelconque, on peut remonter dans le temps et calculer la répartition de ces clans dans le passé, en inversant suffisamment de fois la matrice L.

Le mot de la fin ...

Le mathématicien suisse Beno Eckmann a su expliquer comment une apparente abstraction peut faciliter l'accès à la réalité. Il semble difficile de trouver mieux pour achever ce module consacré à l'algèbre linéaire : cette forme réaliste, effective de la géométrie.

Vous me permettrez donc de voir dans les mathématiques non seulement un instrument très utile pour les sciences et la technique, non seulement le langage qui nous permet de mettre en relations les phénomènes, de formuler des lois et d'en tirer les conséquences, mais beaucoup plus : J'y vois l'expression de notre façon de penser. *Et si le mathématicien, comme un géographe qui ne se contente pas de connaître la géographie de son village natal, semble s'éloigner de plus en plus des schémas ordinaires et ose aller d'une abstraction et généralisation à l'autre, il ne s'éloigne pas plus pour cela du réel ; au contraire, il crée de nouvelles possibilités de penser, et de voir et comprendre notre monde.*

B. Eckmann — L'idée de dimension ; Revue de Théologie et Philosophie, 127 (1943), 3-17.

Bibliographie (16)

Collection Dimathème, Livres de Première et de Terminale, (Géométrie-Algèbre), Editions Didier, Paris, 1991-1992.

Collection Fractale. Mathématiques, Livre de Première S. et E., (Géométrie), Bordas, Paris, 1991.

Collection Terracher. Mathématiques, Livres de Première et de Terminale (Géométrie), Hachette, Paris, 1991.

SBPMef, *Matrices et produit scalaire*, Dossier d'exploration didactique nº 5, 1997.

H. Anton, C. Rorres — *Applications of Linear Algebra*, John Wiley and Sons, New York, 1977.

J. Bair, R. Hinnion, D. Justens — *Applications économiques au service de la mathématique*, SBPMef, 1989.

G. Dethier — *Les isométries de l'espace, Traité suivi d'exercices résolus*, Brochure 316/71, Ministère de l'Education Nationale, Organisation des Etudes, 1987, 160 pages.

S. Goldberg — *Introduction to Difference Equations. With Illustrative Examples from Economics, Psychology and Sociology*, Dover Publications, New York, 1986.

G. E. Martin — *Transformation Geometry. An Introduction to Symmetry.* Springer Verlag, New York, Heidelberg, . . ., 1982.

G. Noël — *Groupes d'isométries des polyèdres.* Notes rédigées par N. Lambelin, Université de Mons-Hainaut (octobre 1981), 53 pages.

G. Noël, F. Pourbaix, P. Tilleuil — *L'algèbre linéaire au troisième degré du secondaire*, Rapport final d'un contrat de recherche financé par le Ministère de la Communauté Française à l'université de Mons-Hainaut (1996-1997), 266 pages. — Un résumé de ce rapport a été publié dans *Le point sur la recherche en éducation*, 4, (1997), 11–27, et reproduit dans *Mathématique et Pédagogie*, 116, (1998), 5–24.

Y. Sortais, R. Sortais — *Géométrie de l'espace et du plan. Synthèse de cours. Exercices résolus*, Hermann, Paris, 1993.

(16) Il s'agit de la bibliographie propre à ce module et qui, en tant que telle, faisait partie des notes remises aux enseignants. Une bonne part de ces références est consultable à la bibliothèque du CDS/UMH, du CREM, . . .