Rapport final – Août 2010

L'apprentissage et l'enseignement des nombres décimaux

Ministère de la Communauté française

CREM

2010

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques - Nivelles 2010.

Rapport final – Août 2010

L'apprentissage et l'enseignement des nombres décimaux

Ministère de la Communauté française

CREM

2010

Avertissement

Le présent document constitue le *rapport final* de la recherche intitulée « **L'apprentissage et l'enseignement des nombres décimaux** (Période : 09/2007–08/2010) ».

Ce rapport a été rédigé par une équipe constituée de Jacques Grégoire (Dir.), Nicolas Rouche (Dir. pour les deux premières années de recherche, †), Christian Michaux (Dir. pour la 3e année de recherche), Laetitia Desmet, Philippe Skilbecq, Julie Fanuel, Sylviane Soille.
La réalisation informatique du logiciel DECIVAL a été confiée à Geoffrey Pliez et Mickael Randour (informaticiens).

Le comité de lecture interne au CREM était composé de Christine Docq, Thérèse Gilbert et Guy Noël.

Nous remercions les directeurs des écoles suivantes pour nous avoir autorisés à expérimenter nos activités ou tester les élèves dans l'une ou plusieurs classes de leur établissement, ainsi que les enseignants de ces classes :
pour l'enseignement primaire,
– l'École communale de Heure-en-Famenne (5377),
– l'Institut Sainte-Marie à Rèves (6210),
– l'Institut Saint-Michel à Nivelles (1400),
– l'Institut Saint-Aubain à Namur (5000),
– l'Institut Sainte-Thérèse à Nivelles (1400),
– le Collège Notre-Dame de Basse-Wavre (1300),
– l'Institut Notre-Dame des Hayeffes à Mont-Saint-Guibert (1435),
– l'Institut Sacré-Coeur Burnot (5170).
pour l'enseignement secondaire,
– l'Institut Sainte-Anne à Gosselies.

Nous remercions plus particulièrement les enseignants qui nous ont accueillis dans leur classe au cours de ces trois années de recherche afin d'expérimenter nos activités :
– Fabienne Dossogne, École communale de Heure-en-Famenne ;
– Véronique Picron, Institut Saint-Michel à Nivelles,
– Valérie Crispoux, Institut Sainte-Marie à Rèves,
– Céline Maertens, Institut Sainte-Marie à Rèves,
– Madame Géraldine Lambert, Institut Sainte Anne à Gosselies,
– Madame Thérèse Cambier, Institut Sainte Anne à Gosselies,
– Monsieur Etinne Mansy, Institut Sainte Anne à Gosselies.

Pour le chapitre 3 relatif à l'analyse des programmes, nous remercions les bibliothécaires de l'Institut d'Enseignement Supérieur Pédagogique de Nivelles (Haute École P.-H. Spaak), de la Haute École Charlemagne de Liège (site des Rivageois), ainsi que du Centre d'Enseignement Supérieur Pédagogique Charleroi-Mons de Gosselies, où nous avons pu avoir accès à différents programmes, dont certains antérieurs à 1936. Nous remercions également Guy Noël pour le prêt de quelques ouvrages relatifs à la formation des maitres au siècle dernier.

Le présent document a été rédigé en respectant les règles de la nouvelle orthographe. Nous avons cependant gardé l'orthogaphe utilisée par les auteurs dans les citations.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Cette recherche, soutenue par le Ministère de la Communauté française de Belgique[1] a été réalisée grâce à une collaboration entre le Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques[2] et l'Unité de psychologie de l'éducation et du développement de la Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation de l'Université catholique de Louvain-la-Neuve[3].

La première partie de cette recherche est consacrée à l'enseignement et à l'apprentissage des nombres décimaux et aux obstacles que les élèves rencontrent lors de cet apprentissage. Cette première partie de notre travail est relatée dans ce rapport de recherche.

La deuxième partie de la recherche, de type recherche-action et recherche-production, est dédiée d'une part à la mise au point d'un parcours d'apprentissage en quatrième primaire et d'activités de remédiation en cinquième et sixième primaire, ainsi qu'au premier degré différencié et, d'autre part, à la conception d'un outil diagnostique informatisé. Cette deuxième partie de la recherche fait l'objet d'une publication spécifique à destination des enseignants.

Motivation de la recherche

Apparus dans le domaine de la mesure des grandeurs depuis « La disme » de Stevin (1585), les nombres décimaux font encore davantage partie de notre environnement depuis le passage à l'Euro. Les nombres décimaux ont donc de nombreuses applications dans la vie quotidienne tout en étant une étape incontournable dans l'acquisition de notre culture mathématique.

Pourtant, les évaluations externes en Communauté française, ainsi qu'une littérature abondante, indiquent que leur apprentissage ne va pas de soi pour de nombreux élèves. Parmi les multiples items de ces évaluations, nous pouvons relever que sur 1742 élèves de la troisième année de l'enseignement secondaire général évalués en 1998, seuls 74,6% sont

[1] Dans la suite de ce document, *Communauté française* signifiera *Communauté française de Belgique*.
[2] CREM asbl, 5 rue Émile Vandervelde, 1400 Nivelles.
[3] Unité PSED, 10 place du Cardinal Mercier, 1348 Louvain-la-Neuve.

capables d'ordonner correctement les nombres 8,10 / 8,01 / 8,121 et 8,6 (Communauté française, 1998). Les publications relatives à ces évaluations externes ne font part que des pourcentages de réponses correctes et pas des types d'erreurs commises par les élèves. Par ailleurs, différents auteurs (e.a. Brousseau, 1998 ; Desmet, Grégoire, & Mussolin, 2010 ; Nesher & Peled, 1986 ; Resnick & al., 1989 ; Sackurd-Grisvard & Léonard, 1985) ont décrit des types d'erreurs possibles.

Sans les développer toutes ici, observons qu'un bon nombre d'entre elles sont dues à une difficulté d'intégrer ces nouveaux nombres aux connaissances antérieures relatives aux nombres naturels. C'est là un premier type de difficulté qui peut être conçu comme relativement universel puisque, quel que soit le type d'enseignement proposé aux élèves, les premiers nombres rencontrés restent les nombres naturels. En ce sens, cette tendance à traiter les décimaux comme des nombres naturels est un obstacle épistémologique tel que décrit par Bachelard (1938). Un deuxième type d'erreurs serait directement lié aux situations d'apprentissage qui ont été proposées aux élèves. Il s'agirait alors, selon Brousseau (1998), d'obstacles didactiques. *A priori*, nous pouvons penser que les obstacles didactiques peuvent être levés par une diversification suffisante dans les situations d'apprentissage utilisées. Cette hypothèse a été mise à l'épreuve lors de l'expérimentation didactique. Les résultats tendent à montrer qu'il est plus raisonnable de diversifier les approches plutôt que d'appuyer les apprentissages sur un seul socle, comme la monnaie par exemple.

Méthodologie

Un premier volet de la recherche a été, de relever les différents types d'erreurs commises par les élèves de la Communauté française des deuxième et troisième cycles primaire. Cette observation des types d'erreurs a été réalisée d'abord de manière collective, en groupe classe. Leur répartition selon les années scolaires a également été examinée de manière attentive. Ensuite, afin d'approfondir la compréhension de ces erreurs, des entretiens individuels ont été réalisés avec les élèves qui les commettent.

Ces premières analyses ont notamment permis de mettre au point le logiciel d'évaluation diagnostique DECIVAL et de préparer les séquences d'activités d'apprentissage et de remédiation différée.

Un second volet de la recherche concernait les situations d'apprentissage proposées aux élèves. Nous nous sommes intéressés aux conditions didactiques qui favorisaient ou pouvaient freiner l'acquisition du concept de nombre décimal chez des élèves des troisième et quatrième degrés de l'enseignement obligatoire, ainsi qu'au premier degré de l'enseignement secondaire.

À cette fin, nous avons analysé les programmes des quatre principaux réseaux en Communauté française ainsi que certains manuels pour l'enseignement primaire. Une expérimentation didactique d'activités d'apprentissage des nombres décimaux, en lien avec une analyse épistémologique a également été mise en place. Celle-ci a été réalisée à partir d'une méthodologie de comparaison entre un groupe contrôle d'élèves et un groupe expérimental d'élèves auxquels nous avons proposé les situations didactiques préparées. Les résultats ont montré des différences significatives entre les deux groupes quant à l'apprentissage des nombres décimaux.

Le rapport de recherche

Dans le chapitre 2, nous exposons une analyse épistémologique des nombres décimaux, situés dans le contexte global de l'avènement des nombres et de la théorie des nombres.

S'intéresser à l'enseignement d'une notion c'est aussi analyser comment cet enseignement a pu évoluer au cours des temps. Ainsi, le chapitre 3 expose une analyse des programmes de l'enseignement des nombres décimaux en Belgique puis en Communauté française, depuis 1842 jusqu'à nos jours.

Mais s'intéresser à l'enseignement d'une notion nécessite également de prendre connaissance des moyens d'enseignement, les manuels scolaires en sont un. Nous avons tenté dans le chapitre 4 d'analyser huit collections de manuels scolaires (cinq manuels belges, deux manuels français et un manuel suisse) à partir de quelques questions relatives à l'épistémologie, à la didactique, aux outils de représentation et au lexique.

Au chapitre 5, nous exposons le parcours didactique que nous avons expérimenté et justifions les choix épistémologique et didactiques qui ont guidé son élaboration, notamment à partir d'une argumentation basée sur des recherches en sciences cognitives et à partir de nos expérimentations.

Enfin, dans le cadre de la recherche, au chapitre 6, nous exposons une évaluation du dispositif didactique et les résultats de cette étude longitudinale.

Les autres documents produits suite à notre recherche

Outre la publication de ce rapport à caractère scientifique, des documents à destination des enseignants et un logiciel d'évaluation diagnostique, nommé DECIVAL, sont également disponibles.

Les documents pour les enseignants comprennent un ensemble d'activités à proposer en 4^{e} primaire pour rencontrer les nombres décimaux, des propositions de parcours de remédiation avec des élèves de 5^{e} et 6^{e} primaire en difficulté au niveau de l'apprentissage de ces nombres, d'autres propositions pour l'enseignement différencié de l'enseignement secondaire et le guide utilisateur du logiciel DECIVAL conçu dans le cadre de l'évaluation diagnostique.

Le logiciel DECIVAL est un outil informatique permettant de mettre en évidence la manière avec laquelle les élèves traitent les nombres décimaux. Cet outil a été conçu dans la perspective des priorités du *Contrat pour l'école* que sont la maîtrise des compétences de base (priorité 2), la préparation des enseignants à la détection des difficultés et à la remédiation (priorité 5) et la mise à disposition d'outils pédagogiques (priorité 6).

Bibliographie

BACHELARD, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique.* Paris : Vrin.

BROUSSEAU, G. (1998). *La théorie des situations didactiques.* Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

COMMUNAUTÉ FRANÇAISE DE BELGIQUE (1998). *Évaluation externe non-certificative*, consultée le 30/08/2010 sur la page *http://www.enseignement.be/index.php?page=25267*.

DESMET, L., GRÉGOIRE, J., & MUSSOLIN, C.(2010). Developmental changes in the comparison of decimal fractions. *Learning and Instruction, 20*, 521-532.

NESHER, P., & PELED, I. (1986). Shifts in reasoning. The case of extending number concepts. *Educational Studies in Mathematics, 17*, 67-79.

RESNICK, L. B., NESHER, P., LEONARD, F., MAGONE, M., OMANSON, S., & PELED, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors : the case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 8-27.

SACKUR-GRISVARD, C., & LEONARD, F. (1985). Intermediate cognitive organization in the process of learning a mathematical concept : the order of positive decimal numbers. *Cognition and Instruction, 2*(2), 157-174.

Chapitre 2

Des nombres naturels aux nombres réels, en mathématiques et dans l'enseignement.

La première version de ce texte a été rédigée par Nicolas ROUCHE *qui, conformément aux habitudes du* CREM *l'a diffusé à toutes les personnes intéressées, afin de recueillir leurs remarques et suggestions. La détérioration de son état de santé ne lui a malheureusement pas permis d'établir une version définitive avant son décès. En conséquence, ce texte a été finalisé sur base des remarques reçues et sous la responsabilité du Président du* CREM.

* * *

Pour le sens commun, les nombres servent essentiellement à exprimer des *quantités*, qu'il s'agisse de quantités discrètes (celles que l'on compte) ou de quantités continues (celles que l'on mesure). *Compter*, c'est d'abord *énumérer* des objets. On peut considérer le résultat comme un *rapport* de deux *grandeurs* dont la deuxième est une *unité naturelle* qui, *dans la plupart des cas s'impose* : 6 billes, c'est 6 fois une bille. Et *mesurer*, c'est déterminer le *rapport* à *une unité convenue* telle que le mètre, l'heure, le kilogramme, ... Ci-après, nous appellerons *nombres pour mesurer* ces nombres qui expriment des quantités. Ce sont les premiers que l'on étudie à l'école.

Il existe plusieurs autres sortes de nombres, les principaux étant les nombres munis d'un signe (appelés parfois *nombres relatifs*) et les nombres complexes. Ils ont d'autres usages que simplement la mesure : par exemple, ils servent à situer des points dans un plan ou dans l'espace (ce sont des coordonnées), ou encore à donner à certains types d'équations des solutions ignorées auparavant.

Les nombres pour mesurer sont, dans un ordre de généralité croissante, les naturels, les décimaux positifs, les rationnels positifs et les réels positifs. Parmi ceux-ci, les irrationnels sont également des nombres pour mesurer, bien qu'ils ne puissent généralement pas être obtenus par la manipulation d'appareils de mesure. À la section 2.1, nous les présentons dans cet ordre, en montrant ce qui se conserve et ce qui change à chaque étape. Ce parcours n'est pas historique car, dans l'histoire, les autres sortes de nombres et les autres usages des nombres sont apparus en même temps que progressait l'idée de mesure.

À la section 2.2, nous esquissons (sans plus) l'histoire des nombres, sans nous limiter aux nombres pour mesurer. D'ailleurs, envisager l'histoire des nombres en se bornant à l'évolution de la mesure serait trahir la vérité historique.

Enfin, à la section 2.3, nous analyse la notion de généralisation. Celle-ci est une clé pour expliquer la genèse des nombres.

2.1 Les nombres pour mesurer

Pour chaque catégorie de nombres — les naturels, les décimaux positifs, les rationnels positifs et les réels positifs — nous répondons à cinq questions.

1) À quels besoins pratiques ou théoriques répondent ces nombres ?

2) Comment les nomme-t-on et les écrit-on ? C'est la question de la *numération*.

3) On applique à ces nombres les quatre opérations de l'arithmétique. Quelles familles de problèmes celles-ci permettent-elles de résoudre ?

4) Quels procédés, quelles procédures utilise-t-on pour effectuer ces opérations mentalement ou par écrit ?

5) Quelles propriétés fondamentales des nombres utilise-t-on pour expliquer et justifier ces procédures ? Nous parlerons à cet égard des *propriétés de structure*.

Dans cette section, nous ne nous occupons que de nombres positifs. Par raison de concision, nous omettrons l'adjectif *positif*. Ainsi jusqu'à nouvel ordre, *décimal* voudra dire *décimal positif*, *rationnel* voudra dire *rationnel positif*, etc.

2.1.1 Les nombres naturels

Origine

Étant donné deux ensembles finis d'objets, on voudrait savoir *s'il y a moins, autant ou plus d'éléments dans l'un que dans l'autre*. Si les deux ensembles sont tout petits, un simple regard fournit la réponse. Sinon, on peut essayer d'établir entre les deux ensembles une correspondance terme à terme, ce qui est une opération physique.

On peut aussi se servir des nombres. Par *comptage*, on fait correspondre un nombre à chacun des deux ensembles, puis on compare les deux nombres. Cette comparaison est une opération intellectuelle plutôt qu'une perception ou une opération physique.

Les nombres engendrés par comptage[1] sont les *nombres naturels* 0, 1, 2, 3, etc.

[1] *Zéro* et *un* ne servent pas immédiatement à compter. Cependant, on range ces deux nombres parmi les naturels.

Lorsque l'on dénombre un ensemble, on part de celui-ci et on arrive au nombre. L'opération réciproque consiste à partir du nombre et à constituer un ensemble possédant ce nombre d'éléments.

Lorsqu'ils servent, comme nous venons de le voir, à exprimer la taille d'un ensemble, on parle des *nombres cardinaux*. Mais ces nombres peuvent aussi servir à déterminer, dans une suite ordonnée d'objets, si un objet est plus proche ou plus loin qu'un autre de l'origine de la suite. Dans ce genre d'usage, on parle des *nombres ordinaux*.

Numération

Chaque nombre doit être identifié à un mot, à une locution de la langue commune, ou à une expression chiffrée. C'est ce que l'on appelle la *numération*.

Si on se contente d'affecter un mot ou un symbole à chaque nombre, on est obligé, en allant vers des nombres de plus en plus grands, de créer de plus en plus de mots ou de symboles. On rencontre ainsi très tôt une impossibilité pratique.

On peut alors grouper les éléments des ensembles, faire des paquets, par exemple de dix, et ensuite compter les paquets.

Quand cette façon de faire s'avère elle-même trop pénible, on peut faire des paquets de paquets, puis des paquets de paquets de paquets, et ainsi de suite. On nomme alors ces paquets successifs, par exemple comme faisaient les Romains : X, C, M, $\subset\!|\!\supset$, $\subset\subset\!|\!\supset\supset$, etc. Lorsqu'on veut aller très loin dans la numération, on doit inventer de nouveaux symboles pour désigner les paquets de plus en plus grands.

On peut alors adopter une numération de position, comme celle dont nous nous servons couramment. *Avec les dix chiffres* 0, 1, 2, ... 9, on peut alors exprimer des nombres aussi grands que l'on veut (à condition d'avoir le temps).

Notons qu'à lorigine, le zéro ne servait qu'à sert à marquer les rangs vides dans l'expression chiffrée d'un nombre. Ce n'est que lors de la formalisation de la théorie des ensembles qu'il a été interprété comme le nombre d'éléments de l'ensemble vide, ce qui ne nécessite aucun comptage.

Problèmes, opérations

On définit sur les naturels les quatre opérations bien connues : l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Ces opérations facilitent la résolution de plusieurs catégories de problèmes. Voyons cela.

Voici quelques exemples de questions familières.

> Je réunis deux tas, l'un de 17 jetons et l'autre de 32. Pour connaître le nombre de jetons de la réunion, *je ne dois pas compter*, je peux simplement faire une addition.

> Je suis sur la treizième case du jeu de l'oie et j'avance de 8. Pour savoir où j'arrive, *je ne dois pas recompter* les cases depuis le début, je peux également faire une addition.
> J'ai 27 billes et j'en retire 13. Pour savoir ce qui reste, *je ne dois pas compter*, je peux faire une soustraction.

Voici encore deux questions.

> À combien dois-je ajouter 13 pour obtenir 58 ?
> Combien dois-je ajouter à 13 pour obtenir 58 ?

Dans ces deux questions, on parle d'*ajouter*, mais on peut y répondre par une *soustraction.* La soustraction est l'opération réciproque de l'addition. L'addition et la soustraction sont deux opérations parentes. Les questions ci-dessus[2] et leurs analogues peuvent être considérées comme formant une famille[3] : la *famille des questions additives et soustractives.* L'addition et la soustraction permettent d'éviter, dans certaines circonstances, la fatigue du comptage.

Voici quelques autres questions.

> J'ai 7 boîtes contenant chacune 6 balles de ping-pong. Combien y a-t-il de balles en tout ? Pour répondre, *je ne dois pas compter* les balles. *Je peux calculer* $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$, mais ce n'est pas longtemps nécessaire : dès que la multiplication a été définie comme étant une addition répétée, je peux faire une multiplication.
> Pour savoir combien il y a de carreaux dans un rectangle de 21 carreaux sur 17, *je ne dois ni compter ni additionner*, je peux faire une multiplication.
> Si j'ai des ballons de trois tailles différentes et que pour chacune des tailles, j'ai un ballon rouge, un bleu et un jaune, pour connaître le nombre de sortes de ballons, *je ne dois pas représenter toutes les sortes et puis compter.* Je peux faire une multiplication.
> Pour partager 76 jetons entre 4 personnes, *je ne dois pas les distribuer un par un autant de fois que nécessaire.* Je peux faire une division pour constituer plus simplement les 4 parts.

Voici encore deux questions.

> Par quel nombre dois-je multiplier 13 pour obtenir 52 ?
> Quel nombre dois-je multiplier par 13 pour obtenir 52 ?

Dans ces deux questions, on parle de multiplier, mais on peut obtenir la réponse par une division. La division est l'opération réciproque de la multiplication. La multiplication et la division sont deux opérations parentes. Les questions que nous venons de parcourir et leurs analogues forment une famille : la *famille des questions multiplicatives et de division.* La multiplication et la division permettent d'éviter, dans certaines circonstances, de fastidieux comptages ainsi que des additions et soustractions répétées.

[2] On pourrait proposer d'autres questions encore, comme par exemple : De combien dois-je soustraire 27 pour obtenir 16 ? Combien dois-je soustraire de 27 pour obtenir 16 ? Toutefois, nous ne cherchons pas à faire un inventaire de tous les types de questions possibles.
[3] Sur de telles familles de problèmes, voir G. Vergnaud [1981].

Calculs, procédures

Dans un système de numération donné, on peut effecteur les quatre opérations mentalement ou par écrit. Nous ne rappellerons pas ici les procédés que l'on utilise.

Ces procédés s'appuient sur *des propriétés des nombres qui sont indépendantes du système de numération*. Ce sont par exemple la commutativité et l'associativité de l'addition, et d'autres analogues. Faisons maintenant le point sur ces propriétés de structure.

Propriétés de structure

Voici, parmi d'autres, quelques propriétés importantes des nombres naturels. Dans ce qui suit, sauf mention contraire, x, y et z représentent trois nombres naturels quelconques.

L'addition

(I.1) $x + (y + z) = (x + y) + z$; (associativité)

(I.2) $x + y = y + x$; (commutativité)

(I.3) $0 + x = x$; (élément neutre)

(I.4) si $x + z = y + z$, alors $x = y$.

La multiplication

(I.5) $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$; (associativité)

(I.6) $x \times y = y \times x$; (commutativité)

(I.7) $1 \times x = x$; (élément neutre)

(I.8) si $x \times z = y \times z$ et $z \neq 0$, alors $x = y$.

L'addition et la multiplication

(I.9) $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$. (distributivité)

L'ordre

(II.1) soit $x < y$, soit $x = y$, soit $y < x$; (trichotomie)

(II.2) $x < y$ et $y < z$ impliquent $x < z$. (transitivité)

L'ordre et les opérations

(II.3) $x < y$ implique $x + z < y + z$;

(II.4) $0 < x$ et $0 < y$ impliquent $0 < x \times y$;

(II.5) si $x < y$, il existe un $z \neq 0$ tel que $x + z = y$.

Commentaires.

On peut, à partir des propriétés relevées ci-dessus, démontrer toutes les propriétés ordinaires utilisées dans les calculs. Relevons en outre les points suivants.

- On peut, à partir de (II.5), définir la soustraction. Mais il y a une restriction : $(y - x)$ n'est défini que si $x = y$ ou si $x < y$. Par exemple $(3 - 4)$ n'est pas défini.
- On peut définir la division comme opération réciproque de la multiplication. Ici aussi, il y a une restriction. En effet, $(x : y)$ n'existe que si x est un multiple de y. Par exemple $(4 : 3)$ n'est pas défini, et $(5 : 2)$ non plus.
- Chaque nombre naturel possède un successeur. Il n'y a pas de nombre naturel entre deux nombres naturels successifs. Lorsqu'on représente les nombres naturels comme ci-dessous, sur une demi-droite, chaque point représentatif d'un nombre est isolé.

Fig. 2.1 Demi-droite graduée.

- Si un nombre naturel x est multiplié par un autre $y > 1$, le produit est plus grand que x. En termes familiers, la multiplication *fait grandir.*

Remarque. Il y a deux façons de présenter la notion d'ordre : soit à partir de la relation *plus petit ou égal* ($\leq$), soit à partir de la relation *strictement plus petit* ($<$). Nous avons ci-dessus choisi la deuxième façon, parce qu'elle est de loin plus conforme au sens commun (voir à cet égard N. Rouche et al, 2006). Signalons néanmoins que les mathématiciens réservent le mot *ordre* à des relations réflexives telles que $\leq$ et qualifient $<$ d'*ordre strict.*

2.1.2 Les nombres décimaux

Origine

Pour savoir si deux grandeurs de la même espèce sont égales ou inégales, on peut souvent les comparer directement. Par exemple, on dispose deux tiges côte à côte pour comparer leurs longueurs, on pose deux objets sur les plateaux d'une balance pour comparer leurs poids.

Mais on peut aussi se servir des nombres : on mesure les deux grandeurs dans une même unité, puis on compare les mesures. Cette comparaison est une opération intellectuelle.

Les nombres décimaux servent d'abord à exprimer des mesures de grandeurs dans le système décimal d'unités de mesure. On les engendre par l'opération de mesure elle-même. Pour mesurer par exemple une longueur, on reporte sur celle-ci l'unité choisie. Si la longueur contient l'unité un nombre entier de fois, on obtient un nombre naturel. Sinon, il y a un reste que l'on mesure avec une sous-unité décimale de l'unité choisie. On poursuit les opérations de cette façon jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de reste ou, à tout le moins, jusqu'à ce que l'on ne discerne plus de reste.

Lorsque l'on mesure une grandeur, on part de celle-ci et on arrive à sa mesure. L'opération réciproque consiste à partir d'une mesure et à constituer une grandeur qui ait cette mesure.

Comme les comptages, les mesures sont des opérations pratiques. L'explication ci-dessus montre que les nombres naturels sont des cas particuliers des nombres décimaux.

Numération

Mentionnons pour mémoire l'écriture bien connue des nombres à virgule. Nous qualifions ici de *décimal* tout nombre naturel et tout nombre pouvant être écrit avec une virgule, avec un nombre fini de chiffres à gauche de celle-ci et avec un nombre fini de chiffres à droite[4].

Problèmes, opérations

Les décimaux généralisent les naturels, nous venons de le constater. On étend les quatre opérations de l'arithmétique à cette nouvelle catégorie de nombres. Ces opérations plus générales permettent de répondre à de nouvelles catégories de problèmes. Voyons cela.

Commençons par l'addition et la soustraction.

> Deux objets pèsent respectivement 2,7 kg et 3,2 kg. On additionne les deux poids, c'est-à-dire que l'on rassemble les deux objets pesants. Pour connaître le poids de la somme, *il n'est pas nécessaire de peser les deux objets* simultanément. Une addition suffit.
>
> On ôte un poids de 2,7 g d'un autre de 18 g. Pour connaître le poids de ce qui reste, *il n'est pas nécessaire de peser ce reste.* Il suffit de faire une soustraction.

Voyons maintenant la multiplication et la division.

> On donne un sens à l'opération de multiplier une grandeur par un nombre décimal[5]. On multiplie une longueur de 2,7 m par 3,5. Pour cela, on prend 3 fois la longueur en question, puis on ajoute au résultat 5 dixièmes de cette longueur. Ce sont là des opérations physiques[6]. Pour connaître la longueur résultante, *il n'est pas nécessaire de la mesurer.* Une multiplication suffit.

[4] Ci-après, nous rencontrerons des nombres comportant une infinité de chiffres à droite de la virgule. Au sens où nous l'entendons ici, de tels nombres ne sont pas des nombres décimaux. Ils sont néanmoins des *nombres écrits dans le système décimal de numération.*

[5] On voit apparaître ici la notion de rapport : le *rapport de deux grandeurs* est le nombre par lequel il faut multiplier l'une pour obtenir l'autre.

[6] Partager une longueur en dix dixièmes doit donc pouvoir être réalisé physiquement.

> Quelle est l'aire en m^2 d'un rectangle dont les côtés mesurent 1,2 m et 3,6 m ? Pour le savoir, *il n'est pas nécessaire* de mesurer l'aire en reportant l'unité carrée sur le rectangle. Une multiplication suffit.

Comme c'était le cas pour les nombres naturels, il apparaît que, pour les décimaux, la soustraction est l'opération réciproque de l'addition, et la division est l'opération réciproque de la multiplication. Voici pour en témoigner deux questions formulées en terme de multiplication et qui peuvent se résoudre par une division.

> Par quel nombre faut-il multiplier 2,2 kg pour obtenir 8,58 kg ?
> Quel poids faut-il multiplier par 2,2 pour obtenir 8,58 kg ?

Calcul, procédures
Mentionnons pour mémoire les procédés bien connus pour effectuer les quatre opérations sur les nombres décimaux. Ces procédés se ramènent aux opérations correspondantes sur les naturels, à ceci près qu'il faut y ajouter les règles de gestion de la virgule, lesquelles supposent une bonne assimilation de la numération de position.

Propriétés de structure

Rappelons que les nombres naturels sont des cas particuliers de décimaux, bien qu'on les écrive sans virgule. Lorsque l'on passe des naturels aux décimaux, *toutes les propriétés mentionnées à la section 2.1.1 sont conservées.* Mais de nouvelles propriétés apparaissent. Voyons cela.

– La division n'est pas toujours définie. Elle est définie chaque fois que le naturel obtenu en effaçant la virgule du diviseur[7], a 2 et 5 pour seuls diviseurs premiers. Les divisions 5 :2=2,5 et 1,2 :0,25=4,8 sont définies.
  Par contre 2 : 3 et 0,5 : 1,1 ne le sont pas. Si on tente d'appliquer à (2 : 3) l'algorithme classique de la division, l'opération ne s'achève jamais. On obtient 0,66666…, une infinité de chiffres à droite de la virgule. On n'obtient pas un nombre décimal. De même (0,5 :1,1) conduit à 0,45454545…
– Commençons par un bref préalable. Nous dirons qu'une suite de nombres est *croissante* lorsque chaque nombre de la suite est plus petit que le suivant. Nous dirons de même qu'une suite est *décroissante* lorsque tout nombre de la suite est plus grand que le suivant. Revenons-en maintenant aux nombres décimaux.

  Pour tout nombre décimal $x \neq 0$, il existe des suites infinies croissantes de nombres décimaux qui s'approchent de x d'aussi près que l'on veut. Par exemple, la suite 1,3 1,35 1,395 1,3995 1,39995 … s'approchent de 1,4 d'aussi près que l'on veut. Il existe aussi des suite infinies décroissantes de nombres décimaux qui s'approchent de x d'aussi près que l'on veut. Par exemple 1,5 1,43 1,403 1,4003 1,40003… s'approche de 1,4 d'aussi près que l'on veut.

[7] Autrement dit : le naturel obtenu en multipliant le diviseur par une puissance de 10 dont l'exposant est le nombre de chiffres du diviseur situés à droite de la virgule.

De cette propriété résulte qu'entre deux nombres décimaux quelconques, il existe une infinité de nombres décimaux. Nous parlerons ici à cet égard de la *densité* des nombres décimaux. Les nombres naturels ne jouissent pas d'une propriété analogue : entre deux nombres naturels successifs, il n'y a pas d'autre nombre naturel. Chaque nombre naturel, nous l'avons remarqué, a un successeur *immédiat*. Aucun nombre décimal n'a de successeur *immédiat*. Beaucoup d'élèves pensent que le successeur immédiat de 1,43 est 1,44. Ils oublient l'existence, par exemple, de 1,432.

- Contrairement encore à ce qui se passe pour les nombres naturels, « multiplier par un décimal ne fait pas grandir ». Autrement dit, si un nombre décimal x est multiplié par un autre y, le produit peut être plus petit que x. Il suffit, pour que ce soit le cas, que $y < 1$. Par exemple $5\times$ 0,25 = 1,25.
- De même, diviser par un décimal ne fait pas toujours diminuer.

2.1.3 Les nombres rationnels

Origine

Les fractions naissent de l'idée de couper une grandeur en parts égales, puis de prélever des parts. Dans certains cas, une fraction peut aussi exprimer un rapport de deux grandeurs de même nature A et B : si on peut trouver une unité de mesure pour laquelle ces deux grandeurs peuvent être mesurées par des nombres entiers[8]. Le *rapport* de la grandeur A à la grandeur B est alors la fraction de B qu'il faut prendre pour obtenir A. Les fractions peuvent aussi exprimer des mesures : si une grandeur u est choisie comme unité de mesure d'un type de grandeur, la mesure d'une grandeur de ce type commensurable avec u est son rapport à u. À travers les mesures, les fractions servent aussi à comparer les grandeurs.

Un *nombre rationnel* est, par définition, un nombre qui peut s'écrire sous forme de fraction. Par exemple $\frac{5}{2}$ est un nombre rationnel. Il en va de même de $\frac{4}{3}$.

Chaque nombre rationnel peut être écrit d'une infinité de façons sous forme de fraction. Par exemple

$$\frac{5}{2} = \frac{10}{4} = \frac{15}{6} = \frac{20}{8} = \cdots$$

Les nombres naturels sont des cas particuliers de nombres rationnels. Par exemple 4 peut s'écrire sous la forme $\frac{4}{1}$, et 23 sous la forme $\frac{23}{1}$, etc.

Les nombres décimaux sont aussi des cas particuliers de nombres rationnels. On a par exemple

$2{,}5 = \frac{25}{10}$ et $0{,}03 = \frac{3}{100}$.

Numération

[8] On dit alors que les deux grandeurs sont *commensurables* et qu'elles admettent une *unité commune de mesure.*

L'écriture habituelle des fractions est bien connue. On y trouve un numérateur, une barre de fraction et un dénominateur.

On peut interpréter toute fraction comme un quotient, le quotient étant pris au sens de la définition des décimaux. Mais attention, comme nous allons le voir, l'algorithme de la division des décimaux ne donne pas toujours un décimal.

Si le dénominateur de la fraction n'a comme diviseurs premiers que des 2 et des 5, alors l'algorithme de la division fournit effectivement un nombre décimal. Par exemple

$$\frac{3}{25}$$

$= 0{,}12$ et

$$\frac{37}{20}$$

$= 1{,}85$. Si le dénominateur comprend d'autres facteurs premiers, l'algorithme de la division ne s'arrête pas. On obtient un nombre qui, à partir d'un certain rang, est constitué par la répétition indéfinie d'une même suite finie de chiffres. Par exemple

$$\frac{1}{3}$$

$= 0{,}3\,3\,3\,3\ldots$ et

$$\frac{419}{365}$$

$= 1{,}5\,39\,39\,39\ldots$ ou encore

$$\frac{5}{7}$$

$= 0{,}714285\,714285\ldots$ La suite de chiffres qui se répète est appelée *période* du nombre. De tels nombres sont dits *périodiques*. On peut démontrer que tout nombre périodique peut être représenté par une fraction.

Ceci dit, voici une nouvelle définition des nombres rationnels : ce sont les décimaux auxquels on adjoint les nombres périodiques.

Problèmes, opérations

On étend aux rationnels les quatre opérations de l'arithmétique. Ces opérations s'effectuent soit sur les fractions, soit sur les décimaux ou les nombres périodiques correspondants.

Les questions auxquelles on peut répondre en s'appuyant sur ces opérations sont substantiellement du même type que celles relatives aux décimaux. Évoquons-en quelques-unes.

Les rationnels pouvant exprimer des mesures, on peut s'en servir pour *additionner* et *soustraire* des grandeurs mesurées. On peut s'en servir pour *multiplier* une grandeur mesurée, ce qui crée, selon le cas, une grandeur plus grande ou plus petite. Si deux fractions mesurent respectivement les côtés d'un rectangle dans une unité donnée, le produit des deux fractions fournit l'aire du rectangle sous forme d'une fraction.

Ajoutons que les fractions s'avèrent indispensables dans l'expression des probabilités. Le théorème des probabilités totales conduit à additionner des fractions, et le théorème des probabilités composées conduit à les multiplier.

Calcul, procédures

Évoquons pour mémoire les règles qui régissent les opérations sur les fractions. Ces règles permettent d'effectuer toutes les opérations en un nombre fini de pas.

Par contre, les opérations sur les représentations décimales des rationnels sont plus difficiles à maîtriser. En effet, dès qu'il s'agit de nombres périodiques, on ne peut plus appliquer les règles habituelles pour les décimaux. En effet, pour ceux-ci, on commence les opérations par la droite. Mais un nombre périodique ne se termine pas à droite. Nous ne nous étendrons pas davantage sur cette difficulté.

Propriétés de structure

Lorsque l'on passe des décimaux aux rationnels, toutes les propriétés mentionnées à la section 2.1.1 sont conservées. Par delà ces propriétés, voyons donc ce que les rationnels apportent de neuf.

- Contrairement à ce qui se passe pour les décimaux, la division est définie dans tous les cas pour les rationnels positifs (il faut, comme d'habitude, exclure zéro comme diviseur).
- Pour tout nombre rationnel $x \neq 0$, il existe des suites infinies croissantes de nombres décimaux qui s'approchent de x d'aussi près que l'on veut. Par exemple, la suite 0,3 0,33 0,333 0,3333 0,33333... s'approche de $\frac{1}{3}$ d'aussi près que l'on veut. Il existe aussi des suites infinies décroissantes de nombres décimaux qui s'approchent de x d'aussi près que l'on veut. Par exemple 0,4 0,34 0,334 0,33340,33334... s'approche également de $\frac{1}{3}$ d'aussi près que l'on veut.
  De cette propriété résulte qu'entre deux nombres rationnels quelconques, il existe une infinité de nombres décimaux, et donc aussi de nombres rationnels, puisque les décimaux sont des rationnels.

L'avantage décisif des rationnels sur les décimaux est donc que la division y est possible dans tous les cas (0 exclu).

2.1.4 Les nombres réels

Origine

Comme les nombres décimaux, les nombres rationnels peuvent exprimer des mesures de grandeurs et des rapports aussi précisément que l'on veut. Pourquoi alors a-t-on besoin de nombres supplémentaires, ceux que l'on appelle les nombres réels ? Ces nouveaux nombres doivent permettre d'exprimer des rapports de grandeurs *non commensurables. Les raisons ne sont plus ici d'ordre pratique.*

Si on cherche, par approximations successives, un nombre décimal dont le carré soit égal à 7 (il s'agit du nombre qui s'écrit aussi $\sqrt{7}$), on s'aperçoit que l'on tombe sur un nombre qui comporte une infinité de chiffres à droite de la virgule et que *ce nombre n'est pas périodique.* Bien entendu, ce n'est pas en tâtonnant que l'on démontre l'inexistence d'une période, car une période peut être arbitrairement longue. Donc, si loin que l'on calcule, on ne peut pas décider de cela. Mais cela se démontre.

Nous avons vu que, dans tout intervalle de la demi-droite des rationnels positifs, il y a une infinité de rationnels. Chacun de ces rationnels correspond à un point sur la demi-droite. Cela fait beaucoup de points, dont chacun porte une étiquette rationnelle. Ceci dit, y a-t-il des points qui demeurent sans étiquette rationnelle ? La réponse est oui. Il y a donc des *trous* dans ce que l'on peut appeler la demi-droite rationnelle. Montrons un tel trou.

La diagonale d'un carré de côté unité a pour mesure $\sqrt{2}$. Donc, si on porte cette diagonale à partir de 0 sur la demi-droite des nombres, on arrive à un point qui ne porte pas d'étiquette rationnelle (voir figure ci-dessous). De tels nombres sont appelés *irrationnels.*

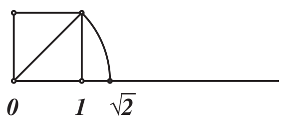


Fig. 2.2 Diagonale d'un carré et $\sqrt{2}$.

Les nombres irrationnels joints aux rationnels forment l'ensemble des nombres *réels.* Une chose étonnante, qui se démontre aussi, est qu'il y a infiniment plus d'irrationnels que de rationnels. C'est difficile à croire ! Encore faut-il, pour affirmer cela, s'entendre sur ce que *infiniment plus* veut dire.

Les nombres réels ont aussi d'autres usages. Par exemple, ils servent à définir la somme (on dit plus volontiers la *limite*) de séries infinies telles que

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots$$

Les nombres réels généralisent les rationnels. Et donc ils peuvent servir aux mêmes usages que ceux-ci. Mais, comme nous venons de le voir, les irrationnels répondent à de nouveaux besoins : étudier le plus précisément possible ces nombres qui, tels $\sqrt{7}$, résistent à toute représentation décimale finie ou périodique ; reconnaître et donner un statut aux limites de suites infinies ; calculer avec une précision aussi grande que l'on veut la longueur des segments qui, tels la diagonale d'un carré, sont bien définis géométriquement mais impossibles à mesurer (en l'occurrence dans une unité imposée, le côté du carré). De telles mesures dépassent tous les besoins de la pratique ordinaire. Les nombres réels jouent un rôle dans le développement déductif de la géométrie et de l'analyse mathématique. Ils répondent tout d'abord à des exigences théoriques.

Mais la géométrie et l'analyse, qui sont d'abord des constructions théoriques autonomes, jouent un rôle important dans la compréhension du monde physique et dans l'étude des objets techniques les plus évolués. Ce qui fait que les nombres réels débouchent, à la suite de longs détours, sur des applications pratiques bien différentes de la simple mesure des grandeurs.

Numération

Nous l'avons vu, en numération décimale de position, les nombres réels peuvent comporter une infinité de chiffres sans régularité facile à saisir comme, par exemple, l'existence d'une période. Certains nombres non périodiques révèlent tout de même une régularité perceptible. Tel est par exemple le cas de 0,1001000100001000001000000 1..., à supposer que ce nombre se poursuive comme il a commencé.

Souvent, on renonce dans les calculs à représenter les nombres irrationnels en numération décimale. On leur donne une représentation propre, comme par exemple $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ou π, ce dernier nombre représentant le rapport, qui est toujours le même, entre la circonférence d'un cercle et son diamètre.

Problèmes, opérations

Les nombres réels généralisent les rationnels. Donc ils peuvent servir aux mêmes usages pratiques que ces derniers. Mais ils sont à cet égard des outils beaucoup trop puissants. On ne s'étonnera donc pas qu'ils servent surtout à construire les diverses théories géométriques et l'analyse mathématique.

Calcul, procédures

Les algorithmes usuels des quatre opérations de l'arithmétique sont impossibles à pratiquer sur des nombres dont on ne saisit pas la suite infinie de chiffres. On doit se contenter de calculs approximatifs.

Ceci dit, on peut manipuler certaines classes d'irrationnels en s'appuyant sur leur définition. On peut pas exemple écrire que

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}.$$

Par contre, on n'arrive pas à donner à

$$\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

une forme plus compacte ou plus simple que celle-là. Bien entendu, on a que

$$2\pi + 3\pi = 5\pi,$$

et donc il arrive que l'on puisse donner une forme compacte à la somme de deux nombres irrationnels.

Propriétés de structure

Les nombres réels possèdent toutes les propriétés de structure des rationnels. Voyons donc en quoi ils se distinguent de ceux-ci.

- Pour tout nombre réel $x \neq 0$, il existe des suites infinies croissantes de nombres décimaux qui s'approchent de x d'aussi près que l'on veut. Si x est décimal ou rationnel, la propriété va de soi (voir ci-dessus). Prenons donc comme exemple le nombre irrationnel $\sqrt{2}$. Il comporte une infinité de décimales, dont les premières sont données par 1,41421356... Les autres sont parfaitement définies. Nous savons comment les calculer par tâtonnements, même s'il est vrai que personne ne pourra jamais les écrire toutes. La suite 1,4 1,41 1,414 1,4142 1,41421... , prolongeable théoriquement autant que l'on veut, approche $\sqrt{2}$ d'aussi près que l'on veut. Et de même, la suite 1,5 1,42 1,415 1,4143 1,41422... est une suite infinie décroissante de décimaux qui l'approche d'aussi près que l'on veut.
- Mais les nombres réels possèdent une propriété de structure supplémentaire. Supposons que deux suites de rationnels, la première croissante et la seconde décroissante,

  $$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \ldots \quad \text{et} \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \ldots$$

  soient telles que
  - tous les a_i soient plus petits que tous les b_i,
  - et que $b_i - a_i$ devienne aussi petit que l'on veut si on choisit i suffisamment grand.

  Alors, il y a exactement un nombre réel plus grand que tous les a_i et plus petit que tous les b_i.
- Résumons en termes concis les deux propriétés ci-dessus

  1. Si x est un nombre réel, il existe deux suites de décimaux, l'une croissante, l'autre décroissante, qui s'approchent de x d'aussi près que l'on veut.
  2. Si deux suites de décimaux (a_i) et (b_i), l'une croissante et l'autre décroissante, sont telles que $a_i < b_i$ pour tout i, et que $b_i - a_i$ devient aussi petit que l'on veut si on choisit i assez grand, alors il y a un nombre réel coincé entre les deux suites.

  En raison de cette dernière propriété, on affirme qu'il n'y a pas de trous dans la droite des nombres réels[9]. N'importe quelle écriture comportant un nombre fini ou infini de décimales représente un nombre réel et un point sur la droite des nombres.

2.1.5 Des naturels aux réels : commentaires

Le passage, esquissé ci-dessus, des naturels aux réels mérite quelques commentaires.

Nombres pratiques et nombres théoriques

[9] Du moins est-ce là ce que l'on peut affirmer si on prend le terme *nombre* en son sens habituel. Il existe une théorie des nombres appelés *non standard* qui bourre encore plus de points sur la demi-droite.

Tout d'abord, les nombres réels sont les seuls à pouvoir exprimer, dans une unité imposée, la longueur d'un segment quelconque. De ce point de vue, ils sont les nombres pour mesurer les plus performants.

Toutefois, ils souffrent d'un inconvénient majeur pour certains types d'utilisateurs, et peut-être même pour la plupart. En effet, les quatre opérations de l'arithmétique sont — nous l'avons vu — très difficiles à exécuter dans les réels. Et même, dans la majorité des cas, on ne peut les soumettre qu'à des calculs approchés. Pour faire cela, on se rabat sur les rationnels et, plus fréquemment encore, sur les décimaux. Les naturels et les décimaux sont les plus maniables, grâce à la numération décimale de position. Ils sont les plus utiles aux praticiens.

Ainsi, les nombres qu'utilisent le plus souvent les théoriciens de l'analyse ne sont pas les mêmes que ceux des citoyens, des commerçants et des spécialistes des sciences de la nature. Cette différence explique peut-être en partie pourquoi les mathématiciens ont la réputation de vivre dans leur tour d'ivoire, et de ne pas bien s'entendre avec beaucoup d'autres, qui ont des soucis plus immédiats[10].

[10] Ajoutons toutefois que la branche des mathématiques qui s'appelle *analyse numérique* est grande consommatrice de décimaux, mais aussi … de réels.

Les naturels comme fondement

Les nombres naturels sont à l'origine de l'idée de nombre. Mais en outre, ils sont le matériau, la référence essentielle, pour la construction des autres nombres. On s'en convainc en rappelant que toutes les propriétés **(I)** et **(II)** des naturels se transmettent aux autres catégories de nombres. Ce sont les propriétés qui fondent les règles usuelles de calcul. Les principales nouveautés dans le passage aux autres catégories concernent les approximations des nouveaux nombres par des suites de décimaux. Ces propriétés concernent la représentation numérique de plus en plus fine des grandeurs continues[11].

La notion d'ordre est primordiale

La comparaison des quantités est à l'origine des nombres. Les naturels naissent des mises en correspondance terme à terme entre ensembles finis, qui peuvent être plus ou moins grands. La comparaison des grandeurs d'une même espèce conduit aux décimaux et aux rationnels à travers l'idée de mesure.

Dans la vie quotidienne, un nombre isolé ne sert pas à grand chose. On compare les prix des marchandises ; si on se pèse, c'est pour savoir si on a maigri ou grossi ; on s'intéresse à la température qu'il fera pour la comparer à celle que l'on trouve confortable ; etc.

Dans un registre plus théorique, l'idée de fonction est centrale en mathématiques et domine les sciences de la nature. Or ce qu'une fonction, au premier stade, exprime, c'est comment une variable varie (augmente, diminue) par rapport à une autre.

Ce à quoi l'idée de nombre peut se réduire

Pour le sens commun, un nombre est ce qui s'écrit avec des chiffres. Or un usage pertinent des chiffres suppose un système de numération. Par ailleurs, il existe autant de systèmes de numération que l'on veut. Et donc *l'idée même de nombre ne saurait être attachée à aucun système de numération particulier*, quelles que soient ses qualités.

D'où la question : comment parler des nombres et les étudier sans utiliser un système de numération ? On y arrive en réduisant les nombres à leurs seules propriétés de structure. C'est ce que l'on fait dans les traités d'algèbre et d'analyse abstraites[12]. Dans ces livres, les nombres sont représentés par des lettres (ce sont pour la plupart des variables) qui obéissent aux propriétés de structure que nous avons introduites ci-dessus. Bien entendu, dès que l'on veut illustrer une propriété numérique par un exemple, force est de revenir à un système de numération.

---

[11] Notons que la généralisation de la notion de nombre conduit, si on regarde plus avant dans les mathématiques, à abandonner certaines de ces propriétés. Par exemple, les nombres complexes ne sont pas ordonnés, et la multiplication des matrices carrées ne commute pas.

[12] Par exemple le cours d'analyse de Dieudonné, 1960, ne comporte quasiment aucun nombre particulier, écrit avec des chiffres.

2.2 Survol de l'histoire des nombres

Les nombres naturels ont leur origine dans la préhistoire. Ils ont été connus et pratiqués par divers peuples de l'antiquité. Par exemple, au cours du deuxième millénaire avant J.-C., les Babyloniens utilisaient un système de numération de position fondé en partie sur la base 10 et en partie sur la base 60. Les Grecs des premiers siècles avant J.-C. utilisaient, pour écrire les nombres, des lettres de l'alphabet auxquelles, en allant vers les plus grands nombres, ils ajoutaient des accents. Mentionnons pour mémoire la numération romaine, qui est bien connue.

Euclide, au III^e^ siècle avant J.-C., reconnaissait comme nombres 2, 3, 4, etc. même pas 1, car personne ne compte 1. Pourtant, les artisans, les commerçants et les navigateurs grecs – et bien d'autres avant eux – utilisaient des fractions pour mesurer des quantités continues. *Une unité de mesure étant donnée*, on peut exprimer la mesure d'une grandeur par une fraction avec une précision aussi bonne que l'on veut. Tel n'est pas le cas si on ne dispose que des nombres naturels.

Les artisans et les commerçants sont satisfaits lorsqu'ils peuvent mesurer les quantités avec la meilleure précision pratiquement possible. Il y a des longueurs si petites que l'œil ne les voit plus, et des poids si petits qu'ils ne font pas bouger la balance. Telles sont les limites physiques et physiologiques de la précision[13]. Cependant, au fil des siècles, l'homme a eu besoin de résultats de plus en plus précis, dépassant de loin la précision "de l'œil nu". Et cela pour des besoins pratiques (détermination de la position en mer par exemple). Dans la pratique, même si elle est très précise, toute mesure est approchée.

Les mathématiques ont pris le relais et se sont intéressées aux grandeurs que l'on peut mesurer *exactement* dans une unité donnée. Bien entendu, il s'agit de grandeurs idéales, définies intellectuellement, qui donc échappent aux manipulations pratiques et ne relèvent plus que du raisonnement. Par exemple, on peut *démontrer* que si un rectangle a des côtés mesurant exactement 3 et 4 unités, sa diagonale mesure exactement 5 unités. Voilà une mesure en nombre naturel. Mais il existe aussi une foule de mesures exactes en fraction.

Aux environs du III^e^ siècle après J.-C., les fractions étaient reconnues comme nombres par l'intelligentsia mathématique, comme le montre l'œuvre de Diophante. Chez celui-ci en effet, une équation pouvait avoir une fraction comme solution.

Mais venait ensuite la question : une unité de mesure étant donnée pour une catégorie de grandeurs (longueur, aire, ...) peut-on mesurer exactement *en fraction* toutes les grandeurs de cette catégorie ? La réponse, nous l'avons vu, est *non* et elle était connue des Grecs.

Il a fallu bien des siècles pour que l'humanité mette au point les nombres manquants par-delà les fractions. Ce sont les nombres que l'on a appelés *irrationnels*, ce qualificatif témoignant des réticences qu'ils ont suscitées.

Au XVI^e^ siècle, Stevin bataillait pour qu'on reconnaisse à ces êtres bizarres, encore incom-

[13] On peut évidemment reculer les limites de la précision en utilisant des instruments tels que la loupe ou le microscope.

plètement explorés, le statut de nombre. Il écrivait[14] : « Il n'y a aucuns nombres absurdes, irrationnels, irréguliers, inexplicables ou sourds. »

Voilà, rapidement esquissé, comment ont été façonnés au fil des siècles les nombres exprimant des quantités.

Entre-temps étaient apparus les nombres munis d'un signe, parfois appelés *nombres relatifs*. Ils ont été pratiqués par les Indiens, déjà aux environs du VII^e^ siècle après J.-C., et sans doute longtemps auparavant par les Chinois[15], mais sans beaucoup influencer le cours ultérieur des mathématiques. Ils furent utilisés au XVI^e^ siècle comme instruments techniques pour résoudre des équations algébriques, mais n'étaient pourtant pas reconnus en tant que solutions. Ils furent acceptés comme nombres à part entière vers la fin du XVII^e^ siècle, au moment où la géométrie analytique est devenue une pratique commune en mathématique. Mais ils suscitèrent des résistances tenaces jusque bien plus tard. Contentons-nous, pour en témoigner, de rappeler ce que Lazare Carnot écrivait en 1803 : « Pour obtenir réellement une quantité négative isolée, il faudrait retrancher une quantité effective de rien, ôter quelque chose de rien. Comment concevoir une quantité négative isolée ? »

Vers 1870, les nombres positifs et négatifs ont été intégrés en une structure unique, celle des nombres réels. Ils ont reçu alors une forme mathématique entièrement rigoureuse, ce qui était un aboutissement majeur. Cette mise au point des réels, jointe à l'apparition des structures algébriques, puis de la théorie des ensembles, a profondément bouleversé la science mathématique. Que s'est-il donc passé ?

Pour le dire rapidement et un peu sommairement, avant ce bouleversement, sur le plan théorique la géométrie venait d'abord et les nombres ensuite ; après, il y a eu d'abord les ensembles et les nombres et ensuite la géométrie.

Les nombres réels ont d'abord été ceux qui permettaient de mesurer les grandeurs géométriques. Les irrationnels sont nés de la difficulté de mesurer la diagonale du carré et la circonférence du cercle. Les nombres étaient les enfants de la géométrie.

À partir de la fin du XIX^e^ siècle, les mathématiques ont été refondées dans l'ordre inverse. La théorie des ensembles a permis de reconstruire le système des nombres réels sans recours à la géométrie[16]. Une fois que les réels étaient disponibles, une nouvelle structure algébrique, celle d'*espace vectoriel*, permettait de reconstruire la géométrie. Celle-ci était devenue l'enfant des nombres[17]. Les ensembles et les nombres ont joui dès lors de la considération due à l'antériorité théorique.

---

[14] Les pluriels sont de Stevin lui-même.

[15] L'ouvrage intitulé *Nine chapters on Mathematical Arts* utilise des nombres négatifs. Son texte a pu évoluer au fil des siècles mais son origine pourrait être antérieure à l'ère chrétienne.

[16] Voir par exemple à cet égard E. Landau, 1951.

[17] Hilbert, 1971, et E. Artin, 1961, ont toutefois montré, de deux façons bien différentes, que les réels pouvaient naître rigoureusement dans le cadre de la géométrie.

2.3 Généralisations et obstacles épistémologiques

Passer d'une catégorie de nombres à la suivante, que ce soit des naturels aux décimaux puis aux rationnels et ensuite de ceux-ci aux réels, c'est généraliser un concept. Toutes ces généralisations ont des caractères communs. Montrons ceux-ci sur l'exemple du passage des naturels aux décimaux.

1. Le nouvel ensemble englobe le précédent.

    Les naturels sont des décimaux. Il y a plus de décimaux que de naturels.

2. Les nouveaux nombres ont de nouveaux usages, mais les anciens gardent les usages qu'ils avaient.

    Les décimaux sont une première étape vers la mesure du continu, ce à quoi les naturels sont peu appropriés.

3. Les règles d'écriture se modifient, mais on peut toujours écrire les anciens nombres comme avant.

    Les décimaux comportent l'introduction de la virgule.

4. La plupart des propriétés se conservent, mais il y en a de nouvelles. De nouvelles intuitions apparaissent.

    L'addition des décimaux est, comme celle des naturels, commutative, associative, etc. Chaque naturel possède un successeur immédiat. Tel n'est pas le cas pour les décimaux.

5. Les algorithmes pour reconnaître l'ordre et exécuter les opérations se modifient. Les anciens algorithmes sont toujours applicables aux anciens nombres.

    Avec l'arrivée des décimaux, il faut comprendre comment placer la virgule, ce qui repose sur l'extension du système de numération de position aux nouveaux nombres.

6. Les anciens nombres et leurs propriétés sont la base même sur laquelle les nouveaux nombres sont construits. On n'explique les techniques relatives aux nouveaux nombres qu'en faisant référence aux anciens.

    À condition d'ajuster deux décimaux pour qu'ils aient le même nombre de chiffres après la virgule, la règle pour déterminer quel est le plus grand est la même que pour les naturels. À part pour le placement de la virgule, les opérations sur les décimaux s'exécutent exactement comme celles sur les naturels.

Cette dernière observation montre qu'il importe de bien connaître les anciens nombres pour élaborer les nouveaux.

Par ailleurs, les changements conceptuels qui interviennent dans le passage des anciens aux nouveaux sont sources de difficultés. Certaines de celles-ci (la majorité ?) peuvent être attribuées à ce que l'on peut appeler *l'inertie des concepts*[18]. L'esprit répugne au changement. On a tendance à étendre sans discernement aux nouveaux nombres les propriétés des anciens et les procédures pour les manipuler. En ce sens, les anciens font obstacle à l'acquisition des nouveaux.

Bachelard a dit que « toute vérité est une erreur rectifiée ». Il faudrait sans doute ajouter « sauf exception ». Mais il importe de faire attention à ceci, même si c'est un truisme : les anciens nombres ne sont pas erronés et la généralisation n'est pas une rectification. S'il y a erreur dans l'acquisition des nouveaux nombres, c'est parce que, dans un premier temps, la généralisation n'est pas faite convenablement. Et c'est la généralisation qu'il faut rectifier, non les anciens nombres.

Il n'est sans doute pas inutile de donner un deuxième exemple des caractères qui décrivent le passage par généralisation d'un système de nombres à un autre. En quittant pour un bref moment le domaine des nombres pour mesurer, regardons ce qui se passe lorsqu'on étend le système des nombres positifs en adjoignant à ceux-ci des négatifs : on obtient ainsi les *nombres relatifs*

1. Le nouvel ensemble englobe le précédent.

   Il y a plus de relatifs que de positifs.

2. Les nouveaux nombres ont de nouveaux usages, mais les anciens gardent les usages qu'ils avaient.

   Les relatifs donnent de nouvelles solutions aux équations algébriques ; ils fournissent un système de coordonnées cohérent pour le plan et l'espace.

3. Les règles d'écriture se modifient, mais on peut toujours écrire les anciens nombres comme avant.

   Les relatifs comportent l'introduction d'un signe.

4. La plupart des propriétés se conservent, mais il y en a de nouvelles. De nouvelles intuitions apparaissent.

   Le résultat d'une addition n'est plus toujours plus grand que chacun de ses termes ; les propriétés d'ordre changent de signification : elles n'expriment plus les relations *plus grand* ou *plus petit*, mais bien *avant* ou *après* dans un sens de parcours. Un concept nouveau apparaît : la *valeur absolue*.

5. Les algorithmes pour reconnaître l'ordre et exécuter les opérations se modifient. Les anciens algorithmes sont toujours applicables aux anciens nombres.

   Avec l'arrivée des relatifs, il faut apprendre la « règle des signes ».

6. Les anciens nombres et leurs propriétés sont la base même sur laquelle les nouveaux nombres sont construits. On explique les nouveaux nombres en faisant référence aux anciens.

   Les algorithmes de calcul des opérations sont les mêmes que pour les positifs, et on établit le signe du résultat à part.

[18] Voir R. Bkouche et al, 1991, page 108.

2.4 Bibliographie

ARTIN, E. (1961). *Geometric algebra*. New York : Interscience.

BKOUCHE, R. & AL. (1991). *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*. Paris : Armand Colin.

BOLONDI, G. (2004). *La matematica nelle scuola di base, i curricoli di matematica dopo la riforma*. Bologna : Pitagora Editrice.

CECP. (2002). *Programme d'études pour l'enseignement primaire*. Bruxelles : Conseil de l'Enseignement des Communes et des Provinces.

CHAMBADAL, L. (1969). *Dictionnaire des mathématiques modernes*. Paris : Larousse.

MINISTÈRE DE LA COMMUNAUTÉ FRANÇAISE. (2002). *Programme des études. Enseignement fondamental*.

DIEUDONNÉ, J. (1960). *Foundations of modern Analysis*. New York : Academic Press.

HILBERT, D. (1971). *Foundations of geometry*. La Salle : Open Court.

HOPKINS, CH., POPE, S. & PEPPERELL, S. (2004). *Understanding primary mathematics*. London : David Fulton.

JENSEN, G. R. (2003). *Arithmetic for teachers*. Providence : American Mathematical Society.

LANDAU, E. (1951). *Foundations of Analysis : the Arithmetic of Whole, Rational, Irrational and Complex Number : A Supplement to Text-Books on the Differential and Integral Calculus*. Trad. en anglais par F. Steinhardt. Chelsea Publishing Company.

LAROUSSE. (1963). *Grand Larousse encyclopédique*. Paris : Librairie Larousse.

MAURIN, CL. & JOHSUA, A. (1993). *Les structures numériques à l'école primaire*. Paris : Ellipses.

NCTM. *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics, a quest for coherence*. Reston VA : National Council of Teachers of Mathematics.

ROEGIERS, X. (2000). *Les mathématiques à l'école primaire*. Tome 1. Bruxelles : De Boeck.

ROUCHE, N. & AL. (2006). *Du quotidien aux mathématiques. Nombres, grandeurs, proportions*. Paris : Ellipses.

STEVIN, S. (1585). *Thiende (Disme)*. Anvers : Chr. Plantijn.

VERGNAUD, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berne : Peter Lang.

Chapitre 3

Analyse de programmes belges (1842-1985) et de la Communauté française (1987-2010)

Ph. Skilbecq, S. Soille

> « La première Constitution belge, datée de 1831, exprime clairement en son article 17 ce qui deviendra un des fondements des politiques scolaires en Belgique :
>
> *L'enseignement est libre ; toute mesure préventive est interdite ; la répression des délits n'est réglée que par la loi. L'instruction publique donnée aux frais de l'Etat est également réglée par la loi.*
>
> [...] Une double liberté est ainsi consacrée : liberté pour tous d'organiser un enseignement, même si toute forme d'enseignement ne sera pas forcément soutenue par l'Etat ; « liberté du père de famille », comme on l'appelle alors, de choisir le type d'enseignement auquel il confiera ses enfants. »
>
> Hugues Draelants, Vincent Dupriez, Christian Maroy

3.1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'analyse des programmes pour l'enseignement des nombres, plus particulièrement pour l'enseignement des nombres décimaux[1]. Toutefois, il nous a semblé intéressant et éclairant de situer les programmes actuels par rapport aux programmes précédents. Ainsi, dans cette introduction, nous situons la problématique

[1] Nous utiliserons le terme « nombre décimal » pour désigner tout nombre à virgule ayant un nombre limité de chiffres après la virgule. Dans certains cas cependant, que nous préciserons, ce terme recouvrira un ensemble plus vaste de nombres.

des programmes d'enseignement dans le cadre institutionnel de l'école belge d'abord, de la Communauté française de Belgique ensuite. Nous présentons également succinctement un cadre historico-épistémologique pour les nombres, plus particulièrement les nombres décimaux.

Aux sections 3.2, 3.3 et 3.4, à l'aide de quelques critères, nous analysons respectivement les programmes de l'enseignement primaire de 1842 aux *Socles de compétences*, les *Socles de compétences* et les programmes actuels des quatre réseaux principaux pour l'enseignement primaire, et les programmes du premier degré du secondaire différencié.

3.1.1 Le cadre institutionnel

Dans ce premier point, nous parcourons les quelques 180 années de l'histoire de notre système éducatif. Ce parcours est forcément incomplet. Il a pour objet de situer l'étude des programmes dans un contexte social et politique[2].

Au-delà de ce contexte socio-historique général, nous avons porté une attention particulière à la problématique de l'obligation scolaire. Il nous a semblé que celle-ci pouvait avoir un impact sur les programmes, particulièrement en mathématique. En effet, il semble, comme le précise G. Brousseau (1998), que lorsque l'obligation scolaire est fixée à 14 ans, l'enseignement des mathématiques soit surtout porté vers l'acquisition de techniques qui permettent de résoudre des problèmes de la vie quotidienne. Par exemple, pour les nombres décimaux, G. Brousseau explique que dans un souci d'efficacité immédiate du traitement des nombres décimaux pour des élèves qui, dans leur grande majorité, ne poursuivaient pas d'étude, « les derniers discours justificateurs » ont disparu des pratiques d'enseignement, ainsi que l'appréhension des nombres décimaux comme rapport ou fraction.

Aujourd'hui, au vu de l'obligation scolaire jusque 18 ans, l'enseignement des mathématiques devrait rencontrer différents objectifs, notamment apprendre à penser mathématiquement, ce qui demande d'aller au-delà de la simple résolution algorithmique de problèmes. Cet objectif devrait amener tout citoyen à résoudre des problèmes de la vie quotidienne bien sûr (et pour certains des problèmes liés à la pratique de certains métiers y compris d'ingénieur), mais également de posséder une compréhension des concepts en jeu et de leur implication dans l'édification d'une théorie mathématique. Cette problématique de la définition des objectifs de l'enseignement des mathématiques concerne particulièrement celle de la rédaction des programmes et est particulièrement vive dans le cadre de la mise en place du premier degré différencié de l'enseignement secondaire. Ce constat était déjà posé en 1990 par les rédacteurs du rapport « Danblon ».

[2] Les lecteurs intéressés par une information plus complète pourront lire, entre autres, le dossier numéro 59 du Centre de recherche et d'information socio-politiques (CRISP) téléchargeable à l'adresse suivante : `http://www.crisp.be` .

Le contexte socio-politique

S'intéresser aux prescrits relatifs à l'enseignement des nombres décimaux ne peut raisonnablement se faire sans tenir compte du contexte socio-politique dans lequel les textes officiels (décrets, programmes, plans d'études, Socles de compétences...) s'inscrivent. La problématique évoquée ci-dessus concernant les objectifs de l'enseignement des nombres décimaux en atteste.

Tout comme la France et les Pays-Bas, pays auxquels notre histoire est associée, la Belgique, dès 1830, subit de nombreuses tensions politiques et sociales qui influencent fortement le système scolaire. En 1842 est votée la première loi organique de l'enseignement primaire. Cette loi « impose à chaque commune d'avoir une école primaire, mais cette école peut être privée (donc catholique, sauf exception) tout en étant financée par la commune » (Draelants, Dupriez, Maroy, 2003). D'autres compromis seront également mis en place jusqu'en 1878. Mais la suite est plus conflictuelle avec la première *guerre scolaire* qui durera de 1879 à 1884, suite à la loi Van Humbeeck[3]. Au cours de cette période, plusieurs lois vont être promulguées unilatéralement par un groupe politique, pour être parfois abrogées quelque temps plus tard par un autre groupe.

Le début du 20e siècle est quelque peu plus *calme* et les quelques soucis rencontrés par le système scolaire belge qui se met en place sont réglés dans des lois. Au début des années 1950 survient la seconde guerre scolaire où « catholiques et laïques s'opposent à nouveau autour, principalement, des deux questions suivantes : quelles subventions faut-il accorder aux écoles secondaires d'obédience catholique ? Dans quelle mesure les milieux catholiques doivent-ils être consultés pour la création d'écoles de l'Etat ? ». Après des péripéties successives et suite aux différentes élections, en 1958, les trois principaux partis (Parti socialiste belge, Parti libéral et Parti social-chrétien) « signent le Pacte scolaire, devenu ensuite la loi du 29 mai 1959 dite loi du Pacte scolaire » (op. cit.).

En ce qui concerne les méthodes d'enseignement et les programmes, « l'article 17 (aujourd'hui 24) de la Constitution belge établit la liberté d'enseignement et donc, de manière implicite, la liberté de choix des méthodes pédagogiques » (op. cit.). Chaque *réseau* d'enseignement jouit ainsi d'une liberté reconnue en vertu du Pacte scolaire de 1959 et peut rédiger ses propres programmes, pour autant qu'ils soient en correspondance avec les fondements du système éducatif.

Un aspect particulier du contexte socio-politique : l'obligation scolaire

Depuis l'indépendance de la Belgique en 1830, le système scolaire belge a été traversé par de multiples tensions. Celles-ci résultent en partie d'une *lutte* pour le *contrôle* du système scolaire. Durant la deuxième moitié du 19e siècle, « l'obligation scolaire devient une question politique » (H. Draelants, V. Dupriez, C. Maroy, 2003). Jusqu'alors, « les parents restent libres de décider d'envoyer ou non leurs enfants à l'école, décision qui

[3] Loi Van Humbeeck, appelée aussi Loi de malheur par ses détracteurs, avait pour objet d'obliger chaque administration communale d'organiser une école primaire publique, laïque et neutre dans chaque commune et supprimait le cours de religion du cursus scolaire.

dépend largement, en pratique, de leur situation professionnelle : dans le monde ouvrier et paysan, de nombreux enfants travaillent pour contribuer aux revenus de la famille ».

À la fin du 19e siècle et au début du 20e, « les milieux progressistes œuvrent en faveur de l'instauration de l'obligation scolaire, assortie de la gratuité » (Noël, 2000). Mais les réticences sont nombreuses et ce n'est qu'en 1914, « sous la pression conjointe des socialistes et de la démocratie chrétienne (aile progressiste du parti chrétien) qu'un accord se dessine » (Draelants & al., 2003). Le 19 mai 1914, le législateur vote une loi établissant l'enseignement obligatoire pour tous les enfants de 6 à 14 ans. Mais celle-ci ne sera effective qu'après la première guerre mondiale, à la rentrée de 1919.

Plus tard, dans le contexte économique difficile des années 1970, « pour faire face au chômage des jeunes, à la technologisation accrue de l'économie et à la redéfinition des normes de compétitivité dans un contexte de mondialisation de l'économie » (op. cit.), cette loi sera modifiée par celle votée le 29 juin 1983, portant l'obligation scolaire de 14 à 18 ans.

Cette nouvelle norme de l'obligation scolaire a de nombreuses conséquences dont la nécessité d'adapter les méthodes d'enseignement à un plus grand nombre d'élèves et d'adapter également les programmes. Mais une autre adaptation doit également être étudiée : celle qui concerne l'assouplissement de l'obligation scolaire jusque 18 ans. En effet, dans différents pays européens, dont l'Allemagne et la France, des problèmes de main-d'œuvre dans les entreprises apparaissent. Progressivement, des formations en alternance voient le jour.

Aujourd'hui, le système scolaire belge francophone s'organise toujours autour de l'obligation scolaire jusque 18 ans mais les formules de scolarisation se sont multipliées, tentant de répondre aux besoins des entreprises et d'un public scolaire de plus en plus diversifié et avec des motivations très différentes.

3.1.2 Rapide survol de l'histoire des nombres

> « Cette conception [*l'impossibilité de diviser l'unité numérique*] limite le domaine numérique grec, par nécessité logique, à celui des nombre naturels (les nombres utilisés pour compter). Le zéro et les expressions fractionnaires en sont exclus. Il y a donc une différence claire entre compter et mesurer. »
>
> G. Waldegg

Survolons rapidement, donc incomplètement, l'histoire de l'élaboration des nombres et reconnaissons d'emblée que les nombres naissent du dénombrement de collections finies et de la mesure des grandeurs[4]. Comme l'indique N. Rouche (1992), on peut croire que les nombres naturels « ont été les premiers, dans la nuit des temps, à être conçus et utilisés par les hommes ». Et de poursuivre, « les fractions doivent être venues ensuite dans la pratique de l'artisanat et du commerce pour exprimer les grandeurs que l'on débite en morceaux et que l'on mesure ».

[4] Nous ne ferons ici qu'ébaucher, pour des besoins pratiques, l'histoire de la genèse des nombres. Le lecteur trouvera des informations complémentaires au chapitre 2, page 21 et suivantes, ou pourra se référer à Dhombres, J. (1978), Dahan-Dalmedico, A & Peiffer, J. (1986), Ifrah, G. (1994).

Al Kashi au 15^{e} siècle et Simon Stevin ensuite au 16^{e} siècle « ont étendu la numération décimale des nombres naturels aux fractions décimales » (CREM, 1995). Comme le reconnait É. Roditi (2001), « c'est bien à la fois par l'utilisation des fractions décimales pour écrire les nombres et par les calculs sur ces fractions que l'œuvre de S. Stevin se distingue ». Comme le précise également G. Brousseau (1998), S. Stevin « est le premier à proposer de substituer les fractions décimales aux fractions rationnelles et de les noter de façon à permettre de ramener leurs calculs aux règles connues dans les naturels ». En effet, l'écriture sous la forme de fractions décimales facilite le calcul qui s'effectuait jusqu'à alors avec des fractions ordinaires.

Ainsi, comme l'énonce Éric Roditi (2001), c'est la construction du système décimal de position, motivé par les nécessités du commerce, « qui va permettre d'unifier le domaine numérique déjà bien pourvu mais de façon hétérogène comme en témoigne le vocabulaire : nombres absurdes, irrationnels, irréguliers, inexprimables, sourds, rompus,... ».

G. Waldegg (1999) exprime quant à elle que « La vraie contribution de Stevin est, avant tout, un apport conceptuel : il a profondément modifié le concept de nombre. Les « fractions décimales » avant Stevin étaient de simples conventions de notation, des abréviations pour mieux construire les tables numériques. L'introduction d'une vraie fraction décimale dont la notation s'appuie clairement sur le caractère décimal du système numérique, enrichissant sensiblement les opérations numériques de base, est en définitive une contribution de Stevin. Celui-ci a compris que le concept de nombre joue un rôle central dans l'établissement de la notation décimale ; il a identifié aussi le besoin d'incorporer l'unité dans ce concept afin de donner aux fractions un fondement théorique. »

Si, dans un premier temps, la géométrie et les grandeurs constituent les socles essentiels des mathématiques, le *numérique* (re)trouve une place importante avec les travaux sur l'algébrisation de la géométrie aux 17^{e} et 18^{e} siècles. La géométrie et les grandeurs perdent leur suprématie. Les travaux en mathématiques aux 19^{e} et 20^{e}, notamment ceux sur les géométries non-euclidiennes de J. Bolyai et de N.I. Lobatchevsky, mais aussi ceux de R. Dedekind (qui ont permis la construction des nombres réels) et de G. Cantor (sur l'infini et la théorie des ensembles) ou de K. Weierstrass (sur les suites de Cauchy) ont apporté des éléments théoriques qui ont permis d'élaborer une approche structuraliste des mathématiques. Cette structure qui permet de fonder les mathématiques à partir de quelques éléments est décrite dans la théorie des ensembles formulée par N. Bourbaki au 20^{e} siècle.

Ainsi, progressivement au cours de ces deux derniers siècles, les grandeurs et la géométrie (au sens commun des termes) vont perdre de leur importance dans l'étude des nombres au niveau des théories mathématiques. Plus encore, les nombres « revenus de bons instruments pour étudier la géométrie [...] ont tout simplement éliminé les grandeurs » (CREM, 1995). Cela ne sera pas sans conséquence sur l'enseignement des nombres, comme nous le verrons dans l'analyse des programmes. À l'image de ce qui se fait en mathématique, une approche plus formelle à partir d'éléments théoriques va remplacer progressivement une approche plutôt « naturelle » à partir du dénombrement de quantités et de la mesure de grandeurs, c'est la période dite des « mathématiques modernes ».

En conclusion, si nous devions résumer davantage encore ce rapide survol de l'histoire des nombres, nous dirions que les nombres naissent des mesures de grandeurs (grandeurs continues) et du dénombrement de quantités (grandeurs discrètes) de telle sorte que les nombres naturels ont d'abord été utilisés. Nous dirions qu'ensuite ce sont les fractions, considérées comme rapports, qui ont été utilisées. Enfin, grâce aux travaux de S. Stevin notamment, les nombres décimaux sont nés, à la suite des fractions décimales, puis les nombres réels.

3.1.3 Et à l'école

Les travaux de S. Stevin au 16^{e} siècle et les changements dans les pratiques quotidiennes qui en suivent amènent les mathématiciens et les autorités scolaires et universitaires à s'intéresser à l'enseignement des nombres décimaux dès le 16^{e} siècle. L'apport des nombres décimaux à l'unification théorique des nombres ne peut cependant être abordé avec les élèves de l'école primaire. Mais certains apports théoriques doivent être pris en charge par les systèmes de formation, notamment pour ce qui concernent les opérations, la comparaison de nombres et le travail sur les mesures. Ces apports sont d'autant à prendre en compte que les nombres décimaux sont destinés en ce début de la Renaissance essentiellement aux corps de métiers faisant usage de la mesure. Or ce que l'on constate, selon G. Brousseau (1998), c'est qu'« il faudra deux siècles pour franchir le pas ». Et un siècle encore pour que cela soit traduit dans des pratiques d'écoles où ce sont essentiellement les « mécanismes indépendamment des justifications mathématiques » qui seront enseignés. L'attention des élèves est essentiellement portée sur des *techniques* opératoires dans la perspective d'une utilisation immédiate dans la vie active.

L'analyse des programmes que nous exposons ci-après montre l'importance de la *vie quotidienne* et de l'*intuition* dans les recommandations pédagogiques au début de l'école belge. Elle montre également des changements par rapport aux supports ou aux contextes de rencontre et d'étude des nombres aux environs des années 1970. Ainsi, depuis ces années, il semble que le modèle épistémologique selon lequel les nombres *naissent* des dénombrements d'ensembles d'objets ainsi que des grandeurs et des opérations sur celles-ci soit remis en cause comme modèle principal de la construction de séquences d'enseignement et d'apprentissage des nombres. Certes, certains arguments plaident en ce sens comme l'explique G. Brousseau (1998). En effet, si la perspective scolaire est bien fixée à plus long terme (par exemple par l'obligation scolaire jusque 18 ans ou la massification de l'enseignement secondaire), les objectifs de l'enseignement des mathématiques tendent à se modifier. Ainsi, dorénavant, il sera également nécessaire de permettre aux élèves de résoudre des problèmes du quotidien, essentiellement des problèmes de grandeurs, d'appréhender le concept de nombre décimal et de comprendre sa place dans une théorie mathématique. La rencontre des nombres décimaux uniquement dans des contextes de mesures de grandeurs issus de la vie quotidienne n'est alors plus suffisante. Pour les élèves, une compréhension plus approfondie du concept de nombre et du système décimal de position est nécessaire.

D'autres influences sur les pratiques scolaires

Plus près de nous, certaines études en sciences cognitives s'intéressent également aux influences du contexte des grandeurs sur l'apprentissage des nombres naturels ou rationnels. Elles montrent notamment que dans certains cas, des contextes *réalistes* (e.a. De Bock & al., 2003) peuvent ne pas être pris en compte par les élèves, ou que des objets concrets (e.a. McNeil & al., 2009) peuvent être un frein à l'appropriation de notions mathématiques.

De la même manière, toute activité de mesure ne confronte pas les élèves à tous les *modes de représentation* des nombres décimaux. Expliquons-nous. Selon É. Roditi (2001), d'un point de vue mathématique, on peut considérer les nombres décimaux à partir de trois *modes de représentation*.

- Les nombres décimaux écrits sous la forme d'un **quotient** (fraction simple ou fraction décimale)

  $0{,}25 = \frac{1}{4} = \frac{25}{100}$

  Ce mode de représentation, surtout les fractions décimales, permet aisément les comparaisons de nombres décimaux. En effet, pour comparer deux nombres décimaux, exprimer ces nombres à l'aide de fractions ayant le même dénominateur aide au traitement sémantique de la situation. Ce traitement possède l'avantage d'éviter de traiter la situation avec le « truc » des zéros à ajouter comme dans le cas, par exemple, de la comparaison de deux nombres :

  $$2{,}27 \ldots 2{,}132,$$

  $2{,}27 > 2{,}132$, « parce que si on ajoute un zéro à 27 pour qu'il y ait le même nombre de chiffres derrière la virgule, alors on voit que 270 est plus grand que 132. »

  En ce qui concerne la mesure, il s'agit des situations décrites par N. Rouche (1992) dans lesquels il est nécessaire d'utiliser une ou des sous-unités d'une unité choisie pour mesurer une grandeur. Par exemple, pour mesurer une longueur, les élèves sont amenés à utiliser d'abord le mètre, puis, le plus souvent, directement le centimètre ($\frac{1}{100}\,m$),… Ainsi une mesure de longueur sera exprimée de la sorte :

  $$2{,}27\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{m} \text{ et } 27\,\mathrm{cm},$$

  considérant à juste titre que

  $$2{,}27\,\mathrm{m} = \frac{227}{100}\,\mathrm{m}.$$

  Notons qu'à partir de cette représentation, et sachant que le centimètre équivaut à la centième partie du mètre, il est aisé de composer l'égalité suivante :

  $$2{,}27\,\mathrm{m} = \frac{227}{100}\,\mathrm{m} = 227\,\mathrm{cm}.$$

  Par *abus de langage*, cette mesure sera parfois écrite sous la forme 2 m 27 et lue comme telle également « deux mètres vingt-sept ».

- Les nombres décimaux écrits sous la forme d'une **somme de fractions décimales**

  $0{,}25 = \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$

  Ce mode intervient dans le repérage sur une droite graduée et pour l'approche de

n'importe quel réel.
Ainsi, pour situer 0,25 sur une droite graduée, on repérera d'abord 0,2 ($\frac{2}{10}$), et ensuite on progressera de $\frac{5}{100}$. L'approche d'un nombre réel participe de la même stratégie, à savoir que l'on va progressivement augmenter le nombre de décimales par encadrements successifs. L'écriture sous le mode fractionnaire permet de montrer que l'on affine progressivement la réponse.

- Les nombres décimaux écrits sous la forme d'un **produit**

  $0{,}25 = 25 \times 10^{-2}$.

  Ce mode intervient dans la mesure de grandeurs en référence au système décimal de mesure. Toutefois, dans ce contexte, il est toujours possible, en changeant d'unité, d'éviter l'écriture sous la forme d'un produit : $0{,}25\,\text{m} = 25 \times 10^{-2}\,\text{m} = 25\,\text{cm}$. Notons cependant le basculement au niveau de l'objet sur lequel l'opérateur agit. Dans la première égalité ($0{,}25\,\text{m} = 25 \times 10^{-2}\,\text{m}$), l'opérateur $\times 10^{-2}$ agit sur le nombre (25). Dans la seconde égalité ($25 \times 10^{-2}\,\text{m} = 25\,\text{cm}$), l'opérateur $\times 10^{-2}$ agit sur l'unité de mesure ($m \times 10^{-2} = cm$).

Il s'agit donc pour l'enseignant, à partir d'activités de mesure bien choisies, de permettre aux élèves de rencontrer consciemment ces différents modes de représentation, et d'en comprendre les enjeux.

3.1.4 Notre travail

Dans une première partie de notre analyse (section suivante, page 35) , nous nous intéresserons à l'évolution des programmes depuis les premières lignes écrites dans une loi de 1842 jusqu'au programme de 1985 inclus. L'objectif est de présenter une analyse succincte de l'évolution de l'enseignement des nombres décimaux et plus particulièrement des rôles joués par les grandeurs et leur mesure, les fractions, la dialectique *discret/continu*, le dénombrement et la mesure.

Dans une deuxième partie (section 3.3, page 47), ce même travail d'analyse sera réalisé pour les actuels prescrits légaux. L'objet de cette deuxième partie n'est cependant pas de comparer la pertinence des pratiques proposées dans les différents documents ou d'étudier la « visibilité » [5] des différents programmes. Il s'agit seulement d'établir un constat de ce qui est mis à disposition des enseignants.

Dans une troisième partie(section 3.4, page 65), nous nous intéresserons aux programmes du premier degré différencié de l'enseignement secondaire. Nous verrons notamment en quoi ces programmes sont semblables à ceux de l'enseignement primaire et en quoi ils rencontrent les différents modes de représentation des nombres décimaux.

Dans nos conclusions (section 3.5, page 71), nous énumérerons quelques propositions d'amendements des programmes analysés. Celles-ci sont suggérées par l'analyse épistémologique, les recherches en didactique des mathématiques et par les résultats de notre

[5] Au sens de B. Bernstein – sociologue britannique spécialisé dans la sociolinguistique – lorsqu'il caractérise les pédagogies visibles et invisibles.

propre recherche. Ces propositions s'inscrivent dans la même perspective que celle des rédacteurs du rapport « Danblon », à savoir qu'il est plus efficient de modifier progressivement les programmes plutôt que de les rénover complètement de temps à autres.

3.2 L'enseignement des nombres décimaux en Belgique de 1842 aux Socles de compétences

Pour mieux comprendre l'enseignement des nombres décimaux aujourd'hui, il nous est apparu intéressant d'étudier l'enseignement des nombres à partir de l'analyse des programmes scolaires édités depuis que notre système éducatif s'est structuré. Cependant, pour mieux caractériser l'enseignement des nombres décimaux depuis plus d'un siècle, il serait nécessaire de compléter cette analyse par celle des manuels scolaires utilisés au cours de ce siècle, ainsi que par celle de rapports d'inspection et autres documents faisant état de cet enseignement. Mais tel n'est pas l'objet de ce texte.

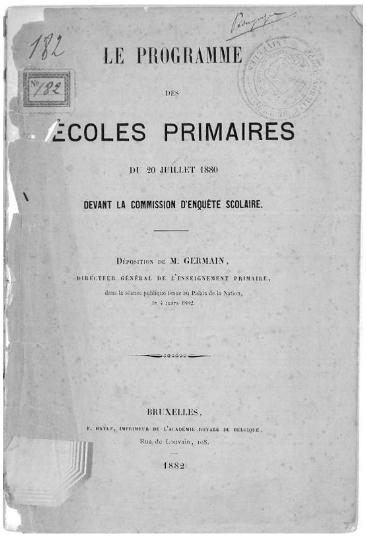
3.2.1 Les premiers « programmes » belges et les critiques de l'école

Le « premier programme scolaire belge » apparait dans la loi de 1842 et se limite à quelques lignes dans l'article 6. Celles-ci précisent que « l'instruction primaire comprend nécessairement l'enseignement de la religion et de la morale, la lecture, l'écriture, le système légal des poids et mesures, les éléments du calcul et, suivant les besoins des localités, la langue française, flamande ou allemande ». Remarquons que dans ces quelques lignes les grandeurs apparaissent avant le calcul. Nous constaterons dans les programmes ultérieurs que le chapitre relatif aux nombres (y compris le calcul) sera présenté avant celui des grandeurs.

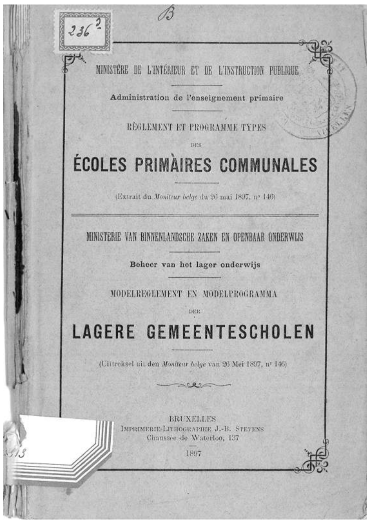
Plus globalement, nous constatons que ces quelques lignes concernent essentiellement des apprentissages nécessaires à la vie quotidienne et à la formation *civique* de chaque jeune Belge.

Au cours des décennies qui suivent l'énoncé de ces premières lignes dédiées à l'enseignement, de nombreuses remarques les concernant et mettant en avant la nécessité de modifier les pratiques associées sont répertoriées dans différents documents. Ceci aboutit à la rédaction d'un premier *programme* en 1880.

Cependant, celui-ci est également vivement critiqué, au point qu'une commission d'enquête scolaire est constituée en 1882. Dans le document relatant la déposition de M. Germain (Directeur général de l'enseignement primaire) devant cette commission d'enquête, les critiques principales relevées envers l'enseignement du « calcul et du système légal des poids et mesures » visent le *formalisme* et à l'*utilisation du matériel* en classe. Nous rapportons deux propos de Monsieur Germain qui répondent respectivement à ces critiques :


LE PROGRAMME
DES
ÉCOLES PRIMAIRES
DU 20 JUILLET 1880
DEVANT LA COMMISSION D'ENQUÊTE SCOLAIRE.
Déposition de M. GERMAIN,
DIRECTEUR GÉNÉRAL DE L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE,
dans la séance publique tenue au Palais de la Nation,
le 4 mars 1882.
BRUXELLES,
F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE,
Rue de Louvain, 108.
1882

- « [M. Germain] J'ai trouvé des instituteurs qui commençaient avec de petits enfants par la définition du mètre : le mètre est la dix millionième partie du quart du méridien terrestre ».
- « On trouve dans toutes les écoles l'appareil appelé boulier-compteur, qui sert à montrer la composition des nombres et la pratique de certaines opérations. Mais on oublie une chose : c'est qu'il faut non seulement que l'enfant voie, mais qu'il agisse [...] Je citerai les petits bâtonnets qu'on réunit en bottes pour composer des dizaines, des centaines. Il y a la subdivision des cubes *Frœbel* [...] Voilà des procédés préférables aux bouliers-compteurs, aux lignes et aux points tracés sur le tableau noir ». Et de conclure : « le Gouvernement veut baser l'enseignement du calcul sur l'intuition directe, [que cet enseignement] accorde une large part au calcul mental, [et qu'il] demande de l'arithmétique raisonnée dans des limites convenables [...] ».


MINISTÈRE DE L'INTÉRIEUR ET DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE
Administration de l'enseignement primaire
RÈGLEMENT ET PROGRAMME TYPES
DES
ÉCOLES PRIMAIRES COMMUNALES
(Extrait du *Moniteur belge* du 26 mai 1897, n° 146)
MINISTERIE VAN BINNENLANDSCHE ZAKEN EN OPENBAAR ONDERWIJS
Beheer van het lager onderwijs
MODELREGLEMENT EN MODELPROGRAMMA
DER
LAGERE GEMEENTESCHOLEN
(Uittreksel uit den *Moniteur belge* van 26 Mei 1897, n° 146)
BRUXELLES
IMPRIMERIE-LITHOGRAPHIE J.-B. STEVENS
Chaussée de Waterloo, 137
1897

En 1897 le nouveau programme type des écoles primaires communales n'est guère très explicite sur les enseignements à réaliser ni sur la manière d'entreprendre ces enseignements. Ainsi, il est demandé que les nombres décimaux soient rencontrés au *degré moyen* (3^e, 4^e primaire).

De même, l'intitulé du programme laisse à penser que les dixièmes sont rencontrés séparément des centièmes : « *Répétition des quatre opérations sur les cent premiers nombres, ainsi que sur les dixièmes et les centièmes* ». Cela laisse également à penser que le maitre ne proposera pas des situations comprenant des nombres décimaux au-delà du centième.

Au degré *supérieur* (5^e, 6^e), il est précisé que l'instituteur veillera à réaliser une « exposition raisonnée de la numération des nombres entiers et des nombres décimaux, associée à l'exposition d'une théorie très élémentaire des quatre opérations fondamentales sur les nombres entiers et sur les nombres décimaux ».

Il apparait également que les liens entre la mesure des grandeurs et les nombres sont peu explicites, de même entre les fractions décimales et les nombres décimaux.

Dans le programme-type des écoles primaires de 1923, d'emblée les rédacteurs précisent que celui-ci est « un programme minimum que l'on doit s'efforcer de réaliser partout, même dans les plus petites écoles. ». Ils précisent également que ce programme destiné aux trois premiers degrés de l'école primaire « a été allégé, de manière à le rendre plus facilement assimilable et à diminuer ainsi le nombre d'élèves qui s'attardent dans les classes inférieures ». Les concepteurs insistent également sur la nécessité d'un « perfectionnement des méthodes employées dans les écoles » pour améliorer le fonctionnement des écoles primaires.

En ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, il est précisé que « les occupations manuelles constituent un excellent moyen d'acquisition, d'application et de contrôle des connaissances en système métrique ». De même que « les opérations réalisées au cours de travail manuel peuvent donner lieu à des applications de calcul mental [...] semblables à celles que l'on résout chaque jour dans l'exercice des professions : calcul de dimensions, de surfaces, de volumes, évaluation des quantités et des prix des matières premières nécessaires, etc. ». Les concepteurs précisent de la même manière que « les problèmes seront empruntés à la vie réelle et ne renfermeront que des données vraies ».

Les prescrits de ces premiers programmes insistent donc sur la nécessité d'un ancrage des apprentissages dans la vie réelle. L'objectif est sans nul doute de combattre le formalisme présent dans les classes et de donner plus de sens aux apprentissages. De plus, il apparait que la majorité des élèves inscrits à l'école en ce début du 20e siècle ne poursuivront pas leur formation scolaire au-delà de l'école primaire (obligation scolaire à 14 ans). L'objectif de l'école est donc de leur permettre de s'insérer au plus vite dans la vie et de pouvoir aborder des situations de travail, telles que les mesures ou les paiements.

Les nombres décimaux sont au programme de la 3e année d'étude : « *Formation, dénomination et représentation chiffrée : a) des nombres de 100 à 1000 ; b) du dixième, du centième, du millième* ». Ceci constitue une précision par rapport au programme précédent qui situait l'apprentissage de ces nombres au cours du 2e cycle sans en préciser l'année d'étude. Observons également que l'étude des nombres se poursuit jusqu'au millième alors qu'il n'était proposé que jusqu'au centième dans les programmes précédents.

En 4e année, les auteurs indiquent que les élèves doivent posséder une « connaissance pratique de la numération parlée et de la numération écrite des nombres entiers et des nombres décimaux » sans préciser davantage. Et en 5e année, il est demandé de réaliser une « étude très élémentaire et raisonnée de la numération des nombres entiers et des nombres décimaux ». De même pour les quatre opérations fondamentales.

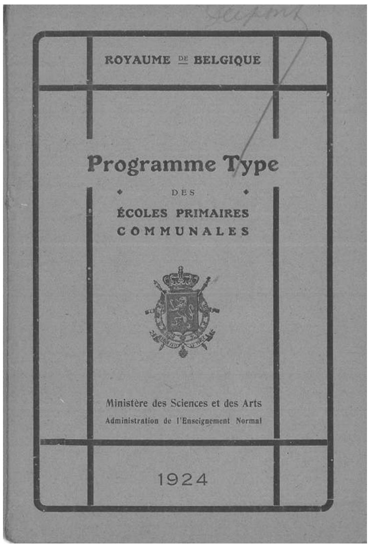
En ce qui concerne le *système légal des Poids et Mesures*, en 3e primaire, il est précisé que la connaissance des « rapports entre l'unité principale, les multiples et les sous-multiples décimaux dans les limites de la numération étudiée » doit être « intuitive et pratique ». Les grandeurs rencontrées sont les longueurs, les capacités, les poids, les monnaies légales, les aires (mètre carré, décimètre carré, centimètre carré, l'are et le centiare), ainsi que les volumes (mètre cube, décimètre cube et centimètre cube). Remarquons qu'aujourd'hui la mesure des volumes est au programme des élèves de 5e et 6e primaire.

En ce qui concerne les fractions, dès la 3e année, la « formation matérielle, dénomination et représentation chiffrée des fractions ordinaires[6] dont le dénominateur ne dépasse pas 10 » sont inscrites dans le programme. En 5e année apparait la recommandation relative à la transformation de fractions ordinaires en fractions décimales : « transformation de fractions ordinaires en fractions décimales équivalentes et réciproquement ». Mais ces notions ne sont pas définies.

Le programme-type des écoles primaires communales de 1924 a essentiellement pour objectif de *corriger* les *excès* repérés dans le programme précédent et infléchir les pratiques

[6] Nous reviendrons sur la notion de *fraction ordinaire* à la page 59.

d'enseignement observées dans les classes, respectivement, trop de points de matière à rencontrer, trop de verbalisme de la part des instituteurs, et ce malgré les recommandations relatives à l'ancrage des apprentissages dans le quotidien et à l'importance des manipulations.



Pour mieux faire appréhender les savoirs à enseigner et les méthodes à employer, différentes mesures sont prises, dont le découpage des cycles en années scolaires. Ceci permet notamment de mieux situer les apprentissages. Les concepteurs du programme insistent à nouveau sur l'importance des leçons d'observation et la *pédagogie du centre d'intérêt*[7] est mise en avant avec force. Des indications méthodologiques complètent également l'énoncé des notions à rencontrer avec les élèves. Par exemple, en ce qui concerne particulièrement la partie *Calcul et système métrique*, il est précisé qu'« enseigner intuitivement le calcul ne signifie pas simplement montrer à l'élève les objets d'intuition, mais surtout les lui faire manier de manière à mettre aussi en activité le sens tactile et le sens musculaire ». Et de poursuivre quelques lignes plus loin en disant que « les observations intuitives et les constatations ne suffisent pas : on doit aussi faire appel au *raisonnement*, mais sans excès ».

Dans la même perspective, il est à nouveau précisé que les « opérations réalisées au cours de travail manuel peuvent donner lieu à des applications de calcul extrêmement intéressantes [...] : calcul de dimensions, de surfaces, de volumes, évaluation de quantités et des prix des matières premières nécessaires, etc. » Cependant, globalement, peu de changements sont à constater par rapport au programme précédent. Et encore une fois, aucune indication concernant l'introduction des nombres décimaux n'apparait dans le programme. Même si, nombre (*calcul*) et mesures de grandeurs (*système métrique*) sont institutionnellement liés du fait qu'ils sont présentés dans une même partie du programme. En ce qui concerne les fractions, ce sont les « constructions graphiques » qui sont à nouveau utilisées pour « établir les procédés ». Entendons par là, la « recherche de la $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, [...] d'un nombre entier ». Le travail de « transformation des fractions ordinaires[8] en fractions décimales[9] équivalentes et réciproquement » est toujours requis par ce programme.

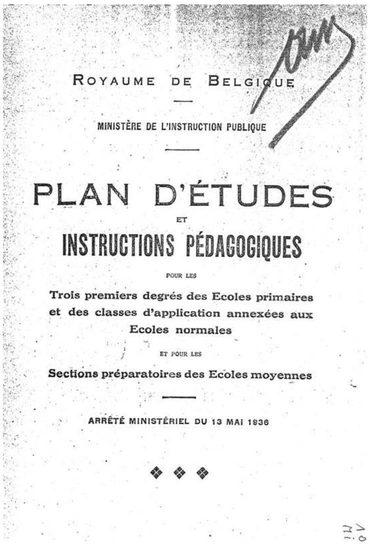
[7] Pédagogie élaborée par O. Decroly (1871 - 1932). Les bases de son œuvre sont fondamentalement biosociales. Deux principes essentiels sous-tendent son action : d'abord le fait qu'il faut respecter l'évolution de l'enfant, ensuite le fait qu'un milieu riche doit stimuler ses potentialités. Pour Decroly, le développement de l'enfant est donc le résultat combiné de sa croissance biologique et de son expérimentation active dans le milieu.

[8] Dans ce document, la notion de fraction ordinaire n'est pas définie. Elle le sera dans le programme de 1936. Mais cette notion variera au cours du temps comme nous le montrerons ci-après.

[9] Notons que la notion de *fraction décimale* varie également selon les manuels. Nous expliquerons également cela ci-dessous.

3.2.2 Le plan d'études de 1936 - L'aboutissement de près de cent années de modifications répétées des programmes

Il nous parait d'abord nécessaire de situer ce programme dans le contexte sociologique de l'époque et par rapport aux objectifs assignés à l'école. Dans sa lettre introductive à ce nouveau programme, le Ministre en charge de l'enseignement indique : « On oublie d'abord que l'école belge instruit toute une nation [...]. Par ce fait, notre population scolaire s'est alourdie des recrues les moins aptes ». Et de poursuivre que ce programme insiste avant tout sur les savoirs de base que sont la langue maternelle et l'arithmétique. L'appui sur l'étude du milieu et les observations qu'il permet est également un axe central du programme. L'étude du milieu est ainsi considérée comme la « base et le point de départ des activités scolaires ».


ROYAUME DE BELGIQUE

MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

PLAN D'ÉTUDES

ET

INSTRUCTIONS PÉDAGOGIQUES

POUR LES

Trois premiers degrés des Ecoles primaires et des classes d'application annexées aux Ecoles normales

ET POUR LES

Sections préparatoires des Ecoles moyennes

ARRÊTÉ MINISTÉRIEL DU 13 MAI 1936

Pour le domaine de l'arithmétique particulièrement, le Ministre insiste sur le caractère automatique que doit revêtir le calcul : « Dans l'enseignement de l'arithmétique [...], il y a une partie routinière et mécanique qu'il faut savoir accepter ». Mais de poursuivre : « Le présent programme accentuera le caractère concret et pratique de l'enseignement de l'arithmétique [...] ». Ces mêmes prescriptions se retrouvent dans l'introduction rédigée par les concepteurs du programme. L'enseignement de l'arithmétique doit certes viser à la connaissance de techniques qui libèrent l'esprit, mais « il s'agit plus de "suggérer la pensée calculatrice" que d'enseigner d'une façon rigide, formelle et logique, un contenu arithmétique rigoureusement arrêté ».

Dans ce programme, les notions mathématiques sont reprises sous la rubrique **Arithmétique**, y compris le *système métrique* et les *formes géométriques*. Ceci constitue un changement par rapport au précédent programme qui annonçait *Calcul et système métrique*. Constatons également que les nombres et le *système métrique* sont toujours intimement liés. Il est d'ailleurs recommandé que l'apprentissage des nombres décimaux soit combiné « avec l'étude du système métrique ». Mais à nouveau, aucune indication précise n'est faite sur la manière d'introduire les nombres décimaux à partir du contexte de mesure de grandeurs, ni comment le lien entre nombres et mesures des grandeurs doit être opérationnalisé par la suite, notamment lors des changements d'unités.

Tout comme aujourd'hui, l'enseignement des nombres décimaux limités aux millièmes est au programme de la 4^{e} année primaire. Celui des fractions ordinaires (« dénominateur : 2, 3, 4, 5, 10 »)[10] est déjà au programme de la 3^{e} année. La transformation de fractions ordinaires « ayant pour dénominateur 2, 4, 5 » en fractions décimales reste au programme des élèves de 4^{e} année. Cependant, aucun lien entre les fractions décimales et les nombres décimaux n'est exprimé.

En ce qui concerne la lecture orale des nombres décimaux, il semble qu'il soit demandé d'utiliser les désignations « dixième », « centième » et « millième ». Mais aucun exemple

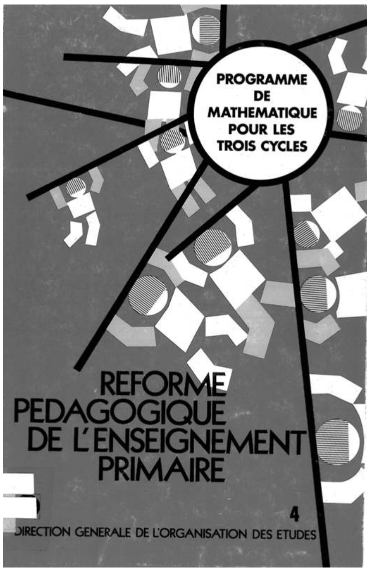
[10] Voir page 59.

n'est présenté. En calcul écrit, les nombres décimaux n'interviennent que pour l'addition et la soustraction.

Pour les 5^{e} et 6^{e} années d'étude primaire, le programme recommande de « dégager les principes de la numération des nombres entiers et des nombres décimaux ». Et d'ajouter que « la connaissance de la numération trouve un point d'appui concret dans l'étude du système métrique ». Mais à nouveau, aucun lien explicite n'est indiqué, comme par exemple quelle grandeur est la mieux à même de constituer ce « point d'appui », ou comment extraire la notion de *système décimal* de ces deux champs que sont les nombres et les grandeurs décimales. Alors que « les principes et les règles du système de numération des nombres entiers et des nombres décimaux » sont à maitriser en fin de 6^{e} année primaire et qu'il est demandé durant cette même année d'effectuer la « constatation des principes du système métrique ».

En calcul écrit, les nombres décimaux sont à utiliser dans les multiplications et les divisions. En *calcul rapide*, les multiplications par 0,5 ; 0,25 ; 0,75, ainsi que les divisions par 25 ; 0,5 ; 0,25 sont au programme. Pour les fractions, le travail de transformation des fractions ordinaires en fractions décimales équivalentes doit se poursuivre. Toutefois, il est précisé qu'aucune recherche du « plus commun diviseur » ou du « moindre commun multiple » ne sera envisagée.

3.2.3 Un changement épistémologique important traduit dans le programme de 1976



En 1976, la Direction générale de l'organisation des études du Ministère de l'Éducation nationale et de la Culture française édite le *Programme de mathématique pour les trois cycles* de l'enseignement primaire. Celui-ci, à la suite des travaux de G. Papy et de ses collègues, intègre l'approche structuraliste de la mathématique apparue au cours des 19^{e} et 20^{e} siècles.

Ce programme tend à mettre en œuvre les considérations didactiques de Papy, pour qui, au début du secondaire, l'étude des nombres prenait appui sur la géométrie axiomatique affine. Ainsi, l'étude des nombres s'appuyait sur la droite graduée pour situer les nombres réels d'abord, puis les nombres décimaux. De même, la somme de deux nombres décimaux était associée à la somme de vecteurs parallèles et la multiplication de deux nombres décimaux comme la composée de deux homothéties (Rouche, 1992).

Dans l'introduction de ce nouveau programme, les concepteurs déclarent dès les premières lignes que, les mathématiques ayant évolué, les programmes d'enseignement doivent être adaptés. Ainsi, si « naguère [...] son [*la mathématique*] champ d'application se limitait à l'art de l'ingénieur et au domaine des sciences exactes », et relevait donc essentiellement du « *calcul et de la mesure* », en 1976, il faut comprendre que « l'arithmétique élémentaire, jointe à quelques rudiments de techniques géométriques » ne suffisent plus. L'enseignement de la mathématique aura dorénavant pour objectif d'éveiller « l'enfant à la pensée de son temps et, partant, à la compréhension authentique et opérationnelle de l'univers dans lequel il grandit et qu'il devra maîtriser ».

Pour mieux faire comprendre ces changements, ce programme s'organise autour de plusieurs documents. Un document principal sous forme de livret définit les notions mathématiques à rencontrer, rassemblées dans cinq chapitres : *Les ensembles et les relations*, *Les nombres*, *Initiation à la géométrie*, *Les grandeurs* et enfin *Les démarches de mathématique appliquée*. Quatre brochures accompagnent ce document principal, en relation avec les chapitres de celui-ci : *Considérations générales, Ensembles et relations, Grandeurs ; Les nombres ; Initiation à la géométrie ; Démarches de mathématique appliquée, Structures*. Même si dans l'avant-propos du programme les concepteurs se défendent de concevoir l'enseignement comme linéaire, celui-ci se structure selon une logique qui présente d'abord les savoirs et les outils mathématiques avant de les intégrer dans des situations d'application. Logiquement, le chapitre *Ensembles et relations* apparait bien avant celui des *Démarches de mathématique appliquée*.

Pour notre analyse, nous avons essentiellement pris en considération le document principal et la brochure relative aux nombres. Dans ces documents, les liens entre les grandeurs et le système décimal de position sont à nouveau exprimés, cette fois en des termes quelque peu plus explicites :

- 4.3 (2^{e} cycle) : « Dégager la constance des rapports qui lient entre elles les unités conventionnelles les plus employées (correspondance avec les systèmes de numération de position) » ;
- 4.4 (3^{e} cycle) : « Achever la construction du système métrique en liaison avec le système de numération ».

Nous n'avons cependant relevé aucun autre lien explicite entre le *système métrique* et le *système de numération* dans ce document principal.

Contrairement aux prescrits de 1936, les nombres décimaux sont mentionnés au programme du premier cycle de l'enseignement primaire (1re et 2^{e} année). Cependant, nous devons comprendre qu'il s'agit de les rencontrer dans des situations de vie : « Les nombres à virgule sont rencontrés lors de paiements, de repérages, etc… ». Il en va de même au début de l'apprentissage proprement dit au 2^{e} cycle (3^{e}, 4^{e} primaire) : « Comme au premier cycle, on rencontre les nombres décimaux dans la vie courante : prix, longueurs, superficies, masses, etc… ». Dès le départ donc, les nombres décimaux sont associés à la mesure de grandeurs et à l'expression de cette mesure.

Sans être particulièrement précis, les textes semblent également développer une approche didactique des nombres décimaux qui associe davantage les nombres décimaux et les fractions décimales, ou leur équivalence sous la forme d'une écriture des puissances entières de la base. Cependant, nous n'avons pas trouvé de recommandations relatives à l'association des fractions ordinaires et des fractions décimales, sauf lorsque celles-ci sont situées sur la droite numérique.

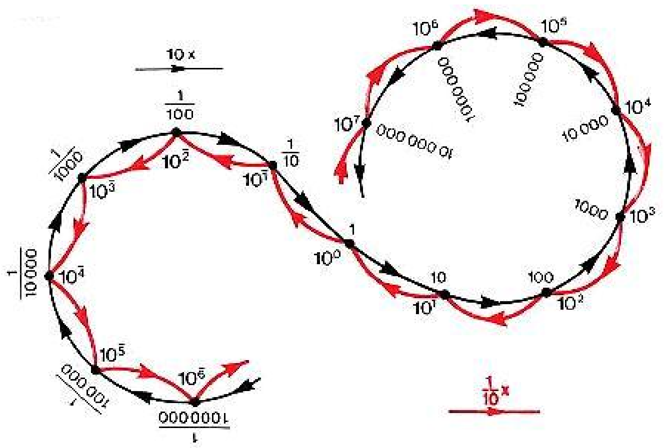


Fig. 3.1 Graphe de nombres - Page 42.

Ainsi, pour la première fois, nous constatons que les notations avec exposant et sous la forme fractionnaire sont utilisées dans les graphes et dans les tableaux de numération décimale[11] (figure 3.2).

$$\begin{array}{ccccc} 10^3 & : & 10^2 & = & 10^1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1000 & : & 100 & = & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 10^3 & : & 10^3 & = & 10^0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1000 & : & 1000 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 10^3 & : & 10^4 & = & 10^{\bar{1}} \\ \downarrow & & & & \\ 1000 & : & 10.000 & = & \frac{1}{10} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 10^0 & : & 10^1 & = & 10^{\bar{1}} \\ \downarrow & & & & \\ 1 & : & 10 & = & \frac{1}{10} \end{array}$$

On compare les nombres décimaux aux fractions

$0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ $\quad 0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ $\quad 0{,}04 = \frac{4}{100}$ (synonymie de termes).

Fig. 3.2 Utilisation des exposants et fractions décimales - Page 43.

Au 3e cycle (5e, 6e primaire), l'encadrement, l'ordre et la densité sont fixés en s'aidant de la droite graduée. La possibilité d'écrire un même rationnel à partir de plusieurs types de nombres est aussi rencontrée à partir de cette représentation. La pratique de la division écrite de deux entiers conduit à la reconnaissance de *nombres décimaux* ou de *nombres illimités périodiques*. La définition de *nombre rationnel* est envisagée et institutionnalisée : « Tout nombre décimal limité ou illimité périodique désigne un nombre rationnel ». Des nombres illimités non périodiques sont aussi rencontrés et des travaux relatifs à l'encadrement d'irrationnels sont proposés. Les expressions sous une forme décimale de Π et de $\sqrt{2}$ sont aussi exposées dans ce programme. Mais les rédacteurs précisent que les nombres rationnels « devraient [...] être rencontrés et manipulés avant que ne soient montrés des nombres tels que Π et $\sqrt{2}$ ».

Notons que les nombres décimaux sont observés jusqu'à la 6e décimale ! Ils sont aussi envisagés dans d'autres bases que la base 10. Ces deux recommandations montrent que dans

[11] Nous utiliserons également la dénomination *abaque* pour désigner ce type de tableau. Ce mot n'est pas ici utilisé dans son sens courant pour les mathématiciens.

plusieurs situations l'ancrage des nombres dans les mesures ou les activités quotidiennes devient pratiquement impossibles. *A contrario*, montrer que les nombres décimaux ne se limitent pas à la troisième décimale permet sans doute de mieux faire percevoir la structure du système décimal de position. Il en est sans doute de même pour montrer ce qu'est un système de numération lorsque d'autres bases de numération sont employées.

Les opérations (addition, soustraction et multiplication) sur les nombres décimaux sont introduites et pratiquées en utilisant des tableaux (figure 3.3). Par la suite, les opérations doivent être réalisées sans ce support.

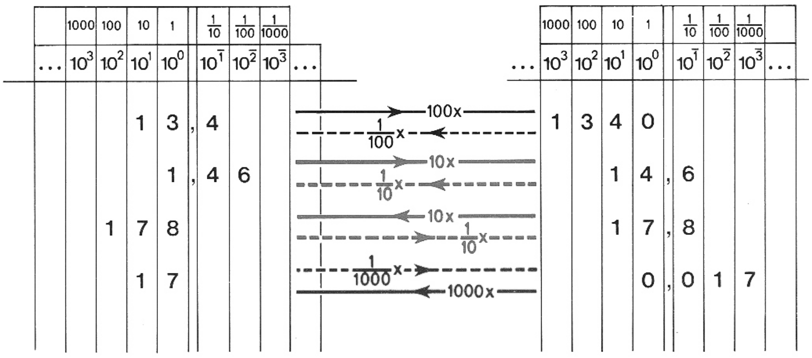


Fig. 3.3 Tableau de numération décimale - Page 62.

De nombreux autres outils symboliques sont utilisés pour représenter le système décimal de position et situer les nombres décimaux : la droite des nombres, la droite sous-graduée en base 10 et le graphe sagittal (notamment pour représenter le passage à l'inverse d'un rationnel). La droite des nombres, grâce au processus de partage des intervalles en 10, permet de lier l'écriture décimale et l'écriture fractionnaire, à partir de quoi sont construites les égalités de nombres du type $0{,}5 = \frac{1}{2}$. La droite des nombres est aussi l'outil pour comparer, ordonner et sérier des nombres.

La calculette est également annoncée comme un outil utile dans la classe pour vérifier ou effectuer des calculs. Mais elle est aussi proposée comme « un vaste laboratoire procurant un champ d'expériences numériques, riche et étendu, permettant d'observer et de découvrir divers faits sur les nombres, notamment les grands nombres, de jouer avec la numération de position, de réaliser des encadrements par tâtonnements, de conjecturer certaines propriétés des suites d'opérations ... etc. »

Tant dans le document principal que dans la brochure d'accompagnement, les désignations *nombre rationnel* (entier ou non entier), *nombre à virgule* et *nombre décimal* (limité, illimité périodique) sont utilisées fréquemment.

Nous n'avons pas trouvé de recommandation relative à la lecture des nombres décimaux.

3.2.4 Le répertoire de progressions de 1983

Dès la fin des années 1970, force est de constater, de nombreux observateurs de l'époque en attestent, que la réforme de l'enseignement des mathématiques instaurée par le programme de 1976 *passe* mal du côté des enseignants. Pour tenter de remédier à cette difficulté, le Ministère de l'enseignement édite en 1983 le *répertoire de progressions*.

Dès les premières lignes de l'introduction, les auteurs de ce document font également le constat de la difficulté des enseignants :

> *Ce n'est un secret pour personne : la mise en œuvre du programme de mathématique à l'école primaire s'avère particulièrement ardue pour l'immense majorité des maitres.*

Ce « répertoire de progressions » proposé par le Ministère répond donc à un besoin réel de la majorité des enseignants de l'école primaire : traduire dans des activités les prescrits du programme de 1976. Tout comme ce programme, le document de 1983 est structuré à partir des chapitres suivants : les ensembles, les relations, les nombres, la géométrie, les grandeurs, les démarches de mathématique appliquée.

En ce qui concerne particulièrement les nombres décimaux, les rédacteurs du document indiquent que, dès le premier cycle, des activités sont mises en place pour découvrir les nombres $0,5; 1,5; 2,5$, sans pour autant préciser ces activités. Il est aussi recommandé de lire et d'écrire des nombres décimaux.

Pour le deuxième cycle (3e et 4e primaire), la rencontre des « nombres à virgule » se limite aux centièmes. Il est recommandé d'« observer sur le mètre les graduations et sous-graduations en dixièmes et centièmes ». Cette recommandation a pour effet d'opérationnaliser le lien entre les nombres décimaux et les mesures de longueurs. Constatons également que, tout comme dans certains programmes actuels, la rencontre avec les nombres décimaux s'effectue de ce fait à partir de l'observation d'une situation où les nombres décimaux sont donnés, et non à partir de situations qui nécessitent leur « découverte[12] », la « production[13] » ou l'utilisation en contexte scolaire de *nouveaux nombres* pour les résoudre.

Les prescrits invitent également explicitement les enseignants à rencontrer d'abord des nombres décimaux limités aux dixièmes et ensuite de rencontrer des nombres décimaux limités aux centièmes. Cette approche particulière des nombres décimaux, que l'on pourrait assimiler à une approche *béhavioriste*, a encore cours aujourd'hui dans nombre de classes.

Le lien entre les fractions et les nombres décimaux est mis en évidence à partir de l'usage des fractions décimales, par exemple pour les nombres décimaux limités aux dixièmes : « Apparier nombre à virgule et représentation fractionnaire (dénominateur = 10) d'un nombre à virgule comportant un chiffre après la virgule ». Une même proposition est rédigée pour les nombres décimaux limités aux centièmes.

L'abaque est également présenté comme un outil *technologique* qui permet d'effectuer des changements d'unités : « Rendre un nombre à virgule comportant des dixièmes 10 fois plus grand en déplaçant la virgule ». On constate que ce prescrit favorise plutôt une vision *mécaniste* des changements d'unités alors que l'intérêt devrait également être porté sur la compréhension du système décimal de position. De plus, si du point de vue de l'écriture du nombre, ce qui est visible c'est bien le déplacement de la virgule, d'un point de vue arithmétique, ce n'est pas la virgule qui se déplace mais chacun des chiffres qui occupe un rang supérieur. Ce point de vue correspond par ailleurs à ce qui est effectué avec l'abaque.

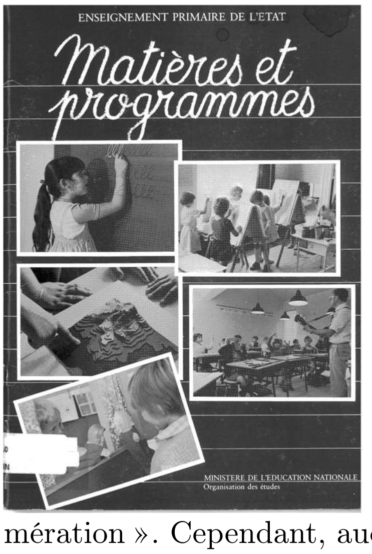
[12] Voir le Décret définissant les Missions prioritaires de l'Enseignement fondamental et de l'Enseignement secondaire, Ministère de la Communauté française, juillet 1994, article 8, alinéa 2, page 7.
[13] Id.

3.2.5 Le programme de 1985 : vers un nouveau paradigme

Avec les années 1980, un nouvel « esprit » souffle sur l'enseignement des mathématiques, mais également plus largement sur l'ensemble des systèmes éducatifs. Comme l'écrivent R. Bkouche & al. (1991), l'enseignement des mathématiques « est interpellé par une société qui, face à la crise, en appelle à l'"intelligence des situations" contre une pensée qui ne sait que mettre en pratique des routines bien huilées ».

Ainsi, les rédacteurs de ce nouveau programme mettent d'emblée l'accent sur la résolution de problèmes : les notions mathématiques sont utilisées en tant qu'outils pour résoudre des problèmes. Il s'agit là d'une certaine rupture avec les recommandations du précédent programme. Les situations réelles sont présentées à la fois comme point de départ et comme point d'arrivée de l'enseignement. L'abstraction des notions mathématiques est placée au centre d'un processus de *contextualisation/décontextualisation*. Cependant, le document garde la même structuration en cinq parties que le précédent : *les ensembles et les relations, les nombres, l'initiation à la géométrie, les grandeurs, les problèmes.*

Pour la première fois dans un programme, les notions de grandeurs *continues* et de grandeurs *discontinues* apparaissent pour l'apprentissage des fractions comme opérateurs. Il est ensuite recommandé de rencontrer les fractions comme nombres.



Les auteurs de ce programmes proposent également, pour les élèves du 2^e cycle, de « s'initier aux nombres à virgule » à partir de « situations vécues (étude des grandeurs) ». Par la suite, pour la 4^e année primaire, il est demandé d'« aborder la somme, la différence de nombres à virgule » en se limitant à 2 décimales. Au cycle supérieur, il est demandé de « *rechercher diverses écritures synonymes d'un même nombre* ($\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = 0{,}5 = 0{,}50 = \ldots$) ».

Nous constatons à nouveau dans le thème des grandeurs (3^e cycle, 4.2.3.2. Construire le système métrique) que le lien entre la construction du système décimal de position et les grandeurs est exprimé explicitement : « Achever la construction du système métrique en liaison avec le système de numération ». Cependant, aucune explication relative aux fondements théoriques de ce lien n'est exprimé. Il faut cependant remarquer que par rapport au répertoire édité en 1983, il s'agit là d'un renversement. En effet dans le document de 1983, l'écriture des nombres décimaux s'appuyait sur celle des mesures décimales. Alors qu'ici, il est demandé de compléter le système décimal de mesure à partir des connaissances sur les nombres, plus particulièrement le système décimal de position.

Le programme prévoit que les élèves lisent et écrivent des nombres rationnels. Cependant, à aucun moment il n'est précisé comment effectuer cette lecture. Il n'est pas non plus précisé l'intérêt de ces moments de lecture et d'écriture pour l'apprentissage des rationnels.

En ce qui concerne les outils proposés, seule la « droite sous-graduée » est mentionnée. Ceci peut être considéré comme un recul par rapport au panel d'outils proposés dans le programme de 1976. Cependant, ces outils étaient ancrés dans une didactique associée à la mathématique structuraliste (diagramme de Venn, graphe sagittal). Ces outils trouvent plus difficilement leur place dans une didactique qui tend, d'une certaine manière, à rompre avec les pratiques précédentes.

3.2.6 En synthèse

D'un enseignement formel à la fin du 19e siècle, les programmes tendent à emmener les enseignants vers un enseignement réfléchi, qui tient compte des avancées de la psychologie, de la pédagogie mais aussi des mathématiques. Ainsi, si dans un premier temps il est recommandé de s'appuyer essentiellement sur des réalités de vie (mesures, paiements), sur l'expérience en tant qu'intuition sensible des phénomènes pour étudier les nombres, dans les années 1970, suite aux changements intervenus dans l'axiomatique mathématique et aux travaux de G. Papy notamment, les nombres sont devenus l'élément premier que l'on peut étudier pour lui-même avant d'y voir des applications dans la vie courante. Certes, le vécu des élèves n'est pas évacué, mais c'est plutôt la représentation de situation à l'aide d'un *diagrammes de Venn* ou de graphes sagitaux qui sont les expériences sur lesquelles s'appuie l'enseignement. Dès 1985, l'appui sur les intuitions issues des expériences sensibles va à nouveau trouver sa place dans les programmes.

Ainsi, en ce qui concerne les grandeurs, l'analyse des documents officiels, tant en France qu'en Belgique, montre que, tout comme dans l'édification historique des mathématiques, l'importance et l'influence des grandeurs varient avec le temps. Dans ses travaux sur les programmes français, Ch. Chambris (2007) montre également que si avant 1970 « l'enseignement des grandeurs occupe une place importante dans l'arithmétique du primaire », dans les programmes qui ont suivi, essentiellement conçus par des mathématiciens, « les grandeurs disparaissent quasiment de l'étude des nombres, des opérations et de la proportionnalité ».

D'autres fluctuations ont eu lieu au cours de ces 150 années de structuration de l'enseignement des nombres décimaux. Depuis le 19e siècle, les programmes proposaient de débuter l'enseignement de ces nombres décimaux à partir de la 4e primaire. Le programme de 1976 proposera leur rencontre dès le début de l'école primaire. Depuis 1985, cet enseignement est à nouveau proposé en 4e année primaire[14].

Jusqu'au programme de 1976, le lien entre les nombres décimaux (et le système décimal de position) et les mesures de grandeurs est quasiment naturel. Nombres et grandeurs sont deux domaines mathématiques rassemblés dans le programme. Par la suite, sans doute sous l'influence de la réforme des mathématiques, le lien entre nombres et grandeurs va être modulé et ces deux domaines vont être détaillés dans des parties séparées des programmes.

De manière générale, le lien entre les fractions et les nombres décimaux est proposé à partir de la représentation sur la droite graduée. À aucun moment cependant, nous n'avons trouvé de référence à la construction et à la compréhension de cet outil par les élèves.

[14] Notons qu'en France, cet enseignement est également situé en 4e primaire (CM1). En Suisse par contre, l'enseignement structuré des nombres décimaux débute en 5e primaire.

Celui-ci est *donné* à la classe et les problèmes liés à sa mise en place et à son utilisation (origine, distance, ponctualisation) ne sont pas cités ou expliqués.

En ce qui concerne les outils de représentation symbolique, comme nous avons pu le constater par ailleurs pour d'autres domaines mathématiques, le nombre de représentations varie sensiblement selon les programmes. Peu en 1936, nettement plus en 1976, nettement moins en 1985... Cependant, proposer des outils ne suffit pas. Il est aussi nécessaire d'en préciser les usages, les contraintes et les potentialités pour la classe. Ce que nous n'avons pas trouvé dans ces programmes, sauf pour quelques exceptions dans le programme de 1976.

Concernant le lexique utilisé pour dénommer les nombres décimaux, jusqu'en 1976, une seule expression est utilisée : *nombre décimal*. Le programme de 1976 marque une rupture. Il contient plusieurs expressions qui dénotent un changement au niveau « mathématique » : *nombre à virgule*, *nombre décimal limité*, *nombre décimal illimité périodique*, *nombre rationnel*. Le programme de 1985 gardera la désignation *nombre à virgule*, mais remplacera *nombre décimal* par *nombre exprimé sous la forme décimale*. Le terme *rationnel* est également employé, ce qui permet de garder à l'esprit qu'un même nombre peut être écrit à l'aide d'une fraction ou d'un nombre décimal.

3.3 Analyse des programmes de l'enseignement primaire parus depuis 1999

Avec l'analyse historique, nous avons pu nous rendre compte des évolutions qui sont intervenues dans les programmes de l'école primaire. Ces changements concernent notamment l'ancrage des nombres décimaux au niveau des grandeurs, leurs liens avec les fractions ordinaires et décimales, ainsi que les outils pour représenter ces nombres.

Dans cette deuxième partie, nous observons comment évoluent les programmes à la suite de la parution des *Socles de compétences* en 1999. Nous analysons particulièrement les programmes des quatre réseaux principaux en Communauté française, à savoir : la Communauté française, l'enseignement libre catholique, les Villes et Provinces, et la Felsi[15].

3.3.1 Les *Socles de compétences* (1999) – Les nombres

Les *Socles de compétences* édités en 1999 par le Ministère de la Communauté française constituent le référentiel officiel pour les enseignants des trois premières étapes de l'enseignement obligatoire. Ce document concerne donc tous les enseignants du maternel, du primaire et du premier degré du secondaire. Ceci constitue une nouveauté pour le système éducatif belge francophone car jusqu'à présent les programmes des différents niveaux d'enseignement, particulièrement pour le primaire et le secondaire, « étaient conçus sans coordination » entre ces niveaux (Ministère de l'éducation, rapport « Danblon », 1990). Ce

[15] Fédération des Établissements Libres Subventionnés Indépendants.

document est sans nul doute un premier pas qui permet de répondre à un besoin d'harmonisation du parcours scolaire entre deux ans et demi et quatorze ans, comme le précisaient les auteurs du rapport « Danblon » : « nous proposons que l'on s'oriente dorénavant vers des programmes pensés globalement à partir d'un unique noyau de base ».

La partie consacrée à la *formation mathématique* est divisée en quatre sections, consécutivement : *les nombres, les solides et les figures, les grandeurs, le traitement des données*. D'emblée, constatons que la partie *Ensembles et relations* n'apparait plus, alors qu'elle était présentée avant les autres dans les programmes de 1978 et 1985. Remarquons aussi que la partie concernant les grandeurs est toujours située après celles relatives aux nombres et à la géométrie, signe sans doute que la réforme de l'enseignement des mathématiques influence encore notre enseignement. Même si, soyons-en conscients, l'ordre de présentation des notions mathématiques dans un document officiel n'augure pas nécessairement d'un ordre de présentation dans la classe.

Dans l'introduction dédiée à la *formation mathématique*, trois aspects de l'arithmétique élémentaire sont mis en avant : *l'utilité des nombres*, *l'organisation des nombres et le système décimal*, *les opérations sur les nombres*. Nous les détaillons quelque peu ci-dessous, mais auparavant notons qu'aucune référence à la mesure de grandeurs n'est présente dans cette introduction.

L'utilité des nombres – D'entrée, les rédacteurs du document précisent qu'« il y a d'abord des nombres qui servent à compter : ils se notent dans le système décimal et produisent une suite ordonnée ». Les compétences à développer dans ce cadre sont « compter, dénombrer, classer ». Comme précisé ci-dessus, aucune référence à la mesure de grandeurs autre que celle d'ensembles discrets n'est proposée tout au long de cette partie. *A contrario*, notons qu'il est précisé dans l'introduction dédiée aux *grandeurs* : « L'apprentissage des nombres et des opérations trouve un ancrage dans des contextes de grandeurs. La manipulation et l'utilisation d'étalons variés permettent des comparaisons et des opérations ». Et de poursuivre : « Les opérations de mesurage et de fractionnement conduisent aux nombres décimaux et aux fractions ». Ainsi, les mesures sont bien situées comme ancrage de l'étude des nombres rationnels.

L'organisation des nombres et le système décimal de position – Les rédacteurs précisent que « l'aisance dans l'univers des nombres passe par une bonne connaissance des mécanismes de la numération décimale et l'acquisition d'automatismes relatifs au passage à la dizaine, aux multiples et aux puissances de dix... ». Et poursuivent en énonçant que « la découverte et l'élaboration de propriétés relatives à certaines catégories de nombres contribuent ainsi à assurer une certaine aisance dans le domaine des nombres ». La compétence à développer dans ce cadre, sur les nombres naturels et décimaux limités au millième, est « organiser les nombres en familles en les décomposant et recomposant ». .

Les opérations sur les nombres – Enfin, le calcul mental est situé dans la perspective de la *découverte* des propriétés des opérations (addition, soustraction, multiplication et division). Les rédacteurs précisent également que « ces opérations élargissent l'univers des nombres, elles amènent les fractions, les décimaux et les nombres relatifs ». De telle sorte que les nombres décimaux, mais aussi les fractions, semblent être détachés des mesures de grandeurs : ils naissent des opérations sur les nombres eux-mêmes. Ceci peut paraitre contradictoire avec ce qui a été énoncé au paragraphe ci-dessus. Sans doute peut-on reconnaitre ici la volonté des rédacteurs de ne pas enfermer les enseignants dans un type d'approche des nombres (les mesures ou les opérations sur les nombres, ...). *A contrario*, on peut se demander si cette volonté d'ouverture aide les enseignants dans leurs analyses pour préparer leurs activités.

Le calcul mental et les propriétés des opérations sont considérés comme des outils pour « mettre en place le calcul écrit et utiliser la calculette ». Cette dernière est par ailleurs plus particulièrement proposée dans le cadre de la réalisation de calculs, parallèlement au calcul mental ou au calcul écrit, plutôt que dans une perspective d'observation de phénomènes numériques ou de validation de calculs réalisés par écrit ou mentalement[16].

Les compétences à certifier

Cinq compétences relatives aux *nombres décimaux* destinées aux élèves des 3e et 4e cycles de l'école primaire (de la 3e à la 6e primaire) sont énoncées. Les enseignants doivent cependant se reporter au programme de leur réseau pour déterminer une opérationnalisation de l'enseignement de celles-ci.

- *Dire, lire et écrire des nombres dans la numération décimale de position en comprenant son principe (Des nombres naturels et des décimaux limités au millième).*
- *Classer (situer, ordonner, comparer) des nombres naturels et des décimaux limités au millième.*
- *Décomposer et recomposer des nombres naturels et des décimaux limités au millième.*
- *Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées avec des nombres naturels et des décimaux limités au millième.*
- *Écrire des nombres sous une forme adaptée (entière, décimale ou fractionnaire) en vue de les comparer, de les organiser ou de les utiliser.*

Ainsi, en fin d'école primaire, les élèves peuvent être évalués à l'aide d'activités concernant l'ordre, la densité[17] et les quatre opérations sur les nombres décimaux, limités au millième.

Le lexique relatif aux nombres

L'analyse du lexique employé dans les *Socles de compétences* est assez intéressante et permet de mettre en évidence la variété des désignations, même si celle-ci reste raisonnable par rapport à celle que l'on trouve dans les programmes. Le tableau ci-dessous expose les différentes désignations relatives aux *nombres* et au *système décimal de position.*

[16] Notons que de nombreuses recherches, notamment L. Del Notaro. & R. Floris (2005), M. Artaud (2003), ont mis en évidence l'intérêt de l'utilisation de la calculette qui renforcerait la compréhension des mécanismes de calcul et des propriétés des opérations. Le CREM (1995) avait également mis en évidence l'intérêt des « machines » pour « aider à apprendre les nombres ». Ces pratiques correspondent à des tâches spécifiques que permettent les nouvelles technologies telles que *expérimenter, vérifier* et *généraliser.*

[17] Notons cependant que si l'apprentissage des nombres décimaux n'aborde que ceux limités au millième, écrire un nombre entre 1,002 et 1,003 ne peut être envisagé.

Tab. 3.1 Occurrences des désignations

Désignations	Occurrences
Les nombres	13
Les nombres naturels	8
Les décimaux	1
Les décimaux limités au millième	4
Numération décimale	1
Numération décimale de position	1
Système décimal	1
Phénomènes arithmétiques	1

Dans l'introduction de la partie *formation mathématique*, la désignation *système décimal* est employée dans la phrase expliquant que les nombres qui servent à compter « se notent dans le système décimal ». Il s'agit de ce que A. Bouvier & al. (1979) désignent par un « système de position en base dix, le plus répandu actuellement dans la vie courante ». Ces auteurs font également référence au *système de numération*, à savoir l'« ensemble des méthodes et conventions permettant d'écrire et de nommer tout nombre entier naturel et par extension les autres nombres, ainsi que d'effectuer des calculs sur eux ». Nous pourrions ajouter à cette *définition* que le *système décimal de position* permet aussi la comparaison de nombres dans le sens où il permet d'utiliser une représentation de type *somme de fractions décimales*, telle que 0,28 $=$ 0 unité $+\,2$ dixièmes $+\,8$ centièmes ou $0 + \frac{2}{10} + \frac{8}{100}$.

À la lecture du document, il nous semble que les deux autres désignations, *numération décimale* et *numération décimale de position*, sont utilisées également dans le même sens.

En synthèse

Dans la partie consacrée au domaine des nombres, les *nombres naturels* et les *nombres décimaux limités au millième* sont quasiment les seuls nombres évoqués dans les compétences à certifier à la fin de l'enseignement primaire. Les fractions apparaissent dans le cadre de la compétence relative à l'écriture des nombres « sous une forme adaptée (entière, décimale ou fractionnaire) en vue de les comparer, de les organiser ou de les utiliser ». Cette limitation n'est plus indiquée pour l'enseignement secondaire. À aucun moment, on ne trouve mention des *rationnels* ou des *nombres réels*, alors qu'ils étaient présents dans les programmes de 1976 et de 1985.

Dans cette même partie, les nombres et leurs propriétés semblent s'acquérir à partir des dénombrements, des classements de nombres et des opérations sur les nombres. Alors que dans la partie des grandeurs, sans référence explicite à la partie des nombres, il est fait état du lien entre les nombres (naturels, décimaux et fractionnaires) et les grandeurs, leur mesure et leur fractionnement.

Plusieurs désignations, que nous avons mises en évidence dans les tableaux ... blabla non explicitement définies, sont utilisées dans ce document officiel, tant pour désigner ce que l'on appelle communément les « nombres à virgule » que pour désigner le *système décimal de position*. Sans doute serait-il utile dans un esprit de clarté soit de les expliciter chacun s'ils sont différents, soit de n'en utiliser qu'un seul.

3.3.2 Les programmes des différents réseaux d'enseignement

Notre analyse s'est portée sur les programmes des quatre réseaux principaux en Communauté française : l'enseignement organisé par la Communauté française, l'enseignement libre catholique (Programme intégré, section mathématique), l'enseignement des Communes et des Provinces (Programme d'étude pour l'enseignement primaire, section Formation mathématique) et l'enseignement organisé par la Felsi.

Trois programmes proposent une structure similaire à celle des *Socles de compétences*. Seul le programme de la Felsi propose une structure différente en présentant les domaines mathématiques dans un ordre différent : *savoir structurer l'espace, savoir mesurer les grandeurs, savoir calculer sur des nombres*. Ce choix est justifié par le fait que cette progression se rapproche « d'un ordre proche de la découverte du réel qu'en a faite l'humanité et qu'en fait encore l'enfant ».

Des différences existent également entre les quatre programmes quant aux nombres à rencontrer ou à étudier à l'école primaire. Le programme de la Communauté française est le seul à proposer d'étudier également les *nombres réels*. Ce qui est assez complexe pour des élèves de cet âge. Sans doute faut-il comprendre que les *nombres réels* existent et qu'il peut être intéressant d'en rencontrer, en comparaison avec d'autres nombres, pour donner plus de sens[18] aux nombres à étudier à l'école primaire (naturels, décimaux, fractions). C'est une position déjà prise par R. Douady en 1980, que nous reprenons également dans nos activités pour introduire les nombres décimaux. L'objectif n'est bien sûr pas de théoriser la rencontre des nombres réels avec des élèves de l'école primaire, mais de s'appuyer sur cette rencontre, plutôt intuitive, pour mieux comprendre un des rôles des nombres décimaux, à savoir encadrer des nombres réels.

Des différences existent aussi pour les nombres décimaux à rencontrer : le programme de la Communauté française est le seul à proposer de « s'intéresser aux décimaux limités aux dix-millièmes ». À nouveau, cette perspective de travail dépasse ce qu'il est demandé de certifier au terme de l'enseignement primaire dans les Socles de compétences. Toutefois, il nous semble également que proposer des activités avec des nombres décimaux qui ne sont pas seulement limités au millième permet de mieux comprendre ces nombres et leur utilité. De même, la rencontre de nombres décimaux non limités au millième permet aux élèves de mieux comprendre ce qui est en réalité un des objectifs essentiels des activités : la compréhension du système décimal de position, c'est-à-dire la structure de tout nombre exprimé en base 10.

Les désignations des nombres décimaux et du système décimal de position

Le tableau ci-dessous présente les différentes désignations des *nombres décimaux* contenues dans chacun des programmes.

[18] À l'instar des rédacteurs du rapport « Danblon » (1990), précisons que donner du sens aux apprentissages mathématiques ne veut pas uniquement dire qu'il faut faire vivre ces apprentissages dans des contextes externes aux mathématiques, par exemple en physique ou dans la vie quotidienne. « Les situations proprement mathématiques sont aussi une source inépuisable de sens ».

Tab. 3.2 Désignations des nombres dans les programmes.

	Désignations	*Socles*	*Com^{té} fr.*	*Libre cath.*	*Com. & Pr.*	*Felsi*
1	Nombre(s)	×	×	×	×	×
2	Nombre(s) naturel(s)	×	×	×	×	×
3	Décimaux	×		×	×	
4	Nombre(s) décimal(aux)		×	×	×	×
5	Décimaux limités au millième	×	×		×	×
6	Nombres à virgule			×		
7	Nombres à virgule en base 10			×		
8	Nombres dits « décimaux »			×		
9	(Nombre(s)) rationnel(s)		×	×		×

Six désignations différentes (lignes 3 à 8) sont utilisées pour les *nombres décimaux*[19]. Bien sûr, un enseignant ne parcourt pas tous les programmes pour prendre connaissance des matières qu'il a à enseigner. Toutefois, il serait peut-être préférable que l'on puisse choisir un terme général pour les documents officiels, dans le cas où les autres désignations n'apportent pas un éclairage particulier du concept.

Par contre, l'emploi de l'expression *nombres rompus*[20], située dans un contexte historique, peut parfois éclairer la compréhension des élèves, si toutefois ils rencontrent des situations qui donnent sens à ce terme. Constatons également que la désignation *rationnel(s)* n'est utilisée ni dans les *Socles* ni dans le programme des Communes et Provinces. Or ce terme général possède l'avantage, dans un texte pour enseignants, de situer les nombres décimaux dans une structure mathématique et de les associer aux fractions.

Dans les cinq documents analysés (Socles de compétences et programmes), nous avons relevé treize désignations différentes pour désigner le *système décimal de position* (tableau 3.3). Il nous semble à nouveau qu'il serait utile de préciser ces désignations pour les enseignants si elles possèdent réellement des significations différentes. Cependant, selon notre analyse, tous ces termes désignent cet « ensemble des méthodes et conventions permettant d'écrire et de nommer tout nombre entier naturel et par extension les autres nombres, ainsi que d'effectuer des calculs sur eux » (Bouvier & Al., 1979). L'emploi d'une désignation générale telle que « système décimal de position » semble plus appropriée si l'on souhaite une compréhension maximale des documents. De plus, cette dernière désignation a l'avantage de rassembler en quelques mots le fonctionnement de notre numération, comme l'exposent ci-dessous les définitions extraites du Larousse 2008 :

- *système* : « ensemble d'éléments considérés dans leurs relations à l'intérieur d'un tout fonctionnant de manière unitaire »,
- *décimal* : (du latin decimalis, formé avec decem qui signifie dix) se dit d'un système de numération en base dix, ce qui signifie qu'il y a dix symboles appelés chiffres disponibles pour écrire tout nombre,

[19] L'usage courant veut que l'on nomme *nombres décimaux* les nombres qui s'écrivent avec une *virgule*, même si d'un point de vue mathématique, tous les nombres exprimés en base 10 sont des nombres décimaux. Cependant, l'usage en mathématique veut que les nombres décimaux sont les nombres à virgule limités ou illimités périodiques. Ceux que l'on rencontre dans les classes, à l'école primaire, sont par ailleurs bien souvent limités au millième.

[20] Voir la Dismes de S. Stevin.

– *de position* : exprime le fait que selon la place relative d'un chiffre dans un nombre, sa valeur varie : chaque position attribue au chiffre qui l'occupe une valeur dix fois plus grande que la précédente et dix fois plus petite que la suivante, dans le sens de gauche vers droite.

Tab. 3.3 Présence de désignations de la numération décimale.

Désignations	*Socles*	*Com^{té} fr.*	*Libre cath.*	*Com. & Pr.*	*Felsi*
Numération décimale	×		×		
Numération de position		×	×	×	×
Numération décimale de position	×				
Numération de position décimale			×		
Numération de position avec base			×		
Système décimal	×		×	×	
Système de numération			×	×	×
Système de numération de position décimale		×			
Système de numération décimale en base 10			×		
Système de numération en base 10				×	
Système d'écriture décimale			×		
Écriture décimale		×	×	×	×
Mécanisme de position				×	

Du passage du discret au continu

> « Nul continu n'est divisible en choses sans parties. »
>
> Aristote, La Physique

En préalable, nous souhaiterions préciser que la généralisation de l'ensemble des nombres qui est en cours avec l'adjonction des nombres décimaux à l'ensemble des nombres naturels participe du voyage que les élèves ont à parcourir pour entrer dans l'*univers continu* des nombres. Cependant, reconnaissons que l'ensemble des nombres rationnels n'est pas *continu* au sens strict. Il ne possède plus le caractère *discret* que possède l'ensemble des nombres naturels, mais il n'est pas non plus *continu* comme l'est l'ensemble des nombres réels. Ainsi, il serait plus opportun de parler du caractère *non-discret* de l'ensemble des nombres rationnels. Cependant, pour plus de clarté, dans la suite de ce chapitre, et dans celui consacré à l'analyse des manuels (chapitre 4), nous parlerons de la dialectique « discret/continu » pour l'apprentissage des nombres décimaux, situant celui-ci dans une perspective à plus long terme, celle de l'appropriation des nombres réels, perspective située au terme de la scolarité secondaire pour certains élèves.

Les adjectifs *discret* et *continu* sont souvent fort peu connus des enseignants du fondamental dans leur sens mathématique. Mais rappelons tout d'abord que ces notions ont longuement influencé la pensée des hommes et les développements théoriques qu'ils ont mis au point. Et poursuivons la citation d'Aristote lorsqu'il définit une quantité comme « Ce qui est divisible par deux ou par plus de parties aliquotes ». Ce qui fait dire à G. Waldegg (1999) que « La division est l'opération qui permet d'identifier les quantités et elle est à la base de la classification qu'il [Aristote] propose : si la quantité est discrète –

et donc dénombrable –, il s'agit d'un nombre ; par contre, si la quantité est continue – et donc mesurable –, il s'agit d'une grandeur ».

Dans trois des quatre programmes consultés, les notions de *cardinalité* et d'*ordinalité* sont nettement mises en évidence. De telle sorte que le caractère *discret* de l'ensemble des nombres naturels soit particulièrement mis en avant. Seul le programme de la FELSI expose les obstacles liés à la compréhension du *continu* et du *discret*. Les caractères « continu » et de « discontinu » sont cependant présentés dans le programme de l'enseignement catholique mais le passage de l'un à l'autre n'est pas situé comme un obstacle, franchissable bien sûr, pour l'apprentissage des nombres décimaux.

Reconnaissons que, pour une part, la compréhension de cette distinction, mais surtout du caractère continu de certains éléments mathématiques influe sur l'appropriation des nombres décimaux. En effet, à la différence des nombres naturels, les *nombres à virgule* ne possèdent pas cette caractéristique de pouvoir présenter un aspect cardinal et un aspect ordinal. Si l'on peut dire que 1,23 représente la mesure d'une longueur exprimée en mètre, ce nombre ne possède pas pour autant un aspect cardinal. Il est de plus exclu d'attribuer une signification ordinale à 1,23 au sens où il ne possède pas un successeur et un prédécesseur directs. Cependant, la notion d'ordre est applicable aux nombres décimaux au sens où il est possible de les ordonner.

La gestion du caractère *continu* de la droite graduée n'est par contre prise en charge dans aucun des programmes. Alors que cet outil est proposé dans chacun d'eux. Dans ces programmes, il est également peu fait cas des liens entre les nombres naturels et les nombres décimaux. De même que des différences au niveau des opérations sont peu mises en évidence.

Du lien entre les nombres décimaux et les grandeurs

À la section 3.3.1 ci-dessus, nous avons mis en évidence que dans la partie relative aux nombres dans les *Socles de compétences*, le lien entre les nombres et les grandeurs n'était pas explicitement indiqué. Par contre, il est recommandé dans la partie relative aux grandeurs de s'appuyer sur les mesures de grandeurs, et notamment le travail concernant les changements d'unités, pour compléter le système décimal de position.

Il en est de même pour les programmes. Et si parfois ce lien est établi, par exemple pour construire les sous-unités de mesure, c'est plutôt l'expression à partir de deux nombres entiers qui est privilégiée : par exemple $2\,m\,32$ au lieu de $2,32\,m$.

Il est cependant nécessaire de nuancer ce propos. Par exemple, le programme de l'enseignement catholique suggère de « rencontrer sur diverses marchandises des écritures de mesures de grandeurs à virgule ». L'établissement du lien entre les grandeurs et les nombres est clairement mis en évidence lorsqu'il est recommandé de « construire le sens des nombres dits "décimaux", des nombres à virgule en base 10, en articulation avec les unités de base et les sous-unités de mesure de grandeurs conventionnelles. La virgule étant le signe de séparation des nombres entiers d'unités de base et des fractions décimales de cette unité : *21 l 75 cl = 21,75 l* ».

Des situations qui justifieraient et expliqueraient l'utilité des nombres décimaux, la présence de la virgule, les *rôles* du zéro,... sont peu exposées dans les programmes. Le plus souvent ce sont des situations où les nombres décimaux préexistent au travail des élèves qui sont mises en avant pour rencontrer ces nombres. Par exemple, dans le programme de l'enseignement catholique :

> « Rencontrer sur diverses marchandises des écritures de mesures de grandeurs avec virgule. Faire des hypothèses de sens, d'ordre de grandeurs en comparant à des grandeurs connues : ce berlingot où est écrit *0,2 l* contient beaucoup moins que ce tétrabrique d'*1 l*. Établir des égalités d'écritures correspondant à la même grandeur découverte par manipulation. Cela sans expliquer davantage le sens de cette écriture à virgule : *0,5 l = 1/2 l* ; *0,250 kg = 1/4 kg = 250 g* ».

Ou dans le programme de l'enseignement des communes et des provinces, pour le 3[e] cycle :

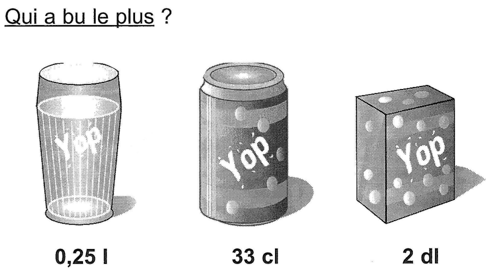


Fig. 3.4 Programme CECP - Page 79.

Par rapport à ces recommandations, mais aussi par rapport à des pratiques similaires observées dans les classes assez couramment, nous souhaiterions émettre trois réflexions.

1. D'abord, des recherches en didactique des mathématiques (notamment Brousseau, 1980 et Douady, 1980) et en sciences cognitives (notamment L. Desmet (en préparation) ont montré que ce sont, pour une part, certaines situations faisant appel aux grandeurs qui font obstacles à l'apprentissage des nombres décimaux.

   En exemple nous expliquons cette situation où dans une classe de 4[e] année (15 élèves), à la suite de différentes activités concernant la construction d'un carré dont l'aire est égale à 8, nous demandons aux élèves de tracer ce carré d'aire égale à 8 sur une feuille quadrillée. Pour ce faire, nous reprenons la longueur du côté que nous avons calculée par approximations successives, 2,82 (nous avons décidé de commun accord avec les élèves de nous arrêter à deux décimales après la virgule). Les élèves sont ainsi amenés à tracer un carré dont la mesure des côtés est égale à 2,82 cm.

   Dans la classe, assez rapidement, quatre positions par rapport à cette demande peuvent être mises en évidence :
   - les élèves qui disent que ce n'est pas possible, comprenons qu'ils ne peuvent gérer le fait qu'il y ait deux décimales à la mesure en centimètre,
   - les élèves qui disent que c'est possible mais que l'on ne sait pas « tracer le deux »,
   - les élèves qui n'ont pas d'avis et qui constituent une majorité,
   - un élève qui dit que « c'est possible mais cela fait 10,2 cm ! ».

La dernière proposition peut surprendre, elle a par ailleurs surpris l'enseignant lors de l'activité. Elle montre en tout cas combien les connaissances des élèves concernant le système décimal de mesure peuvent être prégnantes dans une situation de travail. Mais expliquons quelque peu la réflexion de l'élève, suite à son interview.

D'abord, l'élève explique que pour savoir ce qu'il faut dessiner, il faut mettre le nombre dans le tableau (comprenons l'abaque des mesures). Ensuite, il explique qu'il fait « $2 + 8$ et donc cela fait 10,2 cm ».

Pour soutenir ce raisonnement, plusieurs connaissances (ou croyances, représentations) sont mobilisées. Certaines d'entre elles sont activées, d'autres sont inhibées. Nous les présentons d'abord ci-dessous et les situons ensuite dans le raisonnement de l'élève.

Connaissance 1	Pour inscrire une mesure dans l'abaque des longueurs, on place d'abord le chiffre des unités dans la colonne de l'unité de mesure. Ensuite on complète le tableau avec les autres chiffres.
Connaissance 2	On ne peut inscrire qu'un chiffre dans chaque colonne.
Connaissance 3	Le tableau des mesures de longueurs ne comprend aucune mesure plus petite que les millimètres.

Pour inscrire la mesure 2,82 cm dans l'abaque des longueurs, comme le montre la figure 3.5, à partir des connaissances construites par l'élève au cours des activités de classe, il est d'abord nécessaire de placer le chiffre des unités de longueur. En l'occurrence, l'élève doit écrire 2 dans la colonne des centimètres. Ensuite, il doit inscrire les autres chiffres dans les colonnes correspondant à leur valeur respective (connaissance 1). Mais un conflit apparait alors entre les connaissances 2 et 3. En effet, l'élève souhaite inscrire les chiffres 8 et 2 dans l'abaque cependant, selon la connaissance 3, il n'y a pas de colonne après celle des millimètres, et selon la connaissance 2 on ne peut inscrire deux chiffres dans la même colonne. Pour se sortir de cette contradiction, l'élève va inhiber la connaissance 2 et donc inscrire deux chiffres, en l'occurrence le 8 et le 2, dans la colonne des millimètres. Mais *quasi* en même temps, pour régler ce conflit, l'élève va mobiliser une quatrième connaissance, celle qui dit qu'« il y a dix millimètres dans un centimètre ».

Ainsi, pour « survivre », l'élève en vient à considérer qu'il y a 82 mm, ce qui, selon la connaissance 4, lui permet d'affirmer qu'il y a maintenant 8 cm et 2 mm. À ce stade, il est amené à additionner les 2 cm déjà présents dans la colonne des centimètres aux 8 cm qu'il vient d'obtenir par transformation. Ceci explique qu'il déclare que 2,82 cm = 10,2 cm, soit $2 + 8$ cm et 2 mm.

m	dm	cm	mm
		2	82
		2 + 8	2
		10	2

Fig. 3.5 Traitement de l'information par l'abaque des mesures de longueur.

Le même phénomène a été mis en évidence avec des élèves de l'enseignement différencié, lors du traitement de situations relatives à des paiements en euros. Nous avons proposé la situation suivante aux élèves :

> « Nous allons à la pompe pour faire le plein de carburant. Nous y achetons 17 litres de diesel au prix de 1,017 €/ litre. Qu'allons-nous payer à la caisse ? »

Rapidement les élèves ont utilisé leur calculette pour effectuer la multiplication suivante : $17\times\ 1{,}017 = 17{,}289$. Dans leur grande majorité, les élèves ont répondu que le prix à payer serait de 19 € et 89 cents ! Ceci peut à nouveau surprendre. En réalité, ces élèves ont utilisé un raisonnement similaire à celui utilisé par l'élève dans la situation précédente.

Dans cette situation avec les paiements en euro, il est nécessaire d'inhiber une partie de ses connaissances relatives à la monnaie pour appliquer à la situation ses connaissances relatives au système décimal de position. De telle sorte que l'on puisse dire que 17,289 € équivaut à un paiement de 17 € et 29 cents, après une opération d'encadrement par le haut. Or, le raisonnement des élèves est le suivant :
ils savent que les paiements s'effectuent en euros et en cents ;
ainsi, pour eux, 17,289 € correspond à 17 € et 289 cents ;
ils convertissent ensuite les cents en euros, soit 289 cents = 2 € et 89 cents ;
enfin, ils additionnent les réponses obtenues, soit : 17 € + 2 € = 19 € et 89 cents.

Ces élèves n'ont pas tenu compte du fait que les cents correspondent aux rangs des dixièmes et des centièmes. Et que d'autres chiffres peuvent apparaitre dans le nombre mais que ceux-ci ne correspondent pas à un nombre de cents. Reconnaissons cependant que pour certains élèves, ces dernières connaissances étant absentes ou insuffisamment structurées. Elles ne pouvaient par conséquent pas être mobilisées à bon escient.

Ces deux exemples montrent combien les connaissances relatives au système de mesure sont généralement plus prégnantes que les connaissances sur les nombres et sont ainsi activées prioritairement pour gérer une situation où mesures et nombres sont liés.

2. Ensuite, l'une des situations que l'on propose régulièrement aux élèves est celle qui consiste à comparer des récipients, et au-delà leur contenance, pour rencontrer des nombres décimaux. Il semble que cette situation confronte les élèves à des traitements sémantiques certes semblables mais qui s'appuient sur des traitements syntaxiques fort différents. Expliquons-nous.

0,2 l **1 l**
20 cl **1 l**

Fig. 3.6 Comparaison de grandeurs et de nombres.

Dans cette situation que les élèves traitent les récipients (des volumes) ou les mesures de grandeurs (capacités), c'est l'inégalité entre les données qui est à constater. Le petit berlingot contient moins de liquide que le grand berlingot ; 0,2 l est plus petit que 1 l.

Cependant, les traitements syntaxiques à mettre en œuvre pour traduire la situation sont fort différents et font appel à des référentiels différents. De plus, les processus de validation à mettre en œuvre font aussi appel, *a fortiori*, à des contextes différents. Dans la situation physique, ce qui entre en jeu ce sont les perceptions.

Pour des élèves de 4^{e} primaire, il n'est pas difficile de percevoir et d'accepter que le berlingot de lait soit « plus grand », plus volumineux que le berlingot de jus (même si pour certains élèves, ce n'est d'ailleurs pas le volume qui va permettre de conclure à la supériorité du berlingot de lait, mais le fait que ce dernier est plus « haut » que le berlingot de jus). Le traitement syntaxique de la situation physique se fait donc à partir de traits physiques (hauteur, largeur, volume). La validation de l'hypothèse de supériorité volumique du berlingot de lait se réalise ensuite dans le registre de la comparaison de volumes, par exemple à l'aide de liquide. L'accès à ce processus de validation qui fait notamment appel à la conservation des grandeurs est tout à fait possible pour des élèves de 4^{e} primaire.

Cependant le traitement syntaxique de la situation numérique est tout autre. Bien sûr, les élèves peuvent accepter, à partir d'un argument d'autorité par exemple, que 1l soit plus grand que 0,2l. Mais pour donner sens à cette inégalité, il est nécessaire d'une part de se débarrasser des mesures de grandeur, en l'occurrence le litre, et d'autre part de comprendre le système décimal de position. Or il apparait que cette notion est au cœur de l'apprentissage à réaliser et que la situation proposée ne permet pas vraiment sa prise en charge par l'élève.

3. Enfin, si nous revenons aux Socles de compétences et aux recommandations relatives à l'élargissement « de l'univers des nombres », nous apercevons que ce sont les opérations qui « amènent les fractions, les nombres décimaux et les nombres relatifs ».

   Ainsi, il nous parait important de resituer les activités de découverte et d'appropriation des nombres décimaux dans une dynamique qui prend en compte à la fois les opérations arithmétiques et des grandeurs non conventionnelles qui ne permettent pas les changements d'unités de manière systématique.

Du lien entre les nombres décimaux et les fractions

Tous les programmes annoncent qu'il est nécessaire de rencontrer des cas d'égalité entre des fractions et des nombres décimaux, autrement dit de montrer qu'un même nombre peut avoir une écriture fractionnaire et une écriture décimale. Par exemple : $\frac{1}{2} = 0{,}5$ ou $\frac{1}{5} = 0{,}2$.

Dans chaque document, il est également recommandé de travailler l'égalité dans le sens inverse : $\mathit{0{,}4} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, ou $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0{,}2$. Ainsi, comme il est explicitement inscrit dans le programme de la Felsi, le lien entre les nombres décimaux et les fractions décimales s'opérationnalise à l'aide du lexique relatif au système décimal de position *dixième*, *centième* et des habitudes de lecture des fractions en *x-ième*. Dans le programme de l'enseignement catholique, il est noté clairement que pour assurer le lien entre les fractions ordinaires et les nombres décimaux, il est recommandé de « transformer des fractions en fractions équivalentes pour assurer leur caractère décimal (fraction dont notamment le dénominateur est puissance de dix) ».

3/10 = 0,3 142/1000 = 0,142 1/5 = 2/10 = 0,2

1/4 = 25/100 = 0,25 3/4 = 0,75 3/8 = 375/1000 = 0,375.

Fig. 3.7 Programme intégré, enseignement libre catholique, page 106.

Comparer des nombres rationnels: l'écriture de nombres sous forme décimale et fractionnaire	941
• $\frac{1}{10}$ = 0,1 • $\frac{5}{10}$ = 0,5 942	• $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ = 0,2 • $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$ = 0,25 943

Fig. 3.8 Programme de la Communauté française, page 163.

Bien que ces programmes exposent la nécessité de ces transformations (fraction ordinaires, fractions décimales, nombres décimaux), nous n'avons pas trouvé trace de la manière avec laquelle ces transformations s'opèrent. En effet, pour écrire l'égalité suivante, $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} =$ 0,2 aucune indication ne précise s'il s'agit de s'appuyer sur le lexique ($\frac{2}{10}$ se lit « deux dixièmes » et sachant que les dixièmes sont situés au premier rang à la droite de la virgule...) ou s'il s'agit plutôt de s'appuyer sur la conception de la fraction comme une division, et dans ce cas $\frac{2}{10} = 2 : 10 = 0{,}2$. Mais de manière générale, nous n'avons pas trouvé de situation où la conception de la fraction comme une *division* à effectuer permettait de construire la représentation sous forme décimale. Par exemple, $\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0{,}4$ ou $\frac{1}{10} = 1 : 10 = 0{,}1$.

Notons que dans le programme de l'enseignement catholique, la première approche de ces transformations de fractions est proposée à partir de mesures de grandeurs.

0,1 L « va dix fois » dans un litre donc : 0,1 = 1/10 L (1/10 s'écrit 0,1)
0,7 L contient 7 fois 0,1 L donc 0,7 L= 7/10 L (7/10 L s'écrit 0,7 L)
0,33 L va presque trois fois dans 1 L donc 0,33... L = 1/3 L
0,25 L va 4 fois dans 1 L donc 0,25 L = 1/4 lL

Fig. 3.9 Programme intégré, enseignement libre catholique, page 106.

Tant dans le programme de l'enseignement catholique que dans celui des Communes et Provinces, nous avons trouvé des expressions du type $\frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 25\% = 0{,}25$ ou $\frac{1}{2} = 0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{50}{100} = 50\%$. L'égalité entre des fractions, des nombres décimaux et des pourcentages est ainsi mise en évidence. Nous souhaiterions toutefois souligner qu'il s'agit d'un abus de langage. En effet, 20% ne signifie rien si on ne sait pas de quoi on calcule ces 20%. Il serait préférable de ne pas concevoir 20% comme un nombre mais comme un opérateur. Ainsi, les égalités suivantes sont plus correctes :

$$\frac{1}{5} \textit{ de } 100 = \frac{1}{5} \times 100 = \textit{0,2} \times 100 = \frac{2}{10} \textit{ de } 100 = \frac{20}{100} \textit{ de } 100 = 20\% \textit{ de } 100$$

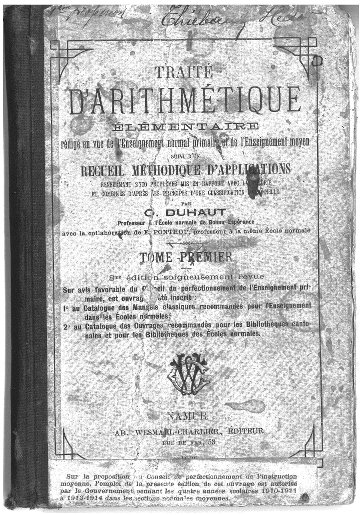


Fig. 3.10 Traité d'arithmétique de O. Duhaut (1909).

Fraction ordinaire - Fraction décimale – Comme nous l'annoncions précédemment, la notion de fraction ordinaire semble ne pas être toujours utilisée avec la même signification. Dans l'ensemble des programmes auxquels nous avons eu accès, ces désignations sont par ailleurs peu définies d'un point de vue mathématique. Elles sont parfois définies en extension pour des raisons pédagogiques. Il en est de même dans les programmes actuels.
Nous avons cependant trouvé des définitions dans des manuels du siècle dernier destinés à la formation des maitres. Par exemple, dans le *Traité d'arithmétique* de O. Duhaut (1909) (figure 3.11) ou dans le *Traité d'arithmétique* de O. Duhaut et H. Lucq (1934) (figure 3.12).

Art. 1. — Notions et principes élémentaires.

215. Origine des fractions. — On a vu (4, 9) qu'en comptant ou en mesurant une grandeur, on obtient un nombre *entier*, si la grandeur est formée exactement de toutes unités entières. S'il y a, au contraire, une quantité plus petite que l'unité entière, on divise celle-ci, afin d'avoir des unités plus petites.

Pour plus de facilité, on divise souvent l'unité entière en unités décimales, c'est-à-dire en parties de dix en dix fois plus petites; le nombre formé d'unités décimales est une *fraction décimale;* il est dit *nombre décimal*, s'il renferme à la fois des unités entières et une fraction décimale.

Mais, au lieu de diviser toujours l'unité en dix parties égales, on peut aussi la partager en un nombre *quelconque* de parties égales : le nombre formé de ces parties sera encore une *fraction*, une fraction en général, dite *fraction ordinaire*, par opposition aux fractions décimales.

Ainsi, si l'on divise l'unité (pomme, ligne, unité quelconque) en 2, 3, 4, 5 ... parties égales, chaque partie représente une fraction, à savoir : un demi, un tiers, un quart, un cinquième.

Fig. 3.11 Fraction décimale - Fraction ordinaire. Page 98.

207. Définitions. — Fraction. — Une fraction en général ou fraction ordinaire est un nombre formé d'une ou de plusieurs parties de l'unité qui a été partagée en parties égales.

Fig. 3.12 Fraction décimale - Fraction ordinaire. Page 75.

Dans ce manuel de 1934 « à l'usage des Écoles moyennes et des Humanités anciennes et modernes, des candidats aux Écoles spéciales des Universités et à l'École militaire de Bruxelles », on trouve également la définition suivante des fractions décimales (page 101) : « Une fraction décimale est une fraction ordinaire dont le dénominateur est une puissance de dix. Ainsi $\frac{7}{10}$, $\frac{73}{100}$, $\frac{733}{1000}$, sont des fractions décimales. »

Dans les programmes du début du 20e siècle, une *fraction ordinaire* est définie, pour des besoins pédagogiques, différemment selon les éditions. Par exemple, en 1924, elle signifie une fraction dont le dénominateur est inférieur à 10 ; en 1936, elle signifie les fractions dont le dénominateur est 2, 3, 4, 5 ou 10. Par contre, comme le montre la figure suivante (extrait d'un manuel scolaire des Sœurs de Notre-Dame de Namur, 1966), les fractions dont le dénominateur est 7 ou 8 sont ici aussi considérées comme des fractions ordinaires.

Pour changer une fraction ordinaire en fraction décimale équivalente, on divise le numérateur par le dénominateur.

Ainsi $\frac{1}{4} = 1 : 4 = 0{,}25$

$\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0{,}375$

$\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0{,}333\ldots$ **à peu près** $0{,}33$

$\frac{2}{3} = 2 : 3 = 0{,}666\ldots$ **à peu près** $0{,}66$

$\frac{2}{7} = 2 : 7 = 0{,}2857\ldots$ **à peu près** $0{,}28$

$\frac{9}{4} = 9 : 4 = 2{,}25.$

Fig. 3.13 Fraction ordinaire - Page 139.

Observons que pour ce manuel, les fractions décimales sont l'expression de la fraction ordinaire sous la forme d'un nombre décimal. La fraction est ici considérée comme une division. Ainsi, non seulement le dénominateur de la fraction change, il n'est plus un nombre entier « ordinaire » mais un multiple de 10, mais de plus la forme de l'écriture change également. Ces notions sont par ailleurs expliquées à la page 136 de ce même manuel :

Fractions ordinaires : $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{9}{100}$, $\frac{142}{1000}$, $\frac{34}{36}$.

Fractions décimales : 0,3, 0,42, 0,561, 0,9042.

On peut écrire 3 dixièmes sous forme de fraction ordinaire $\frac{3}{10}$.

ou sous forme de fraction décimale 0,3.

Fig. 3.14 Fraction ordinaire et fraction décimale - Page 136.

La notion de *fraction décimale* semble donc avoir plusieurs acceptions :

- Une écriture sous la forme d'une fraction ayant pour dénominateur un multiple de 10. Ce que l'on retrouve dans certains de nos programmes actuels et dans les programmes et manuels français.
- Une écriture sous la forme d'un nombre décimal (écriture à virgule) lorsque l'on considère la fraction comme une division du numérateur par le dénominateur.

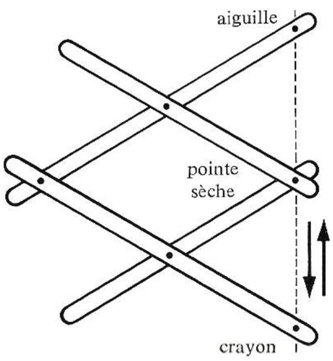
Les outils proposés dans les programmes consultés

Les objets mathématiques nécessitent d'être représentés pour pouvoir être manipulés. De nombreux travaux en didactique des mathématiques, dont ceux de R. Duval sur les représentations sémiotiques, ont montré l'importance des représentations symboliques ou matérielles dans l'apprentissage des mathématiques. Outre ces représentations, ce sont aussi les conversions entre ces représentations qui sont constitutives d'apprentissages. Ainsi, les représentations symboliques ou concrètes occupent une place importante dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Nous nous sommes donc également intéressés aux incitations officielles concernant ces représentations ou outils dans les programmes analysés.

Mais proposer ce que nous appellerons de manière générique des *outils* ne suffit pas. Il est tout autant utile de renseigner les enseignants sur leurs utilisations et sur leurs potentiels ou leurs limites au niveau de l'apprentissage, ainsi que sur leurs contraintes dans la classe. De ce point de vue, la lecture des programmes de mathématiques de 1976 montre combien ces points avaient été pris en compte pour certains outils géométriques. Pensons par exemple à l'usage du pantographe comme le montre la figure 3.15.

2° Travail au pantographe.

Pour réaliser l'agrandissement ou la réduction d'une figure, on utilise un instrument appelé pantographe (moyen plus pratique que le quadrillage surtout lorsque la figure comporte des lignes courbes). :



— fixer le pantographe sur la feuille à l'aide de l'aiguille.
— suivre le tracé de la figure donnée à l'aide de la pointe sèche; le crayon glisse sur la feuille et trace une image agrandie ou réduite.

On peut intervertir la pointe sèche et le crayon.

Si la pointe sèche est entre l'aiguille et le crayon, l'image est agrandie; si le crayon est entre l'aiguille et la pointe sèche, l'image est réduite.

Fig. 3.15 Usage du pantographe - Programme de 1976.

Dans les programmes actuels, la plupart des outils proposés, qu'ils soient symboliques ou matériels, sont associés à l'étude des nombres naturels. Ceux associés à l'étude des nombres décimaux sont l'abaque, la droite graduée et dans une moindre mesure les représentations géométriques (rectangle, cube et plaque...). Notons que plusieurs désignations semblent correspondre à la « droite graduée » comme le montre le tableau ci-dessous. Cependant, nous n'avons pas trouvé de définition qui permettrait de les distinguer si toutefois des différences existent.

Tab. 3.4 Occurrences des désignations pour la « droite graduée » dans les programmes.

Désignations	Occurrences
Droite des nombres	1
Droite graduée	4
Droite numérique graduée et orientée	1
Droite numérique	2
Droite numérique ordonnée	1
Droite numérique orientée	1
Droite orientée	1
Droite orientée et graduée	1
Droite orientée et graduée en unités	1
Droite orientée et graduée en unités simples	1

Les quatre programmes consultés proposent, dans des proportions variées, d'autres outils pour représenter les nombres. Cependant, nous n'avons pas trouvé trace ni de la justification de l'usage de ces représentations ni de propositions de conversion entre ces représentations.

Un de ces documents officiels propose de visualiser les multiplications sur du *matériel structuré*. Cependant aucune proposition concrète d'outil matériel ou symbolique n'est rédigée. La manière d'exposer ou de faire construire aux élèves la conversion entre ces registres n'est pas non plus explicitée.

Dans l'ensemble des outils proposés, pour les quatre programmes, la droite numérique (dans ses 10 acceptions lexicales), le tableau de nombres et l'abaque semblent être les outils privilégiés. Cependant, à part dans le programme de l'enseignement catholique, nous n'avons pas trouvé de réelles explications quant à leurs usages, potentialités et contraintes, notamment pour ce qui concerne l'ordre, la densité et les opérations.

En ce qui concerne les opérations cependant, le programme de l'enseignement catholique propose de « visualiser sur du matériel structuré les multiplications où interviennent des fractions, des nombres non entiers » (page 133). Cependant, tout comme pour les trois autres opérations, aucune proposition concrète d'outil matériel ou symbolique n'est rédigée. Quelques lignes plus loin, page 137, le document propose la droite numérique comme « support structurant » pour le traitement d'une « situation numérique à débrouiller ». Mais à nouveau, l'usage de cet outil n'est pas précisé. Seule une remarque en page 109 précise quelque peu ses potentialités : « Les droites numériques sont multiples ; elles font valoir :
– la permanence de l'ordre des nombres ;
– l'étalonnage du support de cet ordre. »

Tab. 3.5 Outils annoncés dans les programmes.

Désignations	*Com^{té} fr.*	*Libre cath.*	*Com. & Pr.*	*Felsi*
Abaque	N + D	N + D	N + D	
Appartement		N		
Arbre	N	N	N	
Cartons numériques			N	
Cercle numérique		N		
Chemin des nombres		N	×	
Dictionnaires des nombres			N	
Droite des nombres			N +F	
Droite graduée	F + D		N + F	N + D
Droite numérique graduée et orientée			N	
Droite numérique		×	×	
Droite numérique ordonnée		D		
Droite numérique orientée			×	
Droite orientée		Z		
Droite orientée et graduée	N			
Droite orientée et graduée en unités	N			
Droite orientée et graduée en unités simples	N			
Ensemble	N	N	N	N
Graphes	N	N	×	
Grille des nombres			N	
Instruments gradués (toise, thermomètre, sablier...)		N		
Maison des nombres	N		N	
Pions			N	
Réglettes			N	
Représentations géométriques (rectangles, bandelettes, cube unité, plaquette...)		×		
Ribambelles, bandelettes		N	N	
Schèmes de plusieurs sortes, représentations géométriques, objet symbolique	F	N		
Segment de droite			F	
Supports visuels		N		
Tableau carré classant les nombres jusqu'à 100	N			
Tableau de nombres		N		
Tableau de Pythagore		N		
Tableau numérique		N		N + D
Tableau des cent premiers nombres		N		
Table d'addition et de multiplication				N + Z
Table multiplicative de Pythagore		N		

Remarque : les signes N, D, F, Z désignent respectivement les naturels, les décimaux, les fractions et les entiers. Le signe × signifie que l'outil est proposé pour l'ensemble des nombres (N, D, F, Z).

Dans notre analyse des outils proposés, nous n'avons pas repris l'usage de la calculette dans les programmes. Son usage est toutefois principalement limité à la validation de calculs effectués mentalement ou par écrit, ou pour réaliser des calculs trop complexes pour être entrepris mentalement ou par écrit. Son usage dans une perspective de *découverte*, d'*observation* et de *compréhension* de phénomènes numériques est peu sollicité.

3.4 Les programmes pour l'enseignement différencié

Dans cette section, nous analysons les programmes du *premier degré différencié*. Celui-ci a été mis en place à partir du 1er septembre 2008 à la suite du *Contrat pour l'école*. Ce changement de pratiques est explicité dans la circulaire ministérielle n° 2689 du 27 avril 2009.

Le *premier degré différencié* est destiné aux élèves n'ayant pas obtenu leur CEB[21] au terme de leur scolarité primaire. Cette organisation a pour objectif de « conduire les élèves à la maitrise des compétences de la fin de la deuxième étape du continuum pédagogique » (Contrat pour l'école, 2005). Clairement, il s'agit de permettre à ces élèves d'obtenir leur CEB au terme d'une ou deux années de scolarité afin de pouvoir les réorienter vers la filière générale.

Les rédacteurs de la circulaire citée ci-dessus précisent que « les grilles horaires tiennent compte de l'importance accordée à l'acquisition de compétences de base, particulièrement en français et en mathématique ». L'ambition de cette nouvelle organisation du premier degré de l'enseignement secondaire est ainsi d'éviter que des élèves éprouvant des difficultés poursuivent leur parcours scolaire dans une section professionnelle sans en avoir fait le choix au préalable.

Cependant, toutes les écoles ou tous les réseaux d'enseignement ne sont pas obligés par décret d'organiser ce premier degré différencié. De même que les réseaux organisant ce premier degré différencié ne sont pas tenus de produire un programme spécifique pour ce niveau. Ainsi, en ce qui concerne le réseau *Felsi*, il semble que seule l'école Decroly de Bruxelles organise ce premier degré différencié. Cette école ne possède pas son propre programme, elle se réfère à celui du réseau de la Communauté française.

3.4.1 Les Socles de compétences

Les compétences à certifier

L'objectif du premier degré différencié étant de permettre aux élèves d'obtenir leur CEB, ce sont essentiellement les compétences à certifier au terme de la scolarité primaire qui sont visées par les programmes. Ces compétences ont été exposées à la page 49.

Deux autres compétences à certifier sont spécifiques au premier degré du secondaire. Elles concernent un ensemble plus vaste de nombres qui prend en compte les nombres entiers, les nombres décimaux et les fractions.

- *Classer (situer, ordonner, comparer) des entiers, des décimaux et des fractions munis d'un signe.*
- *Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées avec des entiers, des décimaux et des fractions munis d'un signe. Y compris l'élévation à la puissance.*

Pour ces deux compétences, nous remarquons que contrairement à l'enseignement fon-

[21] Certificat d'études de base.

damental, il n'est pas précisé si les nombres décimaux sont « limités au millième » ou non. Ainsi, en fin du premier degré de l'enseignement secondaire, l'évaluation portera sur l'ordre, la densité et les quatre opérations sur les nombres entiers, les nombres décimaux et les fractions, ainsi que l'élévation à la puissance.

3.4.2 Les programmes des différents réseaux d'enseignement

Au préalable, nous souhaiterions mettre en avant un document édité par le Ministère de la Communauté française intitulé « Évaluation externe non certificative. Mathématique. 2e secondaire. Pistes didactiques » [22]. Les auteurs de ce document mettent en évidence des difficultés d'élèves au début de l'enseignement secondaire et proposent des pistes de travail avec les élèves du premier degré différencié ; certaines d'entre elles concernent l'apprentissage des nombres décimaux. Ce document est particulièrement intéressant et il nous semble qu'il devrait servir de référence à l'établissement des programmes spécifiques au premier degré différencié.

Comme les programmes des trois premières étapes de l'enseignement obligatoire, les programmes pour le premier degré du secondaire doivent être en concordance avec les *Socles de compétences* édités par le Ministère de la Communauté française. À ce jour, les programmes de la Communauté française et du CPEONS[23] proposent une structure similaire aux *Socles de compétences*. Le programme du réseau libre confessionnel[24] propose quatre domaines mathématiques comme les *Socles de compétences* mais avec des intitulés différents : *Jeux et tableaux de nombres*, *problèmes de la vie courante*, *présentation de données* et *géométrie*. En ce qui concerne particulièrement les *Jeux et tableaux de nombres*, il est recommandé de « lire et écrire des nombres dans un système de numération de position en base 10 ; calculer habilement avec de petits nombres dans des situations de jeux ; comprendre les techniques de calcul mental et écrit, utiliser une calculatrice ». Les nombres décimaux sont particulièrement mis en évidence dans la partie *Problèmes de la vie courante* : « calculer et comparer des prix à partir de renseignements fournis par des catalogues, des annonces publicitaires, des devis, des factures. Dans ce contexte, utiliser des décimaux, des mesures de grandeurs ; calculer avec les fractions qui servent à la mesure de grandeurs dans la vie courante ».

En ce qui concerne le réseau CPEONS, seul un document édité par la Ville de Liège est à ce jour disponible auprès du secrétariat de ce réseau. Ce document précise notamment les objectifs du premier degré différencié : « donner les moyens, par une pédagogie différenciée, d'amener l'élève qui suit ce cycle d'obtenir le CEB ». Ce document se réfère essentiellement aux Socles de compétences ainsi qu'à un manuel scolaire édité par la Province qui sert de « fil conducteur des séquences qui seront élaborées par le professeur ». Ce document est cependant à l'état d'ébauche. Il ne nous semble pas que l'on puisse le considérer comme un programme à part entière.

Le programme de la Communauté française, dans son introduction, met en évidence « l'hé-

[22] Référence du document : D/2008/9208/7.
[23] Conseil des Pouvoirs organisateurs de l'Enseignement Officiel Neutre Subventionné.
[24] Fédération de l'Enseignement Secondaire Catholique (FESeC).

térogénéité exceptionnelle des classes » en argumentant que les élèves composant les classes de première année « viennent d'horizons divers et variés. Certains seront passés par l'enseignement spécialisé, d'autres seront des primo arrivants et apporteront avec eux des cultures et des patrimoines peu connus, d'autres encore auront suivi le cursus scolaire de l'enseignement fondamental, sans avoir obtenu le C.E.B ». Il nous semble important de préciser cela. En effet, il serait erroné de croire que les élèves composant ces classes sont *en échec* par rapport au cursus scolaire de l'enseignement fondamental, particulièrement en mathématique. Ainsi, plus spécifiquement encore que pour l'enseignement dit *normal*, il apparait complexe de définir un programme pour ce niveau d'enseignement. Les rédacteurs de ce document ont par ailleurs intitulé le leur « Pistes didactiques ».

Les désignations des nombres décimaux et du système décimal de position

Le tableau ci-dessous présente les différentes désignations des nombres décimaux contenues dans chacun des programmes de l'enseignement secondaire différencié.

Tab. 3.6 Désignations des nombres décimaux.

n°	Désignations	*Socles*	*Com^{té} fr.*	*Libre cath.*
1	Nombre(s)	x	x	x
2	Nombre(s) naturel(s)	x	x	x
3	Décimaux	x	x	x
4	Nombre(s) décimal(aux)		x	x
5	Décimaux limités au millième	x	x	
6	Nombres à virgule			x
7	Nombres à virgule en base 10			
8	Nombres dits "décimaux"			
9	(Nombre(s)) rationnel(s)			
10	Décimaux limités			x
11	Nombre(s) décimal(aux) positif(s)		x	

Dans les documents analysés, nous avons relevé différentes désignations pour le *système décimal de position*. Celles-ci sont présentées dans le tableau suivant. Remarquons que la variété des désignations est moins large que dans les programmes de l'enseignement fondamental.

Tab. 3.7 Désignations du système décimal de position.

n°	Désignations	*Socles*	*Com$^{\text{té}}$ fr.*	*Libre cath.*
20	Numération décimale	x		
21	Numération de position		x	
22	Numération décimale de position	x	x	
23	Numération de position décimale			
24	Numération de position avec base			
25	Système décimal	x		
26	Système de numération			x
27	Système de numération de position décimale			
28	Système de numération décimale en base 10			
29	Système de numération en base 10			x
30	Système d'écriture décimale			
31	Écriture décimale			x
32	Mécanisme de position			
33	Numération de position en base 10			x
34	Système de numération de position			x

Des modes de représentation des nombres décimaux

À la page 33, nous expliquons que trois modes de représentation peuvent être pris en compte pour les nombres décimaux : *quotient* (fraction simple ou fraction décimale), *somme de fractions décimales*, *produit* (naturel multiplié par une puissance de dix). Nous avons analysé les programmes de l'enseignement catholique et celui de la Communauté française par rapport à ce critère.

En ce qui concerne le programme de la FESeC[25], nous avons trouvé : « Décomposition d'un nombre en une somme de produits d'un naturel par une puissance de 10. » Ce qui concerne la représentation de type *somme de fractions décimales*. Nous n'avons pas trouvé de référence aux deux autres types de représentation.

En ce qui concerne le programme de l'enseignement officiel, nous trouvons les propositions suivantes : « Exprimer la décomposition (ou la recomposition)
– en l'écrivant dans l'abaque ;
– en la symbolisant de façon opératoire. »
Celle-ci est complétée par plusieurs exemples, notamment :

Exprimer la décomposition d'un nombre :
- en écrivant dans l'abaque
- en la verbalisant de plusieurs manières :
  - ➢ 7,32 = 7 unités + 32 centièmes
    = 7 unités + 3 dixièmes + 2 centièmes
    = 73 dixièmes + 2 centièmes
    = 732 centièmes

Fig. 3.16 Ministère de la Communauté française. Pistes didactiques. Page 7.

ou

[25] Fédération de l'Enseignement Secondaire Catholique.

« Décomposer et recomposer tout nombre en somme ou produit en fonction de l'opération à résoudre : [...] en référence à la numération de position : 743 = 7 C + 4 D + 3 U »

Ces propositions concernent les représentations de type *somme de fractions décimales*, *quotient* et *produit*.

Du passage du discret au continu

À la lecture des différents programmes, nous n'avons pas trouvé de référence au passage du *discret* au *continu* ou *non-discret*[26], or nous avons montré à la page 53 combien ceci pouvait être un obstacle à la compréhension du système décimal de position et plus particulièrement aux nombres décimaux.

De même, la gestion du caractère continu de la droite graduée n'est pas prise en compte dans les documents alors que cet outil est proposé dans chacun d'eux pour résoudre des situations d'ordre entre des nombres décimaux mais aussi entre des fractions ou entre des fractions et des nombres décimaux. À nouveau, il est important de signaler que pour une part, les élèves en difficulté le sont parce qu'ils ne parviennent pas à donner du sens aux représentations auxquelles ils sont confrontés. Nous insistons sur le fait que proposer des représentations d'une notion mathématique aux élèves ne suffit pas pour que ceux-ci la comprennent mieux ou la mobilisent plus aisément dans des résolutions de problèmes. S'intéresser au *fonctionnement*, aux potentialités et aux freins des représentations pour l'apprentissage ainsi qu'à l'interprétation que les élèves en font est tout aussi important. Ainsi, quelques recommandations allant dans ce sens nous semblent nécessaires pour que les enseignants puissent prendre en charge les difficultés des élèves.

Du lien entre les nombres décimaux et les grandeurs

De manière générale, les programmes proposent d'inscrire davantage les apprentissages dans la *vie quotidienne* (*vie courante* ou *vie sociale*, selon le programme) pour les élèves de l'enseignement différencié. Les liens avec les mesures et les paiements sont donc favorisés. Ainsi, dans le programme de la Communauté française, nous trouvons des liens entre les nombres décimaux et les grandeurs sous des intitulés comme :

- « Établir des relations dans un système pour donner du sens à la lecture et à l'écriture d'une mesure »,
- « Associer les nombres décimaux au mesurage des grandeurs »,
- « Connaître des rapports multiplicatifs entre les unités des systèmes d'unités conventionnelles ».

En ce qui concerne le programme de l'enseignement catholique, des propositions similaires y sont inscrites. Tout d'abord au niveau des « connaissances structurées » :
« Les synthèses doivent structurer les acquis autour de quelques « noyaux » : [...] Les mesures de grandeurs (fractions et décimaux) et les opérations sur ces mesures. »

Ceci s'appuie notamment sur les recommandations suivantes :

---

[26] Voir remarque page 53.

- « Nombres décimaux qui permettent d'écrire des mesures de masse, de longueur, de capacité »,
- « Dans des situations qui impliquent des grandeurs, convertir les mesures en choisissant l'unité appropriée ».

Cependant, tout comme pour les programmes de l'enseignement primaire, les difficultés que ces situations pourraient engendrer ne sont pas évoquées. Or, s'appuyer sur des situations où sont intégrés des traitements sur les mesures de grandeurs et des traitements sur les nombres décimaux n'est pas nécessairement un gage de réussite. Les expérimentations que nous avons menées au niveau du premier degré différencié confirment cela. Dans la majorité des cas, les difficultés des élèves proviennent du fait qu'ils traitent la situation proposée en choisissant les mesures de grandeurs comme structure de référence, sans tenir compte du traitement nécessaire des valeurs numériques à partir du système décimal de position. Nous avons illustré ceci à partir d'un exemple à la page 56.

Du lien entre les nombres décimaux et les fractions ordinaires ou décimales

Quel que soit le programme, le lien entre les fractions et les nombres s'opérationnalise essentiellement à partir de la droite graduée. Nous avons déjà noté plusieurs difficultés pour les élèves à propos de cet outil de représentation.

Comme dans les programmes de l'enseignement primaire, la fraction comme division du numérateur par le dénominateur n'est pas évoquée de manière explicite. Or ceci pourrait permettre aux élèves de comprendre le lien entre fractions et nombres décimaux à partir des opérations comme il est recommandé dans les *Socles de compétences*.

À l'inverse, il est demandé dans le programme de la Communauté française de rencontrer des situations où les élèves seront amenés à « donner plusieurs écritures fractionnaires d'un nombre décimal ». On peut supposer que ceci fait référence aux fractions décimales et aux fractions ordinaires équivalentes. Cependant, ceci n'est pas précisé dans le document. Par exemple :

$$0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = \frac{8}{20} = \dots$$

De plus, dans les programmes, nous n'avons pas trouvé de désignation relative à la *fraction décimale*. En ce qui concerne la désignation *fraction ordinaire*, les termes utilisés sont *fraction simple* pour le programme de l'enseignement catholique et *fraction usuelle* pour l'enseignement de la Communauté française.

Les outils proposés dans les trois programmes consultés

Le tableau 3.8 ci-dessous présente les outils proposés dans le programme de chaque réseau. En comparaison de ce que l'on trouve dans l'enseignement primaire, constatons que, d'une part, moins d'outils de représentation sont proposés, d'autre part, la variété des désignations pour un même outil est également moindre.

En ce qui concerne l'usage de la calculette, seul le programme de la FESeC rend explicite les différents usages de cet outil : « On se servira le plus souvent possible d'une calculette pour vérifier un résultat, conjecturer une propriété. Il ne s'agit pas de remplacer le calcul mental ni le calcul écrit mais de mettre à la disposition des élèves un outil de maitrise de leur vie quotidienne, de développer chez eux une plus grande aisance dans l'univers des nombres et des opérations. »

Tab. 3.8 Outils annoncés dans les programmes.

Désignations	*Com^{té} fr.*	*Libre cath.*
Abaque	x	
Calculatrice/Calculette	x	x
Crible d'Eratosthène	x	
Droite des nombres		x
Droite graduée	x	x
Droite numérique orientée et graduée	x	
Supports visuels		x
Tableau de nombres		x
Tableau de Pythagore	x	
Table des cent premiers nombres		x
Table d'addition et de multiplication	x	

3.5 Conclusions

3.5.1 De l'évolution des programmes

Comme les mathématiques et la science pédagogique, les programmes ont évolués de 1842 à nos jours. Ainsi dans les premiers programmes, les *poids et mesures* constituaient un champ privilégié pour l'apprentissage des nombres décimaux. Les recommandations privilégiaient une approche « intuitive » des mathématiques et luttaient contre le « formalisme » présent dans les classes. Jusqu'au programme de 1936, l'enseignement des mathématiques à l'école primaire avait essentiellement pour objectif de préparer à la vie courante en rencontrant des savoirs de base en arithmétique et en géométrie.

Dès le programme de 1976, faisant suite à la « révolution structuraliste » des mathématiques, l'ancrage conceptuel va constituer l'axe essentiel, avec souvent, plusieurs observateurs l'ont mis en évidence, des difficultés de mise en place pour les enseignants et des conceptualisations prématurées pour les élèves. Avec ce mouvement *structuraliste*, le lien entre les nombres décimaux (plus globalement les rationnels) et les grandeurs s'appauvrit. Celles-ci sont essentiellement un champ d'exercisation des notions rencontrées.

Nous mettons en avant deux facteurs qui semblent expliquer ces changements relatifs à l'ancrage des apprentissages mathématiques entre 1842 et 1976. D'abord, un phénomène *social*. Après guerre, progressivement, l'école primaire n'est plus une fin en soi pour un nombre de plus en plus important d'écoliers belges. L'école primaire devient progressivement une étape dans la scolarité obligatoire. Les objectifs de l'école s'en trouvent ainsi modifiés. À une essentielle préparation à la vie, il est nécessaire d'ajouter une préparation à la poursuite des études. Ce qui a pour conséquence que des connaissances nouvelles sont à faire acquérir. De manière caricaturale, le programme de mathématiques ne peut donc plus traiter uniquement des questions de « baignoires qui fuitent » ou de « champs de pommes de terre à planter » sans un retour conséquent vers les théories qui sous-tendent la résolution de ces problèmes.

Ensuite, un phénomène *mathématique*. Dès la fin du 19e siècle les mathématiques sont restructurées autour de la théorie des ensembles. La théorie des nombres se structure également en intégrant les nombres réels et les complexes. Les nombres se distancient des grandeurs et de la géométrie, milieu historique de leur genèse. Ces changements de point de vue influencent l'enseignement des mathématiques. Les nombreuses expériences menées dès les années 1960 dans l'enseignement secondaire et au début des années 1970 dans le primaire montrent comment introduire les structures mathématiques dans l'enseignement : c'est la période dite *de la mathématique moderne*[27].

Le programme de 1985 propose un infléchissement de la tendance structuraliste de l'enseignement des mathématiques. Le travail à partir de problèmes s'accentue. Le rapport à la vie quotidienne comme élément de découverte de notions mathématiques est à nouveau mis en avant. L'avènement du travail par compétences dans les documents produits dans les années 1990 et au début du 21e siècle tend à poursuivre cette intention de lier les mathématiques à la résolution de problèmes de vie courante tout en expliquant qu'une maitrise des savoirs conceptuels est à la base de l'acquisition de compétences. Les évaluations externes (notamment le CEB, traitement de données) organisées par la Communauté française sont des indices de cette tendance.

3.5.2 De l'utilisation des situations de vie

À côté des travaux relatifs à l'épistémologie des mathématiques qui mettent en avant le lien entre nombres décimaux et grandeurs, à côté des travaux relatifs à des notions telles *informal instruction* et *formal instruction*[28], des travaux en sciences cognitives montrent également que le recours à la vie quotidienne, et plus spécifiquement à des activités liées aux mesures de grandeurs à partir d'unités conventionnelles sont parfois, et nous insistons sur ce caractère ponctuel, des freins à l'apprentissage de notions numériques.

Les situations de mesures à partir d'unités conventionnelles apparaissent ainsi souvent comme *incomplètes* d'un point de vue épistémologique, et *incertaines* d'un point de vue didactique. Expliquons-nous brièvement.

Si nous prenons, par exemple, l'usage de l'euro pour l'apprentissage des nombres décimaux, il apparait que des situations de comparaison, par exemple, où un nombre est limité au dixième d'euro et l'autre est limité au centième d'euro ne peut apparaitre. Dans la vie courante, les prix sont dans la majeur partie des cas exprimés en centièmes d'euro[29]. Ainsi d'un point de vue épistémologique, ces situations sont *incomplètes*. Elles sont aussi *incertaines* d'un point de vue didactique car l'enseignant ne peut être certain à tout moment du type de gestion de l'information par l'élève. Comme nous l'avons montré,

[27] Le mot « moderne » attaché à cette approche structuraliste apparait pour la première fois dans un ouvrage de Van der Waerden, *Moderne Algebra*, (1930, vol. 1), (1931, vol. 2).

[28] Voir FP 7, European Union

[29] Nous avons montré une situation où un prix était exprimé en millième d'euro, page 56

l'élève peut gérer la situation en se focalisant soit sur les mesures de grandeurs, soit sur les nombres, soit encore sur les liens entre les nombres et les mesures de grandeurs.

Ajoutons que des phénomènes d'*activation* et d'*inhibition* de connaissances (O. Houdé, 2006), de *modélisation* et de *reconnaissance de structure* sont également à la base de l'apprentissage à partir de situations de vie. Ces phénomènes ne sont pas toujours connus des enseignants, ni perçus et intégrés par les élèves.

Ainsi, la tension entre la *vie courante* et les *mathématiques* reste bien réelle. Des questions demeurent ainsi ouvertes, comme « Quel(s) milieu(x) pour l'apprentissage des mathématiques : la vie courante, les mathématiques axiomatiques, des situations de mesure de grandeurs adaptées, des situations numériques… ? ». Il apparait en tout cas aujourd'hui que la rationalité mathématique contemporaine ne puisse plus seule inspirer directement l'enseignement obligatoire.

Mais constatons que les mathématiques ne sont plus aussi *visibles* dans la vie courante qu'autrefois. Pour une bonne part, le traitement des objets (et particulièrement de leur(s) grandeur(s)) a été confié aux *machines*. Et acceptons que lire une longueur sur un double décamètre ne donne pas accès aux mêmes informations que lire la même longueur sur un mètre électronique.

Dans le premier cas, le nombre lu sur le mètre peut aussi être assimilé à la longueur sensible du mètre (la bande plastifiée ou en bois) qui sépare l'endroit de lecture de l'origine de l'outil de mesure (zéro). Cette longueur lue peut ainsi être matérialisée, extraite de l'objet mesuré, et reportée par ailleurs. La comparaison de longueurs peut alors être réalisée de deux manières, soit directement par comparaison de la longueur du mètre (qui correspond à la longueur du premier objet) avec celle du second objet, soit indirectement par la comparaisons des grandeurs représentées par leur mesure respective (nombres).

Dans le cas de l'usage du mètre électronique, seul un nombre est disponible, la longueur n'est pas matérialisée si ce n'est par l'élément que je mesure, non extrait de l'objet. Ainsi, toute comparaison de longueur est réduite à une comparaison de nombres. Il en est de même pour les pesées.

De plus, si l'école primaire n'est aujourd'hui plus une fin en soi, les apprentissages mathématiques ne peuvent plus se limiter aux traitements de situations de vie. Les apprentissages mathématiques doivent aussi s'inscrire dans une élaboration plus longue des savoirs mathématiques. Ainsi, « de la maternelle à l'âge adulte », l'élève « construit son savoir [...] en s'appuyant à tout moment sur ses acquis antérieurs, en le structurant et le restructurant dans son ensemble au fur et à mesure qu'il l'augmente » (CREM, 1995). Ne pas limiter le travail des élèves à la résolution de problèmes quotidiens mais les amener aussi à s'interroger et à réfléchir sur des « questions de structure » apparait important.

3.5.3 Du lexique

Le lexique utilisé dans les *Socles de compétences* et dans les programmes des réseaux est assez varié. Plusieurs désignations sont utilisées pour une même notion mathématique. Dans un souci de clarté des documents, sans doute serait-il utile soit de définir chacun des termes employés soit de n'en utiliser qu'un seul si les différentes désignations correspondent au même objet mathématique.

Il nous semble que l'emploi du terme *système décimal de position*[30] devrait être généralisé. Il exprime de manière assez complète et claire comment s'organise notre « code des nombres » en base 10. Cela permettrait également de mieux intégrer les rôles du « 0 » (notamment un signe qui comble l'absence rang) sources de difficultés chez les élèves, comme nous avons pu le constater lors des expérimentations dans les classes.

3.5.4 Des propositions

Bien sûr un programme ne peut tout contenir. D'ailleurs, les documents que nous avons consultés ne portent pas le nom de *curriculum*. Et cela explique sans doute les différentes lacunes que nous avons mises en évidence, ainsi que certaines difficultés éprouvées par les enseignants dans leur travail quotidien. C'est par ailleurs, pour une part, ce que les enseignants ont mis en évidence lors des rencontres préparatoires à l'élaboration du *Contrat pour l'école* : « A cet égard, ils [les enseignants] évoquent le manque de lisibilité des référentiels et l'absence de supports pédagogiques performants ».

Par définition naturellement, les programmes proposent une « liste de contenus » (Demeuse & Strauven, 2006) et n'ont pas pour objectif de cerner les actes d'enseignement et d'apprentissage. Cependant, dans la perspective où le système éducatif a pour objectif d'« améliorer de façon sensible les performances de tous les enfants, sans exception » (*Contrat pour l'école*), il nous semble opportun de fournir aux enseignants, des documents synthétiques qui mettent à la fois en évidence les apprentissages à installer, les stratégies pédagogiques et les processus didactiques qui permettent l'acquisition de ces apprentissages, les supports didactiques (ainsi que leurs potentialités et leurs freins à l'apprentissage) ou les aides pédagogiques, les contenus disciplinaires et les modalités d'évaluation (Demeuse & Strauven, 2006). Ce que pour une part réalise le Ministère de l'Enseignement à partir de son site *enseignement.be*[31].

En ce qui concerne l'enseignement et l'apprentissage des nombres décimaux, il nous semble que la publication d'un document reprenant des précisions épistémologiques, des difficultés d'élèves, des conseils didactiques, des outils de représentation et les liens à mettre en évidence entre eux serait nécessaire afin d'aider les enseignants dans leurs activités d'apprentissages ou de *remédiation*, qu'elle soit immédiate ou différée.

---

[30] Notons que le programme français (mathématique, CE2, CM1 et 2) utilise également cette désignation : « Les nombres entiers naturels : - principes de la numération décimale de position : valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture des nombres ; [...] », page Internet : *http://www.education.gouv.fr/bo/2008/hs3/programme_CE2_CM1_CM2.htm*, consultée le 15 mai 2009.

[31] *http://www.enseignement.be/index.php?page=0&navi=184*

3.6 Bibliographie

ARTAUD, M.. (2003). *Analyser des praxéologies mathématiques et didactiques "à calculatrice" et leur écologie. http ://edutice.archives-ouvertes.fr/edutice-00001315/en/.* Consulté le 14 mars 2007.

BOUVIER, A. & AL. (1979). *Dictionnaire des mathématiques*. Paris : PUF.

BROUSSEAU G. (1980). Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. 1.1. 11-58.

BROUSSEAU G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : la Pensée Sauvage éditions.

CPEONS. Programme pour le premier degré différencié, document provisoire. Province de Liège.

CHAMBRIS, CH. (2007). Petite histoire des rapports entre grandeurs et numérique dans les programmes de l'école primaire. *Repères - IREM*. 69. 19/2. 5-31.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. 56. 19/2. 221-265.

COMMISSION D'ENQUÊTE SCOLAIRE. (1882). *Le programme des écoles primaires du 20 juillet 1880 devant la commission d'enquête scolaire*. Déposition de M. Germain. Bruxelles.

CONSEIL DE L'ENSEIGNEMENT DES COMMUNES ET DES PROVINCES. (2001). *Programme d'étude pour l'enseignement primaire*. 3e édition.

CREM. (1995). *Les mathématiques de la maternelle à 18 ans. Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques*. Nivelles : Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

DAHAN-DALMEDICO, A & PEIFFER, J. (1986). *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales*. Paris : Seuil, coll. « Points Sciences ».

DE BOCK, D., VERSCHAFFEL, L., JANSSENS, D., VAN DOOREN, W., & CLAES, K. (2003). *Do realistic contexts and graphical reprensations always have a beneficial impact on students' performance ? Negative evidence from a study on modelling non-linear geometry problems*. Learning and Insctruction. 13. 441-463.

DEL NOTARO, L. & FLORIS, R.. (2006). L'utilisation de la calculatrice dans l'enseignement de la numération à l'école primaire. *Actes du colloque EMF 2006*. Sherbroke : Université de Sherbroke.

DEMEUSE, M. & STRAUVEN C.. (2006). *Développer un curriculum d'enseignement ou de formation. Des options politiques au pilotage*. Bruxelles : De Boeck.

DHOMBRES, J. (1978). Nombre, mesure et continu. Épistémologie et histoire. *Publication de l'IREM de Nantes*. Paris : CEDIC/F. Nathan.

DOUADY, R. (1980). Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. 1.1. 77-110.

Draelants, H., Dupriez, V., Maroy C.. (2003). Le système scolaire en Communauté française. *Dossiers du CRISP*. 59. Bruxelles : Centre de recherche et d'information socio-politiques.

Duhaut, C. (1909). *Traité d'arithmétique élémentaire rédigé en vue de l'Enseignement normal primaire et de l'Enseignement moyen suivi d'un recueil méthodique d'applications*. Tome premier. 8e édition. Namur : AD. Wesmael-Charlier.

Duhaut, C. & Lucq, H. (1934). *Traité d'arithmétique à l'usage des Écoles moyennes et des Humanités anciennes et modernes, des candidats aux Écoles spéciales des Universités et à l'École militaire de Bruxelles suivi d'un Recueil d'application*. 17e édition. Namur : AD. Wesmael-Charlier.

Fédération de l'Enseignement Fondamental Catholique. (2008). *programme intégré adapté aux Socles de compétences. Enseignement fondamental.*

Gouvernement de la Communauté française de Belgique. *Contrat pour l'école. 10 priorités pour nos enfants*. Bruxelles.

Houdé, O.. (2006). *10 leçons de psychologie et pédagogie*. Paris : Puf.

Ifrah, G. (1994). *Histoire universelle des chiffres*. Paris : Robert Laffont.

Les sœurs de Notre-Dame de Namur. (1966). *Arithmétique*. 6e année. Manuel conforme au Programme des Études et directives pédagogiques pour les écoles primaires catholiques de 1963. Namur : Wesmael-Charlier.

McNeil, N. M., Uttal, D. H., Jarvin L. & Sternberg, R. J. . (2009). Should you show me the money ? Concrete objects both hurt and help performance on mathematics problems. *Learning and instruction*. 19, 171-184.

Ministère de la Communauté française. (1999). *Socles de compétences (Enseignement fondamental et premier degré de l'enseignement secondaire)*. Bruxelles : Administration Générale de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique.

Ministère de la Communauté française. (2002). *Programme des études. Enseignement fondamental.*

Ministère de la Communauté française. (2008). *Évaluation externe non certificative. Mathématique. 2e secondaire. Pistes didactiques*. Bruxelles : A.G.E.R.S. - Service général du Pilotage du système éducatif. D/2008/9208/7.

Ministère de la Communauté française. (2008). *Pistes didactiques. Formation mathématique. Enseignement secondaire ordinaire de plein exercice. Premier degré différencié*. Bruxelles : Administration Générale de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique. Service général des Affaires pédagogiques et du Pilotage du réseau d'enseignement organisé par la Communauté française. 385Prov/2008/240.

Ministère de l'éducation, de la recherche et de la formation. (1990). *Perspective sur l'enseignement des mathématiques dans la Communauté française de Belgique*. Bruxelles. *Texte connu sous le nom de « Rapport Danblon »* .

Ministère de l'Éducation nationale. (1983). *Mathématiques. Répertoire de pro-*

gressions visant les différents objectifs du programme d'enseignement et détermination des compétences de base à atteindre en fin des 1er et 2e cycles de l'enseignement primaire. Enseignement primaire. Bruxelles : Organisation des Études.

Ministère de l'Éducation nationale & de la Culture française. (1976). *Réforme pédagogique de l'enseignement primaire*. Bruxelles : Direction générale de l'Organisation des Études.

Ministère de l'Éducation nationale & de la Culture française. (1976). *Réforme pédagogique de l'enseignement primaire*. Brochure 4A. Bruxelles : Direction générale de l'Organisation des Études.

Ministère de l'Éducation nationale & de la Culture française. (1976). *Réforme pédagogique de l'enseignement primaire*. Brochure 4B. Bruxelles : Direction générale de l'Organisation des Études.

Ministère de l'Intérieur et de l'Instruction publique. (1897). *Règlement et programme types des écoles primaires communales*. Bruxelles : Administration de l'enseignement primaire. Extrait du Moniteur belge du 26 mai 1897, n° 146.

Ministère de l'Instruction publique. (1936). *Plan d'études et instructions pédagogiques pour les Trois premiers degrés des Écoles primaires et des classes d'application annexées aux Écoles normales et pour les Sections préparatoires des Écoles moyennes*. Bruxelles : Ministère de l'Instruction publique. Arrêté ministériel du 13 mai 1936.

Ministère des Sciences et des Arts. (1923). *Programme-type des écoles primaires. 1923* (Extrait du *Bulletin du Ministère des Sciences et des Arts, Année 1922, N° 3*). Administration de l'enseignement normal. Tamines : Duculot.

Ministère des Sciences et des Arts. (1923). *Programme-type des écoles primaires communales. 1924*. Bruxelles : Administration de l'enseignement normal. Royaume de Belgique. Édition française.

Noël, G. (2002). Pourquoi, pour qui enseigner les mathématiques ? Une mise en perspective historique de l'évolution des programmes, au 20e siècle, en Belgique. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (The International Journal on Mathematics Education)*. 34(4).

Rouche, N. (1992). *Le sens de la mesure*. Bruxelles : Didier Hatier.

Roditi, É. (2001). *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. Étude de pratiques ordinaires*. Université de Paris 7, thèse.

Stevin, S. (1585). L' Arithmétique et la Pratique d'Arithmétique. *Les Œuvres Mathématiques* (1634). Leyde : A. Girard.

Waldegg, G. (1999). L'arithmétisation des grandeurs géométriques chez Stevin. *Actes du Colloque de Peyresq : la Pensée numérique*. Carlos Alvarez, Jean Dhombres, Jean-Claude Pont (éd.).

Chapitre 4

Analyse de manuels scolaires

J. Fanuel, Ph. Skilbecq

En ce début de 21e siècle, suite à différentes études (voir notamment Gerard, 2010) et à l'avis 87 du Conseil de l'Éducation et de la Formation, le Ministère de la Communauté française a souhaité remettre le manuel scolaire au cœur de la pratique pédagogique. Cette décision est également en adéquation avec la demande des enseignants de « réhabiliter le manuel scolaire et, à l'heure des nouvelles technologies, promouvoir l'utilisation de logiciels et outils pédagogiques dans les écoles » [1]. Ainsi, depuis mai 2006, différents décrets et circulaires expriment la volonté du Ministère de « concrétiser la 6e priorité du *Contrat pour l'école* : doter les élèves et les enseignants des outils du savoir » [2].

Dans la foulée, une procédure d'agrément des manuels scolaires a été mise au point et permet de *sélectionner* les manuels reconnus par la Communauté française. Cet agrément permet aux écoles de faire des choix de manuels, voire de recevoir un soutien financier de la part de la Communauté française pour l'acquisition de manuels agréés.

Une question essentielle accompagne cette dynamique de l'emploi des manuels scolaires dans les classes : qu'est-ce qu'un bon manuel ? ... Et au-delà, pour la problématique qui nous concerne : « Qu'est-ce qu'un bon manuel de mathématiques ? » (Gilbert, Jadin & Rouche, 2006). Dans leur article, ces trois auteurs définissent quelques critères pour déterminer la qualité d'un manuel : l'absence d'erreurs et d'imprécisions ; le développement de la pensée autonome ; l'accent sur le débat, les preuves ; l'usage indispensable du français ; un équilibre entre le sens et les automatismes ; une mise en page claire ; une culture mathématique intégrée ; des manuels bien structurés ; des liens avec l'art et l'histoire ; les manuels d'année en année. Ils reconnaissent cependant que certains de ces critères sont sujets à débat.

Notre travail n'a pas pour ambition d'évaluer des manuels scolaires pour définir s'ils sont « bons » ou non, ou de les évaluer dans la perspective de l'obtention d'un agrément, à partir de ces derniers critères ou d'autres. Notre volonté est tout simplement de mettre en

[1] Consultation des enseignants en 2003-2004 dans la perspective du *Contrat pour l'école*. Ministère de la Communauté française de Belgique, 2005.
[2] *http* : //*www.enseignement.be*/*index.php*?*page*=25129&*navi*=2329, page consultée le 12 mai 2009.

évidence des pratiques proposées aux enseignants et l'épistémologie qui les sous-tendent dans le cadre restreint des nombres décimaux.

Introduction

S'intéresser aux processus d'enseignement et d'apprentissage d'un concept mathématique demande bien sûr d'analyser celui-ci des points de vue épistémologique, cognitif et didactique. Il est aussi intéressant de situer le concept dans le cadre institutionnel d'un système scolaire particulier. C'est ce que nous avons réalisé au chapitre 3 de ce rapport.

L'analyse des supports d'enseignement tels que les *manuels scolaires* est également une source importante pour mieux comprendre les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage d'un concept. Parfois, cette analyse permet aussi d'éclairer les pratiques observées dans les classes, voire de mieux comprendre certaines difficultés d'élèves. En effet, les manuels font partie des outils pédagogiques dont les enseignants disposent pour construire leurs séquences d'activité. Les manuels ont donc un effet sur les pratiques des enseignants.

L'analyse des manuels est d'autant plus intéressante que contrairement à certains pays, comme par exemple le Vietnam ou la Suisse, la Communauté française est *inondée* de collections de manuels scolaires, belges ou étrangers, pour un même niveau scolaire et pour une même discipline. Certaines maisons d'édition proposent même plusieurs collections avec des approches différentes.

Ainsi peut-on supposer que cette variété de manuels explique en partie la variété des approches des nombres décimaux comme nous avons pu le constater dans les classes lors de nos contacts avec les enseignants. Qui plus est, parfois, plusieurs approches sont utilisées dans une même classe, voire dans une même école ou un même réseau.

Mais les enjeux liés aux manuels scolaires et à leurs analyses ne sont pas l'apanage du 20^e^ siècle. En France, aux 18^e^ et 19^e^ siècles, les tensions autour du ou des manuels étaient déjà vives. En effet si comme l'explique G. Schubring (1984) « le savoir scolaire dans les manuels présente des indications de l'acceptation des conceptions scientifiques » dans un système scolaire donné et à une époque déterminée, en même temps ce savoir scolaire « présente des indicateurs pour des pressions ou influences sociales sur la production et la transmission du savoir ».

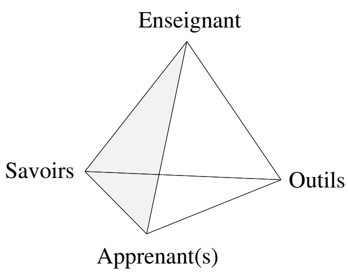
Les enjeux se situent aussi au niveau de la formation des maitres et de la représentation du savoir. En effet, si aujourd'hui la formation des maitres (tant initiale que continue) est reconnue comme essentielle dans notre système éducatif, il n'en fut pas toujours ainsi. Dans son *Essai d'éducation Nationale* (1763), La Chalotais (cité par Gréard, 1887) propose de faire rédiger des « livres élémentaires classiques ». Et d'ajouter : « *Ces livres seraient la meilleure instruction que les maîtres pussent donner, et tiendraient lieu de toute méthode. [...] Ces livres étant bien faits, dispenseraient de maîtres formés ; il ne serait plus question alors de disputer sur leur qualité, s'ils seraient prêtres, ou mariés, ou célibataires. Tous seraient bons, pourvu qu'ils eussent de la religion, des mœurs, et qu'ils sussent bien lire ; ils se formeraient bientôt, eux-mêmes en formant les enfants. Il ne s'agirait donc que d'avoir des livres, et je dis que c'est la chose la plus aisée présentement* ». *A contrario*, quelques années plus tard, Célestin Freinet (cité par Gerard, 2010) déclarait : « Tout manuel distribué en autant d'exemplaires que d'élèves, est un carcan et un outil totalitaire. Si un manuel est bon, qu'il entre dans la bibliothèque au même titre que les autres livres, il perdra sa position de monopole et sa nocivité de manuel ».

Liée également à la formation des enseignants, la question de la liberté d'enseignement est aussi présente dans l'édition de manuels scolaires. Cette question était déjà vive en France à la fin du 18e siècle. Ainsi, si après la Révolution française « les professeurs étaient alors libres de choisir des manuels » (Schubring, 1984), « cette liberté fut abolie en 1803 par la suppression des Écoles Centrales ». De nos jours, en Communauté française de Belgique, dans le cadre d'« une volonté de revalorisation, ou plutôt de responsabilisation des acteurs du processus didactique » (Gerard, 2010) et au nom de la liberté pédagogique, le manuel reste un outil que les enseignants peuvent choisir et utiliser selon leurs besoins, leurs envies... Mais tous les manuels se valent-ils ? Tous les manuels s'appuient-ils sur une épistémologie éprouvée ? Et si comme l'indiquent N. Rouche & al. (2006) « un manuel peut être bon à certains égards et pas à d'autres. », à quel(s) égard(s) tel manuel est-il bon, et pour quel(s) autre(s) faut-il utiliser tels(s) ou tel(s) autre(s) manuel(s) ?...

4.1 Un outil d'analyse

Lorsque l'on souhaite analyser les manuels scolaires, plusieurs outils peuvent être construits et validés pour rencontrer des questions tout aussi variées. Ainsi peut-on aborder plus particulièrement les aspects spécifiques à l'édition des manuels, ou plutôt s'intéresser à l'usage que les enseignants et les élèves en font, ou encore plus spécifiquement étudier la qualité des manuels envisagés, ou classifier ces manuels selon leur préoccupation essentielle : manuels d'exercices, manuels de référence, manuels de synthèse et de structuration des acquis, manuels intégrant la démarche pédagogique (Gerard, 2010).

En fonction de la commande du Ministère de la Communauté française, notre travail consiste essentiellement à mieux comprendre comment l'enseignement des nombres décimaux est pris en charge par des manuels scolaires disponibles sur le *marché* de l'édition scolaire en Communauté française de Belgique. Pour ce faire, nous nous sommes appuyés sur différents travaux en épistémologie, en didactique des mathématiques mais également sur des travaux en pédagogie. Notre travail a ainsi pour objectif de réaliser une photographie, certes incomplète certainement, des manuels scolaires en Communauté française de Belgique. En aucun cas notre volonté n'est de comparer les manuels et d'en proposer un quelconque classement.



L'activité de classe, dans laquelle se situe le manuel scolaire, peut être modélisée par le tétraèdre ci-contre. Celui-ci s'organise à partir du *triangle de Houssaye* (Houssaye, 1993) qui détermine trois pôles dans les activités d'enseignement et d'apprentissage : l'enseignant, les savoirs et l'(les) apprenant(s). À ces trois pôles, nous y ajoutons les outils disponibles. Ce dernier pôle est constitué d'une diversité d'outils qui comprend aussi bien des outils didactiques classiques (matériel à manipuler...) que des représentations symboliques (droite graduée, surface à colorier, abaque...), qu'également les outils s'appuyant sur les nouvelles technologies ou les manuels scolaires. Pour analyser les différents manuels à notre disposition, nous avons construit un outil d'analyse qui tente à prendre en charge en partie ces quatre pôles. Cet outil a été testé et validé de manière empirique. Il a été modifié à certains moments pour être rendu plus opérationnel.

Notre outil d'analyse est composé de trois questions principales et de cinq sous-questions. Celles-ci ont trait à l'analyse épistémologique, à l'analyse didactique et à l'analyse cognitive des pratiques et des savoirs proposés dans les manuels.

1. Quelle(s) approche(s) épistémologique(s) des nombres décimaux est(sont) privilégiée(s) ?
   - Quel(s) mode(s) de représentations des nombres décimaux sont présents dans les manuels ?
   - Des liens entre les nombres décimaux et les grandeurs sont-ils explicitement présents dans les manuels ? Si oui, lesquels ?
   - Des liens entre les nombres décimaux et les fractions simples et/ou les fractions décimales sont-ils explicitement présents dans les manuels ? Si oui, lesquels ?
   - Les rôles du zéro sont-ils explicitement exposés ? Si oui, comment ?
   - La prise en charge de la dialectique continu/discret est-elle réalisée ? Si oui, comment ?
2. Quelle(s) activité(s) d'introduction pour les nombres décimaux est (sont) proposée(s) dans le manuel ?
3. Quels *outils* sont proposés pour représenter les nombres décimaux ?

4.2 Des manuels scolaires

Ce travail d'analyse a été effectué pour huit manuels scolaires concernés par l'enseignement des nombres décimaux et disponibles en Belgique : cinq manuels belges (dont deux sont des traductions et des adaptations d'un manuel allemand et d'un manuel flamand), deux manuels français et un manuel suisse. Ces manuels sont destinés aux élèves de 4^{e} année primaire, sauf le manuel suisse destiné à la 5^{e} année. Ceci s'explique par le fait qu'en Suisse romande l'apprentissage structuré des nombres décimaux ne débute qu'à partir de la 5^{e} primaire.

Nous présentons ci-dessous succinctement chacune de ces collections par ordre alphabétique. Le tableau de la page 85 synthétise les informations relatives à l'édition de chacune d'elles.

Les huit collections

À la conquête des maths – Cette collection s'organise autour de fichiers photocopiables, rassemblés en trois thèmes : *nombres*, *grandeurs* et *solides et figures*. Ces fichiers s'organisent à partir d'un découpage du travail scolaire en trois moments intitulés « J'apprends », « Je m'exerce » et « Je m'évalue ». Une brève analyse *a priori* de chaque activité est réalisée en début de fichier. Cette analyse peut comprendre des indications méthodologiques, des analyses de matière, le ou les objectif de la fiche...

Cette collection, préparée en majeure partie par des enseignants, vise à préserver l'entière liberté pédagogique. En effet, cette collection ne propose pas explicitement de progression ou de démarche. Elle pourrait plutôt être cataloguée comme « manuel d'exercices » à partir du modèle établi par F.-M. Gerard. Elle propose également un *corrigé* des exercices sur cédérom pour des enseignants qui pratiqueraient la *pédagogie du contrat*.

Archi m'aide – Cette collection propose des manuels de la 3e maternelle à la 6e primaire. Elle est composée de deux manuels (livre-cahier) pour l'élève et d'un guide pédagogique pour l'enseignant.

Ce guide propose des explications concernant l'utilisation des manuels, des analyses épistémologique, historique et didactique de l'enseignement des nombres, les choix épistémologique et didactique qui guident la conception des manuels. Il contient aussi, pour chaque activité, les références aux *Socles de compétences*, les contenus mathématiques rencontrés, une proposition didactique pour l'organisation de la séquence d'enseignement et d'apprentissage. Parfois, des possibilités de prolongement sont proposées, ainsi que des situations d'évaluation.

Cap Math – Cette collection est rédigée par des membres de l'équipe Ermel : R. Charnay, G. Combier et M.-P. Dussuc. Trois documents constituent la collection pour chaque niveau : le guide des activités pour l'enseignant, le manuel des élèves et les fiches photocopiables destinées aux élèves.

D'un abord plus accessible aux enseignants que la collection Ermel elle-même, cette collection base l'apprentissage sur « la confrontation à des situations de recherche et [sur] les débats auxquels donnent lieu la résolution de problèmes » (Cap math, CM1, *Le guide des activités*). Les activités sont rassemblées par « quinzaine » [3]. Des explications relatives à l'épistémologie des notions mathématiques rencontrées et à la théorie didactique des apprentissages permettent aux auteurs de justifier leur choix et aux enseignants de mieux comprendre et organiser les activités proposées. Des explications concernant l'organisation de chaque activité sont aussi rédigées.

En ce qui concerne les apprentissages relatifs aux nombres, l'accent est mis sur la compréhension du système décimal de position. Ainsi, un des deux objectifs de la première quinzaine de travail est « comprendre les valeurs des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture d'un nombre [...] Mettre en évidence les principes de la numération de position : valeur des chiffres, groupements échanges sous-jacents ».

[3] Blocs d'activités à réaliser en deux semaines.

Corome – La collection suisse de manuels scolaires *Corome* (Commission romande des moyens d'enseignement) est produite par l'*Office romand des éditions et du matériel scolaires* à Neuchâtel, devenu depuis peu l'*Office romand des éditions scolaires.*

Ces manuels sont conçus par des didacticiens et des enseignants. Les réflexions didactiques et les situations d'enseignement et d'apprentissage proposées s'appuient sur des recherches récentes en didactique des mathématiques.

Cette collection, pour chacun des niveaux de l'enseignement primaire, comprend le livre de l'enseignant (*Méthodologie et commentaires*), le livre de l'élève contenant « de nombreux exercices, recherches et problèmes » et parfois des fiches d'entrainement. Les notions mathématiques sont rassemblées en chapitre tels que *repérage dans le plan*, *nombres naturels et opérations*, *approche des nombres rationnels*, ...

Cracks en maths – Cette collection, éditée chez de Boeck sous la direction de F.-M. Gérard et X. Roegiers, propose diverses situations-problèmes, des instruments d'évaluation et des exercices. Elle est associée à des manuels de référence de X. Roegiers (2000), *Les mathématiques à l'école primaire* (Tome 1 et 2), édités chez De Boeck également.

Pour chaque année scolaire, la collection est composée du fichier d'apprentissage et du manuel de fixation pour l'élève, du guide méthodologique et du corrigé, et de la banque d'exercices reproductibles.

Faire des maths – Cette collection de manuels scolaires est une traduction en langue française de la collection allemande « Das Zahlenbuch » réalisée par les professeurs E. Ch.Wittmann & G. N. Müller. La traduction et l'adaptation aux programmes belges francophones est réalisée essentiellement par J. Maquoi, Inspecteur de l'enseignement fondamental en Communauté française.

Cette collection fait la part belle aux matériaux de la vie de tous les jours : euros, panneaux de signalisation, cubes, ... L'objectif est sans conteste de « faire du sens » avec les concepts mathématiques. Les manuels de cette collection sont abondamment illustrés.

J'apprends les maths – Cette collection française est éditée par une équipe pluridisciplinaire (chercheurs, enseignants) sous la direction de Rémi Brissiaud, en collaboration avec Pierre Clerc, François Lelièvre et André Ouzoulias. Elle est composée du livre du maitre, du manuel pour l'élève et des fichiers d'activités.

Cette collection est étayée à partir de nombreuses analyses épistémologiques et didactiques qui sont exposées dans le livre du maitre et partiellement dans le manuel de l'élève. Les auteurs proposent une structuration des apprentissages en séances tout le long des manuels.

Cette collection s'inscrit dans la perspective de l'enseignement français qui favorise l'approche des nombres décimaux à partir des fractions décimales. La particularité de cette collection est également d'aborder explicitement les fractions comme une division du numérateur par le dénominateur.

Tilt – Cette collection comprend un manuel destiné aux élèves et un livre pour l'enseignant contenant les corrigés des exercices. Il faut noter que cette collection constitue une traduction avec adaptation d'une collection originellement rédigée par une équipe flamande. Ainsi, les différences d'avec les manuels belges francophones s'expliquent peut-être par les différences recensées au niveau des curriculums flamands et francophones. Nous en ferons écho à la page 87.

Présentée par l'éditeur comme « activités d'apprentissage » [4], cette collection ne possède pas de guide ou de manuel pour l'enseignant, mais un *corrigé* pour le maitre est disponible. Il nous semble cependant que des indications concernant la résolution de certains exercices seraient nécessaires. Nous y reviendrons à la page 94.

Les caractéristiques d'édition de chaque collection

Tab. 4.1 – Manuels scolaires analysés.

Titre du manuel	Collection	Niveau	Éditeur	Année	Pays	Livre du maitre
À la conquête des maths	Nombres	4^{e}	Gai Savoir		Belgique	Non
Archi m'aide		4^{e} (livrets A et B)	Van In	2006	Belgique	Oui
Cap maths		CM1 (cycle 3)	Hatier	2003	France	Oui
Corome		5^{e}	Office romand des éditions scolaires	1999	Suisse	Oui
Cracks en maths		4^{e}	De Boeck	2001	Belgique	Oui
Faire des maths		4^{e}	Érasme	2001	Belgique	Non
J'apprends les maths		CM1	Retz	2005	France	Oui
Tilt	Nombres	4^{e}	Van In		Belgique	Non

4.3 Des questions d'analyse

Nous reprenons maintenant chacune des questions et sous-questions énoncées ci-dessous et nous interrogeons chacun des manuels.

4.3.1 Quelle approche épistémologique des nombres décimaux est privilégiée ?

Si l'on observe les *Socles de compétences* et les programmes, nous constatons que les fractions et les nombres décimaux sont les deux apprentissages importants dans le domaine des nombres en 4^{e} année primaire. Et de manière générale, ces nombres sont associés aux grandeurs. Ainsi les élèves sont amenés à fractionner des grandeurs, souvent des surfaces,

[4] $http : www.vanin.be/vanin_master/page.aspx?pid = 23$

à utiliser des nombres décimaux pour exprimer une mesure « qui ne tombe pas juste ». L'analyse des programmes rédigés depuis plus d'un siècle[5] a montré que nos programmes, en dehors de la période dite des *mathématiques modernes*, ont tendance à lier fortement nombres et mesures des grandeurs.

Cette approche n'est pas nécessairement la même dans tous les pays limitrophes, ni même dans les trois régions de Belgique. De manière générale, il est utile de distinguer les manuels belges francophones des manuels français ou suisses. Ainsi les manuels français ont plutôt tendance à privilégier une approche des nombres décimaux à partir des fractions décimales, comme le préconisent les programmes français. Les manuels de Suisse romande ont plutôt tendance à rencontrer les nombres décimaux dans des situations variées faisant appel tantôt au cadre numérique, tantôt aux mesures de grandeurs.

Quelle que soit l'approche, l'analyse épistémologique est toujours importante, tant pour justifier les choix didactiques que pour informer les enseignants. Force est cependant de constater que les manuels belges sont peu explicites dans leur approche épistémologique, tant au niveau du manuel pour le maitre ou dans l'introduction d'un manuel, qu'au niveau de l'organisation même du manuel. Une exception cependant : la collection *Archi m'aide* q<qui expose et justifie les choix didactiques.

Notre analyse nous a conduit à regrouper les huit manuels en quatre groupes : les manuels qui se basent essentiellement sur une approche numérique, ceux qui s'appuient essentiellement sur les mesures de grandeurs, ceux qui s'appuient sur ces deux domaines complémentaires, ceux qui ne déterminent pas vraiment de choix mais juxtaposent des activités. Bien sûr ces regroupements indiquent des tendances et non des caractéristiques absolues.

▷*Des manuels qui s'appuient sur une approche numérique.*

Notons d'emblée que cette approche peut être considérée comme respectant les *Socles de compétences*. En effet, dans la partie dédiée aux *nombres*, aucune référence aux grandeurs n'est indiquée pour étudier les nombres décimaux.

La collection *À la conquête des maths*, dans son fichier relatif aux nombres, ne fait aucune référence aux grandeurs. L'approche est exclusivement numérique. Les nombres décimaux sont immédiatement mis en lien avec les fractions et ce sont les représentations sur des plaques quadrillées ou sur une droite numérique qui semble être le support de l'apprentissage.

Il en est de même pour la collection *Tilt*. L'enseignement et l'apprentissage des nombres décimaux s'appuient sur les fractions, plus particulièrement sur les fractions décimales et sur la représentation des fractions comme division du numérateur par le dénominateur. L'apprentissage des fractions constitue dès lors une partie importante du manuel pour l'élève. Celles-ci sont d'abord présentées comme le résultat d'un partage de grandeurs continues, puis comme opérateur sur des ensembles discrets, puis comme opérateur sur des nombres, ensuite comme l'expression d'un rapport entre des grandeurs continues, enfin comme rapport entre des grandeurs discrètes. Des exercices présentent ensuite la fraction comme une opération de division écrite d'une manière différente, celle du numérateur par

[5] Voir chapitre 3, page 27.

le dénominateur.

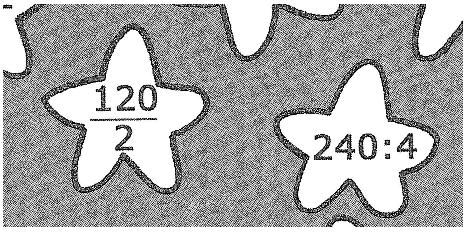


Fig. 4.1 Tilt, Les nombres, 4^e, page 41, extrait.

Énoncé :
« Le 6 janvier approche. Les rois mages sont sur le chemin de Bethléem. Colorie toutes les étoiles dont le résultat est 60 et tu connaîtras la route qu'ils empruntent. »

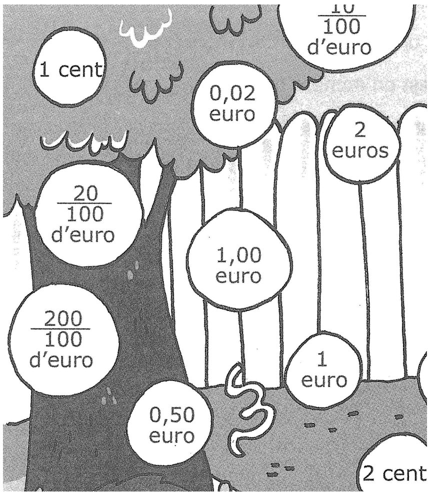


Fig. 4.2 Tilt, Les nombres, 4^e, page 52, extrait.

Cette activité est préparatoire à l'approche des nombres décimaux à partir de la monnaie (euro). Toutefois, il ne s'agit pas de s'appuyer sur les euros pour construire les nombres décimaux. Ceci n'est qu'un prétexte. D'ailleurs, dans un premier temps, seuls des nombres décimaux limités au dixième seront étudiés. Par la suite, les nombres décimaux seront rencontrés jusqu'au millième.

Énoncé :
« Colorie les bulles qui ont la même valeur dans la même couleur. Tu dois avoir 8 couleurs différentes ».

Très rapidement, le travail conjoint sur les fractions décimales et la fraction comme division permet de rencontrer les nombres décimaux. En y ajoutant des opérations de transcodage[6], des exercices permettent de mettre en évidence la notion de « dixième » et de compléter l'abaque des nombres et la droite des unités. Comme noté dans l'introduction de cette collection, celle-ci se réfère dans sa version néerlandophone aux programmes des réseaux d'enseignement belges néerlandophones, eux-mêmes en conformité avec les prescrits légaux édités par le Gouvernement flamand (Lager Onderwijs : Eindtermen wiskunde[7]). Ces prescrits sont très explicites par rapport aux apprentissages relatifs aux fractions :

> « Begripsvorming-wiskundetaal-feitenkennis
> De leerlingen
> 1.4 in voorbeelden herkennen dat breuken kunnen uitgelegd worden als : een stuk (deel) van, een verhouding, een verdeling, een deling, een vermenigvuldigingsfactor (operator), een getal (met een plaats op een getallenlijn), weergave van een kans. De leerlingen kunnen volgende terminologie hanteren : stambreuk, teller, noemer, breukstreep, gelijknamig, gelijkwaardig. »

La rencontre de la fraction comme division (« een deling ») est clairement énoncée dans cet article. Cette recommandation n'apparait pas de manière aussi explicite dans les prescrits

[6] Nous renvoyons le lecteur aux travaux de K. Fuson pour une information plus complète relative aux situations de transcodage.

[7] *http : www.ond.vlaanderen.be/dvo/basisonderwijs/lager/eindtermen/wiskunde.htm*), consulté le 18 février 2010.

belges francophones. Par contre, dans la partie relative aux mesures (Wiskunde - Meten), aucune référence à l'appui sur les mesures pour rencontrer les nombres décimaux ou à l'appui sur les nombres décimaux pour renforcer les systèmes de mesures décimales n'est explicitement indiquée.

Une autre influence du programme flamand se situe au niveau de la lecture des nombres décimaux. Ainsi, la lecture d'un nombre décimal sous la forme « x virgule y » est proposée dans le manuel (de même pour le manuel Corome, Suisse romande). Or cette forme de lecture n'est pas souhaitée par les programmes belges francophones.

▹*Des manuels qui s'appuient sur les mesures de grandeurs.*

Dans la collection *Faire des maths*, les rédacteurs n'énoncent pas explicitement leur analyse épistémologique concernant les nombres décimaux. Cependant la référence épistémologique aux grandeurs transparait explicitement tout au long de l'ouvrage. Les nombres décimaux sont rencontrés et exercés dans des contextes faisant intervenir soit des prix en euros, soit des mesures de masses, de capacités ou de longueurs. L'abaque des unités de mesure est utilisé pour représenter la transformation d'une mesure en unités différentes et ainsi faire apparaitre le rôle de la virgule et parfois du zéro.

En ce qui concerne la collection *Cap Math*, l'approche est explicitement située au niveau des mesures de grandeurs. Cependant, les mesures ne s'effectuent pas systématiquement à partir des unités conventionnelles. L'approche s'appuie également sur les fractions simples[8] et sur les fractions décimales (à partir d'opérations de fractionnement) des mesures de grandeurs. Ainsi, à la quinzaine 7, les auteurs précisent que « les fractions sont introduites pour comprendre les nombres décimaux et leur écriture à virgule. Les élèves doivent d'abord prendre conscience du faut que, avec une unité donnée, toute mesure ne peut être exprimée par un entier et que le fractionnement de l'unité constitue une première réponse au problème ».

Comme le préconisent les programmes français, ce sont les apprentissages relatifs aux fractions (notamment les fractions décimales) qui soutiennent les apprentissages relatifs aux nombres décimaux. Le contexte d'apprentissage reste cependant les mesures de grandeurs.

▹*Des manuels qui s'appuient sur une approche mixte et complémentaire*

En Suisse, l'enseignement des nombres décimaux est au programme de la 5e année. Cependant, les auteurs de la collection *Corome* sont conscients que très tôt, bien avant l'apprentissage structuré des nombres décimaux à l'école, les élèves sont confrontés à ces nombres dans des situations de mesure de longueurs ou de paiement. Ainsi le travail sur les nombres décimaux consistera surtout à « regrouper toutes ces connaissances et à les réorganiser dans un nouveau réseau, en lien avec les savoirs sur les nombres naturels acquis dans le cadre scolaire. » Et de poursuivre en insistant sur le fait qu'« on ne peut envisager l'idée naïve d'ajouter "de nouvelles pierres à l'édifice précédent", mais bien celle de mettre en doute des connaissances antérieures pour les reconstruire à un niveau plus

[8] Nous utilisons le terme de fraction simple (ou fraction ordinaire) pour désigner les fractions qui ne sont pas décimales au sens strict.

élevé ».

Dans les intentions générales, la volonté que les élèves construisent le système décimal de position comme un outil compris et non comme un *truc* est particulièrement mise en évidence :

> « On souhaite que la construction de ce système de numération soit stabilisé en quatrième année pour les naturels, avant de passer, en cinquième année, aux nombres rationnels et en particulier aux nombres décimaux. »
> [Pour ce faire,] « l'élève met en oeuvre et élabore des outils que l'on peut organiser ainsi :
> 1. l'algorithme de construction du système décimal de position : on entend par là les règles (comportant des conventions) et la marche à suivre pour écrire les nombres naturels et pour interpréter cette écriture ;
> 2. les différentes manières de représenter et de comparer les nombres naturels et leur suite : bouliers, matériels divers, bande numérique, droite numérique, droite graduée régulièrement, ainsi que les façons de les exprimer oralement. »

Dans les activités de compréhension du système décimal de position, l'estimation occupe une place importante. C'était déjà le cas au niveau de la didactique liée aux processus d'enseignement et d'apprentissage pour les naturels. L'intérêt réside dans le fait qu'il est toujours possible d'approximer mieux. Ainsi, *estimation* et *approximation*, et par-delà *encadrement*, sont intimement liés.

$$\begin{aligned} 25 : 7 &= ?, \\ &\cong 3 \\ &\cong 3,5 \\ &\cong 3,57 \\ &\cong 3,571 \\ &\cong 3,5714 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Ajoutons que les auteurs insistent sur le fait qu'« un nombre rationnel est par définition un quotient de deux nombres naturels ». Dans cette perspective, les fractions seront aussi considérées comme la division du numérateur par le dénominateur. De la même manière, en s'appuyant sur le transcodage, les auteurs sont amenés à préciser qu'il est important de montrer que « 0,1 ; 0,10 ; 0,100 ; $\frac{1}{10}$; $\frac{10}{100}$ sont autant d'écritures d'un même nombre, appelé "un dixième" en français ».

L'introduction des rationnels se fait essentiellement à partir de deux types d'activités : la mesure et la compréhension du code « système décimal de position » (regroupement, échange ou partage).

En ce qui concerne la mesure, les auteurs reconnaissent que celle-ci fait « intervenir de manière naturelle » les nombres décimaux. Mais ils précisent également que « ces mesures (accompagnées de leurs unités) ne sont souvent que des "nombres composés" ». Par exemple : un mètre quatre-vingts s'écrit 1,80 m mais signifie souvent 1 m et 80 cm, soit la juxtaposition de deux mesures entières. Il s'agit donc d'être prudent pour ne pas renforcer la tendance à considérer un nombre décimal comme la juxtaposition de deux nombres naturels (D=N,N).

En ce qui concerne la comparaison de décimaux, les auteurs insistent sur le fait qu'il faut modifier (*ramifier*) l'algorithme de comparaison construit sur les naturels. Ainsi plusieurs

algorithmes de comparaisons sont mis en avant :
– comparer d'abord la partie naturelle du nombre, puis si égalité, poursuivre pour chaque sous-unité jusqu'à pouvoir décider ;
– transformer les nombres décimaux en fractions décimales avec même dénominateur et comparer les numérateurs ;
– transformer l'écriture décimale pour obtenir le même nombre de rangs après la virgule et comparer des nombres « entiers ».

Notons que cette collection expose également une analyse des algorithmes pour les opérations sur les nombres décimaux. Les auteurs montrent notamment l'impossibilité d'appliquer aux nombres décimaux certains algorithmes liés aux nombres naturels et déjà connus des élèves.

La collection française *J'apprends les maths* comprend une importante analyse épistémologique et didactique dans le manuel du maitre. Les auteurs analysent plusieurs progressions et mettent en évidence de manière pointue les avantages, les inconvénients, les errements... de chacune d'elles. Ils exposent ensuite leur choix et les justifient, entre autres, à partir d'arguments étayés par des expérimentations. Le lien entre les nombres décimaux et les fractions est explicitement mentionné. Les choix didactiques, et donc la progression des activités proposées, s'appuient sur cette analyse.

Les auteurs de cette collection définissent un nombre décimal comme un nombre qui permet « d'approcher la mesure de n'importe quelle grandeur continue d'aussi près que l'on veut ». Ils précisent que l'intérêt des nombres décimaux est lié à leur *nature* de fraction. Or, selon eux, cette *nature* est cachée par l'écriture des nombres décimaux avec une *virgule*. Les auteurs indiquent que de ce fait, un nombre décimal « ça ressemble à des entiers, ça se manipule comme des entiers, alors que ce ne sont pas des entiers ». De plus, la manière d'oraliser les nombres à virgule (deux entiers séparés par une virgule) est fort proche de celle des entiers. Selon lui, l'écriture à virgule est donc « un système économique de notation des décimaux qui facilite le calcul mais qui masque leur vrai nature [fractionnaire] ». Ainsi, pour R. Brissiaud et les autres auteurs, il est important d'enseigner d'abord les fractions, ensuite les fractions décimales, enfin les nombres à virgule.

L'objectif des activités proposées dans ce manuel est double :
– « aider les élèves à s'approprier le projet auquel répondent les décimaux (être une autre notation de nombres et être des nombres qui permettent d'encadrer n'importe quel nombre irrationnel),
– aider les élèves à surmonter les difficultés de conceptualisation inhérentes aux fractions qui ne sont pas unitaires ».

Nous avons situé cette collection dans l'approche mixte. De fait, tant les mesures que les fractions et le système décimal interviennent. Cependant, la conception initiale et l'analyse épistémologique situe plutôt l'approche au niveau numérique. En effet, c'est à partir d'un travail sur la division euclidienne et sur la division décimale effectuée à la calculette que vont être abordés les nombres décimaux.

▷*Des manuels qui ne définissent pas vraiment une approche structurée*

Pour les autres manuels belges, il n'est pas aisé de déterminer un fil conducteur de type épistémologique. Il s'agit le plus souvent d'un assemblage d'activités qui ne s'appuient pas sur une construction didactique en relation avec des choix épistémologiques explicites.

En aucune manière nous ne souhaitons affirmer que les manuels regroupés sous ce titre sont de mauvais manuels. Il s'agit juste de manuels pour lesquels nous avons éprouvé des difficultés à reconnaitre un fil conducteur de type épistémologique. Ces manuels contiennent cependant des activités isolées de qualité qui ont leur place dans une séquence d'apprentissage des nombres décimaux.

4.3.2 D'autres questions d'analyse

Nous questionnons à présent ces mêmes manuels à partir de cinq sous-questions :
- Quel(s) mode(s) de représentations des nombres décimaux sont présents dans les manuels ?
- Des liens entre les nombres décimaux et les grandeurs sont-ils explicitement présents dans les manuels ? Si oui, lesquels ?
- Des liens entre les nombres décimaux et les fractions simples et/ou les fractions décimales sont-ils explicitement présents dans les manuels ? Si oui, lesquels ?
- Les rôles du zéro sont-ils explicitement exposés ? Si oui, comment ?
- La prise en charge de la dialectique continu/discret est-elle réalisée ? Si oui, comment ?

Quel(s) mode(s) de représentations des nombres décimaux sont présents dans les manuels ?

Selon É. Roditi (2001), d'un point de vue mathématique, on peut considérer les nombres décimaux à partir de trois *modes de représentation*. Autrement dit les nombres décimaux peuvent être considérés de trois manières différentes : ils peuvent être vus comme une écriture différente d'un nombre rationnel et être mis en relation avec les fractions simples ou décimales ; ou comme des nombres utilisés dans des contextes de mesure qui nécessitent l'emploi d'une unité de mesure et de sous-unités (fractionnement décimal) ; ou encore ils peuvent être utilisés dans des situations d'encadrement d'un nombre réel.

- Les nombres décimaux écrits sous la forme d'un **quotient** (fraction simple ou fraction décimale)

  $1{,}25 = \frac{10}{8} = \frac{125}{100}$

  Ce mode de représentation, surtout les fractions décimales, permet aisément les comparaisons de nombres décimaux. Il permet également le travail sur les mesures à partir des fractions.

- Les nombres décimaux écrits sous la forme d'une **somme de fractions décimales**

  $1{,}25 = 1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$

  Ce mode intervient dans le repérage sur une droite graduée et pour l'approche (encadrement ou approximation) de n'importe quel réel.

- Les nombres décimaux écrits sous la forme d'un **produit**

  $1{,}25 = 125 \times 10^{-2}$

Tab. 4.2 – Modes de représentation des nombres décimaux en 4^e^ primaire et 5^e^-6^e^ primaire.

	4^e^ primaire,CM1			5^e^-6^e^ primaire, CM2-6^e^		
Titre du manuel	Quotient	Somme	Produit	Quotient	Somme	Produit
À la conquête des maths						
Archi m'aide						
Cap maths, (F)	x	x		x	x	
Corome, (CH)	Voir 5^e^-6^e^ primaire, CM2-6^e^			x	x	x
Cracks en maths	x	x		x	x	
Faire des maths						
J'apprends les maths	x	x		x	x	
Tilt	x	x		x	x	

Dans la collection Corome, la représentation de type *produit* est employée dans les procédés de multiplication de deux nombres décimaux. Cependant, il n'est pas demandé, dans les commentaires méthodologiques, de faire écrire aux élèves les nombres décimaux sous la forme d'un produit d'un naturel et d'une puissance de dix.

Dans cette collection, les multiplications de deux nombres décimaux sont notamment envisagée à partir de la multiplication de deux naturels. Il est ainsi proposé de résoudre une multiplication de ce type en trois étapes, comme le montre l'extrait suivant (figure 4.3) :

Comparaison avec des produits de nombres naturels, qui repose sur les propriétés de la multiplication et de la relation d'égalité en trois étapes (L. 15 *Multiplications par étapes*):

1. Un produit de nombres décimaux étant donné, on multiplie chacun de ses facteurs (si nécessaire) par une puissance de dix pour qu'ils deviennent des nombres naturels.
2. On effectue la multiplication dans $\mathbb{N}$.
3. On revient au produit initial, dont les facteurs (ou un seul) avaient été modifiés et on procède aux «modifications inverses».

Fig. 4.3 Corome, Nombres rationnels et opérations, Méthodologies - Commentaires, page 152, extrait.

Des liens entre les nombres décimaux et les grandeurs sont-ils explicitement présents dans les manuels ? Si oui, lesquels ?

L'analyse épistémologique des nombres décimaux [9] montre que ces nombres trouvent leur utilité dans le champ des grandeurs. *Stévin*, à qui l'on doit l'écriture actuelle des nombres décimaux, avait par ailleurs intitulé son ouvrage « Enseignant facilement expédié par nombres entiers sans rompus, tous comptes se rencontrant aux affaires des Hommes, dédié aux Astrologues, Arpenteurs, Mesureurs de tapisserie, Gavieurs, Stéréométriciens, Maîtres de monnaie & à tous Marchands ».

[9] Voir chapitre 2.

L'analyse des programmes des quatre réseaux principaux en Communauté française[10] montre également que les nombres décimaux sont rencontrés et exercés notamment à partir du champ des grandeurs. Par contre, des recherches récentes en sciences cognitives montrent que le champ des grandeurs constitue parfois un obstacle pour les élèves.

Ainsi, distinguer l'apport favorable des grandeurs (et de leur mesure) pour l'apprentissage des nombres décimaux est aujourd'hui nécessaire. Dans les manuels belges, cette analyse de l'apport des grandeurs est peu présente. Par contre, quatre manuels sur cinq proposent des situations où les mesures de grandeurs sont utilisées pour introduire ou exercer les nombres décimaux. Remarquons, comme le montre le tableau ci-dessous, qu'un manuel ne fait aucune référence aux grandeurs pour étudier les nombres décimaux.

Tab. 4.3 – Référence aux mesures de grandeurs dans les manuels scolaires.

Manuels	Longueurs	Capacités	Masses	euros ou CHF	Aire
À la conquête des maths	-	-	-	-	-
Archi m'aide	×	×	×	×	-
Corome (Ch)	×	-	-	-	-
Cracks en maths	×	×	-	×	-
Faire des maths	×	-	×	×	×
J'apprends les maths (F)	×	-	-	×	×
Tilt	×	×	×	×	-

Constatons d'emblée que les mesures de longueur sont présentes dans les manuels utilisant les grandeurs et leur mesure. Admettons aisément, comme les expérimentations que nous avons menées ont pu le montrer, que les mesures de longueur limitent également le champ de travail sur les nombres décimaux. En effet, si l'on souhaite travailler avec des unités qui *font sens* pour les élèves, le plus souvent les unités utilisées seront le *centimètre* et le *millimètre*, parfois le *mètre*. Dans ce cas, les nombres décimaux seront limités au dixième. Bien sûr, si on utilise le mètre et dans le cas où l'on précise la mesure jusqu'au millimètre, les nombres décimaux pourront être exprimés jusqu'au millième.

Constatons également que la monnaie est largement utilisée. Et cela malgré le fait que l'euro ne permet guère de rencontrer des situations au-delà des centièmes (d'euros), ni des situations utilisant uniquement des dixièmes (d'euros)...

Seule les collections *J'apprends les maths* et *Faire des maths* utilisent explicitement les mesures d'aire pour exercer les nombres décimaux. Mais dans la progression du manuel *J'apprends les maths*, ce n'est que dans une second temps que les nombres décimaux sont liés aux mesures de longueur, d'aire ou à des paiements en euros.

Enfin, seule la collection *À la conquête des maths* ne fait aucune référence aux grandeurs. La première activité (section *J'apprends*) demande à faire correspondre des fractions et des nombres décimaux limités au centième.

[10] Voir chapitre 3, page 47.

Des liens entre les nombres décimaux et les fractions simples et/ou les fractions décimales sont-ils explicitement présents dans les manuels ? Si oui, lesquels ?

Différentes conceptions des fractions peuvent être mises en évidence par l'analyse des sept manuels.
- la fraction comme un opérateur sur une grandeur (continue ou discrète) ou sur un nombre ;
- la fraction simple à distinguer de la fraction décimale, et la transformation de l'une en l'autre ; la fraction décimale sert alors à introduire le lien entre les fractions et les nombres décimaux ;
- la fraction comme une division du numérateur par le dénominateur ; à nouveau cette conception permet d'introduire les nombres décimaux ou de construire le lien entre les deux écritures, fractionnaire et décimale.

La prise en compte de ces conceptions a une influence sur les choix didactiques et sur la préparation et la programmation des activités proposées dans les manuels. Selon la conception de la fraction choisie – ou non –, la rencontre avec les nombres décimaux peut-être programmée soit avant, soit après celle des fractions (simples ou décimales) ou encore simultanément.

Pour certains manuels, il n'est pas certain que la présentation des activités soit le résultat d'un choix justifié par une approche structurée. Par exemple, pour le manuel *Faire des maths*, les fractions sont abordées après les nombres décimaux, sans construire de liens entre ces deux écritures, ni pour les fractions simples ni pour les fractions décimales. Les activités proposées ne concernent par ailleurs pas la distinction des fractions simples et des fractions décimales.

Par contre, R. Brissiaud dans sa collection *J'apprends les maths* expose clairement des choix épistémologiques qui amènent à une progression structurée : d'abord les fractions simples, puis les fractions décimales, ensuite les fractions comme une division du numérateur par le dénominateur, enfin les nombres décimaux comme l'écriture du résultat de cette division. Ce choix de progression est dicté, entre autres, par la conception des nombres décimaux comme étant des nombres qui permettent de s'approcher au mieux des nombres rationnels illimités périodiques et des irrationnels. Les auteurs du manuel précisent par ailleurs que cette façon de faire rencontre le projet qui était présent dès l'invention des nombres décimaux.

La collection Corome, pour la 6^{e} primaire rencontre également les fractions comme la division du numérateur par le dénominateur. L'objectif est ici de montrer qu'un même nombre rationnel peut s'écrire de différentes façons. Par exemple : « 25 centièmes peut se rencontrer sous la forme de 0,25 ; de $\frac{25}{100}$; mais aussi de "un quart" ; $\frac{1}{4}$;. . . » [11]. Notons que l'auteur du manuel précise que « Les nombres rationnels, non décimaux, apparaissent au cours du thème, mais sans faire l'objet d'une attention particulière ».

La collection *Tilt* suit globalement cette même progression : des fractions simples aux fractions décimales, des fractions décimales de mesure de grandeurs aux nombres décimaux.

[11] Corome, 6^{e} année, Méthodologie - Commentaires, page 149.

Cette collection est cependant peu claire à certains moments par rapport à la conception de la fraction comme opérateur de fractionnement ou comme division $\frac{N}{D}$). Ainsi, comme annoncé dans la présentation de cette collection, il nous semble que la résolution de certains exercices reste ambigüe, et le « corrigé » ne donne pas d'indication qui permettrait à l'enseignant de prévoir les différentes possibilités de résolution. Par exemple, à la page 31, l'intitulé de la page d'exercices semble indiquer que l'on va considérer la fraction comme un opérateur sur des grandeurs, et de fait, les premiers exercices demandent à préciser quelle fraction de pizza manque ou reste, et d'autres proposent de calculer des fractions de nombres. Mais en milieu de page, on trouve l'exercice suivant :

3 Combien d'unités trouves-tu ?

$\frac{4}{2}$ = ………	$\frac{9}{3}$ = ………	$\frac{8}{2}$ = ………	$\frac{12}{6}$ = ………	$\frac{15}{5}$ = ………	$\frac{12}{4}$ = ………

Fig. 4.4 Tilt, Les nombres, 4^e, page 31, extrait.

Les grandeurs ou les nombres associés aux fractions ont disparu et les élèves sont face à des fractions considérées comme nombres à part entière. Pour résoudre les égalités proposées, les élèves peuvent soit représenter des pizzas, soit encore diviser le numérateur par le dénominateur et ainsi accéder à la conception de la fraction comme division. Le « corrigé » ne donne cependant aucune indication à l'enseignant. Or comme nous l'avons indiqué à la page 86, dans le manuel de l'élève en page 41, c'est bien la fraction division qui est rencontrée. Il nous semble que des indications relatives à la résolution de l'exercice de la page 31 permettraient aux enseignants de préparer, à partir de ces cas simples que les élèves peuvent appréhender, les cas moins intuitifs présentés à la page 41 du manuel (voir figure 4.2, page 87 de ce chapitre).

Si la collection *À la conquête des maths* débute également avec le travail des fractions simples, celui-ci ne semble cependant pas préparer les liens qui seront à construire avec les fractions décimales et les nombres décimaux. Notons que le lien entre fractions et nombres décimaux se construit dans cette collection, comme dans *Archi m'aide*, par le biais de la droite graduée. La conception selon laquelle une fraction est aussi une division du numérateur par le dénominateur n'apparait pas.

Les rôles du zéro sont-ils explicitement exposés ? Si oui, comment ?

Nous n'avons pas trouvé de véritable prise en charge de la problématique du zéro dans les manuels belges consultés. Cette problématique est cependant présente dans certaines activités. Par exemple celle proposée par la collection *Cracks en maths* relative au Monopoly. Plusieurs enfants énoncent leurs avoirs, l'un d'eux déclare qu'il possède :

« 1 billet de 200 €
3 billets de 20 €
2 pièces de 0,2 €
5 pièces de 2 €
7 pièces de 0,02 € ».

Les autres enfants déclarent également ce qu'ils possèdent individuellement. À la suite de quoi, la question proposée est la suivante : « Je suis le banquier. Peux-tu m'aider à compter, à annoncer à chacun le montant de sa fortune et à déterminer qui a gagné ? »

Nous reconnaissons que cette situation est associée à un jeu, le contexte est donc purement symbolique. Cependant, elle s'appuie sur l'utilisation d'une monnaie bien réelle, l'euro. Chaque enfant énonce ainsi la quantité de billets et de pièces de chaque sorte qu'il possède. Remarquons que l'enfant cité ci-dessus déclare qu'il possède « 2 pièces de 0,2 € », or, il n'existe pas de pièce de 0,2 €. Comment traduire cette valeur en faisant référence aux centimes d'euros ? Sans doute le recours aux fractions décimales *parlées* est-il nécessaire. De même que la comparaison avec ce qui se fait pour les mesures décimales de longueur ou de capacité : 2 dixièmes de mètre sont égaux à 20 centièmes de mètre. Donc 0,2 €c'est 2 dixièmes d'€, soit 20 centièmes d'€, soit 0,20 €. Nous percevons ici qu'un des rôles du zéro aurait pu être pris en charge et expliqué. Nous n'avons cependant pas trouvé de notes relatives à cela dans le guide méthodologique.

Une fiche de la collection *À la conquête des maths* est également dédiée aux « zéros inutiles ». Cependant aucune documentation n'est proposée à l'enseignant pour expliquer les rôles du zéro et aucune fiche de synthèse n'est préparée. Par ailleurs, il nous semble que l'expression « zéros inutiles » est quelque peu malheureuse. En effet, nous constatons dans les classes que certains élèves interprètent cette phrase comme « tous les zéros sont inutiles ». Or, les « zéros » ne sont pas *inutiles*, ils aident parfois à la comparaison ou au calcul, parfois à l'écriture des nombres lorsqu'ils remplacent l'absence de puissance de 10 dans un nombre. Une telle expression (ou un tel *slogan*) peut parfois induire des comportements chez les élèves qui ne sont pas adéquats à toutes les situations. Dans ce cas, plutôt que de favoriser une processus de *généralisation* (au cœur des apprentissages numériques), c'est un processus de *juxtaposition* de règles qui est présenté aux élèves. Ceci ne facilite pas l'apprentissage des notions de *nombre* et de *système décimal de position*.

La prise en charge de la dialectique *continu/discret* est-elle réalisée ? Si oui, comment ?

Nous avons explicité au chapitre 3, page 53, qu'il serait plus juste d'un point de vue strictement mathématique, de qualifier l'ensemble des nombres rationnels de *non-discret* plutôt que de *continu*. Cependant, pour les mêmes raisons évoquées dans ce chapitre, nous parlerons de la dialectique « discret/continu » dans les lignes qui suivent.

De manière générale, la dialectique *continu/discret*, bien que traitée par certaines activités, n'est pas explicitement évoquée par les manuels belges francophones. De ce fait, il est peu probable que les enseignants la prennent en charge, et au-delà, la perçoivent comme un obstacle à la résolution de certaines situations et à la compréhension de la généralisation du système décimal de position, des nombres naturels aux nombres décimaux pour l'école primaire.

La collection *J'apprends les maths*, en considérant les nombres décimaux et les fractions comme des nombres qui permettent d'approcher d'aussi près que l'on veut les nombres rationnels et les nombres irrationnels, rencontre le caractère *continu* de l'ensemble des nombres rationnels.

Cette difficulté est particulièrement bien mise en évidence dans la collection *Corome*, dans le guide méthodologique. Cette construction du caractère *continu* de l'ensemble des nombres rationnels est mise en lien avec l'utilisation de la droite graduée.

4.3.3 Quelle(s) activité(s) d'introduction pour les nombres décimaux est (sont) proposée(s) dans le manuel ?

Pour plus de cohérence et de clarté, nous exposons nos analyses en reprenant les groupements de manuels constitués lors de l'analyse épistémologique (page 85).

▷*Des manuels qui s'appuient sur une approche numérique*

Comme nous l'avons indiqué ci-dessus (page 93), la collection *À la conquête des maths* propose pour la première activité d'apprentissage une fiche où les élèves doivent « relier [les fractions] aux nombres décimaux », puis « relier [...] chaque nombre décimal à sa situation sur la droite graduée ». Dans les notes méthodologiques de cette fiche, les auteurs constatent que pour réaliser les exercices proposés les élèves doivent être « en mesure de lire les nombres décimaux de la deuxième colonne afin de pouvoir les associer à la fraction équivalente ». Cependant aucune indication ou fiche ne permet d'éclairer la manière avec laquelle il faut amener les élèves à lire ces nombres. Les auteurs poursuivent en précisant qu'« il sera moins évident pour les élèves d'établir le rapport entre $\frac{3}{4}$ et 0,75 qu'entre $\frac{1}{10}$ et 0,1 ».

Comprenons que pour les auteurs de cette collection, implicitement, le lien entre les fractions et les nombres décimaux s'établit à partir du langage d'une part (0,2 se dit 2 dixièmes, tout comme la fraction $\frac{2}{10}$), et du repérage sur une droite graduée ($\frac{1}{2}$ est situé au même endroit que 0,5 sur la droite graduée). Le recours aux fractions décimales est également utilisé sans pour autant qu'il soit explicitement exprimé.

En ce qui concerne la collection *Tilt*, l'introduction des nombres décimaux s'effectue à partir du contexte de la monnaie. Nous en avons déjà exposé les raisons à la page 87. Cependant, les premiers exercices sur les nombres décimaux concernent le transcodage entre nombres lus et nombres écrits, fractions décimales et nombres décimaux.

▷*Des manuels qui s'appuient sur les mesures de grandeurs*

La collection *Faire des maths* propose dès la première page une situation où les nombres décimaux sont solutions de calculs de prix en euros. Les enfants doivent lire des étiquettes où le prix et le poids sont exprimés par un nombre à virgule. Il leur est ensuite demandé d'« écrire les poids dans l'abaque, puis avec une virgule ». C'est par ailleurs ce contexte de prix qui sera utilisé tout au long du manuel de 4^{e}. Des situations de mesures de longueur et de transformation de l'unité permettent aussi d'approfondir les connaissances des élèves. Par contre, nous n'avons pas trouvé d'activité de structuration des nombres décimaux entièrement située dans le cadre numérique et faisant appel au système décimal de position.

▷*Des manuels qui s'appuient sur une approche mixte et complémentaire*

La collection *Corome* propose d'emblée une situation numérique à partir de laquelle les élèves vont constater que les nombres qu'ils connaissent, les nombres naturels, ne suffisent plus à résoudre les situations d'addition ou de soustraction. Ensuite des situations font appel à la mesure de grandeurs ou à la multiplication de nombres à l'aide de la calculatrice. L'objectif de ces activités est le même : découvrir que les connaissances des élèves sur les nombres ne suffisent plus à résoudre de nouvelles situations. La connaissance de nouveaux nombres est nécessaire.

L'approche de la collection suisse est donc de situer les nombres décimaux dans le prolongement des nombres naturels et de découvrir les nombres décimaux à partir d'opérations. Le lien avec les fractions n'apparait que plus tard dans le cursus. Celui-ci est construit à partir de la droite numérique.

Pour la collection *J'apprends les maths*, comme nous l'avons déjà exposé ci-dessus, les nombres décimaux sont une autre écriture des nombres rationnels et permet d'approcher au mieux tout rationnel ou tout irrationnel. La première activité proposée est située dans le contexte numérique. Les élèves ont à résoudre des opérations d'addition, de soustraction et de division à l'aide de la calculatrice.

La situation de division (partager 22 billes entre trois enfants) est résolue en manipulant puis à la calculatrice. Selon le procédé, le résultat obtenu n'est pas le même. Dans la manipulation, chaque enfant reçoit 7 billes entières et il reste une bille. Il s'agit là de la division euclidienne avec reste. La calculatrice n'effectue pas cette *division partition* de la même manière. Elle n'expose aucun reste après le calcul. Elle fait apparaitre un nombre décimal.

Les activités qui suivent exploitent les situations de division pour *découvrir* d'autres nombres décimaux. Les liens avec les fractions sont alors mis en évidence pour expliquer la notation décimale des nombres décimaux.

L'exemple ci-contre montre comment la fraction décimale est décomposée. Cette écriture peut ensuite être comparée à l'écriture décimale affichée par la calculette : 4,6.

	$\frac{46}{10}$	...
Tes calculs	$4 + \frac{6}{10}$	...
Affichage à la calculette	4,6	

Le lien entre les dixièmes (puissance de 10) et les dixièmes (dénominateur de la fraction décimale) permet aux élèves de comprendre que le premier rang derrière la virgule correspond à une valeur numérique dix fois plus petite que l'unité.

De même , ce lien permet aux élèves de lire le nombre 4,6 comme « quatre virgule 6 dixièmes ».

▷*Des manuels qui ne définissent pas vraiment une approche structurée*

Les auteurs de la collection *Archi m'aide*, très tôt dans le premier livre, proposent de rencontrer les nombres décimaux dans des situations de mesure de longueurs. L'expression d'une même mesure dans différentes unités justifie l'utilisation de la virgule comme le montre la synthèse sous forme de texte lacunaire proposée en page 40 :

> « Dans la première colonne, on a changé d'...*unité*...
> Dans le premier tableau, on s'exprime en ...*mètre*...
> Dans le deuxième tableau, on s'exprime en ...*décamètre*... et on emploie la ...*virgule*... pour séparer les ...*décamètres*... et les ...*mètres*... »

Par la suite, les élèves sont invités à tracer des segments pour « comparer des mesures de longueurs exprimées par un nombre à virgule » (page 35). Clairement, cet exercice a pour objet de préparer à la comparaison de nombres décimaux. Cependant celui-ci ne rencontre que peu les difficultés que les élèves rencontreront lors de la comparaison de ces nombres, à savoir que ce n'est pas nécessairement le nombre qui possède la plus grande partie décimale qui est le plus grand (par exemple $0,3 > 0,25$). En effet, l'emploi des unités de mesures accessibles aux élèves pour une telle activité (centimètre et millimètre) limite le travail des élèves au rang des dixièmes et de ce fait ne constitue pas un réel *obstacle* au niveau du traitement des nombres décimaux pour les élèves.

Par contre, nous n'avons pas trouvé d'activités de comparaison de mesures de masse qui pourraient amener à des exercices du type $1,23\,kg \ldots 1,155\,kg$, où cet obstacle (le plus long n'est pas toujours le plus grand) pourrait être rencontré et surmonté, d'abord, par une réflexion sur le système décimal de mesure et par une manipulation à la balance par exemple, et ensuite par une traduction de ceci au niveau du système décimal de position.

Comme *Archi m'aide*, très tôt, la collection *Cracks en maths* propose une activité située dans le champ des grandeurs pour rencontrer les nombres décimaux. Celle-ci est située dans le cadre des mesures de capacité et fait appel à la compensation à l'unité. Citons en exemple (fiche N1.5) :

> « Chaque jour nous devons boire $1\,l$.
> Aide chaque enfant à savoir ce qu'il devra encore boire aujourd'hui.
> Marie : 0,33 l
> Sophie : 0,2 l »

Constatons d'emblée deux difficultés de l'activité : comment les élèves peuvent-ils compléter ces deux mesures pour obtenir un litre ? Comment les élèves peuvent-ils valider les réponses obtenues ?

Nous faisons l'hypothèse que pour savoir ce que Marie doit encore boire, les enfants doivent d'abord lire ce qu'elle a déjà bu sous la forme *0 litre et 33 centièmes de litre* ; puis ils doivent savoir que *33 centièmes de litre* c'est *33 centilitres* ; ensuite, ils doivent effectuer le calcul suivant : *100 centilitres* (pour un litre) − *33 centilitres* = *67 centilitres*; soit, en transformant à nouveau ce nombre pour les litres, *0 litre et 67 centièmes de litre* qui équivaut à *0,67 litre*.

Cette approche des nombres décimaux suppose évidemment que les élèves maitrisent assez bien le système décimal des mesures de capacité. Ajoutons que dans le guide méthodologique, il est fait appel à une remarque située bien après dans ce guide, selon laquelle il est important « de favoriser la lecture de 1,340 : une unité 340 millièmes et non pas un virgule trois cent quarante [...] ». Ainsi, pour réaliser la première activité sur les nombres décimaux, faut-il au préalable avoir exercé la lecture de ces nombres.

La deuxième activité est située dans le contexte de la monnaie avec des sommes d'argent en euros. Il est proposé aux élèves d'associer des prix exprimés soit à l'aide de nombres décimaux soit à l'aide de fractions décimales. L'objectif annoncé est de « reconnaître des fractions décimales sous forme de nombres à virgule (nombres décimaux) et vice-versa ». Notons qu'au préalable, aucune activité sur les fractions décimales n'a été proposée. Notons également qu'à nouveau c'est le langage qui fait le lien entre les fractions décimales et les nombres décimaux.

Remarquons qu'une partie de notre recherche consacrée à l'apprentissage des nombres décimaux a montré que l'appui sur la monnaie exprimée en euro pouvait avoir des effets négatifs sur les résultats des élèves. C'est particulièrement le cas pour des situations qui traitent des dixièmes ou des millièmes puisqu'aucune pièce ne représente ces puissances de 10.

Précisons également que dans cette collection, le fonctionnement du système décimal de position et le rôle de la virgule font l'objet d'une fiche de synthèse.

L'approche des nombres décimaux dans la collection *Tilt* est située plutôt dans un type d'enseignement que l'on pourrait qualifier de *traditionnel*. À savoir qu'aucune situation problème n'est proposée aux élèves. Sous le titre « Découvrir les nombres décimaux », le manuel propose une série d'exercices de lecture, de dictée, de sériation, de situation sur la droite graduée et de décomposition de nombres en fonction des puissances de 10.

4.3.4 Quels outils et quelles représentations proposés ?

Le tableau ci-dessous présente un relevé des outils et représentations proposés aux élèves et aux enseignants pour rencontrer les nombres décimaux. Remarquons que la collection *Faire des maths* n'en propose pas. Seul le travail sur des mesures de grandeurs est réalisé tout au long du manuel.

Notons aussi que seule la collection *Corome* propose d'utiliser le boulier. Celui-ci a pourtant l'avantage de matérialiser le système décimal de position et de montrer les passages de puissances de dix.

La calculatrice est proposée par les collections française et suisse. Son usage est bien souvent décrit dans le guide pour l'enseignant. Les auteurs précisent notamment que cet outil est utilisé dans le cadre particulier de l'exploration de phénomènes arithmétiques. Ainsi la collection *Corome* explique que cet outil trouve sa place « en tant qu'objet d'investigation scientifique, par exemple pour découvrir de nouveaux nombres ou de nouvelles relations ».

La plupart des manuels belges proposent l'usage de l'abaque pour représenter le système décimal de position, mais aussi pour effectuer des conversions d'unités de mesure. Les auteurs de la collection *J'apprends les maths* ne proposent cet outil qu'en fin de 5^e^ primaire. Ils justifient ce choix par le caractère technique des conversions réalisées à l'aide de cet outil. Ce qui est en adéquation avec le choix de ces auteurs de mettre en œuvre une pédagogie qui a pour objectif de rendre l'élève autonome et réfléchit. Les conversions sont donc basées sur des connaissances des rapports entre les unités et non sur des techniques de déplacement de chiffres, de virgule ou de zéro.

Tab. 4.4 – Outils et représentations proposés pour les nombres décimaux.

	Boulier	Abaque	Droite graduée	Blocs Diénes	Carré 10×10	Calculette	Chemin des nombres
À la conquête des maths		×	×	×	×		×
Archi m'aide		×	×				
Corome (Ch)	×		×			×	
Cracks en maths		×	×				
Faire des maths							
J'apprends les maths (F)					×	×	
Tilt		×	×		×		×

La plupart des collections propose l'usage de la droite graduée, il faut cependant mettre à jour les nuances dans cet usage. Ainsi, certains manuels (figure 4.5) considère la droite graduée comme une représentation du caractère continu de l'ensemble des nombres. Ainsi, des exercices proposent d'y situer des nombres avec la possibilité de la sous-graduer. Ou bien, des exercices proposent de graduer des *agrandissements* d'une partie de la droite.

Par contre, d'autres manuels (figure 4.6) considèrent la droite graduée comme une *ligne des nombres*. Les exercices proposent uniquement de compléter les graduations laissées vierges à l'aide de nombres appartenant à la même *catégories* de nombres.

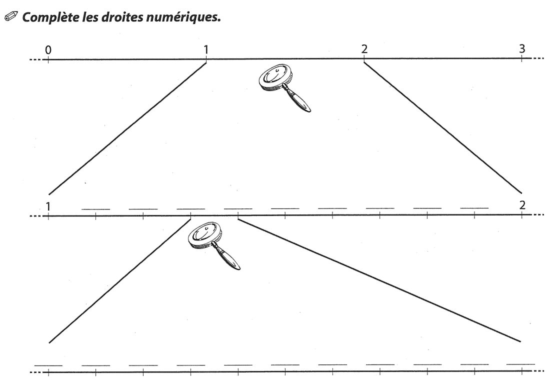


Fig. 4.5 À la conquête des maths, Nombres, 4^e^, Je m'évalue, fiche 24, extrait.

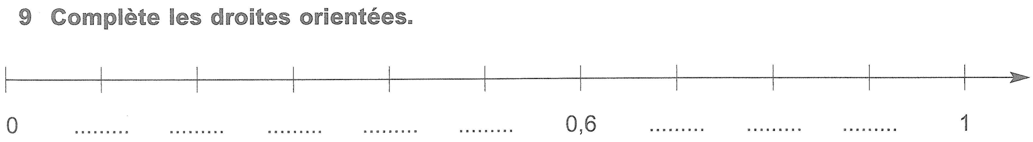


Fig. 4.6 Tilt, Les nombres, 4^e, page 63, extrait.

Remarques :

– Les blocs Diénes sont aussi appelés blocs multi-base. Il s'agit d'un matériel à manipuler constitué d'un cube de 1000 unités, de plaques de 100, de réglette de 10 et de cubes de 1. La figure ci-contre est extraite de la collection *J'apprends les maths*, page 111.

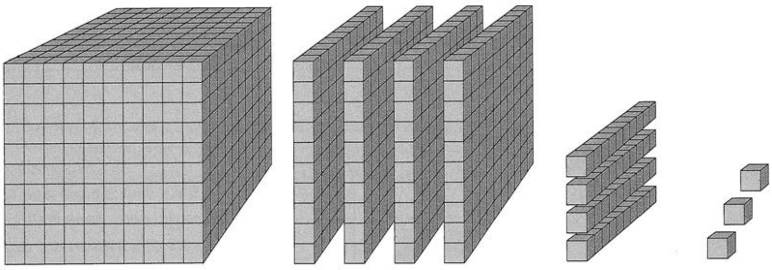


Fig. 4.7 Blocs de Diénes.

– Les carrés 10 × 10 peuvent être considérés comme des représentations planes d'une partie du matériel de Diénes.

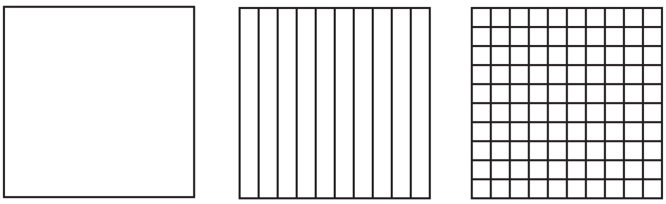


Fig. 4.8 Carre 10 × 10.

4.4 Conclusion

Au terme de notre analyse, il nous semble que la conclusion de N. Rouche & al. s'applique également dans le cas présent : « [...] un manuel peut être bon à certains égards et pas à d'autres ». Et pour ces « égards » sont la définition explicite de choix épistémologiques, la définition explicite des techniques de résolution des situations proposées, la liberté pédagogique laissée aux enseignants. En effet, si pour une majorité de manuels belges l'épistémologie sous-jacente n'est pas toujours définie explicitement ou si les activités ne sont pas toujours structurées autour d'une épistémologie définie, ces manuels ont l'avantage de proposer plusieurs approches des nombres décimaux. D'autres collections, comme la collection *Corome* par exemple, définissent une épistémologie des nombres décimaux mais proposent malgré tout plusieurs voies pour les rencontrer et les exercer.

Cette « hétérogénéité » épistémologique que l'on constate au niveau des manuels belges francophones peut avoir un impact bénéfique, dans le sens où chaque élève peut peut-être ainsi rencontrer une voie qui lui « parle » mieux qu'une autre. Nous pensons donc qu'il est utile, dans la perspective d'une école de la réussite pour tous, que les enseignants aient en tête les différentes approches possibles et qu'ils puissent ajuster leur activité enseignante en fonction des difficultés des élèves, de leurs capacités d'abstraction à un moment donné, de leurs capacités à traiter les contextes réalistes, ... Une des difficultés des enseignants restent à coup sûr de déterminer les apports et les carences des différentes approches des manuels et de déterminer ce qui est appropriés à ses élèves.

Notons que certains choix épistémologique sont guidés par les directives curriculaires, comme en France, en Suisse ou pour l'enseignement de la Région flamande. En ce qui concerne les manuels belges francophones, le ou les fils conducteurs sont parfois moins visibles. Cela est peut-être aussi dû au fait que ces manuels ont à prendre en compte à la fois les Socles de compétences et les programmes des différents réseaux qui composent le paysage scolaire en Communauté française de Belgique. Certains choix sont aussi guidés par la composition même des équipes de rédaction. Les manuels français et suisses sont généralement rédigés par des équipes pluridisciplinaires qui regroupent des mathématiciens, des didacticiens des mathématiques, des chercheurs en sciences cognitives, des enseignants.

De manière générale, nous avons distingué quatre catégories de manuels, selon les approches choisies pour aborder les nombres décimaux : : les manuels qui se basent essentiellement sur une approche numérique, ceux qui s'appuient essentiellement sur les mesures de grandeurs, ceux qui s'appuient sur ces deux domaines complémentaires, ceux qui ne déterminent pas vraiment de choix mais juxtaposent des activités.

En conclusion, il serait difficile de conseiller l'un ou l'autre manuel. Et fort heureusement tel n'était pas l'objectif de notre travail d'analyse. Il revient plutôt aux enseignants de faire des choix raisonnés. Certaines collections proposent un chemin balisé, clairement défini et argumenté dans un document destiné au maitre. Ce chemin balisé a l'avantage de permettre de mieux comprendre les activités en cours dans la perspective d'un apprentissage final et souvent de mieux comprendre les difficultés des élèves. Il est cependant contraignant pour l'enseignant. D'autres proposent plutôt un ensemble d'activités, souvent situées de manière insuffisante dans une progression logique des apprentissages, mais qui laissent plus de liberté aux enseignants et peut-être plus de possibilités de s'adapter aux besoins spécifiques des élèves. Ainsi, quel que soit le choix, pourvu qu'il soit guidé par la perspective d'une école de la réussite pour tous.

4.5 Bibliographie

Braun, A. (2010). Introduction : les manuels... du grain à moudre pour la recherche en éducation. *Éducation et Formation.* e292. Janvier 2010. 7-11.

Brissiaud, R., Clerc, P., Lelièvre, F., Ouzoulias, A. (2005). *J'apprends les maths. CM1.* Paris : Retz.

Brissiaud, R., Clerc, P., Lelièvre, F., Ouzoulias, A. (2005). *J'apprends les maths. CM1. Fichiers d'activités.* Paris : Retz.

Brissiaud, R., Clerc, P., Lelièvre, F., Ouzoulias, A. (2005). *J'apprends les maths. CM1. Livre du maître.* Paris : Retz.

Chastellain, M. & Jaquet, F. (2001). *Mathématiques. 5e année. Fichier de l'élève.* Neuchâtel : Corome.

Conseil de l'Éducation et de la formation (2004). *Problématique de l'usage des manuels scolaires.* Avis n° 87. Conseil du 26.03.2004.

Depiere, M. & al. (2008). *Tilt. Les nombres.* 2e édition. Wavre : Van In.

Echterbille, G. & Marchal, J. (2006). *Archi m'aide. Guide méthodologique.* 1re édition, 2e réimpression. Wavre : Van In.

Echterbille, G. & Marchal, J. (2006). *Archi m'aide. Livret A.* 1re édition, 4e réimpression. Wavre : Van In.

Echterbille, G. & Marchal, J. (2006). *Archi m'aide. Livret B.* 1re édition, 3e réimpression. Wavre : Van In.

Fuson, K., C. (1990a). Conceptual structures for multiunit numbers : implications for learning and teaching multidigit addition, subtraction, and place value. *Cognition and instruction.* 7(4). 343-403.

Fuson, K., C. (1990b). Issues in place-value and multidigit addition and subtraction learning and teaching. *Journal for research in mathematics education.* 21(4). 273-280.

Fuson, K., C. & Briars, D., J. (1990). Using a base-ten blocks learning/teaching approach for first- ans second-grade place-value and multidigit addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education.* 21(3). 180-206.

Fuson, K., C.,Wearne, D., Hiebert, J., C., Murray, H., G., Human, P., G., Olivier, A., I., & al. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education.* 28(2). 130-162.

Fuson, K., C. (1998). Pedagogical, mathematical, and real-world conceptual-support nets : a model for building children's multidigit domain knowledge. *Mathematical cognition.* 4(2). 147-186.

Gerard, M.-F. (2010). Le manuel scolaire, un outil efficace mais décrié. *Éducation et formation.* `http://ute3.umh.ac.be/revues/`. e292. Janvier 2010. 13-24.

Gilbert, Th., Jadin, B., Rouche, N. (2006). Qu'est-ce qu'un bon manuel de mathématique ? *Mathématique et Pédagogie*. Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française. 158. 13-35.

Heynen, J.-F., de Ribaucourt, B., Castermant, R., (sous la direction de M. Roiseux). (2006). *À la conquête des maths. Nombres. 8-10 ans*. Ransart : Gai Savoir.

Houssaye, J. (1993). *La pédagogie : une encyclopédie pour aujourd'hui*. Paris : ESF.

Maquoi, J., Müller, G. N., Wittman, E. Ch. (2004). *Faire des maths en quatrième année. Une autre manière d'apprendre les mathématiques*. Namur : Érasme.

Ministère de la Communauté française de Belgique. (1999). *Socles de compétences (Enseignement fondamental et premier degré de l'enseignement secondaire)*. Bruxelles : Administration Générale de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique.

Ministère de la Communauté française de Belgique. (2005). *Contrat pour l'école. Dix priorités pour nos enfants*. Bruxelles.

Ministère de la Communauté française de Belgique. (2010). *Le marché du livre de langue française en Belgique*. Données 2008. Étude réalisée pour le service « Promotion des Lettres » de la Direction générale de la Culture. Bruxelles.

Schubring, G. (1984). L'apport des recherches en histoire de l'enseignement des mathématiques à la didactique des mathématiques. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique - IMAG*. Année 1984-1985. 60/67. 3-25.

Van Lint, S., (sous la direction de F.-M. Gérard et de X. Roegiers). (2001). *Cracks en maths 4. Fichier d'apprentissages*. Bruxelles : De Boeck.

Van Lint, S., (sous la direction de F.-M. Gérard et de X. Roegiers). (2001). *Cracks en maths 4. Guide méthodologique et corrigé*. Bruxelles : De Boeck.

Van Lint, S., (sous la direction de F.-M. Gérard et de X. Roegiers). (2002). *Cracks en maths 3/4. Manuel de fixation*. Bruxelles : De Boeck.

Chapitre 5

Une approche didactique des nombres décimaux

Ph. Skilbecq

La conscience se développe comme un tout, modifiant à chaque nouvelle étape toute sa structure interne et la liaison des parties, et non comme la somme des modifications partielles intervenant dans le développement de chaque fonction.

L. Vygotski, Pensée et langage.

L'intérêt didactique pour l'étude de l'enseignement des nombres n'est pas nouveau. Celui plus particulier pour les nombres décimaux non plus. Les constats que nous effectuons aujourd'hui sur les difficultés de leur apprentissage étaient, pour une part, déjà réalisés par des didacticiens à la fin des années septante. À l'époque, des recherches (notamment Brousseau, 1980 ; Douady, 1980) avaient mis en évidence l'influence des connaissances des élèves à propos des nombres naturels, entre autres, et plus particulièrement des « traitements mécaniques » de ces nombres sur l'apprentissage des nombres décimaux.

Près de 30 ans plus tard, D. Butlen (2007) interroge encore l'intérêt d'une approche réfléchie des nombres décimaux, car tout compte fait quelques séances de « drill » ne suffiraient-elles pas à permettre aux élèves de *comparer, ordonner*... des nombres décimaux et *opérer* sur ces nombres ? Les conclusions de son travail montrent combien le travail sur les techniques opératoires est tout aussi important que la conceptualisation :

> « [...] les connaissances numériques des élèves conditionnent la construction de techniques opératoires standard écrites (multiplication) et la mobilisation de procédures de calcul mental adaptées (décomposition additive et multiplicatives des entiers). »

Ainsi, si des *trucs* ont pu être mis en place ou construits par les élèves pour comprendre les nombres naturels et opérer sur eux, pour les nombres décimaux, cela se complique.

Une des raisons est que le nombre de situations différentes augmente, que le nombre de « trucs » à construire augmente et que la généralisation de ces *trucs* n'est pas toujours possible. Énonçons quelques soucis potentiels.

Comment comprendre et résoudre des situations où fractions et nombres décimaux (et parfois pourcentages) sont à mettre en correspondance si l'élève n'a pas compris le fonctionnement du système décimal de position, s'il ne sait ce qu'est une fraction décimale ?
Ou encore, comment aborder les problèmes de représentation sur une droite graduée ou les problèmes de mesure si l'obstacle que constitue le passage du *discret* au *continu* n'a pas été pris en charge ?
Ou encore, comment gérer les situations où les nombres décimaux et les mesures sont liés, si les élèves investissent toute leur attention dans la situation de mesure sans tenir compte du traitement des nombres ?
Ou encore, comment gérer la problématique des « zéros » qui « comptent ou ne comptent pas » selon « qu'ils sont devant ou derrière » ?
Pour terminer, nous pourrions encore ajouter les soucis liés à l'oralisation des nombres décimaux, ainsi que son impact sur la construction de connaissances relatives à ces nombres.

5.1 Des approches didactiques des nombres décimaux

L'analyse des manuels scolaires (chapitre 4) a montré combien les approches des nombres décimaux pouvaient être variées. Nous en avons déterminé quatre, à partir des sept manuels à notre disposition. Précisons à nouveau que ces regroupements indiquent des tendances de travail et non des catégories absolues.
- les manuels qui se basent essentiellement sur une approche numérique,
- ceux qui s'appuient essentiellement sur les mesures de grandeurs,
- ceux qui s'appuient sur ces deux domaines complémentaires,
- ceux qui ne déterminent pas vraiment de choix mais juxtaposent des activités.

5.1.1 Une approche numérique

L'analyse des programmes (chapitre 3) a montré que vers 1970 les grandeurs et la géométrie ont été des domaines moins sollicités dans l'approche des nombres. Les structures numériques ont pris une place importante dans l'édifice mathématique et, par référence, dans l'enseignement des mathématiques. Aujourd'hui encore, des manuels proposent des parcours basés essentiellement sur une approche numérique. Les liens avec les grandeurs sont ténus.

Les manuels qui proposent des dispositifs d'apprentissage des nombres décimaux essentiellement basés sur le champ numérique procèdent parfois malgré tout avec des approches différentes. Certains s'intéressent d'abord aux fractions ordinaires, puis aux fractions décimales. Les nombres décimaux et l'équivalence entre une fraction et un nombre décimal sont ensuite introduits par le biais de la droite numérique et/ou du transcodage écrit/oral ainsi qu'à partir de la conception *fraction division* : $\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0{,}4$.

D'autres manuels n'insistent pas immédiatement sur les liens entre les fractions et les nombres décimaux. Ces derniers naissent de l'extension du système décimal de position. Par la suite, des fractions et des nombres décimaux étant situés sur une droite graduée, des égalités vont apparaitre à partir de correspondances de placement. Reconnaissons que ces égalités sont alors basées essentiellement sur des propriétés topologiques associées, parfois, à des mesures de longueurs. Les élèves expriment souvent cela comme suit : « $\frac{1}{2}$ est égal à 0,5 parce qu'ils sont tous les deux au même endroit sur la droite, ils sont tous les deux au milieu ». Comprenons que $\frac{1}{2}$ et 0,5 sont situés au milieu de l'intervalle entre 0 et 1, ils sont situés tous les deux à la même distance de l'origine (zéro), les deux intervalles qu'ils délimitent avec le zéro sont identiques. Ainsi, cette égalité se fonde sur une propriété liée aux grandeurs (en l'occurence des longueurs) et non fondamentalement sur une propriété liée aux nombres eux-mêmes. Pour parvenir à une construction de l'égalité au niveau numérique, une des pistes est d'utiliser ces nombres dans des opérations et de constater que l'effet opératoire de l'un est identique à l'effet de l'autre. En d'autres termes que $12 \times \frac{1}{2} = 12 \times 0{,}5$, ou que $10 \times \frac{1}{2} = 10 \times 0{,}5$[1].

5.1.2 Une approche par les mesures

Pour N. Rouche (1992), l'appui sur les mesures de grandeurs est fondamental :

> « Les mesures décimales nous conduirons aux fractions décimales et aux nombres décimaux à virgule, et aux contextes dans lesquels on les dote d'un ordre, d'une somme et d'un produit. »

Cette approche est bien évidemment importante et ne peut être absente d'un dispositif d'enseignement des nombres décimaux. Elle permet notamment de mettre en évidence le découpage en sous-unités décimales. Elle permet également à certains élèves de se représenter les nombres, d'opérer sur ceux-ci, de comprendre que 1,5 est plus grand que 1,36, d'aborder la densité.

Elle possède cependant ses limites, celles de la nature elle-même de l'expérience quotidienne : avez-vous déjà essayé de mesurer en dixième de millimètre avec une latte ? Le mètre (m) est-il vraiment une unité de mesure significative pour les élèves d'école primaire ?.... Et si l'on en reste à cette expérience où les nombres sont ancrés dans les mesures physiques, comment l'enfant pourra-t-il prendre en compte toutes ces grandeurs que l'on ne peut physiquement pas déterminer, mais seulement approcher ? Comment pourra-t-il, entre autres, accéder aux nombres irrationnels ?

Ajoutons que cette seule approche des nombres décimaux peut avoir pour conséquence de renforcer la représentation des nombres décimaux comme étant l'adjonction de deux nombres entiers séparés par une virgule[2] : $15{,}65\,m = 15\,m$ et $65\,cm$. Comme l'indique éga-

---

[1] Pour une part, ces calculs peuvent être effectués à la machine, en acceptant que celle-ci donne le bon résultat. Ajoutons que mettre en évidence l'égalité de deux objets à partir de leur effet opératoire n'est pas valide dans tous les cas en mathématique. C'est par exemple le cas dans le calcul matriciel, cependant bien éloigné des préoccupations de l'école élémentaire.

[2] Nous noterons cette conception de la sorte dans la suite de ce chapitre : D=N,N.

lement M.-J. Perrin-Glorian (1992), « l'enseignant peut renforcer cet obstacle (D=N,N) en accentuant dans la présentation des décimaux leur similitude de traitement avec les entiers - ce qui se passe pour les représentations à l'école élémentaire qui s'appuient sur les changements d'unités ».

Ce même obstacle apparaît également avec notre monnaie, l'euro. En effet, cette conception $D = N,N$ est renforcée par la présence des pièces représentant les centimes d'euro. Payer 3,45 €, c'est donner 3 €et 45 centimes d'€. De plus, comme l'ont montré certaines études, notamment celle menée au cours de notre recherche, pour certaines situations, l'utilisation de l'euro n'aide pas. Pensons notamment aux opérations sur des nombres ne comportant que des dixièmes ou des millièmes ; ces rangs ne sont pas concrètement représentés par la monnaie.

5.1.3 Une complémentarité des contextes

D'un point de vue épistémologique, on ne peut exclure l'un ou l'autre champ des mathématiques pour aborder les nombres décimaux. Les nombres décimaux sont de fait inscrits dans le champ des grandeurs (et de la géométrie) et dans celui des nombres. De même, N. Rouche a rappelé au chapitre 2 (page 20) comment la notion de nombre ne peut être réduite à la notion de système de numération décimale.

Dans la suite de ce chapitre, nous montrerons que d'un point de vue cognitif, ces deux domaines sont tout aussi complémentaires. L'élève pouvant s'appuyer sur un domaine pour combler les difficultés liées à la gestion d'une situation présentée dans l'autre.

5.2 Notre approche pédagogique et didactique

> *La diversité des cheminements cognitifs que nous avons constatée nous conduit à penser que l'enseignement doit proposer un environnement mathématique suffisamment riche, organisé autour de notions à acquérir durant l'année. Il s'agit avant tout de permettre aux élèves d'accumuler des expériences variées, de revenir dessus, d'échanger avec leurs pairs et débattre sur des savoirs.*
> *[. . .] la mise en place de cet environnement mathématique ne se fait que si des conditions propres aux pratiques professionnelles des enseignants sont remplies. En effet, la prise en compte de la diversité des cheminements cognitifs des élèves s'accompagne d'une diversification de pratiques pour le professeur.*
>
> D. Butlen, Le calcul mental, entre sens et technique

À la section précédente nous avons essayé de montrer que la notion de nombre, et de nombre décimal en particulier, ne peut naitre exclusivement de la mesure de grandeurs, ni exclusivement de la notion de système décimal de position, soit du contexte numérique.

Les travaux de nombreux chercheurs en didactique des mathématiques, comme D. Butlen ci-dessus, mais aussi en sciences cognitives, ont mis en évidence le rôle essentiel des *représentations* et des *connaissances antérieures* des élèves dans l'apprentissage. Ainsi, notre approche s'appuie essentiellement sur l'approche piagétienne de l'apprentissage d'une part, selon laquelle l'apprentissage s'effectue grâce à l'adaptation de l'apprenant à une situation nouvelle par équilibration, et d'autre part sur l'approche de L. Vygotski (1997) selon laquelle toute modification d'un élément de la structure va apporter des modifications sur cette structure même et sur d'autres éléments de la structure[3].

Pour rencontrer les nombres décimaux, nous avons donc choisi de proposer aux élèves une situation qui leur pose problème, une situation qui crée un *déséquilibre* au niveau de leurs savoirs, conceptions, croyances... Cette situation « bouscule » les savoirs des élèves, elle les met sciemment en difficulté. Comme l'indique G. Brousseau (1980), « ces difficultés sont celles que porte en elle la conception antérieure de l'élève et la situation-problème choisie les a seulement révélées ». Un des objectifs de la situation est ainsi de mettre à jour les difficultés des élèves, elles-mêmes résultats des conceptions antérieures, entre autres.

Le travail effectué par les élèves, avec le soutien et la guidance de l'enseignant a pour objectif de provoquer des modifications structurelles chez les élèves par le biais d'adaptations induites par la résolution de la situation elle-même. Les difficultés rencontrées par les élèves sont alors constitutives de nouveaux savoirs ou de nouveaux savoir-faire.

Ceci est particulièrement vrai pour l'apprentissage des nombres décimaux. L'analyse des réponses des élèves aux testings réalisés dans les classes primaires indique clairement l'influence des conceptions sur les nombres naturels dans le traitement des nombres décimaux.

5.2.1 Les fondements de la séquence proposée

Notre objectif est de proposer une situation qui va permettre aux apprenants d'éprouver leurs connaissances antérieures pour construire de nouveaux savoirs par *équilibration* (Piaget) ou *adaptation* (Houdé, 2006). Ainsi comme l'indique G. Brousseau (1980) « la nouvelle conception [...] est une rééquilibration des systèmes de réponse de l'élève, soit qu'elle lève les contradictions portées par les anciennes conceptions, soit qu'elle apporte des simplifications substantielles ». Cependant, comme l'énonce M.-J. Perrin-Glorian (1992), ce phénomène d'équilibration possède ses propres principes économiques : « quand il rencontre une connaissance nouvelle, l'élève dispose déjà de représentations, de modèles dans lesquels il va essayer d'intégrer la connaissance nouvelle de la façon la moins coûteuse possible [...] en remettant en question le moins de choses possible ». C'est ce principe d'économie qui, parfois, conduit à des équilibrations trop peu ambitieuses, à la constitution de nouveaux trucs, plutôt qu'à la réorganisation par généralisation. Ajoutons, comme l'énonce O. Houdé, l'importance de l'inhibition. Par exemple,
- accepter que des connaissances antérieures soient inappropriées à la situation et les inhiber,

ou
- lors d'un traitement d'une mesure se centrer sur la partie numérique et inhiber pour un temps les connaissances sur les unités de mesure

sont des procédures difficiles à mettre en œuvre pour les élèves.

[3] Ces considérations peuvent être rapprochées de celles de B.-M. Barth (1987) et de G. Vergnaud (1990) concernant la conceptualisation.

Dans *Pensée et langage*, L. Vygotski (1997) explique la notion de *zone proximale de développement*. Cette expression pourrait laisser croire que l'enseignement et l'apprentissage doivent avancer par petits pas. Chaque pas devant être situé dans cette *zone proximale de développement* pour l'élève. Cependant, « Vygotski ne dit rien de tel, mais il n'est pas mauvais de se prémunir contre ce type d'interprétation restrictive. La recherche en didactique montre en effet qu'il faut parfois déstabiliser fortement des conceptions et des manières de faire déjà acquises. Les petits pas le permettent rarement. Il faut donc parfois mettre l'élève dans des situations qui sont relativement éloignées de ses compétences et de ses conceptions, de manière à le déstabiliser et à créer les conditions d'une prise de conscience, nécessaire à sa transformation et à son évolution » (Vergnaud, 2000).

Nous avons ainsi choisi de proposer aux élèves une situation problème qui va à la fois mettre en concurrence leurs représentations antérieures et les connaissances à acquérir ainsi que leur permettre de réorganiser leur savoir dans une perspective à plus long terme. Car, comme l'indique R. Douady (1980), un concept se forme sur une longue période (plusieurs années pour le concept de décimal). Il ne s'élabore pas isolément mais en relation avec d'autres concepts ».

5.2.2 Une vision à courte et moyenne distance

À de nombreuses reprises, (notamment dans Bkouche & al., 1991), N. Rouche situe l'activité mathématique comme un voyage au sein d'un paysage, en l'occurrence un paysage mathématique. Il précise ensuite : « L'élève qui ne comprend pas pourquoi il calcule est comme un myope profond soudain transporté dans un paysage mathématique ». Poursuivant avec la métaphore du voyage, il explique que celui-ci s'effectue bien souvent à partir d'une analyse du parcours, suivie de l'observation à moyenne et courte distance du trajet. Ainsi, successivement, regarde-t-on à ses pieds pour ne pas trébucher et devant ses pieds en relevant la tête pour mieux se rendre compte si l'on garde le cap.

Cependant, toujours selon N. Rouche[4], il semble que régulièrement en classe cette vision à moyenne distance soit absente. « [L'élève] ne voit pas plus loin que ses souliers et n'a le projet d'aller nulle part. On lui demande d'avancer après lui avoir expliqué comment poser les pieds selon les règles. Quoi d'étonnant à ce que, souvent, il refuse d'avancer, et s'il avance, trébuche ».

Un des buts essentiels de l'activité que nous proposons est de placer l'apprentissage des nombres décimaux dans cette perspective de *voyage*. Plus particulièrement, il s'agit de fixer le but du voyage, ou une partie en tout cas ; de susciter des pistes pour l'effectuer ; d'en situer les principaux obstacles. Viendra ensuite la phase de mise en marche, avec ces « regards à courte et moyenne distance ».

Nous proposons ainsi aux élèves une situation-problème pour laquelle les nombres naturels ne suffisent pas. Pour pouvoir la résoudre, il est nécessaire aux élèves d'en utiliser d'autres : les nombres décimaux, et bien au-delà les nombres réels.

Et de citer à nouveau N. Rouche : « S'il est vrai que toute théorie répond à une question,

[4] Interview de Nicolas Rouche, 2006, archives CREM.

ne nous arrive-t-il pas trop souvent d'enseigner les réponses (c'est-à-dire les théories) avant les questions, avant que les élèves aient suffisamment éprouvé la nécessité de la théorie ».

5.2.3 Des représentations pour les décimaux

> *Il n'y a en effet pas d'arbres à 3,2 branches, ni de tableaux de 1,2 colonnes, ni de collections d'objets qu'on peut aligner 3,78 fois. La multiplication ne peut plus être remplacée par des additions itérées !*
>
> Office romand des éditions et du matériel scolaire.

S'il est aisé de représenter tout naturel à partir de différents registres (droite, jetons, quadrillage. . .), il n'en est pas ainsi pour les nombres décimaux. En effet, comme l'explique la citation ci-dessus, il n'est pas aisé de représenter les nombres décimaux à l'aide de grandeurs discrètes.

A. Munyazikwiye (1995) constate par ailleurs que si la prise en compte des différents registres de représentation des nombres est fondamentale dans leur conceptualisation, le transcodage « système d'écriture décimale » – « registre de représentation géométrique » n'est pas pris en compte par l'enseignement. Ceci est peut-être le signe d'une réelle difficulté de ce type de *transcodage*. De même, M.-J. Perrin-Glorian (1992) indique que la difficulté de placer des nombres décimaux sur un axe gradué « montre que l'enseignement n'assure pas suffisamment la relation entre la construction des nombres et la mesure des longueurs ».

R. Adjiage et F. Pluvinage (2000) ont montré l'intérêt d'un questionnement sur la constitution d'un registre sémiotique adapté à l'apprentissage des nombres rationnels. L'objet était notamment de s'appuyer sur un registre de type géométrique. Les travaux qu'ils ont menés montrent que la représentation à une dimension[5] (ligne des nombres horizontale ou verticale) possède de nombreux avantages :
- une représentation *1D* est ouverte au-delà de l'unité, une représentation *2D* est refermée sur l'unité que représente la forme géométrique ;
- une représentation en *1D* positionne directement les rationnels parmi les entiers ;
- une représentation en *1D* est directement ordonnée, ce que n'est pas la représentation en *2D*.

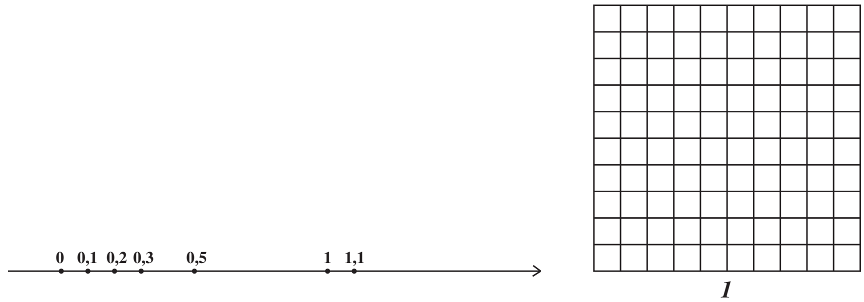


Fig. 5.1 Caractéristiques des représentations 1D et 2D.

[5] Nous utiliserons l'abréviation *1D* pour une dimension et *2D* pour deux dimensions dans la suite de ce chapitre.

De manière générale, la droite graduée est bien sûr à considérer comme un registre sémiotique important. Elle permet de tisser des liens entre les différentes écritures des nombres rationnels. Mais elle permet aussi de tisser des liens entre les activités *physiques* de mesure et les activités *mathématiques* de traitement numérique. Cependant, différents obstacles doivent être pris en compte par les enseignants. D'abord la problématique de l'*origine*. Comprendre qu'une droite graduée possède une origine, 0, qui donne du sens à toutes les autres graduations[6]. Ensuite, la problématique de l'*inclusion*. Comprendre que le nombre 2, situé par un point ou un trait sur la droite, représente la longueur comprise entre l'origine et ce point ou ce trait ; et que la longueur 1 est incluse dans la longueur 2 ; de même que la longueur 1 est incluse trois fois dans la longueur 3. Enfin, la problématique de la *ponctualisation*. Reconnaitre que le 3, situé par un point ou un trait sur la droite graduée, représente à la fois la longueur 3 depuis l'origine, mais aussi situe le nombre 3 dans une suite de nombres. 3 peut ainsi être considéré comme un repère sur une droite, de la même manière que l'on pourrait se situer en x ou en y.

D'autres travaux montrent combien la prise en compte de représentations en deux dimensions, et notamment le travail sur les *aires* est fondamental, notamment R. Douady (1981) et M.-J. Perrin-Glorian (1992). Comme l'indique d'ailleurs cette dernière, « la notion d'aire elle-même nous parait autant un enjeu d'enseignement que celui de la mesure ».

Les activités que nous avons proposées utilisent des représentations des nombres décimaux en *1D* et en *2D*. Au cours des activités, un de nos objectifs a été de prendre en compte ces changements de registres inévitables et nécessaires. Nous avons été attentifs aux difficultés des élèves par rapport à l'interprétation et l'utilisation de ces registres. Amener les élèves à être attentifs au *langage* utilisé pour désigner les nombres, à représenter les nombres à partir de différents registres (verbal, géométrique, numérique), à prendre conscience des liens existant entre ces registres ont fait l'objet d'une attention particulière dans les activités.

5.2.4 La gestion des erreurs des élèves

> *Ce ne sont pas les matières qu'on leur enseigne que les élèves ne comprennent pas, mais les leçons qu'on leur donne.*
>
> J. Piaget, cité par H. Trochmé-Fabre.

Selon H. Trochmé-Fabre (1999), dans la même perspective que d'autres auteurs que nous avons cités ci-dessus, « l'apprentissage peut être vu sous cet angle : apprendre, c'est savoir inhiber, savoir renoncer à telle ou telle position, démarche ou solution. D'où une nouvelle conception de l'erreur, comprise comme la conséquence d'une incapacité de renoncer à une solution déjà trouvée, une démarche déjà suivie, une possibilité déjà utilisée ». En didactique plus particulièrement, ce qui provoque l'erreur, ou cette résistance de l'individu devant une possible mise en cause de « vérités » antérieures, prend parfois la forme de ce qu'on appelle un « obstacle épistémologique ». Pour G. Brousseau (1998), qui a repris l'idée d'obstacle épistémologique chez G. Bachelard (1992), « un obstacle se manifeste par

[6] Ajoutons que pour pouvoir graduer la droite, il est également nécessaire de situer 1, ou tout autre nombre.

des erreurs, mais ces erreurs ne sont pas dues au hasard. Fugaces, erratiques, elles sont reproductibles, persistantes. De plus, ces erreurs, chez un même sujet, sont liées entre elles par une source commune : une manière de connaitre, une conception caractéristique, cohérente sinon correcte, une « connaissance » ancienne et qui a réussi dans tout un domaine d'actions. »

Par exemple, lorsque les élèves rencontrent la division, ils conçoivent que le résultat obtenu soit plus petit que le dividende :

> $28 : 4 = 7$
> et 7 est bien plus petit que 28.

Ceci constitue en quelque sorte une forme de validation de la réponse. Dans la suite de leur parcours, les élèves rencontrent des divisions à partir de fractions ou de nombres décimaux. Et dans certains cas, cette assertion selon laquelle la réponse est plus petite que le dividende ne correspond plus à la situation, $28 : 0{,}7 = 40$! Apparait alors un conflit entre un résultat et une conception antérieure, les conceptions de nombre et de division sont remises en question. Les élèves font face à un obstacle épistémologique qu'ils ne franchiront pas tous au même moment ni avec la même aisance.

Ainsi, comme l'indique J.-P. Astolfi (1997), l'erreur peut être considérée « comme le signal de ce à quoi s'affronte la pensée de l'élève aux prises avec la résolution d'un problème. Il arrive même, dans cette perspective, que ce qu'on appelle erreur ne soit qu'apparence et cache en réalité un progrès en cours d'obtention ». Pour l'enseignant, distinguer les difficultés « banales » (étourderie, inattention, fatigue...), des erreurs ou difficultés dues aux obstacles didactiques de celles proprement dues aux obstacles épistémologiques est une activité essentielle de l'acte d'enseignement. De l'analyse du discours et des actes des élèves, de la distinction des erreurs, dépend en grande partie les modalités de l'intervention didactique (discours et actes) que l'enseignant va renvoyer aux élèves. L'attitude de l'enseignant est donc d'accepter l'erreur et de s'en servir pour construire un nouveau savoir ou un savoir adapté. Mais, comme l'indiquent J. Ravenstein et G. Sensevy (1993), l'enseignant « n'a en fait pas les moyens de s'intéresser à la source de l'erreur » sans une analyse *a priori* suffisamment complète des apprentissages à réaliser, sans une connaissance des différents types de démarches et des opérations intellectuelles.

Les activités que nous avons préparées n'ont pas pour objectif d'éviter aux élèves de se tromper. Il serait par ailleurs difficile qu'il en soit ainsi puisque ces activités ont pour objet de confronter les élèves à de nouveaux nombres dans un processus de généralisation de ce concept. *De facto*, les élèves vont être confrontés à des difficultés. Nous avons choisi de ne pas faire abstraction de ces difficultés, mais plutôt de proposer une situation qui va les révéler mais aussi permettre aux élèves de les surmonter, aux enseignants de les prendre en charge.

Dans ces activités, le rôle de l'enseignant est certainement très important : il s'agit à tout moment d'écouter les discours des élèves, de regarder leurs actions et interactions, d'analyser celles-ci notamment à l'aune des analyses *a priori* pour tenter de les interpréter et de les comprendre. Un des objectifs de cette constante attention de la part de l'enseignant est de mieux relancer l'activité des élèves par de nouveaux questionnements par exemple, par le rappel à des activités précédentes, par la modification de certains paramètres de l'activité, par l'explication de la consigne... dans la perspective de la construction d'un nouveau savoir, ou plutôt en l'occurrence, de la modification d'un savoir antérieur. Un autre est aussi d'aider certains élèves qui semblent plus en difficulté durant ces moments d'apprentissage.

5.2.5 L'approche instrumentale

Dans les activités que nous proposons, les élèves sont confrontés à l'utilisation d'outils. Le choix de ceux-ci est guidé par des besoins d'apprentissage. Leur rôle est de servir de *médiateurs* entre les savoirs à acquérir et les élèves. Il s'agit d'une part du logiciel Apprenti Géomètre[7], pour les activités relatives aux aires de carrés, et d'autre part de la calculette pour les activités relatives à l'approche des nombres décimaux.

Ces deux outils technologiques peuvent sembler appartenir au quotidien des élèves. D'aucuns aujourd'hui annoncent même que les enfants de ce siècle jonglent aisément avec ces outils technologiques, les rencontrant dès leur plus jeune âge. Mais c'est sans doute aller trop vite en besogne que de considérer l'usage de ces outils comme aussi évident, voire naturel, pour les élèves. En effet, il est nécessaire de distinguer différents éléments dans l'utilisation des outils à visée didactique. Comme l'annoncent P. Rabardel (1995) et, par la suite et en des termes différents, T. Assude & J.-M. Gélis (2002) *différentes dialectiques* sont en jeu dans un phénomène complexe que cet auteur nomme la *genèse instrumentale*.

Durant cette *genèse instrumentale*, l'utilisateur s'approprie l'outil qui lui est donné à utiliser. Ce phénomène s'articule essentiellement autour de deux types de processus : l'un concerne l'appropriation de l'outil et les modifications des connaissances et des schèmes d'action de l'utilisateur (*l'instrumentation*), l'autre concerne également l'appropriation de l'outil mais à partir des modifications de ses caractéristiques ou par le détournement de son objet par l'utilisateur pour que cet outil corresponde à ses besoins (*l'instrumentalisation*).

Pratiquement, avec `Apprenti Géomètre` par exemple, il est nécessaire que les élèves connaissent comment fonctionne cet outil bien sûr, qu'ils en connaissent les fonctionnalités, leur utilisation... Mais il est tout aussi utile qu'ils s'approprient ces fonctionnalités dans la perspective de l'action sur un objet géométrique particulier dans le cadre de la réalisation d'une tâche plus complexe. Et *in fine*, qu'ils puissent traduire toute action avec `Apprenti Géomètre`, en connaissances géométriques. Il ne suffit pas d'agir, il faut encore comprendre l'action et l'interpréter dans un cadre plus général. Ainsi, pour la fonctionnalité « Découper » qui est nécessaire pour le travail sur les aires, différentes *connaissances* sont indispensables à acquérir pour qu'elle soit utile dans le cadre de la réalisation d'une tâche de géométrie :
– d'abord, il est nécessaire de savoir qu'elle existe,
– ensuite, il est nécessaire de savoir comment appliquer cette fonctionnalité à une forme, c'est-à-dire connaitre la procédure à suivre pour « Diviser » une forme avec Apprenti Géomètre (*connaissance instrumentale*),

[7] Ce logiciel de géométrie dynamique a été mis au point par le CREM et peut être téléchargé gratuitement à partir de l'adresse *http : //www.crem.be*

– ensuite, il est nécessaire de pouvoir interpréter le résultat d'une découpe : par exemple, l'aire de la forme de départ est égale à la somme des deux aires obtenues après découpe ; ou bien, en assemblant les deux formes obtenues après découpe, il est possible de retrouver la forme de départ ; ou bien encore, en associant les deux formes obtenues après découpe, on construit une nouvelle forme dont l'aire est égale à la forme de départ ;
– enfin, il est nécessaire de pouvoir inclure cette fonctionnalité dans un projet de réalisation d'une tâche plus complexe, comme par exemple construire une figure triangulaire uniquement à partir de carrés.

Ce qui vaut pour un logiciel de géométrie dynamique tel qu'`Apprenti Géomètre` vaut aussi pour la calculette. Exposons en exemple ce que nous avons observé dans la classe de 4^{e} année où nous avons expérimenté notre dispositif d'enseignement. Au terme de l'activité de prise en main de la calculette, l'institutrice propose aux élèves de résoudre mentalement une série de calculs lacunaires du type : $64+. = 100$. Elle demande également, après chaque série de calculs, de vérifier les réponses à l'aide de la calculette. Que s'est-il passé lorsque les élèves ont vérifié leur réponse ?

Reprenons notre calcul : $64 + . = 100$.

L'élève qui a indiqué 36 à la place du point, effectue à la calculette le calcul suivant : $64 + 36 = \ldots$ la calculette affiche 100, le dernier nombre fourni dès le départ du calcul. Ainsi, l'élève ne vérifie-t-il pas sa réponse à l'aide du calcul $100 - 64 =$, mais vérifie si sa réponse permet de valider le calcul proposé.

Voyons maintenant pour l'élève qui a indiqué 46 comme réponse. Il effectue le même type de calcul : $64 + 46 =\ldots$ la calculette affiche cette fois 110… ce qui n'est pas la réponse attendue. Mais que fait l'élève de la réponse fournie par la calculette ? Comment gère-t-il l'information reçue ? Le comportement observé chez tous les élèves est le suivant : ils prennent conscience que leur réponse est incorrecte, ils gomment leur réponse et recommencent la procédure de calcul. Soit ce qui se passe généralement dans une salle de classe lorsque l'élève venu auprès de l'enseignant pour « se faire corriger les calculs » retourne à sa place pour corriger les erreurs, sans aucune autre information.

Pourtant… dans le cas de l'usage de la calculette, l'enfant possède bel et bien une information supplémentaire lorsqu'il effectue le calcul $64 + 46$ et que la calculette affiche 110. En comparant la réponse affichée à celle attendue, il peut comprendre que la réponse proposée est supérieure de 10 à la réponse attendue, comme 110 est supérieur de 10 à 100, la somme à atteindre. Ainsi, l'usage de la calculette devrait modifier le comportement de l'élève par rapport au calcul. Car si cette procédure lui est nécessaire pour corriger plusieurs de ces calculs, il se rendra rapidement compte qu'il propose toujours une réponse de 10 supérieur à celle attendue. Il pourra ensuite tenter de comprendre cette erreur et par la suite modifier ses procédures de calcul.

Au travers de ces deux exemples, nous avons tenté de montrer que l'usage d'outils en classe n'est pas anodin, ni « naturel » pour les élèves. L'utilisation d'un outil entraine *de facto* une modification des comportements d'action et de réflexion. Ainsi, comme nous l'avons indiqué pour la gestion des erreurs à la section précédente, l'utilisation d'outils en classe demande également une analyse *a priori* et une gestion dans l'action de la part de l'enseignant. Nous rejoignons ici l'idée de l'enseignant stratégique énoncé par J. Tardif

(1997), tout à la fois penseur, preneur de décisions… médiateur et entraineur. Et de poursuivre en citant Jones et al.[8] pour souligner que l'enseignant doit aussi s'interroger « sur l'adéquation du matériel qu'il met à sa disposition [*à disposition de l'élève*] ».

5.2.6 Hypothèse

À partir de ces premiers constats, nous émettons l'hypothèse qu'en proposant une situation ancrée dans les grandeurs dépourvues d'unités de mesure conventionnelles, nous favoriserons le travail numérique sur les nombres décimaux et aiderons les apprenants à appréhender l'intérêt de ces nombres, ainsi que leur organisation dans le système décimal de position.

Plus particulièrement, nous faisons l'hypothèse que les séquences d'activités que nous proposons ci-dessous auront une influence sur la compréhension des nombres décimaux au niveau de l'ordre et de la densité, et peut-être au niveau des opérations.

5.3 Dispositif d'enseignement - Expérimentation

Après la période des mathématiques modernes, aborder les décimaux dans le cadre des grandeurs a été une voie reconnue[9]. Didacticiens, épistémologues, enseignants… favorisent la rencontre des décimaux à partir des mesures de longueur, de masse ou de capacité, à partir de contextes quotidiens où les mesures interviennent.

Dans notre analyse des approches didactiques à la section 5.1, nous avons montré l'importance du couple *grandeur-nombre*. De même, comme nous l'avons expliqué à la section 5.2.3, nous avons accordé de l'importance aux représentations des nombres décimaux. Cependant, comme l'indique R. Douady (1980), « Pour que la correspondance « grandeur-nombre » soit efficace, il faudra que toute grandeur – ici longueur ou aire – soit mesurable en une unité fixe. Il faudra qu'à toute opération sur les grandeurs corresponde une opération sur les nombres qui les mesurent de manière à pouvoir transformer un problème physique en un problème mathématique. Il restera à résoudre le problème mathématique et à interpréter physiquement le résultat. ». Il s'agit donc de proposer aux apprenants des situations où ces traitements des grandeurs et des nombres correspondant ne soient pas « parasités » par un traitement des mesures de grandeur ou par des changements d'unités.

Expliquons ceci davantage. Prenons une situation contenant des mesures de grandeur exprimées à l'aide d'une unité conventionnelle, par exemple la mesure d'un cahier de classe. Si nous mesurons sa longueur en centimètres, ce qui semble être assez naturel dans un premier temps, nous obtenons une réponse approchée : entre 29 cm et 30 cm. Si nous souhaitons déterminer sa longueur avec plus de précision, plusieurs possibilités s'offrent à nous :

[8] Jones, B.F. & al. (1987). *Strategic teaching and learning : cognitive instructions in the content areas.* Alexandria. VA : Association for Supervision and Curriculum Developpment.

[9] Voir notamment la section 3.2.3 et suivantes, page 40 et suivants, où nous exposons le contenu des programmes de 1976 et 1985 .

– soit exprimer la longueur en centimètre et donc utiliser un nombre décimal : 29,6cm (voire entre 29,6 cm et 29,7 cm) ;
– soit exprimer la longueur en millimètre, unité plus petite que le centimètre, ce qui permet d'éviter le nombre décimal : 296 mm (voire entre 296 mm et 297 mm),
– soit encore, exprimer la longueur en utilisant les deux unités et éviter à nouveau l'usage d'un nombre décimal : 29 cm et 6 mm (voire entre 29 cm et 6 mm et 29 cm et 7 mm).

Assez clairement, nous observons le rôle joué par les unités conventionnelles de mesure : la traduction de l'une vers l'autre permet d'éviter le travail sur les nombres décimaux. Il semble donc intéressant, pour centrer le travail sur ces nombres, de transformer le problème physique en un problème mathématique (Douady, 1980) et éviter ainsi de possibles changements d'unité.

En complément, à l'instar de R. Douady (ibid.), dans ce voyage qui mène à l'enrichissement des nombres naturels par les nombres décimaux (de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{D}^+$), acceptons que l'« on marche sur 2 pieds : l'acquisition de nouveaux nombres et l'extension des opérations. Cette extension est motivée par le fait qu'elle traduit des opérations sur des longueurs ou des aires ». Ceci justifie le travail proposé aux apprenants au niveau des opérations, en l'occurrence la multiplication : rechercher, dans le registre numérique, la longueur du côté du carré d'aire 8 après avoir recherché à partir des registres géométriques et numériques les aires de carrés de côté 1, 2, 3... et avoir dessiné le carré d'aire 8.

Ceci fonde l'ensemble de notre travail : découvrir la nécessité de nouveaux nombres, dans un contexte de mesure qui permet de les représenter, mais sans que le travail sur ces mesures ne prenne le pas sur le travail numérique. Nous avons donc choisi de construire des activités qui tiennent compte de ces contraintes.

Notre expérience acquise lors de la recherche sur l'apport du logiciel `Apprenti Géomètre` aux apprentissages concernant les concepts d'aire et périmètre (CREM, 2007) nous a guidé dans le choix des activités à proposer aux élèves.

5.3.1 Des genèses instrumentales

Comme exposé à la page 116, nous avons été attentifs aux genèses instrumentales tant pour le logiciel de géométrie dynamique Apprenti Géomètre que pour la calculette.

Pour la calculette une seule activité a été réalisée. Nous avons constaté que la plupart des élèves connaissaient cet outil sans nécessairement en connaitre l'utilisation, même s'il n'avait pas été utilisé au préalable en classe. Nous avons également constaté que, pour les enseignants et les élèves, la calculette est conçue essentiellement pour vérifier un calcul ou pour effectuer un calcul « que l'on ne saurait pas faire dans sa tête ou par écrit ». La conception de la calculette comme *outil* pour observer des phénomènes arithmétiques n'est pas présente.

Pour `Apprenti Géomètre` plusieurs séances d'initiation à son utilisation ont été organisées. L'objectif de ces séances n'était pas uniquement d'apprendre à utiliser cet outil, il était aussi de préparer les activités futures sur le concept d'aire. Les premières activités consistaient à reproduire des assemblages de formes à l'aide de formes directement disponibles. Aucun découpage, aucune fusion de formes n'était nécessaire. Dans un deuxième temps, nous avons proposé aux élèves de reproduire des figures à l'aide de carrés. Pour la première (figure 5.2), les élèves devaient placer quatre carrés standards à l'écran et reproduire la figure proposée. Pour la seconde (figure 5.3), ils devait utiliser sept carrés standards pour recomposer la figure proposée.

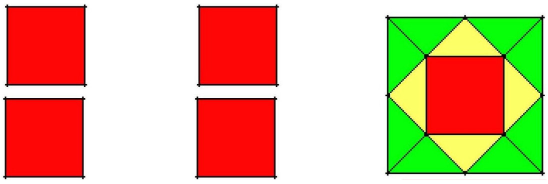


Fig. 5.2 Première activité sur l'aire.

- Choisis le kit standard.
- Place 7 carrés sur l'écran.
- Utilise ces carrés pour construire la forme géométrique ci-dessous.

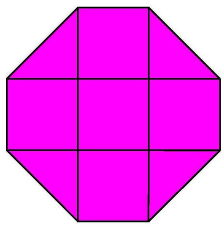


Fig. 5.3 Deuxième activité sur l'aire.

Notons que la première activité a donné lieu à un débat spontané dans une des classes ; débat que nous avons suscité dans les autres classes. Expliquons quelque peu cela.

Après avoir reproduit le grand carré à l'aide des quatre carrés unités, en en découpant trois, un élève s'est étonné de voir trois carrés. Un autre lui a répondu qu'il ne pouvait y en avoir trois, puisque quatre carrés avaient été utilisés pour réaliser l'assemblage. Un autre encore a expliqué que pour lui il y a avait six carrés dans ce dessin !

Les incompréhensions de certains élèves, plutôt spectateurs de ces discussions, ont amené à une clarification des affirmations de chacun. Ce débat a permis de clarifier les différents points de vue avec lesquels une forme peut être regardée.

Un premier point de vue (figure 5.4(a)) consiste à regarder la figure comme composée de carré unité. Le regard s'appuie sur la notion d'aire mesurée à l'aide d'une unité, le carré standard. On voit alors quatre carrés.

Un deuxième point de vue (figure 5.4(b)) consiste à regarder la figure comme un assemblage géométrique, mais en donnant l'importance aux traits extérieurs, au gabarit de la forme. Dans ce cas, trois carrés superposés apparaissent, inscrits l'un dans l'autre.

Un troisième point de vue (figure 5.4(c)) consiste à regarder la figure comme un assemblage de formes géométriques qui peuvent être réassemblées entre elles pour former des carrés. Dans ce cas, sept carrés peuvent être reconstruits. Mais d'autres assemblages pourraient aussi être réalisés.

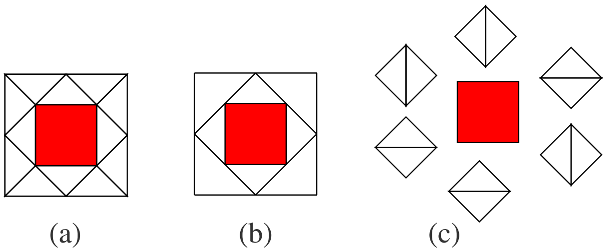


Fig. 5.4 Différents points de vue.

Il nous a paru important de reproduire ce débat. Cela nous a permis de montrer aux enseignants combien les élèves pouvaient *voir* des choses différentes à partir d'une même figure. À plusieurs reprises, dans la suite des activités, nous avons fait appel à cette démarche : observer et concevoir un même objet à partir de plusieurs points de vue. Ainsi, pour 2,47 par exemple. Ce nombre peut être considéré comme la réponse à un calcul. Mais il peut aussi être vu comme la somme de 2 unités, 4 dixièmes et 7 centièmes, ou comme la fraction $\frac{247}{100}$, ou encore comme 247 : 100, ...

5.3.2 Des activités sur les aires

La première activité a pour objet de construire des carrés à partir de carrés unités. Cette activité ne pose pas de problème aux élèves. Bien souvent ceux-ci colorient leurs assemblages comme le montrent ci-dessous les copies de leurs réalisations.

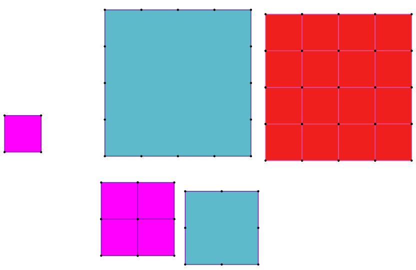


Fig. 5.5 Deux représentations de l'aire.

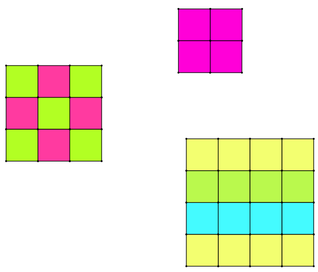


Fig. 5.6 Différents arrangements des carrés unités.

Une synthèse est organisée. Pour chaque carré construit, le périmètre et l'aire sont déterminés par comptage ou par calcul. Progressivement, les listes de nombres grandissant, la *régularité* de ces suites de nombres apparait. Pour le périmètre, « on fait toujours plus quatre », s'écrie un élève. Pour l'aire, « c'est comme dans la table de Pythagore », s'exclame un autre.

Les élèves comprennent rapidement comment trouver les nombres qui suivent. L'exploitation de ces découvertes, l'organisation des techniques de calcul du périmètre et de l'aire est poursuivi dans le cadre des activités de géométrie.

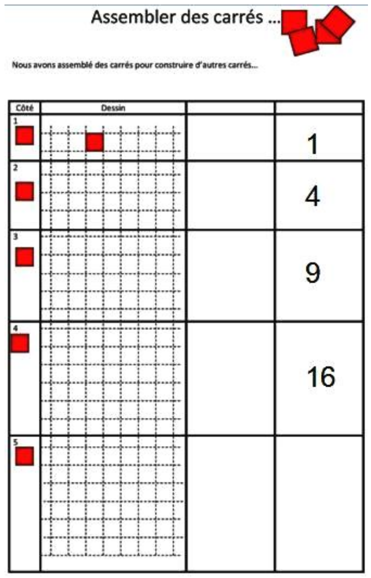


Fig. 5.7 Synthèse.

Pour les nombres, le problème suivant est porté aux élèves :

> Nous avons pu construire et dessiner des carrés de 1, de 4, de 9, de 16... Mais existe-t-il un carré de 8 ? Pourriez-vous essayer de le construire avec `Apprenti Géomètre` ?

Dans un premier temps, nous demandons seulement aux élèves de construire ce carré. Ils réalisent cette construction à l'aide du logiciel `Apprenti Géomètre`. Parfois du matériel de manipulation est également utilisé (carton, feuille carrée à plier) comme le montre la figure 5.8. L'avantage de ces deux outils est qu'ils situent l'activité dans le domaine des grandeurs, sans pour autant faire appel aux mesures de longueur traditionnelles.

Différents assemblages de huit carrés unités sont réalisés par les élèves (figure 5.9).

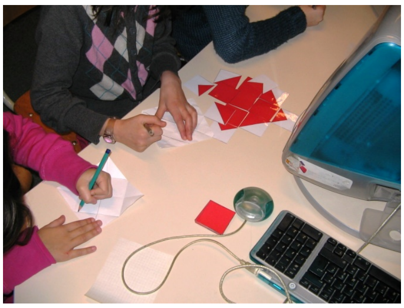


*Fig. 5.8 **Apprenti Géomètre**, des cartons, des feuilles.*

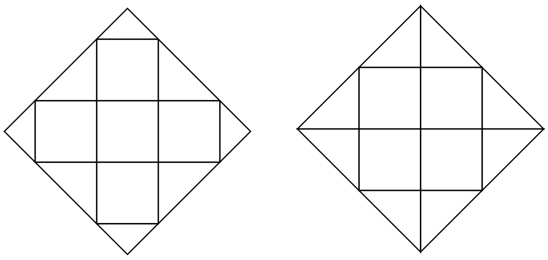


Fig. 5.9 Deux assemblages pour le carré de 8.

D'un point de vue didactique, cette activité a pour objet de *constituer* l'existence géométrique du carré d'aire 8. De fait, celui-ci peut être construit à partir des carrés unités, par découpage et assemblage. Il nous apparait important que l'existence des carrés soit fondée par leur construction géométrique. En effet, aux instruments, ces constructions sont quelque peu *incertaines*. Par la suite, l'existence du carré d'aire 8 ne pourra être remise en cause car il existe géométriquement.

Ainsi, au terme de l'activité, l'existence d'un carré d'aire 8 est acceptée par tous les élèves, d'abord parce que numériquement il semble raisonnable d'accepter qu'entre 4 et 9 il existe bel et bien 8 (ceci se fonde sur les connaissances des élèves concernant les nombres naturels), ensuite parce qu'un carré d'aire 8 a pu être construit en découpant et en assemblant 8 carrés unités.

Dans un second temps, les élèves ont été invités à dessiner ce carré de 8 qu'ils avaient pu construire... Pour ce faire, deux approches que nous détaillerons ci-après peuvent être utilisées :
- des constructions qui s'appuient sur le registre géométrique, sans le report d'une longueur à partir de sa mesure chiffrée,
- une construction qui s'appuie sur le registre numérique avec le report de la mesure chiffrée de la longueur du côté.

En fonction des connaissances des élèves et de l'objectif de l'activité, c'est la technique associée au registre numérique qui a été utilisée. De ce fait, il était nécessaire de connaitre la longueur du côté du carré d'aire 8 ! Ceci constitue le début du travail numérique pour aborder les nombres décimaux.

Pour connaitre cette longueur, les élèves analysent comment ils trouvaient l'aire d'un carré dont ils connaissaient la longueur du côté : « on multiplie le côté avec le côté », « on fait 2 fois 2, ou 3 fois 3, ou 10 fois 10, c'est toujours comme ça ! ». À l'inverse, ils disent qu'il faut donc trouver un nombre qui multiplié par lui-même fournira un résultat égal à 8.

En observant les carrés déjà construits, en observant les calculs déjà réalisés, les élèves se rendent compte que la longueur ne peut être 2 (aire $=4$) ni 3 (aire $=9$). Certains élèves proposent « 2×4 ». Bien sûr, la réponse à ce calcul est 8. Du point de vue numérique, c'est bon. Cependant du point de vue géométrique, ces nombres ne correspondent pas aux côtés d'un carré. Après plusieurs tentatives comme celle-là, après avoir observé les carrés, certains élèves expriment le fait que la longueur du côté doit être entre 2 et 3. La proposition qui survient spontanément est « deux et demi ». En exploitant cette proposition et en utilisant la calculette pour effectuer des calculs non encore accessibles aux élèves, le calcul devient « 2,5 × 2,5 ».

$2,5$	$2,5 \times 2,5 =$	$5,25$
$2,6$	$2,6 \times 2,6 =$	$6,76$
$2,7$	$2,7 \times 2,7 =$	$7,29$
$2,8$	$2,8 \times 2,8 =$	$7,84$
$2,9$	$2,9 \times 2,9 =$	$8,41$

Les élèves constatent que la réponse n'est pas égale à 8, mais bien inférieure (5,25). Ils proposent donc une autre solution : spontanément « 2,6 ». À nouveau, le calcul est effectué à la calculette, la réponse est comparée à 8. Un nouveau nombre est proposé par ajustement... Les élèves utilisent la même démarche pour $2,7$, pour $2,8$ et pour $2,9$. Pour chaque proposition, les mêmes questions se posent pour la valider ou l'invalider et la modifier si nécessaire.

Après ces premiers essais, les élèves se rendent compte qu'ils n'ont pu obtenir 8. Ils observent que $2,8$ est trop « petit » puisque $7,84$ est plus petit que 8 et que $2,9$ est trop « grand » puisque $8,41$ est plus grand que 8. Ils constatent qu'il est nécessaire de trouver un nombre entre $2,8$ et $2,9$. Un élève propose « deux virgule huit et demi ». Remarquons une fois encore l'influence des connaissances sur les fractions pour proposer ce nouveau nombre : entre 8 et 9, il y a « huit et demi ». Des élèves proposent d'écrire ce nombre en utilisant à nouveau la virgule : $2, 8, 5$. À nouveau, se pose la difficulté d'écrire ce nombre à la calculette et de le valider par la multiplication. En travaillant de la même manière, de proche en proche, les élèves réalisent qu'ils se rapprochent de plus en plus de 8 mais ne parviennent pas à l'atteindre. Ils acceptent que la valeur approximative de la mesure du côté du carré d'aire 8 est $2, 828$ ou $2, 82$.

De fait, la longueur du côté du carré de 8 est le nombre irrationnel $2\sqrt{2}$. Les élèves, par calcul, ne peuvent donc que l'approcher. Notons que ce travail correspond à une conception des nombres décimaux, celle d'approcher au plus près les nombres irrationnels.

Au cours de ce travail d'*encadrement* de la longueur du côté du carré de 8, différentes propositions intéressantes ont été faites par les élèves, témoins de l'influence de leurs connaissances des nombres naturels. Par exemple, observant que 2,8 × 2,8 était égal à 7,84, les élèves ont proposé d'essayer avec 2,80. Le calcul effectué à la calculette (2,80 × 2,80) a étonné les élèves : « mais c'est la même chose ! » Cette observation se répétant à plusieurs reprises au cours de l'activité, certains élèves ont pris conscience que contrairement aux nombres naturels, pour les nombres décimaux, les zéros ajoutés à droite « ne comptaient pas ».

À d'autres moments, lors de la lecture orale des réponses affichées par la calculette, l'importance des zéros est réapparue. Par exemple : pour le calcul 2,83 × 2,83, la calculette affiche 8,0089. Un élève dicte à l'enseignant qui écrit au tableau « huit virgule quatre-vingt-neuf », 8,89. De suite, les élèves constatent que l'écriture du tableau ne correspond pas à l'affichage de la calculette. À nouveau ce sont les zéros qui sont en cause. La lecture orale témoigne d'une conception D=N,N. La partie décimale est dans ce cas constituée de 0089. Or, pour les nombres naturels, les zéros situés à la gauche du nombre « ne comptent pas ». L'élève a donc lu huit virgule quatre-vingt-neuf de bonne foi, en étant persuadé de lire correctement le nombre. À nouveau, une multiplication à l'aide de la calculette permettra de valider l'inégalité de 8,89 et de 8,0089 :

$$8{,}89 \times 8{,}89 = 79{,}0321$$
et
$$8{,}0089 \times 8{,}0089 = 64{,}14247921.$$

Notons que cette situation de classe permet également de montrer que l'affirmation souvent entendue lors de l'apprentissage des nombres naturels « les zéros à gauche ne comptent pas » doit être revue. Ce type d'affirmation correspond plus à des *trucs* qu'à de véritables savoirs mathématiques.

Enfin, dans un troisième temps, les élèves dessinent le carré de 8, ainsi que les autres carrés, sur une feuille de papier *bristol* quadrillée en centimètres. Ce travail se réalise en groupe de trois ou quatre élèves. En reportant des carrés unités sur les deux droites (axes) pré-dessinées, les élèves peuvent aisément dessiner les premiers carrés (1, 4, 9). Les difficultés surviennent lorsqu'il faut tracer le carré de 8.

De manière générale, trois approches sont possibles :

– Soit dessiner le carré de 8 en reportant la longueur de la diagonale du carré de 4 sur les axes. Ceci peut se réaliser aisément avec un compas. Cependant les élèves ne connaissent pas cette technique. Au niveau numérique, cette approche permet de situer le nombre irrationnel $2\sqrt{2}$.

- Soit construire le carré de 8 en reproduisant un des assemblages de carrés et de triangle réalisés avec `Apprenti Géomètre` (figure 5.9). Cette approche est réalisable. Elle a également pour avantage de situer sur les axes le nombre irrationnel $2\sqrt{2}$.
- Soit situer les deux nombres qui encadrent au mieux la longueur du côté du carré de 8 (2,82 et 2,83) et dessiner les deux carrés correspondants, sachant que ce sont des approximations. D'un point de vue numérique, cette approche respecte le travail numérique précédent qui consistait à approcher le nombre irrationnel $2\sqrt{2}$ d'aussi près que l'on peut, avec les connaissances des élèves.

D'un point de vue mathématique, les deux premières approches semblent préférables. Le nombre irrationnel est situé sur la droite. Les élèves rencontrent une situation où à un point d'une droite, on ne peut attribuer un nombre que l'on peut écrire, de manière finie, dans le système décimal de position. Mais d'un point de vue de l'apprentissage, pour des élèves de 4[e] année primaire, il nous semble que ce soit le phénomène d'encadrement d'un nombre et la généralisation du système décimal de position qui soient les objectifs prioritaires. Nous avons donc choisi la troisième approche pour travailler avec les élèves.

Les élèves vont donc situer 2,82 et 2,83 sur les axes. Pour ce faire, il leur est nécessaire de sous-graduer l'intervalle entre 2 et 3. Les carrés unités fournis aux élèves ont une longueur de côté de 20 cm. Sur les axes, l'intervalle entre les points 2 et 3 est donc de 20 cm. Ce choix n'est pas anodin. L'objectif est que les élèves travaillent sur la généralisation du système décimal de position. À savoir que ce qui était vrai pour les nombres naturels, chaque rang est dix fois plus grand ou dix plus petit que son voisin direct, est également vrai pour les nouveaux nombres. Une des structures communes entre les nombres naturels et les nombres décimaux est le système décimal de position.

Comment les élèves s'y prennent-ils pour situer 2,82 et 2,83 ? D'abord ils essaient de situer 2,8. Et dans une grande majorité des cas, ils comptent huit graduations (ligne du quadrillage) à partir de 2 (figure 5.10).

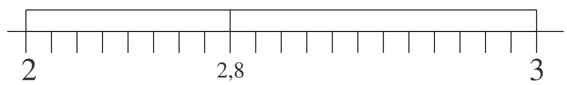


Fig. 5.10 Situer 2,8.

Bien souvent s'en suit un débat animé par une analyse *géométrique*. Certains élèves trouvent que « deux virgule huit n'est pas assez loin », « deux virgule huit devrait être être plus près de trois que de deux », « il n'y a pas assez de place entre deux et deux virgule huit par rapport à deux virgule huit et trois ». Dans ce débat, rapidement les élèves justifient leurs affirmations par un argument qui tient au système décimal de position : « mais oui, après deux, c'est deux virgule un, puis deux virgule deux, et ça continue, puis tu as deux virgule huit, deux virgule neuf et trois. Donc deux virgule huit, c'est tout près de trois ! ».

Certains élèves contestent cette affirmation. Et expliquent : « Mais après deux virgule neuf c'est deux virgule dix, puis deux virgule onze et ça continue ». À nouveau, la conception D=N,N est en jeu. Dans les nombres naturels, après neuf, c'est bien dix. À nouveau le calcul va aider les élèves à décider. En effectuant les opérations $2,9 \times 2,9$ (8,41) et

$2,10 \times 2,10$ (4,41), ils constatent qu'en utilisant 2,10 ils obtiennent une réponse plus petite qu'avec 2,9. De plus, en comparant avec 3×3 (9), ils se rendent compte que 2,9 est plus proche de 3 que 2,10. Bien souvent, dans ce débat, les élèves utilisent également un constat effectué lors des calculs d'encadrement : $2,8 \times 2,8 = 2,80 \times 2,80$. À nouveau, c'est le rôle du zéro et le fonctionnement du système décimal de position qui sont au cœur du débat.

Ce débat permet de dégager l'idée selon laquelle dans l'intervalle 2-3, il est nécessaire de sous-graduer en dix intervalles. Chaque intervalle possède alors une longueur de $2cm$. Cette même réflexion sera utilisée pour situer 2,82 dans l'intervalle entre 2,8 et 2,9. Chaque intervalle possède cette fois une longueur de $2mm$. Au-delà, les élèves se rendent compte qu'il est difficile de poursuivre. En effet diviser $2mm$ en dix n'est pas possible avec les outils qu'ils possèdent.

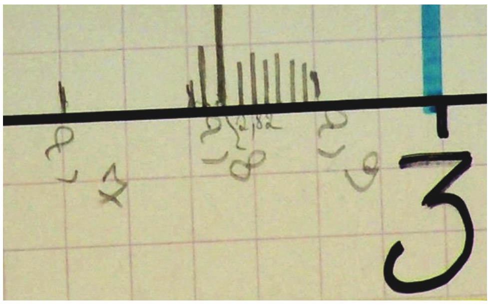


Fig. 5.11 Détail.

Les figures 5.11 à 5.13 montrent que les élèves ont également situé d'autres nombres dans l'intervalle 2-3. La figure 5.14 montre que certains groupes d'élèves ont poursuivi la graduation des axes en dehors de l'intervalle 2-3.

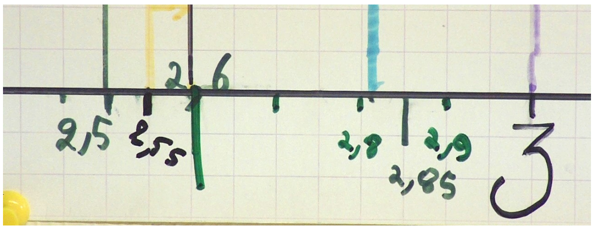


Fig. 5.12 Détail.

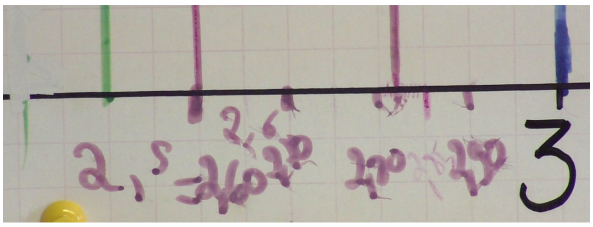


Fig. 5.13 Détail.

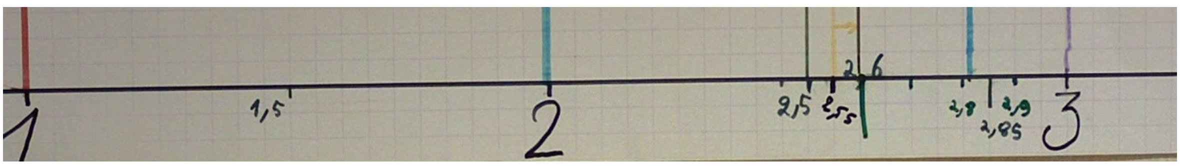


Fig. 5.14 Dessiner les carrés.

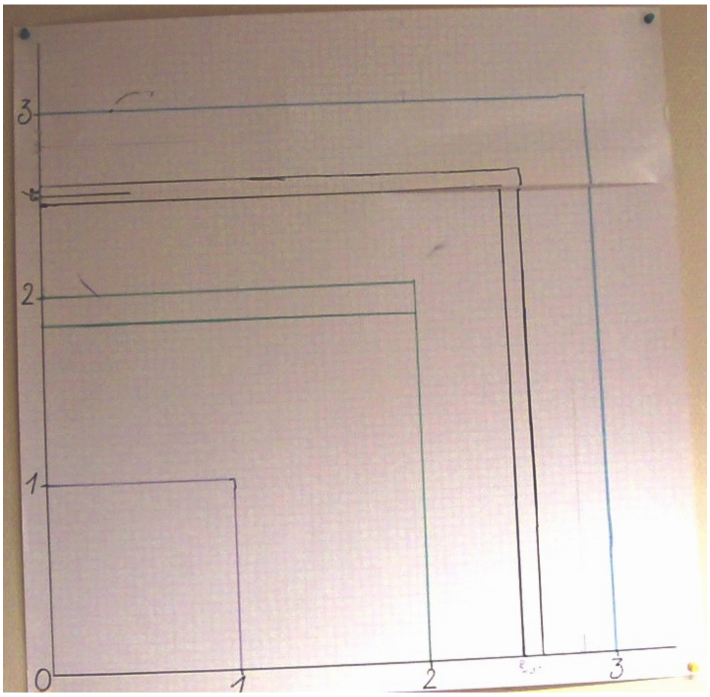


Fig. 5.15 Dessiner les carrés.

Ces différentes activités permettent de travailler sur la droite graduée, construite en partie par les élèves. Dans un premier temps, ce sont les intervalles qui sont pris en compte, soit des grandeurs physiques. Ainsi, après un travail exclusivement numérique réalisé avec l'aide de la calculette, nous reprenons pied dans le champ des grandeurs, comme l'avait annoncé R. Douady.

5.3.3 Du travail sur les nombres et les grandeurs

De nombreuses séances de travail, décrites dans le document pour les enseignants, sont ensuite proposées aux élèves. Leur objectif est également de confronter les connaissances des élèves sur les nombres naturels aux situations où des nombres décimaux sont employés. Par exemple, les rôles du zéro, le rôle de la virgule, l'extension aux sous-unités décimales…

Le travail dans le champ des grandeurs permet également de renforcer les connaissances des élèves. Nous relatons ci-dessous un débat ayant eu lieu lors de l'une de ces activités. L'objet est de dessiner sur une feuille A4 quadrillée, dans le cadre d'une synthèse individuelle, les carrés construits précédemment. Les élèves doivent pour ce faire, tracer des côtés de 2,82 cm. À nouveau un débat s'organise en classe pour déterminer comment tracer cette ligne. Plusieurs avis émergent :

- certains élèves disent qu'ils ne peuvent dessiner ce segment, « on ne sait pas dessiner 2,82 cm » ; comprenons que ces élèves, n'ayant rencontré dans leur parcours scolaire que des mesures avec un rang derrière la virgule (du type 2,2 cm), ne peuvent comprendre qu'ils puissent exister des unités de mesures plus petites que le millimètre ;
- certains élèves disent que l'on peut dessiner mais qu'« on ne sait pas dessiner le 2 dans les millimètres » ; comprenons que ces élèves sont en phase de compréhension du système

décimal de position en interaction avec le système décimal de mesure ;
- certains élèves disent également que l'on peut tracer $2,82cm$ mais qu'« on peut aussi dessiner le 2 » ; d'ailleurs ils expliquent qu'il faut tracer « une ligne de 10,2*cm* » !

Nous reproduisons ci-dessous un des dialogues entre deux élèves et un enseignant. Le premier élève explique que l'on ne peut tracer 2,82 cm, on ne peut tracer que 2,8 cm. Le deuxième élève explique lui qu'il peut tenir compte de tous les chiffres.

> Él. 1 – « Le dernier 2, on ne sait pas le mettre ! »
> Él. 2 – « J'y arrive parce que c'est 82 mm et 82 mm ça fait 8 cmet 2 mm. »
> Él. 1 – « Donc pour toi, c'est 10,2 ? »
> Él. 2 – « Oui. »
> Enseignant – « Pour toi, 2,82cm c'est la même chose que 10,2 cm ? Donc quand je trace une ligne de 2,82 cm, c'est la même chose que si je traçais une ligne de 10,2 cm ? »
> Él. 2 – « Oui. » »

Comprenons que l'élève 2 effectue un traitement de la mesure (nombre + unité de mesure) qui est guidé essentiellement par ses connaissances sur les mesures et les unités de mesure. Jusqu'alors, les activités sur les mesures et les unités de mesure proposées à l'école ne l'ont pas confronté à des unités plus petites que le millimètre. Son traitement de la mesure 2,82 cm est probablement guidé par ses connaissance de l'abaque des mesures.

dm	cm	mm
	2	82

Fig. 5.16 Abaque.

Il place mentalement cette mesure dans l'abaque à la manière de la figure 5.16. Ne connaissant pas d'unité inférieure au millimètre, il place les chiffres de la partie décimale dans les millimètres. Ensuite, il traduit le nombre de millimètres en centimètres : 82 mm valent 8 cm et 2 mm. Enfin, il associe ce dernier nombre aux 2 cm de départ et il obtient 10,2 cm.

Observons que cet élève a particulièrement bien compris la démarche de transformation des unités de longueur. À nouveau, nous nous rendons compte que le champ des mesures en unités conventionnelles peut être un obstacle au traitement des nombres décimaux.

5.4 Conclusions et questionnements

Comme l'explique R. Douady, les élèves ont été confronté à un problème auquel la solution était un nombre irrationnel pour nous rendre compte de la nécessité des nombres décimaux.

> *Paradoxalement, c'est un problème qui n'a pas de solution dans $\mathbb{D}^+$ qui amène à la construction de $\mathbb{D}^+$. C'est en fait moins étonnant qu'il n'y paraît. Le rôle de $\mathbb{D}$ est d'être une approximation techniquement pratique de $\mathbb{R}$.*
>
> R. Douady, 1980

Cela peut paraitre un défi bien loin des préoccupations des élèves de 4^e^ primaire. Cependant, cela correspond aussi à la conception des décimaux selon laquelle ils permettent d'approcher au plus près un nombre irrationnel. Bien sûr, force est de constater que les élèves sont parfois bousculés par les activités que nous proposons. Comme en témoignent les remarques qu'ils émettent au terme de l'activité de recherche de la longueur du côté carré d'aire 8, lorsqu'ils se rendent compte que l'on ne trouve pas une solution « finie » :

- Léa : « Comment... ! Vous nous avez fait faire tout ça et il n'y a pas de solution ! »
- Paul : « Mais alors ça ne s'arrête jamais ! ».

Dans une autre classe où les élèves avaient proposé de construire un carré d'aire 10, et par la suite de connaître la longueur de son côté... De la même manière, en classe, les élèves n'avaient pas trouvé de solution finie. Lors de la séance suivante, une élève nous a dit :

- Valentine : « Moi j'ai essayé toute l'après-midi avec ma mamy pour voir si on ne trouvait pas une réponse ! »

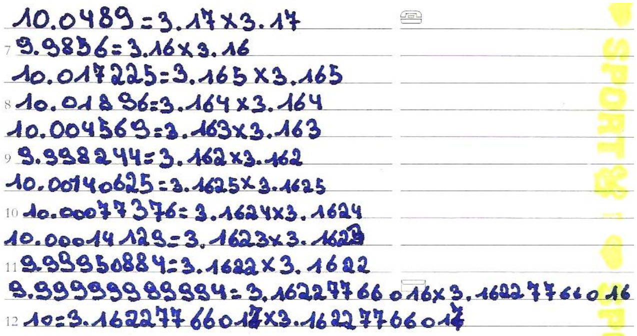


Fig. 5.17 Recherche de la longueur du côté du carré d'aire 10.

À côté de ces remarques qui pourraient laisser croire que les élèves ont été désabusés par le fait qu'il n'y avait une réponse finie au problème posé[10], il nous a semblé que leur motivation à comprendre les savoirs en jeu n'en a jamais été perturbée. Tout au contraire. L'impossibilité de trouver « une réponse qui tombe juste », stigmatisée par le fait que la calculette ne peut donner cette réponse, les a intrigués, les a poussés à chercher davantage, à comprendre mieux les mécanismes de fonctionnement du système décimal de position.

Du côté des enseignantes, la position est plus mitigée. D'une position assez méfiante au départ, progressivement, elles ont perçu l'intérêt des activités, notamment grâce aux progrès des élèves.

- Madame Dominique : « J'étais sceptique sur le point de départ géométrique... et en fait ça aide vachement. »
- Madame Jocelyne : « Je ne voyais pas très bien où l'on allait lors des 2 premières activités. »
- Madame Laurence : « Et puis on voit tous les nombres, on ne s'arrête pas aux centièmes... »

[10] Peut-être cet étonnement vient-il du fait que généralement les situtations proposées aux élèves possèdent une et une solution finie.

- Madame Jocelyne : « Dans la division écrite, avant les élèves ne comprenaient pas pourquoi on ajoute des zéros, ils s'étonnaient souvent « on ajoute des 0 madame ! », tandis que là maintenant ils donnent du sens à ces 0 et ne sont pas étonnés, c'est normal... Avant ils ne voyaient pas ce que représentaient ces 0... »
- Madame Geneviève : « Les élèves se rendent compte que toutes les situations ne disposent pas nécessairement d'une solution unique et finie. »

Malgré ces constats encourageants, la question de la reproductibilité de ces activités par les enseignants reste posée. La gestion des activités n'est pas simple. Les choix didactiques à effectuer tout au long des activités sont nombreux. L'attention à porter à chaque élève est permanente lors des débats.

5.4.1 De la validation

Tout au long des activités, les élèves ont été confrontés à des situations où ils devaient, d'une part, expliquer leur démarche, d'autre part, justifier leur réponse ou leur démarche. Le développement de ces compétences transversales n'est pas aisé et demande un travail quotidien.

Dans le cadre spécifique des activités que nous avons proposées et expérimentées, quelques démarches de justification ont été observées. Celles-ci n'étaient cependant pas présentes dans toutes les activités. Certaines, présentes en début de parcours, ont fini par disparaitre. D'autres par contre ne sont apparues qu'après plusieurs activités. Dans une première analyse, qui doit encore être affinée, il nous semble que nous pouvons classer ces démarches comme suit :

- l'intuition : lorsque les élèves considèrent que 7,9806 est plus éloigné de 8 que 7,980625 ;
- l'argument d'autorité : lorsque la proposition des élèves est validée par l'enseignant détenteur du savoir, sans justification ou explication ; ce qui est le cas au début des activités ;
- l'argument de la représentation symbolique : par exemple lorsque les élèves remettent en cause la division de l'intervalle entre 2 et 3 en expliquant que 2,8 n'est pas bien situé sur la droite parce qu'il devrait être plus proche de 3 que de 2 ;
- l'argument opératoire : lorsque les élèves utilisent le calcul mental, le calcul écrit ou la calculette pour justifier par exemple que le zéro à droite d'un nombre décimal ne change pas la valeur du nombre ;
- l'argument technique opératoire : lorsqu'un élève explique à un autre élève que 2,2 $\times$ 2,2 n'est pas égal à 4,4 (2 $\times$ 2 dans la partie entière et 2 $\times$ 2 dans la partie décimale ; ce qui correspond à la conception D=N,N) de la même manière que 22 $\times$ 22 n'est pas égal à 20 $\times$ 20 + 2 $\times$ 2 ;
- l'argument technologique : lorsque l'élève utilise le système décimal de position et son fonctionnement pour justifier certains choix.

De manière globale, les premières démarches citées ci-dessus ont plutôt eu tendance à disparaitre au fur et à mesure des activités. Alors que les dernières sont apparues progressivement. Une attention particulière à ces démarches de justification sera à porter dans des expérimentations futures. De même que de futures recherches pourraient être menées sur ce sujet particulier de la justification. Retenons cependant que l'évolution des démarches de justification peut être retenue comme un signe d'une meilleure compréhension du système décimal de position.

5.4.2 De la didactique

> *Pour apprendre aux élèves à inventer, il est bon de leur donner le sentiment qu'ils auraient pu découvrir.*
>
> G. Bachelard, La formation de l'esprit scientifique. 1971

Nous avons essayé humblement d'apporter notre pierre à l'édifice, partant de l'hypothèse qu'il n'y a pas de parcours facile, direct, linéaire, ancré soit dans l'épistémologie, soit dans la psychologie cognitive, soit dans la pédagogie...

Notre parcours, moins balisé et moins linéaire que certaines propositions dans les manuels, donne plus de temps aux élèves pour réfléchir au fonctionnement du système décimal de position. Les séances de débat sont plus nombreuses. La confrontation des idées donne souvent lieu à des remises en question des savoirs et à l'apprentissage de l'*explication* et de la *justification*.

Mais toute médaille à son revers. Ce parcours, que l'on pourrait qualifier de « parcours pour enseignants ambitieux », en paraphrasant le titre de l'ouvrage italien du groupe *zeroallazero*[11], situe le savoir, l'élève et l'enseignant au coeur de l'action pédagogique. Le rôle de l'enseignant est ici de gérer les activités d'interaction entre les élèves, de *prendre* et de *comprendre* chacune des interventions des élèves, de les situer dans un parcours d'apprentissage en lien avec les savoirs à acquérir et une épistémologie plus générale. Les moments de choix en situation sont plus nombreux. La gestion de la classe est certainement plus complexe dans un premier temps. L'avis que les enseignants ont exprimé ci-dessus le montre bien.

L'enseignant a donc plus de responsabilités dans ce parcours d'apprentissage, balisé par les savoirs à acquérir et les élèves qui ont à les acquérir. Mais il n'y a probablement pas de parcours d'enseignement facile dans une école de la réussite pour tous...

> *Un enseignant est [...] quelqu'un qui prend constamment des décisions en situation, même [...] s'il rêve de méthodes qui marcheraient toutes seules. Or, la succession des modes en pédagogie en témoigne, cette constante quête de solutions toutes prêtes est vaine.*
>
> J.-P. Astolfi, Le paradoxe pédagogique.

[11] *Au-delà de toute limite.* CREM, 2009.

5.5 Bibliographie

ADJIAGE, R. & PLUVINAGE, F. (2000). Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels. *Recherche en didactique des mathématiques*. 20/1. 41–88.

ARTAUD, M. *Analyser des praxéologies mathématiques et didactiques "à calculatrice" et leur écologie*. *http : //edutice.archives − ouvertes.fr/edutice* − 00001315/*en*/, consulté le 14 mars 2003.

ASTOLFI, J.-P. (1996). *Le paradoxe pédagogique*. Sciences humaines. Hors série, 02/1996. 012.

ASTOLFI, J.-P. (1997). *L'erreur, un outil pour enseigner*. Issy-les-Moulineaux : ESF.

ASSUDE, T. & GÉLIS, J.M. (2002). *Dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire*. Educational Studies in Mathematics. 50, 259-287.

BACHELARD, G. (1971). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : Vrin.

BACHELARD, G. (1992). *Épistémologie, textes choisis*. Paris : Presses Universitaires de France.

BARTH, B-M. (1987). *Apprentissage de l'abstraction : méthodes pour une meilleure réussite de l'école*. Paris : Retz.

BKOUCHE, R., CHARLOT, B. & ROUCHE, N. (1991). *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*. Paris : Presses Universitaires de France.

BRISSIAUD, R., CLERC, P., LELIÈVRE, F., OUZOULIAS, A. (2005). *J'apprends les maths*. CM1. Livre du maître. Paris : Retz.

BROUSSEAU, G. (1980). Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherche en didactique des mathématiques*. 1/1. 11–58.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BUTLEN, D.(2007). *Le calcul mental : entre sens et technique*. Université de Franche-Comté : Presses Universitaires de Franche-Comté.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 19/2. 221–265.

CREM. (2007). *Impact du logiciel Apprenti Géomètre sur certains apprentissages*. Bruxelles : Ministère de la Communauté française.

DEL NOTARO, L. & FLORIS, R. (2009). L'utilisation de la calculatrice dans l'enseignement de la numération à l'école primaire. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone*.

DOUADY, R. (1980). Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans). *Recherche en didactique des mathématiques*. 1/1. 77–109.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherche en didactique des mathématiques*. 7/2. 5–31.

HART, K. (1980). From whole number to fractions and decimals. *Recherche en didactique* *des mathématiques*. 1/1. 61–75.

HOUDÉ, O. (2006). *10 leçons de psychologie et pédagogie*. Paris : PUF.

MUNYAZIKWIYE, A. (1995). Problèmes didactiques liés aux écritures des nombres. *Recherche en didactique des mathématiques*. 15/2. 31–62.

PERRIN-GLORIAN, M.-J. (1992). *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-sixièmes*. Thèse de doctorat. IREM de Paris. Université de Paris 7.

PIAGET, J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives : problème central du développement*. Paris : PUF.

RABARDEL, P. (1995). *Les Hommes et les technologies une approche cognitive des instruments contemporains*.

RABARDEL, P. (1999). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. In Bailleul M., *Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques, rôle des instruments informatiques et de l'écrit. Qu'apportent les recherches en didactique des mathématiques*. Caen : Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques. 203-213.

RAVENSTEIN, J. & SENSEVY, G. (1993). Statuts de l'erreur dans la relation didactique. *Grand N*. 54. 83-90.

ROUCHE, N. (1992). *Le sens de la mesure*. Bruxelles : Didier Hatier.

TARDIF, J. (1997). *Pour un enseignement stratégique, L'apport de la psychologie cognitive*. Montréal : Éditions Logiques.

TROCHMÉ-FABRE, H. (1999). *Réinventer le métier d'apprendre*. Paris : Éditions d'Organisation.

VERGNAUD, G. (1990). *La théorie des champs conceptuels*. Recherches en Didactique des Mathématiques. 10, 2-3. 133-170.

VERGNAUD, G. (2000). *Lev Vygotski. Pédagogue et penseur de notre temps*. Paris : Hachette Éducation.

VYGOTSKI, L. (1997). *Pensée et langage*. Trad. de Françoise Sève. Paris : La Dispute.

Chapitre 6

Impact de la didactique sur l'apprentissage

L. Desmet, J. Fanuel

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter deux études réalisées sur l'enseignement et l'apprentissage des nombres décimaux. Plus précisément, ces études ont été conduites dans l'objectif de mesurer l'impact de la séquence didactique qui a été décrite dans le chapitre 5.

La première étude a été réalisée tout au long de l'année scolaire durant laquelle la séquence didactique a été mise à l'épreuve. Nous avons suivi de manière longitudinale différentes classes d'élèves de quatrième primaire débutant l'apprentissage des nombres décimaux. Ces élèves que nous avons séparés en deux groupes ont été testés par l'équipe de recherche à trois moments de l'année scolaire : (1) au mois d'octobre, soit avant tout apprentissage des décimaux, (2) au mois de février, soit en cours d'apprentissage de ces nombres et enfin (3) au mois de juin, après les activités de structuration de cet apprentissage. Dans le premier groupe d'élève, les enseignants ont conduit l'enseignement des nombres décimaux comme ils en avaient l'habitude, sans aucune intervention de notre part. Nous appellerons donc ce groupe d'élèves, le groupe *contrôle*, puisque notre intervention s'est limitée à trois moments de tests de cinquante minutes sur l'année scolaire.
Le second groupe d'élèves de quatrième primaire a également été testé à ces trois moments de l'année scolaire avec des tests strictement identiques à ceux du premier groupe. Cependant, les enseignants de ces élèves n'ont pas conduit l'enseignement des nombres décimaux comme ils en avaient l'habitude. Ils ont été encadrés par l'équipe de recherche afin de conduire dans leurs classes les activités didactiques mises au point par l'équipe de recherche (voir le chapitre 5). Nous nommerons ce groupe d'élèves le groupe *expérimental*, étant donné qu'avec ces élèves nous souhaitions expérimenter l'impact de nos activités

didactiques. Une description des deux groupes d'élèves, des tests utilisés, de la procédure précise ainsi que des résultats obtenus sont décrits dans les sections 6.2.1 et 6.2.2 de ce chapitre.

La seconde étude à été réalisée en octobre de l'année suivante. Elle avait pour objectif de re-tester les élèves ayant participé à la première étude et d'observer l'impact à plus long terme de la séquence didactique. Cependant, des changements dus au passage des élèves en 5^{e} primaire ont été observés au sein des classes suivies. De nouveaux élèves sont arrivés dans l'école, d'autres sont partis et des élèves d'une même classe de 4^{e} ont parfois été répartis dans différentes classes de 5^{e} primaire. Tous les élèves ayant participé à la première étude et constituant les groupes *contrôle* et *expérimental* n'ont pas pu être testés à nouveau, même si une grande majorité d'entre eux a pu l'être. De plus, un troisième groupe d'élèves a pu être constitué : le groupe *autre*. Ce groupe rassemble les élèves qui n'ont pas participé à la première étude. La description des groupes d'élèves participants, des tests utilisés, de la procédure et des résultats obtenus sont présentés dans les sections 6.3.1 et 6.3.2 de ce chapitre.

6.2 Étude 1 - Impact de la didactique en quatrième primaire

L'objectif de cette première étude est d'objectiver l'impact de la séquence didactique proposée dans le chapitre 5 en comparant des élèves ayant bénéficié de cette séquence à d'autres élèves qui n'en ont pas bénéficié.

6.2.1 Méthodologie

Participants

Au total, cent onze élèves de quatrième primaire ont participé à l'étude. Le groupe *contrôle* était composé de soixante-trois élèves, issus de quatre classes différentes, alors que le groupe *expérimental* était composé de quarante-huit élèves, issus de trois classes différentes. Le tableau 6.1 présente les caractéristiques de ces deux groupes.

Tab. 6.1 Caractéristiques de l'échantillon d'élèves.

Groupe	Nombre	Garçons	Filles	Âge moyen	Écart-type
contrôle	63	30	33	9 ans et 4 mois	3,74 mois
expérimental	48	21	27	9 ans et 4 mois	3,67 mois

Tâches

Différentes tâches mettant en oeuvre les nombres décimaux ont été créées. Certaines d'entre elles étaient proposées sans contrainte de temps. Les élèves disposaient donc du temps qu'ils souhaitaient pour terminer chaque tâche. Pour d'autres tâches, les élèves ne disposaient que d'un temps limité à deux minutes. Cette limite de temps permet d'observer une amélioration concernant la vitesse à laquelle les nombres décimaux peuvent être traités, en plus d'une amélioration dans la qualité des réponses fournies.

Les tâches proposées étaient les suivantes :
- la comparaison de deux nombres décimaux, sans limite de temps ;
- la comparaison de deux nombres décimaux, en un temps limité à deux minutes ;
- l'addition de deux nombres décimaux, sans passage à un rang supérieur, en un temps limité à deux minutes ;
- l'addition de deux nombres décimaux, avec des passages à un rang supérieur, en un temps limité à deux minutes ;
- l'addition de deux nombres décimaux, sans limite de temps ;
- le transcodage de nombres décimaux entre les mots nombres et les nombres exprimés dans le système décimal de position (et vice versa) ;
- l'ordre des nombres décimaux et la densité.

Nous allons détailler ces différentes tâches dans les sections qui suivent.

Comparaison de deux nombres décimaux.

Pour la comparaison de deux décimaux, nous avons utilisé différents types de paires de nombres décimaux. Ces différents types sont décrits dans le tableau 6.2. Pour la tâche sans contrainte de temps, dix paires par type de paires, soit un total de septante paires, ont été proposées aux élèves dans un ordre aléatoire. Pour la tâche avec un temps limité à deux minutes, les paires ont également été proposées dans un ordre aléatoire. Le nombre de paires disponibles était de septante paires (dix paires de chaque type, dans un ordre aléatoire). Pour les élèves, la consigne était : « Entoure le nombre le plus grand ou place un signe = si les nombres sont égaux. »

Tab. 6.2 Type de paires pour la comparaison de nombres décimaux.

Type	Exemple de paire	Critères de construction	Nombre d'items
1	0,1 vs 0,3	Les deux nombres sont inférieurs à 1 et n'ont qu'un chiffre après la virgule.	10
2	0,1 vs 0,20	Les deux nombres sont inférieurs à 1. Le premier nombre n'a qu'un chiffre après la virgule. Le chiffre des dixièmes du second nombre est supérieur au chiffre des dixièmes du premier nombre. Pour le second nombre, le chiffre des centièmes est présent et vaut zéro.	10
3	0,1 vs 0,01	Les deux nombres sont inférieurs à 1. Le premier nombre n'a qu'un chiffre après la virgule. Le chiffre des dixièmes du premier nombre est égal au chiffre des centièmes du second nombre. Pour le second nombre, le chiffre des dixièmes vaut zéro.	10
4	0,2 vs 0,01	Les deux nombres sont inférieurs à 1. Le premier nombre n'a qu'un chiffre après la virgule. Le chiffre des dixièmes du premier nombre est supérieur au chiffre des centièmes du second nombre. Pour le second nombre, le chiffre des dixièmes vaut zéro.	10
5	0,1 vs 0,02	Les deux nombres sont inférieurs à 1. Le premier nombre n'a qu'un chiffre après la virgule. Le chiffre des dixièmes du premier nombre est inférieur au chiffre des centièmes du second nombre. Pour le second nombre, le chiffre des dixièmes vaut zéro.	10
6	0,2 vs 0,10	Les deux nombres sont inférieurs à 1. Le premier nombre n'a qu'un chiffre après la virgule. Le chiffre des dixièmes du premier nombre est supérieur au chiffre des dixièmes du second nombre. Pour le second nombre, le chiffre des centièmes est présent et vaut zéro.	10
7	0,1 vs 0,10	Les deux nombres sont inférieurs à 1. Le premier nombre n'a qu'un chiffre après la virgule. Le chiffre des dixièmes du premier nombre est égal au chiffre des dixièmes du second nombre. Pour le second nombre, le chiffre des centièmes est présent et vaut zéro.	10

L'addition de deux nombres décimaux

Pour l'addition de deux nombres décimaux, nous avons utilisé différents types d'additions. Ceux-ci sont décrits dans le tableau 6.3. À partir de ces additions, trois tâches ont été créées.

- Une tâche avec des additions, sans passage à un rang supérieur, à résoudre en un temps limité à deux minutes. Pour cette tâche, les types d'addition 1 à 6 ont été utilisés, chaque type étant représenté par cinq additions. Il y avait donc au total trente additions, proposées dans un ordre aléatoire.
- Une tâche avec des additions comportant des passages à des rangs supérieurs, à résoudre en un temps limité à deux minutes. Pour cette tâche, les types d'addition 7 à 9 ont été utilisés, chaque type étant représenté par dix additions. Il y avait donc au total trente additions, proposées dans un ordre aléatoire.
- Une tâche avec des additions à résoudre sans contrainte de temps. Pour cette tâche,

cinq additions de chaque type ont été reprises, ce qui fait un total de quarante-cinq additions. Celles-ci ont été présentées dans un ordre aléatoire.

Pour chacune de ces trois tâches, les élèves avaient comme consigne : « Effectue les opérations suivantes ».

Tab. 6.3 Les différents types d'additions de nombres décimaux.

Type	Exemple d'addition	Critères de construction
1	0,2 + 0,3	Les deux nombres sont inférieurs à 1. La somme des deux chiffres des dixièmes est un nombre de 1 chiffre.
2	0,02 + 0,03	Les deux nombres sont inférieurs à 1. Pour les deux nombres, les chiffres des dixièmes valent zéro. La somme des deux chiffres des centièmes est un nombre d'un chiffre.
3	0,2 + 0,04	Les deux nombres sont inférieurs à 1. Un des nombres n'a qu'un chiffre après la virgule. L'autre nombre a deux chiffres après la virgule et son chiffre des dixièmes vaut zéro. La somme des deux chiffres présents (autres que zéro) est un nombre d'un chiffre.
4	0,1 + 0,77	Les deux nombres sont inférieurs à 1. Le premier n'a qu'un chiffre après la virgule. Le second a deux chiffres après la virgule, tous deux différents de zéro. La somme du chiffre des centièmes du second nombre et du chiffre des dixièmes du premier nombre doit être un nombre à un chiffre.
5	6 + 0,1	Un naturel d'un chiffre est accompagné d'un décimal qui n'a qu'un chiffre après la virgule.
6	0,14 + 0,51	Les deux nombres sont inférieurs à 1 et ont deux chiffres après la virgule, chacun d'entre eux étant différent de zéro. La somme des chiffres des dixièmes, ainsi que la somme des chiffres des centièmes, sont des nombres à un chiffre.
7	0,25 + 0,37	Les deux nombres sont inférieurs à 1 et ont deux chiffres après la virgule, chacun d'entre eux étant différent de zéro. La somme des chiffres des dixièmes est un nombre à un chiffre, alors que la somme des chiffres des centièmes est un nombre à deux chiffres. Un passage du rang des centièmes vers le rang des dixièmes est donc nécessaire.
8	0,5 + 0,8	Les deux nombres sont inférieurs à 1. Ils n'ont qu'un chiffre après la virgule. La somme des deux chiffres des dixièmes est un nombre de deux chiffres, le passage à l'unité est nécessaire.
9	0,05 + 0,08	Les deux nombres sont inférieurs à 1. Ils n'ont que deux chiffres après la virgule. Les chiffres des dixièmes valent zéro. La somme des deux chiffres des centièmes est un nombre de deux chiffres, le passage au rang des dixièmes est nécessaire.

Le transcodage de nombres décimaux entre les mots nombres et le système décimal de position

Concernant la tâche de transcodage, les dix nombres à écrire dans le système décimal de position sont présentés dans le tableau 6.4. Les dix nombres à écrire en mots nombres sont présentés dans le tableau 6.5. Les consignes étaient expliquées aux élèves à l'aide d'exemples mettant en oeuvre des nombres naturels.

Tab. 6.4 Les nombres à écrire en chiffres.

Deux dixièmes
Quatre dixièmes
Vingt sept centièmes
Quarante trois centièmes
Cinq centièmes
Huit centièmes
Trois millièmes
Sept millièmes
Une unité quatre dixièmes
Cinq unités trois dixièmes

Tab. 6.5 Les nombres à écrire en mots nombres.

0,1
0,5
0,25
0,32
0,07
0,04
0,002
0,006
2,5
3,4

L'ordre des nombres décimaux et la densité

Pour la tâche sur l'ordre des décimaux, il était demandé aux élèves d'écrire un nombre plus grand que celui de gauche, et plus petit que celui de droite. Par exemple, il était demandé de compléter : « $2 < \ldots < 3$ ». Les paires de nombres utilisées pour cette tâche étaient de différents types. Ceux-si sont présentés dans le tableau 6.6.

Tab. 6.6 Les différents types pour l'ordre et la densité des nombres décimaux.

Type	Exemple	Critères de construction	Nombre d'items
1	$2 < \ldots < 4$	Les deux nombres sont deux nombres naturels non successifs	4
2	$2 < \ldots < 3$	Les deux nombres sont deux nombres naturels successifs	4
3	$0{,}5 < \ldots < 0{,}7$	Les deux nombres sont inférieurs à 1 et n'ont qu'un chiffre après la virgule. Les chiffres des dixièmes ne sont pas successifs.	4
4	$0{,}3 < \ldots < 0{,}4$	Les deux nombres sont inférieurs à 1 et n'ont qu'un chiffre après la virgule. Les chiffres qui occupent les rangs des dixièmes sont successifs.	4
5	$2{,}1 < \ldots < 3{,}1$	Les deux nombres sont supérieurs à 1 et inférieurs à 10. Ils ont un chiffre après la virgule. Les chiffres des unités sont successifs et ceux des dixièmes sont identiques.	4
6	$0{,}6 < \ldots < 0{,}70$	Les deux nombres sont inférieurs à 1. Le premier n'a qu'un chiffre après la virgule. Le second a deux chiffres après la virgule. Le chiffre des dixièmes est successif à celui des dixièmes du premier nombre, et le chiffre des centième est zéro.	4
7	$0{,}07 < \ldots < 0{,}7$	Les deux nombres sont inférieurs à 1. Le plus petit nombre a deux chiffres après la virgule, dont celui des dixièmes qui est zéro. Le plus grand nombre a un chiffre après la virgule identique à celui des centièmes du plus petit nombre.	4

Procédure

La figure 6.1 présente les moments de l'année scolaire auxquels les tests ont été proposés aux élèves. Le premier moment, que nous appellerons *temps 1*, correspond au début de l'année scolaire, c'est-à-dire avant que l'apprentissage des nombres décimaux n'ait débuté. Les résultats obtenus pour les tests au temps 1 correspondent donc aux conceptions initiales que les élèves ont des nombres décimaux. Le second moment, que nous appellerons *temps 2*, correspond au moment de l'année où les nombres décimaux ont été présentés aux élèves, mais sans que les activités de structuration et d'exercisation aient été réalisées. Enfin, le troisième moment, que nous appellerons *temps 3*, correspond à la fin de l'année scolaire, lorsque les élèves ont pu structurer leur première rencontre avec les décimaux. Bien entendu, en quatrième primaire les élèves n'ont pas encore tout découvert concernant les nombres décimaux, ils poursuivront cet apprentissage au cours des années suivantes.

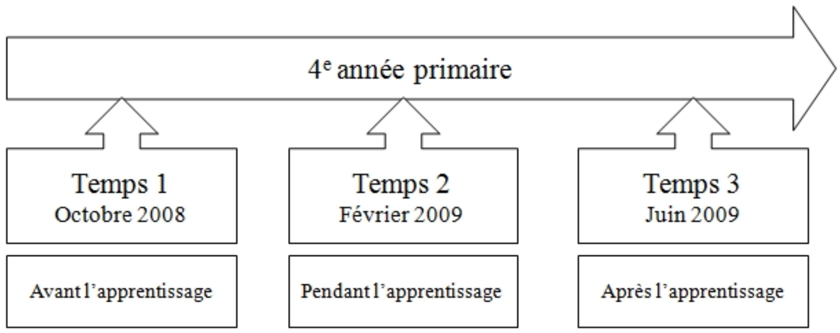


Fig. 6.1 Étude longitudinale : les trois temps pour le testing.

Précisons qu'à chaque temps les tests étaient proposés dans un ordre strictement identique pour tous les élèves, qu'ils soient du groupe *contrôle* ou du groupe *expérimental*. Les consignes étaient elles aussi présentés exactement de la même façon. Le temps total pour réaliser l'ensemble des tâches était compris entre quarante et cinquante minutes.

6.2.2 Résultats

Nous allons à présent découvrir les résultats obtenus par les élèves des groupes *contrôle* et *expérimental* pour les différents tests, aux différents moments de l'année scolaire. Ils apparaissent dans le tableau 6.7. Notons que pour la tâche d'addition, le score maximum pouvant être obtenu est de 5 et que pour les additions avec un temps limité à deux minutes, trente additions étaient proposées. Le score maximum pour le transcodage est de 10. Celui pour la densité est de 4. Enfin, le score maximum pour la comparaison est de 10, alors que septante paires à comparer étaient proposées pour la tâche à réaliser en un temps limité à deux minutes.

Les tests statistiques qui ont été conduits sont des ANOVA à mesures répétées. Dans un premier temps, l'ensemble des variables a été introduit dans l'analyse, selon un design 7 (tâche) $\times$ 3 (temps) $\times$ 2 (groupe). La variable *groupe* (*contrôle* et *expérimental*) étant une variable inter-sujets, et les variables *tâche* (décrites dans la section 6.2.1) et *temps* (les temps 1, 2 et 3) étant des variables intra-sujet.

Tab. 6.7 Les scores pour les sept tâches aux trois temps, pour les groupes contrôle et expérimental.

	Groupe *contrôle*			Groupe *expérimental*		
Temps	1	2	3	1	2	3
Addition	1,7	3,8	4,2	1,7	3,3	4,3
Addition sans report (2')	5,7	15,3	20,5	5,5	13,3	22,4
Addition avec report (2')	4,4	9,9	11,5	4,2	8,6	11,9
Transcodage	4,2	8,8	9,3	4,5	7,3	9,4
Densité	1,9	2,7	3,0	2,0	2,8	3,7
Comparaison	5,1	7,7	8,7	4,9	8,8	9,8
Comparaison (2')	18	29,3	39,1	17,5	33,3	47,0

L'effet principal de groupe n'est pas significatif, $F < 1, \eta^2 = .01$. L'effet de tâche, $F(1.74, 187.91) = 769.04, p < .001, \eta^2 = .88$ est quant à lui significatif, mais ne sera pas détaillé, n'étant pas l'objet principal de l'étude. Il reflète simplement le fait que certaines tâches sont plus difficiles que d'autres pour les élèves. L'effet de temps, $F(1.84, 200.55) = 506.40, p < .001, \eta^2 = .82$ est lui aussi significatif, indiquant une amélioration globale des performances avec le temps. Les interactions temps $\times$ didactique, $F(1.86, 200.55) = 8.63, p < .001, \eta^2 = .07$, temps $\times$ tâche $F(3.32, 358.01) = 171.98, p < .001, \eta^2 = .61$, ainsi que tâche $\times$ didactique, $F(1.74, 187.91) = 4.40, p < .05, \eta^2 = .04$, sont toutes significatives. Cependant, nous choisissons de nous focaliser sur la triple interaction temps $\times$ tâche $\times$ didactique, $F(3.32, 358.01) = 4.89, p < .01, \eta^2 = .04$, qui est elle aussi significative.

Nous présentons donc, pour chaque tâche, la progression des deux groupes d'élèves tout au long de l'année. Pour chaque tâche, des ANOVA à mesures répétées 3 (temps) $\times$ 2 (groupe), ainsi que des t-tests post-hoc (avec la correction de Bonferroni), ont été conduits.

Commençons par les tâches relatives à l'addition de décimaux. Sur les figures 6.2 et 6.3 sont présentés les résultats pour les deux tâches d'addition qui devaient être réalisées en un temps limité.

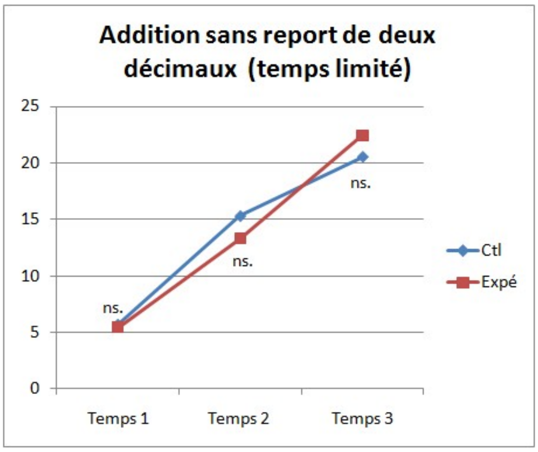


Fig. 6.2 Scores pour l'addition sans report, en temps limité.

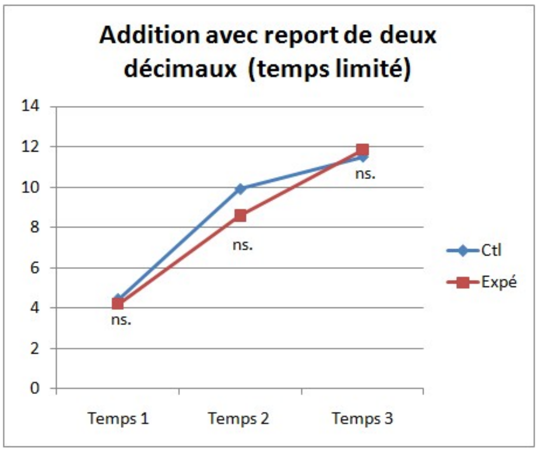


Fig. 6.3 Scores pour l'addition avec report, en temps limité.

Notes. ns. = non significatif, * = $p < .05$, ** = $p < .01$, *** = $p < .001$

Pour les additions sans report (figure 6.2), l'effet de temps est significatif, $F(1.85, 202.04) = 416.69, p < .001, \eta^2 = .79$. L'effet de groupe n'est pas significatif, $F < 1, \eta^2 < .01$. L'interaction temps $\times$ groupe est par contre significative, $F(1.85, 202.04) = 6.36, p < .01, \eta^2 = .05$. Pour l'addition avec report (figure 6.3), l'effet de temps est significatif, $F(1.79, 192.57) = 132.55, p < .001, \eta^2 = .55$, alors que l'effet de groupe $F < 1, \eta^2 < .01$ et l'interaction temps $\times$ groupe, $F < 1, p > .05, \eta^2 < .02$ ne sont pas significatifs.

Le premier constat est que d'une manière générale, les élèves réalisent plus facilement les additions sans report que les additions avec report. En effet, si l'on observe les résultats pour le temps 3, on voit aisément que les élèves réalisent une vingtaine d'additions s'il n'y a pas de passage à un rang supérieur à réaliser, alors qu'ils ne résolvent qu'environ douze additions si un tel passage doit être réalisé. Ensuite, on peut constater que les scores s'améliorent avec le temps. Les résultats sont en effet meilleurs au temps 2 par rapport au temps 1, et au temps 3 par rapport au temps 2. L'interaction temps $\times$ groupe indique que la progression des scores dans le temps n'est pas identique pour les deux groupes. En effet, le groupe *contrôle* s'améliore surtout entre le temps 1 et le temps 2, alors que le groupe *expérimental* s'améliore plus entre le temps 2 et le temps 3, malgré le fait que les groupes ne se différencient pas de manière significative pour chaque temps pris isolément.

Observons à présent les résultats des deux groupes lorsque les additions pouvaient être réalisées sans limite de temps. L'effet de temps est significatif, $F(1.51, 164.42) = 277.36, p < .001, \eta^2 = .72$. L'effet de groupe, $F < 1, \eta^2 < .01$, n'est pas significatif, indiquant toujours une amélioration des résultats avec le temps. L'interaction temps $\times$ groupe est marginalement significative, $F(1.51, 164.42) = 3.24, p = .06, \eta^2 = .03$. Nous pouvons voir sur la figure 6.4 que cette légère interaction s'explique par le fait que les groupes *contrôle* et *expérimental* ne se différencient pas significativement aux temps 1 et 3, mais qu'au temps 2 le groupe *contrôle* obtient de meilleurs résultats que le groupe *expérimental*.

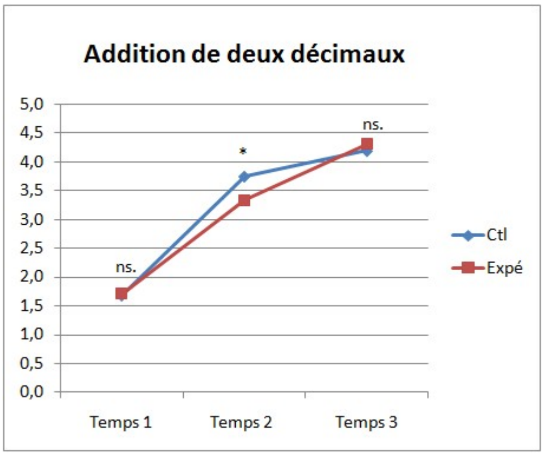


Fig. 6.4 Scores pour l'addition en temps limité.
Notes. ns. = non significatif, * = $p < .05$, ** = $p < .01$, *** = $p < .001$

Voyons à présent les résultats pour les tâches de transcodage. Ils apparaissent à la figure 6.5. L'effet de temps est significatif, $F(1.85, 201.99) = 212.39, p < .001, \eta^2 = .66$. À nouveau, les performances s'améliorent avec le temps. L'effet de groupe n'est pas significatif, $F < 1, \eta^2 = .01$, mais l'interaction temps $\times$ groupe est significative, $F(1.85, 201.99) = 7.07, p = .001, \eta^2 = .06$. Pour cette tâche, les deux groupes ne suivent pas une progression similaire. En effet, alors que les deux groupes ont un score initial semblable, au temps 2, le groupe *contrôle* est nettement supérieur au groupe *expérimental*. Cependant, entre le temps 2 et le temps 3, le groupe *expérimental* progresse sensiblement et, au temps 3, les deux groupes ne se différencient plus.

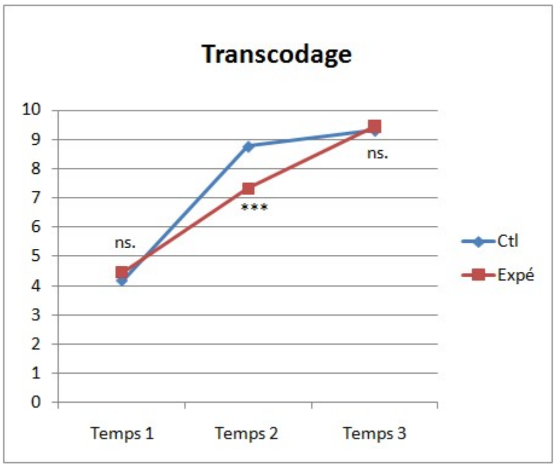


Fig. 6.5 Scores pour le transcodage.

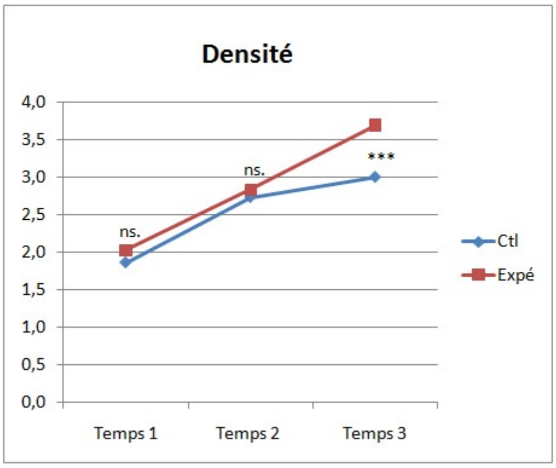


Fig. 6.6 Scores pour la densité.

Notes. ns. = non significatif, * = $p < .05$, ** = $p < .01$, *** = $p < .001$

Les résultats concernant les tâches sur la densité apparaissent à la figure 6.6. L'effet de temps, $F(2, 218) = 146.89, p < .001, \eta^2 = .57$, ainsi que l'effet de groupe $F(1, 109) = 5.03, p < .05, \eta^2 = .04$, sont significatifs. Le temps a un impact positif sur les taux de réponses correctes, et le groupe *expérimental* a de meilleures performances que le groupe *contrôle*. L'interaction temps $\times$ groupe est également significative, $F(2, 218) = 7.34, p < .05, \eta^2 = .06$. Les deux groupes ont des résultats similaires pour le temps 1 et progressent de façon semblable entre le temps 1 et le temps 2. Par contre, au temps 3, le groupe *expérimental* a un score nettement supérieur à celui du groupe *contrôle*.

Enfin, les résultats concernant les tâches sur la comparaison apparaissent à la figure 6.7 pour la tâche sans contrainte de temps, et à la figure 6.8 pour la tâche avec contrainte de temps. Pour la comparaison sans contrainte de temps, l'effet de temps, $F(2, 218) = 233.14, p < .001, \eta^2 = .68$, ainsi que l'effet de groupe, $F(1, 109) = 4.92, p < .05, \eta^2 = .04$, sont significatifs. On constate une fois encore que le temps a un effet positif sur les performances, et que, comme pour la tâche sur la densité, le groupe *expérimental* a de meilleurs scores que le groupe *contrôle*. L'interaction temps $\times$ groupe est elle aussi significative, $F(2, 218) = 6.41, p < .01, \eta^2 = .06$. Les deux groupes ont des résultats similaires au temps 1. Ils progressent entre le temps 1 et le temps 2, et au temps 2, on observe une tendance indiquant des résultats légèrement supérieurs pour le groupe *expérimental* par rapport au groupe *contrôle*. Au temps 3, cette tendance devient une différence significative, le groupe *expérimental* ayant des résultats supérieurs à ceux du groupe *contrôle*. Pour la comparaison avec contrainte de temps, les effets sont semblables et l'interprétation est identique. L'effet de temps, $F(2, 218) = 98.50, p < .001, \eta^2 = .47$, est significatif, alors que l'effet de groupe, $F < 1, \eta^2 < 1$, ne l'est pas. L'interaction temps $\times$ groupe est significative, $F(2, 218) = 7.99, p < .001, \eta^2 = .07$.

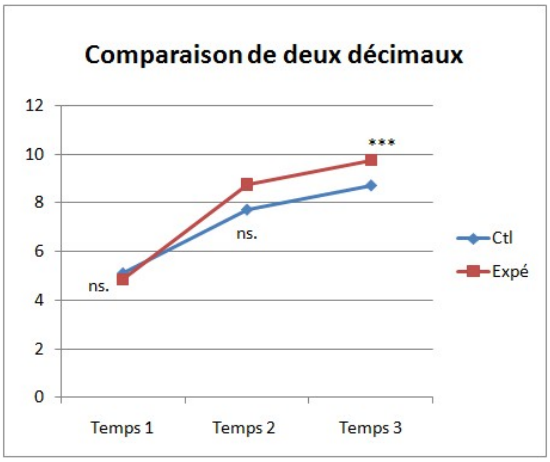


Fig. 6.7 Scores pour la comparaison (sans limite de temps).

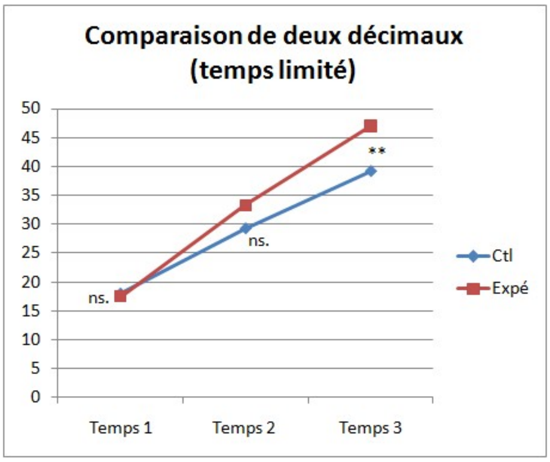


Fig. 6.8 Scores pour la comparaison (temps limité).

Notes. ns. = non significatif, * = $p < .05$, ** = $p < .01$, *** = $p < .001$

6.2.3 Conclusions

Voyons à présent quelles conclusions nous pouvons tirer de cette étude comparative.

Tout d'abord, qu'elles que soient les tâches, les groupes *contrôle* et *expérimental* avaient des résultats tout à fait similaires en début d'année scolaire, avant l'apprentissage des nombres décimaux.

Ensuite, au temps 2, c'est-à-dire en cours d'apprentissage, lorsque les premières activités didactiques sur les décimaux ont été proposées aux élèves, certaines différences apparaissent entre les deux groupes. Dans les tâches d'addition, on observe que le groupe *contrôle* obtient des résultats significativement supérieurs à ceux du groupe *expérimental* lorsqu'il n'y a pas de contrainte de temps. Lorsqu'il y a une contrainte de temps, cet avantage du groupe *contrôle* n'est qu'une tendance. Dans la tâche de transcodage, le groupe *contrôle* obtient également des résultats significativement supérieurs. En ce qui concerne la densité, les deux groupes ne se différencient pas. Enfin, pour les tâches de comparaison de décimaux, les deux groupes ne se différencient pas significativement, mais on observe que les résultats du groupe *expérimental* ont tendance à être supérieurs à ceux de groupe *contrôle*.

Ces différences peuvent s'expliquer par la manière dont ont été conçues les activités didactiques proposées au groupe *expérimental*. En effet, pour le groupe *expérimental*, les nombres décimaux ont été introduits par une activité mettant en oeuvre les nombres réels. D'emblée, ces élèves ont été confrontés à ce que sont les nombres décimaux parmi les autres nombres, et à la propriété de densité de ces nombres. De plus, les décimaux n'ont pas été limités aux dixièmes ou aux centièmes. Les élèves ont pu se rendre compte, dès les premières activités, qu'avec certains nombres à virgule « ça ne s'arrête jamais . . . ». Tout cela a été découvert à travers une attention particulière accordée au système décimal de position.

On peut donc comprendre que le groupe *expérimental* ait, déjà au temps 2, tendance à être supérieur au groupe *contrôle* sur les tâches de comparaison de décimaux, même si, pour la densité, la différence n'est pas encore significative. Selon les enquêtes réalisées auprès des enseignants du groupe *contrôle*[1], les élèves du groupe *contrôle* ont d'abord rencontré des nombres décimaux limités aux dixièmes. Assez vite, ils ont appris à additionner ces nombres et à les lire grâce aux mots nombres. Ceci expliquerait pourquoi le groupe *contrôle* est, au temps 2, supérieur au groupe *expérimental* pour l'addition et le transcodage de nombres décimaux. Notons aussi que, dans le groupe *contrôle*, des activités de structuration étaient proposées « pas à pas », notamment par une structuration après la rencontre avec des décimaux limités aux dixièmes, alors que dans le groupe *expérimental*, les activités de structuration ont été proposées plus tard. Il en va de même pour l'institutionnalisation de l'abaque et de son utilisation.

Au temps 3, certaines différences entre les deux groupes se sont effacées, alors que d'autres se sont marquées davantage. Pour les tâches sur l'addition et sur le transcodage, il n'y a plus de différence significative. Globalement, le groupe *contrôle* a mieux progressé que le groupe *expérimental* entre le temps 1 et le temps 2. Cependant, au temps 3, le groupe *expérimental* a atteint un niveau équivalent au groupe *contrôle*. La progression du groupe *expérimental* est donc plus linéaire, alors que la progression du groupe *contrôle* se marque par un palier au temps 2. Cela explique les interactions observées entre la variable temps et la variable groupe. En ce qui concerne les tâches sur la comparaison et la densité, on observe que le groupe *expérimental* obtient des résultats significativement supérieurs à ceux du groupe *contrôle*. Les activités que nous avons proposées au groupe *expérimental* conduisent donc à de meilleurs résultats concernant l'ordre des nombres décimaux et leur propriété de densité. Vraisemblablement, les élèves du groupe *expérimental* ont mieux compris ce qu'étaient les nombres décimaux et leur expression dans le système décimal de position. De plus, la compréhension de la propriété de densité représentant un niveau élevé de compréhension des nombres décimaux, nous pouvons dire que la compréhension des nombres décimaux est, en fin de 4^{e} primaire, supérieure dans le groupe *expérimental* par rapport au groupe *contrôle*.

6.3 Étude 2 - Impact de la didactique à plus long terme

L'objectif de cette deuxième étude est double :
- premièrement, nous souhaitons savoir si les différences observées lors de l'étude 1 entre les élèves des groupes *expérimental* et *contrôle* se sont maintenues à plus long terme ;
- deuxièmement, nous souhaitons savoir si la simple participation à un design expérimental a eu un impact sur les performances du groupe *contrôle* lors de la première étude.

Pour rencontrer ces objectifs, nous avons testé des élèves en début de 5^{e} primaire. Les élèves des groupes *expérimental* et *contrôle* ont à nouveau été comparés afin d'observer l'impact à plus long terme de la didactique que nous proposons. Ensuite, des élèves n'ayant pas participé au design expérimental mis en place en 4^{e} primaire ont également été testés

[1] Les résultats de ces enquêtes ne sont actuellement pas publiés.

afin d'observer l'impact de la participation à l'étude.

6.3.1 Méthodologie

Participants

Au total, cent quarante-sept élèves de 5^{e} primaire ont été testés lors de cette deuxième étude. Ces élèves sont issus de sept classes différentes et constituent trois groupes :
– Le groupe *expérimental* : reprenant des élèves du groupe *expérimental* de la première étude, c'est-à-dire ayant suivi en 4^{e} primaire la séquence didactique développée par l'équipe de recherche.
– Le groupe *contrôle* : reprenant des élèves du groupe *contrôle* de la première étude, c'est-à-dire suivi un enseignement plus « habituel », sans intervention de l'équipe de recherche.
– Le groupe *autre* : composé d'élèves n'ayant pas participé à la première étude.
Ce troisième groupe apparait suite aux changements dans les classes lors du passage en 5^{e} primaire. De nouveaux élèves sont arrivés, d'autres ont changé d'école et des élèves d'une même classe de 4^{e} ont pu être répartis dans différentes classes de 5^{e}. Notons également que, suite à cela, des élèves présents lors de la première étude n'ont pas pu être re-testés. Le tableau 6.8 présente les caractéristiques de ces trois groupes.

Tab. 6.8 Caractéristiques de l'échantillon d'élèves.

Groupe	Nombre	Garçons	Filles	Âge moyen	Écart-type
Contrôle	56	25	31	10 ans et 4 mois	4,92 mois
Expérimental	54	27	27	10 ans et 4 mois	5,58 mois
Autre	37	18	19	/	/

Tâches

Le test utilisé lors de cette étude est le pré-test papier développé pour le logiciel Decival. Ce test comporte, d'une part, certaines tâches déjà utilisées lors de la première étude :

– la comparaison de deux nombres décimaux,
– l'addition de deux nombres décimaux,
– et l'ordre des nombres décimaux et la densité ;

et, d'autre part, de nouvelles tâches :

– la soustraction de deux nombres décimaux,
– et la multiplication de deux nombres décimaux.

Chacune de ces tâches comporte 20 items pouvant être regroupés par type. Quel que soit la tâche, aucune contrainte de temps n'est imposée aux élèves. Nous allons détailler ces différentes tâches dans les sections ci-dessous.

Comparaison de deux nombres décimaux

Pour la comparaison de deux nombres décimaux, les items sont de sept types différents. Ces types d'items, présentés dans le tableau 6.9 ci-dessous, sont strictement identiques à ceux utilisés lors de la première étude. Pour plus de détails quant à la construction de ces types, se référer au tableau 6.2, à la page 138. Vingt paires ont été présentées aux élèves.

Les paires de nombres sont présentées dans un ordre aléatoire. La consigne de cette tâche était : « Pour chaque paire de nombres, entoure le plus grand ou place un « = » si les nombres sont égaux ».

Tab. 6.9 Type de paires pour la comparaison de nombres décimaux.

Type	1	2	3	4	5	6	7
Exemple de paire	0,1 vs 0,3	0,1 vs 0,20	0,1 vs 0,01	0,2 vs 0,01	0,1 vs 0,02	0,2 vs 0,10	0,1 vs 0,10
Nombre d'items	2	3	3	3	3	3	3

Addition de deux nombres décimaux

Pour l'addition de deux nombres décimaux, nous avons utilisé sept types différents d'additions (cf. tableau 6.10). Ces types sont identiques à ceux utilisés lors de l'étude 1, à l'exception des types 6 et 7 qui ont été supprimés (cf. tableau 6.3 page 139).

Les additions sont présentées dans un ordre aléatoire. La consigne de cette tâche était : « Effectue les calculs suivants ».

Tab. 6.10 Les différents types d'additions de nombres décimaux.

Type	1	2	3	4	5	8	9
Exemple de paire	0,2 + 0,3	0,02 + 0,03	0,2 + 0,04	0,1 + 0,77	6 + 0,1	0,5 + 0,8	0,05 + 0,08
Nombre d'items	2	3	3	3	3	3	3

Soustraction de deux nombres décimaux

Pour la soustraction de deux nombres décimaux, les items sont de sept types différents. Ces différents types d'item ainsi que leurs critères de construction sont présentés dans le tableau 6.11 ci-dessous. Au total, vingt soustractions sont proposées aux élèves.

Les soustractions sont présentées dans un ordre aléatoire quel que soit leur type. La consigne de cette tâche était : « Effectue les calculs suivants ».

Tab. 6.11 Les différents types de soustraction de nombres décimaux.

Type	Exemple de paire	Critères de construction	Nombre d'items
1	0,3 - 0,1	Les deux nombres sont inférieurs à 1 et n'ont qu'un chiffre après la virgule.	2
2	0,06 - 0,05	Les deux nombres sont inférieurs à 1. Ils ont deux chiffres après la virgule et les chiffres des dixièmes valent zéro.	3
3	0,7 - 0,04	Les deux nombres sont inférieurs à 1. Le plus grand nombre n'a qu'un chiffre après la virgule. Le plus petit nombre a deux chiffres après la virgule et son chiffre des dixièmes vaut zéro. L'emprunt au rang des dixièmes est nécessaire.	3
4	0,2 - 0,15	Les deux nombres sont inférieurs à 1. Le plus grand nombre n'a qu'un chiffre après la virgule. Le plus petit nombre a deux chiffres non nuls après la virgule. L'emprunt au rang des dixièmes est nécessaire.	3
5	0,87 - 0,3	Les deux nombres sont inférieurs à 1. Le plus grand nombre a deux chiffres non nuls après la virgule. Le plus petit nombre n'a qu'un chiffre après la virgule.	3
6	0,15 - 0,01	Les deux nombres sont inférieurs à 1. Le plus grand nombre a deux chiffres non nuls après la virgule. Le plus petit nombre a deux chiffres après la virgule dont celui des dixièmes égal à zéro.	3
7	4 - 0,9	Un décimal qui a un chiffre après la virgule est à soustraire d'un naturel d'un chiffre.	3

Multiplication de deux nombres décimaux

Pour la multiplication de deux nombres décimaux, les items sont de cinq types différents. Ces différents types d'items ainsi que leurs critères de construction sont présentés dans le tableau 6.12 ci-dessous. Vingt multiplications ont été proposées aux élèves.

Les multiplications sont présentées dans un ordre aléatoire. La consigne de cette tâche était : « Effectue les calculs suivants ».

Tab. 6.12 Les différents types de multiplication de nombres décimaux.

Type	Exemple de multiplication	Critères de construction	Nombre d'items
1	$3 \times 0{,}3$	Un naturel d'un chiffre et un nombre inférieur à 1 avec une partie décimale d'un chiffre. Le produit des deux chiffres en présence est un nombre d'un chiffre.	4
2	$6 \times 0{,}7$	Un naturel d'un chiffre et un nombre inférieur à 1 avec une partie décimale d'un chiffre. Le produit des deux chiffres en présence est un nombre de deux chiffres.	4
3	$0{,}2 \times 0{,}3$	Deux nombres inférieurs à 1 ayant une partie décimale d'un chiffre. Le produit des deux chiffres en présence est un nombre d'un chiffre.	4
4	$0{,}5 \times 0{,}8$	Deux nombres inférieurs à 1 ayant une partie décimale d'un chiffre. Le produit des deux chiffres en présence est un nombre à deux chiffres (se terminant ou non par zéro).	4
5	$0{,}5 \times 0{,}03$	Deux nombres inférieurs à 1. Un nombre a une partie décimale d'un chiffre. Le second a une partie décimale de deux chiffres et le chiffre des dixièmes vaut zéro. Le produit des deux chiffres est un nombre de deux chiffres.	4

Ordre des nombres décimaux et densité

La tâche sur l'ordre et la densité des nombres décimaux est construite à partir des cinq conditions décrites dans le tableau 6.13

Les items sont présentés dans un ordre aléatoire. Il était demandé à l'élève : « Écris au centre un nombre plus grand que celui de gauche et plus petit que celui de droite. Par exemple : $1 < \ldots 2 \ldots < 3$. Si tu penses qu'il n'y a aucun nombre, place « / ». Si tu penses qu'il y a un nombre, mais que tu ne sais pas lequel, écris « ? ».

Tab. 6.13 Les différents types pour l'ordre et la densité des nombres décimaux.

Type	Exemple	Critères de construction	Nombre d'items
1	$2 < \ldots < 3$	Les deux nombres sont deux nombres naturels successifs	4
2	$2{,}1 < \ldots < 3{,}1$	Les deux nombres sont supérieurs à 1 et inférieurs à 10. Ils ont un chiffre après la virgule. Les chiffres des unités sont successifs et ceux des dixièmes sont identiques.	4
3	$0{,}5 < \ldots < 0{,}7$	Les deux nombres sont inférieurs à 1 et n'ont qu'un chiffre après la virgule. Les chiffres des dixièmes ne sont pas successifs.	3
4	$0{,}3 < \ldots < 0{,}4$	Les deux nombres sont inférieurs à 1 et n'ont qu'un chiffre après la virgule. Les chiffres qui occupent les rangs des dixièmes sont successifs.	5
5	$0{,}07 < \ldots < 0{,}7$	Les deux nombres sont inférieurs à 1. Le plus petit a deux chiffres après la virgule dont celui des dixièmes égal à zéro. Le plus grand a un chiffre après la virgule identique à celui des centièmes du plus petit nombre.	4

Procédure

Nous avons testé les trois groupes d'élèves précédemment décrits en octobre après la rentrée scolaire, et avant toute *révision* sur les nombres décimaux.

Les tests ont été proposés à tous les élèves dans le même ordre, qu'ils soient du groupe *expérimental*, *contrôle* ou du groupe *autre*. Aucune consigne, outre celles par écrit, n'était donnée. Le temps total pour effectuer les différentes tâches était d'environ trente minutes.

6.3.2 Résultats

Dans le tableau 6.14 apparait, pour chaque tâche, un score moyen sur 20, ainsi que l'écart-type, qui ont été calculés pour chaque groupe.

Tab. 6.14 Les scores pour les cinq tâches, pour les groupes contrôle,expérimental et autre.

		Groupe		
		Expérimental	Contrôle	Autre
Comparaison	Moyenne	19,31	17,70	17,27
	Écart-type	2,05	3,51	4,17
Addition	Moyenne	16,61	16,93	13,81
	Écart-type	3,25	3,53	4,96
Soustraction	Moyenne	14,98	13,29	11,73
	Écart-type	5,39	5,73	6,10
Multiplication	Moyenne	7,11	5,84	5,30
	Écart-type	2,87	2,79	3,23
Densité	Moyenne	18,80	15,09	13,11
	Écart-type	2,11	5,25	6,34

Des ANOVA à mesures répétées ont été réalisées selon un design 5 (tâche) $\times$ 3 (groupe), la variable *tâche* étant une variable inter-sujet et la variable *groupe*, une variable intra-sujet.

Nous observons un effet principal significatif pour de la tâche, $F(3.42, 492.22) = 239.52$, $p<.001,\eta^2=.63$. Cela signifie que, tous groupes confondus, les tâches n'ont pas le même niveau de difficulté. La comparaison deux à deux des tâches indique que la comparaison de deux décimaux est la tâche la mieux réussie avec une moyenne de 18,09/20. Les tâches classées ensuite sont l'addition (15,78/20) et la densité (15,67/20). Cependant, ces résultats ne se différencient pas significativement, les tâches sont donc de difficulté équivalente. La soustraction arrive ensuite avec une moyenne de 13,33/20. Enfin, la tâche la moins bien réussie, quel que soit le groupe d'élèves, est la multiplication (6,08/20).

L'effet principal de la didactique est lui aussi significatif, $F(2, 144) = 14.31$, $p<.000,\eta^2=.17$. Le groupe *expérimental* obtient une moyenne globale de 15,36/20 et se différencie significativement des groupes *contrôle* (13,77/20) et *autre* (12,24). Ces deux derniers groupes sont significativement différents.

Nous observons également une double interaction *tâche* $\times$ *groupe* significative, $F(6.84, 492.223) = 3.64$, $p<.001,\eta^2=.05$. Les performances aux différentes tâches ne sont pas semblables pour les trois groupes. Afin d'analyser ce résultat plus en détails, une analyse de variance (ANOVA) a été effectuée séparément pour chaque tâche.

La figure 6.9 ci-dessous illustre les différences observées.

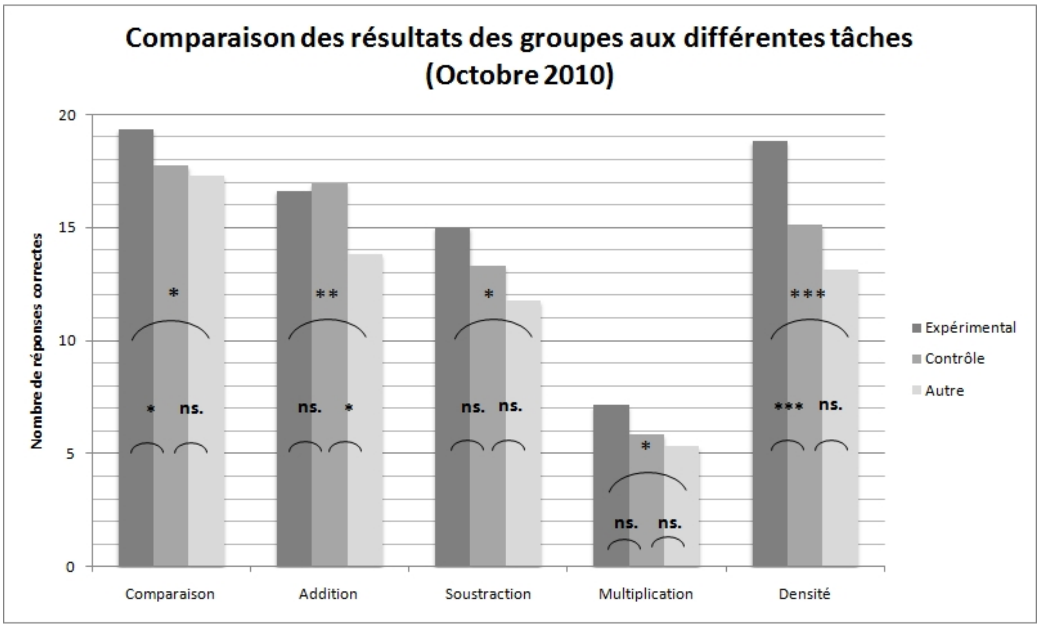


Fig. 6.9 Comparaison entre les groupes aux différentes tâches.
Notes. ns. = non significatif, * = $p < .05$, ** = $p < .01$, *** = $p < .001$

Pour la comparaison, nous observons que le groupe *expérimental* est significativement différent des groupes *contrôle* et *autre*. Le groupe *contrôle* n'est quant à lui pas significativement différent du groupe *autre*. Il en est de même pour la tâche sur la densité.

Pour l'addition de deux nombres décimaux, nous observons par contre que le groupe *expérimental* n'est pas significativement différent du groupe *contrôle*, mais bien du groupe *autre*. En outre, les groupes *contrôle* et *autre* se différencient de façon significative.

Enfin, pour les tâches de soustraction et de multiplication de deux nombres décimaux, aucune différence significative n'est observée entre le groupe *expérimental* et le groupe *contrôle*. De même, le groupe *contrôle* ne se différencie pas du groupe *autre*. Cependant, les différences entre le groupe *expérimental* et le groupe *autre* sont significatives.

6.3.3 Conclusions

Différentes conclusions peuvent être tirées des résultats de cette seconde étude comparative.

Tout d'abord, nous observons que le groupe *expérimental* obtient, comme deux mois auparavant, des résultats significativement supérieurs à ceux du groupe *contrôle* pour les tâches de comparaison et de densité. Pour les autres tâches, les groupes ne se différencient pas significativement. Comme lors de la première étude, nous pouvons penser que la séquence didactique choisie a un impact positif sur les connaissances liées à l'ordre des nombres décimaux et à leur propriété de densité. Ces connaissances reflètent sans doute une meilleure compréhension de l'extension du système décimal de position aux nombres décimaux. Cette meilleure compréhension semble se maintenir à moyen terme, c'est-à-dire en début de 5^{e} primaire.

Nous observons ensuite que le groupe *contrôle* a des résultats globaux supérieurs à ceux du groupe *autre*. Cependant, si l'on observe chaque tâche séparément, on constate que la différence entre ces deux groupes ne se marque que pour l'addition. On peut penser que la simple participation à un protocole expérimental a eu un impact sur les performances des élèves, par l'intermédiaire d'une attitude différente des enseignants. Il se pourrait en effet que les enseignants du groupe *contrôle* aient proposé plus que de coutume à leurs élèves des exercices sur les nombres décimaux. Cependant, il nous est impossible de différencier cette hypothèse, d'une différence de performance entre ces deux groupes due à d'autres facteurs.

Enfin, nous observons que le groupe *expérimental* a des performances significativement supérieures à celles du groupe *autre*. On constate aussi que cette différence est plus marquée que celle entre les groupes *expérimental* et *contrôle*. Ceci est une conséquence logique des différences précédemment analysées. Nous pouvons soit penser à l'impact de la participation à un design expérimental et imaginer que le groupe *expérimental* aurait de meilleures performances que d'autres groupes d'élèves n'ayant pas du tout été *prévenus* qu'un test sur les nombres décimaux allait être réalisé, soit penser que pour une raison inconnue les élèves constituant ce groupe *autre* ont des performances plus faibles que les autres élèves. Pour différencier ces deux hypothèses, le groupe *autre* aurait dû comporter un plus grand nombre d'élèves.

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Rue E. Vandervelde, 5
1400 Nivelles
00 32 (0)67 21 25 27
Fax : 00 32 (0)67 21 22 02
http://www.crem.be
info@crem.be