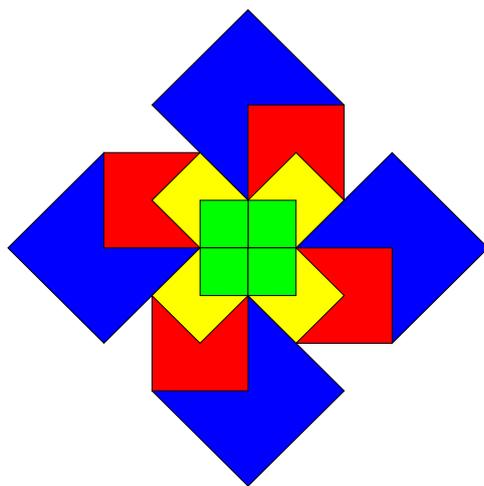


Apprenti Géomètre

**Impact du logiciel
« Apprenti Géomètre »
sur certains apprentissages**

Tome 6



*Ministère
de la Communauté
française*



CREM

Centre de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques

2007

Sixième partie

Annexes

Annexe A

Quelques outils de base

Dans cette annexe, nous présentons sommairement quelques outils théoriques évoqués et/ou utilisés dans le corps du texte. Pour une approche détaillée de ces outils, le lecteur intéressé pourra consulter les ouvrages mentionnés dans la bibliographie.

A.1 Les cadres de R. Douady

La mathématique est souvent divisée en domaines tels que « Algèbre », « Géométrie », « Analyse », etc. Cependant, les mathématiciens insistent sur l'unité de leur science. Celle-ci se marque notamment par les connexions qui existent entre les différents domaines et qui permettent parfois de résoudre un problème en le transposant d'un domaine dans un autre. Avec Régine DOUADY, [31], nous dirons « d'un *cadre* dans un autre ».

R. Douady précise :

Le mot « cadre » est à prendre au sens usuel qu'il a quand on parle de cadre algébrique, cadre arithmétique, cadre géométrique. . . , mais aussi cadre qualitatif ou cadre algorithmique.

Disons qu'un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et relations.

Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outil, des objets du cadre. Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée. Par ailleurs, la familiarité, l'expérience peuvent conduire à des conflits entre ce qu'on attend et ce qui se produit effectivement et par suite, renouveler les images ou à les faire évoluer.

Nous concevons la notion de cadre comme une notion dynamique.

R. DOUADY utilise des changements de cadre à l'occasion d'activités de résolution de problèmes. Elle y associe une *dialectique outil-objet* Nous reviendrons sur ces questions dans la suite.

A.2 Les registres de R. Duval

Le deuxième paragraphe de la citation de R. DOUADY mentionne comme constituants d'un cadre les « formulations diverses » des objets d'un cadre et des relations entre ces objets. Cette idée de formulation rejoint la notion de « registre sémiotique ⁽¹⁾ » développée par Raymond DUVAL, [33].

R. DUVAL considère que les représentations sémiotiques d'un objet ne constituent pas seulement un moyen de communication, mais qu'elles jouent un rôle essentiel dans l'*appréhension conceptuelle* de ces objets. Celle-ci nécessiterait même le recours à plusieurs *registres de représentations sémiotiques* ⁽²⁾ pour que les objets mathématiques ne soient pas confondus avec leurs représentations et qu'ils puissent aussi être reconnus dans chacune de leurs représentations.

Pour qu'un système de représentation sémiotique soit reconnu comme registre, trois activités fondamentales doivent être permises par ce système (voir [33]) :

1. *Former* une représentation identifiable d'un objet dans le registre considéré, et cela conformément à des règles précises (variant selon le registre).
2. *Traiter* une représentation dans le registre où elle a été formée.

Un traitement peut transformer une représentation d'un objet en une autre du même objet appartenant au même registre. Exemple : le calcul $2+3 = 5$ permet de remplacer la représentation "2+3" de l'objet "cinq" en sa représentation "5". Les deux représentations "2+3" et "5" sont bien dans un même registre, que l'on pourrait qualifier d'arithmétique, cependant que "cinq" est en fait une représentation du même objet dans le registre de la langue naturelle.

Passer de "5" à "cinq" n'est donc pas un traitement, mais bien une *conversion* qui relève de la troisième activité fondamentale.

3. *Convertir* une représentation d'un objet dans un registre en une représentation du même objet dans un autre registre. La conversion peut s'accompagner d'une perte d'information.

Non seulement une conversion peut entraîner une perte d'information, mais de plus elle peut aussi modifier en profondeur les traitements à effectuer sur les représentations d'un objet donné. Par exemple le calcul « un demi plus un quart » ne donne pas lieu aux mêmes traitements selon qu'on le réalise dans le registre décimal ($0,5 + 0,25$) ou dans celui des fractions ($\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$).

A.3 Les niveaux de Van Hiele

Pierre et Dina VAN HIELE ont élaboré une théorie portant sur l'existence de *niveaux* de pensée. Dans leur esprit, cette théorie a une portée générale. En témoigne le titre

⁽¹⁾ **Sémiotique** : 1) Théorie générale des signes. 2. Étude des pratiques signifiantes dans les divers domaines de la communication. (*Larousse, 2005*)

⁽²⁾ On dira *registre sémiotique* ou même tout simplement *registre*.

de l'article publié en 1958/59 dans *Mathematica & Paedagogia*, [74] : *La signification des niveaux de pensée dans l'enseignement par la méthode déductive*. Toutefois ils n'ont traité que le seul exemple de la géométrie, et très rapidement l'habitude s'est prise de ne considérer leur théorie que dans ce contexte.

Les VAN HIELE distinguent 5 niveaux de pensée.

Niveau 0

Ce niveau est purement visuel. Les figures sont jugées d'après leur apparence globale. Leurs propriétés ne sont pas reconnues et encore moins énoncées. Par contre, l'enfant distingue un carré d'un rectangle et les considère comme des entités différentes.

Niveau 1

L'enfant distingue maintenant les propriétés de certaines figures. Il est capable d'effectuer certaines analyses. Il reconnaît qu'un carré, comme un rectangle, a quatre angles droits. Une figure peut se reconnaître à ses propriétés : un rectangle dessiné avec peu de soin est reconnu comme étant un rectangle, dès lors que l'élève accepte que les quatre angles sont droits. Mais des connexions entre propriétés ne sont pas encore établies. Par exemple, du parallélisme des côtés d'un quadrilatère, on ne déduit pas des égalités d'angles. Ainsi, la déduction n'est pas encore disponible.

Niveau 2

À ce niveau, les propriétés s'ordonnent, elles se déduisent les unes des autres. C'est le stade du « je sais que . . . je déduis que ». L'élève peut éventuellement comprendre plusieurs inférences consécutives, il ne comprend pas pour autant ce qu'est une démonstration. Quant aux figures elles sont maintenant *définies* par leurs propriétés, elles peuvent être l'objet de classifications. Un carré est reconnu comme étant un rectangle.

Niveau 3

Cette fois, l'élève comprend ce que sont un axiome, un théorème, une définition. Il est capable de se mouvoir dans un système axiomatique. Il peut élaborer lui-même des démonstrations. Il a assimilé la différence entre condition nécessaire et condition suffisante, il distingue un théorème de sa réciproque.

Niveau 4

L'existence du dernier niveau est controversée. Ce serait le niveau à atteindre pour accepter que les axiomes d'une théorie n'ont pas une vérité absolue, que des systèmes axiomatiques différents, voire contradictoires, peuvent coexister. En particulier admettre l'existence de géométries non euclidiennes supposerait d'atteindre ce niveau.

Les niveaux qui viennent d'être décrits sont parfois appelés respectivement les niveaux de la reconnaissance, de l'analyse, de l'ordonnement, de la déduction et de la rigueur.

On notera que les niveaux 0 et 1 sont décrits essentiellement en termes d'aptitudes visuelles (reconnaissance de formes et de propriétés), alors que les niveaux 2, 3 et 4 sont décrits essentiellement en termes d'aptitudes au raisonnement. Ceci montre le caractère général de la théorie développée. Cela montre aussi le rôle particulier de la géométrie dans l'apprentissage du raisonnement.

A.4 La déconstruction dimensionnelle selon Duval

Dans [34], R. DUVAL analyse *les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie*. Il attire notamment l'attention sur les problèmes de visualisation en proposant une classification des manières de voir en fonction du rôle des figures dans les activités géométriques dans les activités géométriques proposées aux élèves. Ensuite, il aborde la question du rôle de la visualisation dans le raisonnement en géométrie.

Il n'est guère possible de résumer en quelques phrases le contenu d'un texte aussi dense et substantiel. Aussi, nous nous contenterons de présenter le tableau résumant la classification des manières de voir en quatre « points de vue » et de décrire ce que DUVAL appelle la « déconstruction dimensionnelle des figures », une manière de voir qu'il considère comme *requise en géométrie*.

A.4.1 Une classification des manières de voir en géométrie

D'après DUVAL, ce ne sont pas les mêmes manières de voir qui sont sollicitées d'un type d'activité à un autre. Il en distingue quatre qu'il présente comme des « points de vue ».

Le point de vue du botaniste

Type d'activité : Reconnaître des formes à partir de qualités visuelles d'un contour. Une forme particulière est privilégiée comme typique.

Mobilisation des propriétés géométriques : Il n'y a pas de liens entre les différentes propriétés (pas de définition mathématique possible).

Le point de vue de l'arpenteur-géomètre

Type d'activité : Mesurer les bords d'une surface sur un terrain ou sur un dessin (variation d'échelle de grandeur et donc de procédure de mesure).

Mobilisation des propriétés géométriques : Les propriétés sont des critères de choix pour les mesures à faire. Elles ne sont utiles que si elles renvoient à une formule permettant un calcul.

Le point de vue du constructeur

Type d'activité : Décomposer une forme en tracés constructibles à l'aide d'un instrument. Il faut souvent passer par des tracés auxiliaires qui n'appartiennent pas à la figure finale.

Mobilisation des propriétés géométriques : Les propriétés sont des contraintes d'un ordre de construction. Certaines propriétés sont obtenues par une seule opération de traçage, d'autres exigent plusieurs opérations.

Le point de vue de l'inventeur-bricoleur

Type d'activité : Transformer des formes les unes dans les autres. Il faut ajouter des tracés réorganisateurs dans la figure finale pour initialiser ces transformations.

Mobilisation des propriétés géométriques : Les propriétés renvoient implicitement à un réseau plus complexe que la trame de départ (une trame de droites en géométrie plane, ou une trame d'intersection de plans...).

On constate aisément la ressemblance entre le point de vue du bricoleur et le niveau 0 de VAN HIELE. Cette ressemblance ne s'étend pas vraiment aux niveaux et points de vue suivants, VAN HIELE s'intéressant plus aux activités de raisonnement et DUVAL aux activités de construction. Cependant, comme nous allons essayer de le décrire, DUVAL ne sépare pas les activités de construction des activités de raisonnement.

A.4.2 La déconstruction dimensionnelle des figures

Dans le point de vue de l'inventeur-bricoleur, DUVAL mentionne le *renvoi à un réseau plus complexe (droites ou plans) que la figure de départ*. Un tel renvoi lui semble nécessaire dans le cadre d'une résolution de problème. Il considère l'exemple suivant :

Comment partager, d'un seul coup de ciseau, un triangle de manière à pouvoir assembler les deux morceaux en un parallélogramme ?

Un tel problème — dit DUVAL — exige une *déconstruction visuelle* d'une forme élémentaire pour pouvoir ensuite obtenir la reconfiguration demandée. Cela mobilise une capacité fondamentale : ajouter des tracés supplémentaires à une figure de départ afin de découvrir une procédure de résolution. On décompose donc la figure de départ en unités figurales plus élémentaires (on « déconstruit » une forme qui résultait d'une construction).

De plus, le raisonnement s'appuie sur des déconstructions en unités de dimension inférieure à celle de la figure de départ. Par exemple dire qu'un parallélogramme est un quadrilatère comportant deux paires de côtés parallèles revient à définir une forme de dimension 2 à l'aide de propriétés (le parallélisme) portant sur des objets de dimension 1. Ces déconstructions sont donc qualifiées de *dimensionnelles*.

Ainsi pour DUVAL, la résolution d'un problème de géométrie passe par la perception d'un réseau d'éléments, de dimension inférieure à celle de la figure de départ, qui complète cette figure et fournit les éléments nécessaires à la résolution. Il n'hésite pas à affirmer que *la décomposition par déconstruction dimensionnelle des formes perçues correspond au fonctionnement profond de la visualisation en géométrie*.

Pour illustrer cette idée, la figure ci-contre, extraite de [34], présente la déconstruction dimensionnelle d'un triangle en vue de résoudre le problème énoncé plus haut.

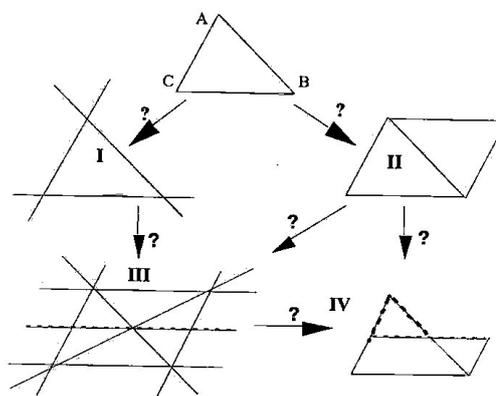


Fig. A.1

Terminons ce (très) bref résumé par un dernier extrait de [34] :

*pour qu'une figure donne lieu à une visualisation géométrique, elle doit émerger [...] d'un « circuit de visualisation » organisé autour d'une trame de tracés à une et deux dimensions, car à partir d'un **réseau de droites** on peut faire apparaître une grande diversité de formes à deux dimensions [...] que l'on peut faire apparaître au gré des questions que l'on se pose. Un tel réseau permet donc **de voir le passage mathématique***

des unes aux autres, c'est-à-dire les propriétés qui le rendent possible.

A.5 La croissance cognitive selon Tall

Bon nombre de spécialistes en histoire, sociologie ou anthropologie, estiment que la connaissance est engendrée par un processus continu d'investigations, motivées par l'incertitude et le doute, et sanctionnées par des négociations sociales, à l'intérieur d'une communauté de chercheurs. Donc, toute connaissance est vue comme construite. Pour que l'enseignement des mathématiques soit efficace, il est clairement important de savoir *comment* la connaissance mathématique se construit.

Ainsi qu'on l'a évoqué plus haut, avant qu'un élève intègre un concept mathématique donné à ses connaissances, il met en œuvre des objets mentaux (dans la terminologie de FREUDENTHAL), des conceptions (dans celle de BALACHEFF) qui sont performantes dans des contextes déterminés. Ces conceptions évoluent à l'occasion d'une confrontation à des tâches pour lesquelles elles se révèlent insuffisantes.

Prenons comme exemple le nombre « 5 ». Un jeune enfant le rencontrera en différentes occasions, au départ de procédures de comptage, puis de procédures de calcul. Le symbole « 5 » désigne à la fois le nombre de doigts d'une main, le nombre de lettres du mot « aimer », le dernier terme de la suite 1, 2, 3, 4, 5, la somme de 2 et 3, la somme de 4 et 1, la différence entre 9 et 4, le quotient de 10 par 2, le chiffre 5, le mot « cinq » ... Au fil du temps, le nombre 5 acquiert des propriétés de plus en plus nombreuses. Il entre dans un schéma de relations serré avec d'autres objets. Simultanément, cet objet 5 devient de plus en plus familier. L'accès à ses propriétés, notamment à ses relations avec d'autres objets, devient de plus en plus facile.

C'est en manipulant souvent l'*objet mental* « 5 », en lui appliquant des procédures variées que se forme le *concept* « 5 ». Un concept est une notion *statique*, mais ce sont des procédures *dynamiques* qui nous permettent de l'obtenir comme résultat.

Autre exemple : au départ, la fonction $x \mapsto 3x + 2$ n'est qu'une procédure qui permet d'obtenir 17 quand on remplace x par 5, 20 quand on remplace x par 6, etc. À force de manipuler des fonctions, l'élève va transformer ces procédures en de véritables concepts, jouissant eux-mêmes de propriétés (croissance, continuité, ...) et auxquels il est possible d'appliquer de nouvelles procédures (additionner, dériver, intégrer, ...)

Ainsi l'apprentissage mathématique se fait selon le schéma *du procédural au conceptuel*, et l'évocation d'un concept donne accès non seulement à un objet mathématique mais aussi à une série de procédures dans lesquelles il peut être impliqué. Plus il existe de procédures possibles, plus le concept est riche.

Pour Tall, [72], [44], le phénomène fondamental qui permet un apprentissage mathématique performant est un phénomène de compression. En effet, pour traiter des données, le cerveau utilise une mémoire de travail à court terme dont la capacité est très limitée, 6 à 7 éléments ⁽³⁾. Il en résulte que beaucoup de raisonnements nécessitent des transferts

⁽³⁾ Chez les calculateurs prodiges, elle atteindrait une vingtaine d'éléments.

continuels entre la mémoire de travail et la mémoire à long terme, ainsi que l'établissement de connections entre différentes zones de celle-ci. Le phénomène de compression a pour conséquence d'augmenter la capacité d'évocation d'un élément donné et donc d'augmenter la « productivité » de la mémoire de travail.

Lorsque la compression est suffisante, certains symboles acquièrent une signification flexible. Par exemple, « $3+2$ » désigne aussi bien l'addition de 3 et 2 que la somme de ces deux nombres. Dans ce cas, TALL utilise le terme « procept » pour désigner l'amalgame entre le processus et le concept représentés par le même symbole. Pour lui, l'élève qui réussit en mathématique, est celui qui atteint le stade de la « proceptualisation ». La différence de stratégie entre l'utilisation flexible des procepts (par exemple, en sélectionnant la procédure la plus appropriée), et la fixation sur une procédure déterminée, est un des éléments les plus représentatifs de la distinction entre échec et réussite.

Synthétisant sa pensée, TALL, [72], considère que la pensée mathématique évolue dans trois « mondes mentaux » différents :

1. Un monde « d'expression conceptuelle » (*conceptual-embodied world*) à base d'objets et d'une approche sensorielle de ceux-ci afin d'observer, décrire, définir et déduire des propriétés qui se développent à partir d'expériences de pensée, jusqu'à la démonstration euclidienne.
2. un monde « proceptuel-symbolique » (*proceptual-symbolic*) à base d'actions, qui comprime des « schémas d'actions » en objets de pensée opérant dualement en tant que processus et concepts.
3. un monde « formel-axiomatique » (*formal-axiomatic*) à base de propriétés, qui construit des systèmes axiomatiques à partir de définitions formelles et de démonstrations ensemblistes.

Annexe B

L'analyse statistique implicative

B.1 Présentation

Cette méthode, élaborée par un groupe de didacticiens français sous la conduite de Régis GRAS, permet d'étudier les possibles implications entre comportements des élèves. Nous nous limiterons ci-dessous à un exposé élémentaire des principes et de la technique de cette méthode. Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à consulter les références [43] et [42].

L'analyse implicative se propose de répondre à des questions du genre suivant :

Lorsqu'ils ont dû remplir tel questionnaire (examen, test, concours...) les participants (élèves, concurrents...) qui ont eu le comportement \mathcal{A} ont-ils automatiquement eu aussi le comportement \mathcal{B} ?

La question n'a de sens que si le comportement \mathcal{A} est moins fréquent que le comportement \mathcal{B} . Chaque fois que nous considérerons une implication entre comportements, nous supposerons donc que cette condition est satisfaite.

Ajoutons que le mot *comportement* doit être compris dans un sens très large. Pour un élève qui présente un examen, cela sera généralement *fournir telle réponse*, ou *appliquer telle méthode*. Cela pourrait aussi être *Être membre de telle classe*.

De façon plus générale, on pourrait appliquer l'analyse implicative pour examiner des affirmations telles que *Tous les Suédois sont blonds*. Bien entendu, on sait très bien que cette affirmation est fautive dans l'absolu : il doit bien se trouver quelque part un Suédois brun ! Aussi la question doit-elle être comprise dans le sens « Est-il vrai que *presque tous* les Suédois sont blonds ? ». Et pour que cette question ait elle-même un sens, il convient de déterminer un critère quantitatif qui permettra éventuellement de rejeter l'hypothèse de blondeur de presque tous les Suédois.

L'analyse implicative, et le logiciel CHIC ⁽¹⁾ mis au point par l'équipe de R. GRAS, attribuent une *intensité d'implication* à toute formule du type $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ où \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des comportements d'*individus* (dans notre cas des élèves) et où, comme il a été précisé,

⁽¹⁾ *Classification hiérarchique implicative et cohésitive*

le comportement \mathcal{B} est plus fréquent que le comportement \mathcal{A} . Cette intensité (dont la méthode de calcul est détaillée au paragraphe B.2) est d'autant plus proche de 1 que le nombre d'individus ayant le comportement \mathcal{A} sans avoir le comportement \mathcal{B} est faible (la valeur 1 correspond à une implication toujours vraie). Elle vaut 0,5 si les comportements \mathcal{A} et \mathcal{B} sont indépendants (au sens des probabilités).

L'analyse implicative remplace donc la question *lors de tel test, le comportement \mathcal{A} entraîne-t-il le comportement \mathcal{B} ?* par la question *quelle est l'intensité de l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$?* Et une implication sera considérée comme d'autant plus « valable » que son intensité est proche de 1. On considère généralement des *seuils* d'intensité de 0,99, 0,95, 0,90, 0,85...

Aux paragraphes suivants, nous utiliserons l'analyse implicative en vue d'établir des relations d'implication entre comportements d'élèves, dans le cadre de leurs réponses aux items du pré-test ou du post-test. Ces relations d'implication ne doivent pas être interprétées comme étant toujours des relations de cause à effet. Par exemple, même si nous arrivons à la conclusion que l'implication *Être Suédois \Rightarrow Être blond* est acceptable, on ne voit pas en quoi la nationalité suédoise peut influencer la couleur de cheveux. Cette implication ne peut être interprétée que comme *Il se fait que la plupart des Suédois sont blonds*.

Ne tombons pas non plus dans l'excès contraire : certaines implications statistiques *sont dues* à des relations de cause à effet... souffrant éventuellement des exceptions.

B.2 La technique

Ce paragraphe suppose une certaine familiarité *a priori* avec les techniques statistiques usuelles. Il est surtout destiné au lecteur qui désire avoir quelques indications techniques concernant l'analyse statistique implicative : comment on la définit, comment on la calcule. Les analyses dont les résultats sont présentés dans la suite n'utiliseront pas les résultats du présent paragraphe.

En vue de formaliser les idées présentées au paragraphe B.1, nous allons considérer un ensemble E d'*individus* (dans notre cas, ce seront des élèves) susceptibles d'avoir deux *comportements* notés \mathcal{A} et \mathcal{B} .

Adoptant les notations et représentations ensemblistes, nous noterons A l'ensemble des individus ayant le comportement \mathcal{A} et B l'ensemble des individus ayant le comportement \mathcal{B} . Ces ensembles A et B sont de sous-ensembles de E . Lorsqu'elle est vérifiée dans l'absolu, l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ se traduit en termes ensemblistes par la relation

$$A \subset B$$

que nous pouvons agrémenter d'une représentation graphique :

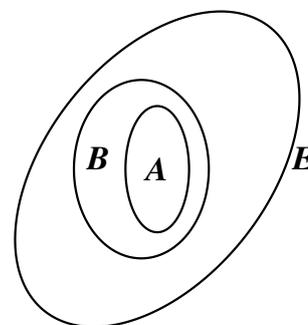


Fig. B.1

Le plus souvent, on se trouve en présence de situations où l'ensemble A n'est pas complè-

tement inclus à l'ensemble B : il déborde.

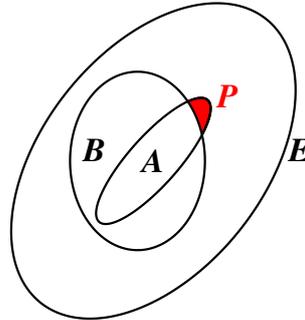


Fig. B.2

Si la zone de débordement, notée ici P , est suffisamment petite, on aura tendance à considérer l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ comme valable. Mais il convient de donner un sens précis à tout cela.

L'ensemble « litigieux » P est l'ensemble des individus qui ont le comportement \mathcal{A} sans avoir le comportement \mathcal{B} , ce sont ceux qui violent l'implication.

Comme les éléments de P sont ceux de A qui *n'appartiennent pas* à B , nous aurons aussi besoin de donner un nom à l'ensemble de *tous* les individus qui n'appartiennent pas à B . Cet ensemble (le complémentaire de B) sera noté \bar{B} . L'ensemble P est l'intersection de A et \bar{B} : $P = A \cap \bar{B}$.

Enfin, nous désignons les nombres d'éléments des ensembles E , A , P et \bar{B} par les notations n_E , n_A , n_P et $n_{\bar{B}}$.

Pour déterminer si l'ensemble P est *suffisamment petit*, nous allons adopter un point de vue probabiliste. Le quotient $\frac{n_A}{n_E}$ est la proportion d'éléments de E ayant eu le comportement \mathcal{A} . Nous pouvons l'interpréter comme étant la probabilité de ce qu'un individu pris au hasard dans E ait le comportement \mathcal{A} .

De même $\frac{n_P}{n_{\bar{B}}}$ vaut à peu près la probabilité de ce qu'un individu pris au hasard dans \bar{B} ait le comportement \mathcal{A} .

Si les deux comportements \mathcal{A} et \mathcal{B} étaient *indépendants* au sens des probabilités, la réalisation de l'un n'aurait aucune influence sur la réalisation de l'autre. La proportion d'éléments de E ayant le comportement \mathcal{A} serait alors très proche de la proportion d'éléments de \bar{B} ayant ce comportement \mathcal{A} .

Autrement dit, les nombres $\frac{n_A}{n_E}$ et $\frac{n_P}{n_{\bar{B}}}$ seraient proches l'un de l'autre, ceci nous permet de tirer la conclusion suivante :

Si les deux comportements \mathcal{A} et \mathcal{B} étaient *indépendants*, on aurait

$$n_P \simeq \frac{n_A \cdot n_{\bar{B}}}{n_E}$$

Si, *a contrario*, cette égalité (approchée) n'est pas satisfaite, si le nombre n_P est *anormalement petit* par rapport à $\frac{n_A \cdot n_{\bar{B}}}{n_E}$, on peut considérer que les éléments de A ont tendance à *ne pas être* dans \bar{B} , c'est-à-dire à être dans B . Et dans ce cas on considérera favorablement l'idée que A implique B .

Le point de repère est donc fixé. Pour mesurer la validité de l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, on compare le nombre n_P au quotient $\frac{n_A \cdot n_{\bar{B}}}{n_E}$.

Cette comparaison se fait de la même manière que beaucoup de tests d'hypothèses classiques en statistique. Le lecteur trouvera un exposé détaillé de cette procédure dans les références [43] et [42]. Il nous suffira ici de dire que le nombre $\frac{n_A \cdot n_{\bar{B}}}{n_E}$ étant, en cas d'indépendance entre \mathcal{A} et \mathcal{B} , le nombre moyen d'éléments de l'ensemble P , on calcule la variable réduite

$$q = \frac{n_P - \frac{n_A \cdot n_{\bar{B}}}{n_E}}{\sqrt{\frac{n_A \cdot n_{\bar{B}}}{n_E}}}$$

Sous les conditions usuelles concernant la taille de l'ensemble E , cette variable q admet une distribution de probabilité Z , normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

L'intensité φ de l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est alors définie par l'égalité

$$\varphi = 1 - P(Z < q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_q^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$$

Ainsi, plus q est petit, c'est-à-dire plus n_P est petit, plus l'intensité d'implication φ est proche de 1. Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont indépendants, q vaut à peu près 0 et φ est proche de $\frac{1}{2}$.

On considère généralement comme significatives des implications d'intensité au moins 0,85 et on distingue des *seuils d'intensité* de 0,85, 0,90, 0,95 et 0,99. Le logiciel CHIC se charge des calculs. Il peut traiter des tableaux comportant plusieurs centaines d'individus et/ou de comportements.

B.3 L'analyse du pré-test de sixième primaire (2005–2006)

B.3.1 Les comportements possibles

Pour appliquer une technique telle que l'analyse implicative, il convient, lors du dépouillement des réponses des élèves de recenser un maximum d'informations relativement à leurs comportements. Chaque comportement reçoit un code. Un tableau croisé mentionne pour chaque élève quels comportements il a eus. Ce tableau est alors soumis au logiciel, qui élabore d'une part d'autres tableaux numériques mentionnant l'intensité de toutes les implications d'un comportement vers un autre, d'autre part un graphe sagittal représentant les implications entre comportements ayant les intensités les plus fortes.

Voici d'abord, item par item, les comportements qui ont été recensés et les codes qui leur ont été attribués.

Item 1

Pour cet item, nous avons recensé onze comportements qui pouvaient être le fait des élèves. Chacun de ces comportements est désigné par un code de quatre ou cinq caractères : I1C**. La lettre I indique qu'il s'agit d'un item du pré-test, le chiffre 1 qui suit est le numéro de l'item, la lettre C (initiale de « colonne ») sert de séparateur. Le code se termine par le numéro du comportement.

Les onze comportements repérés pour l'item 1 du pré-test sont les suivants :

- | | |
|---|--|
| I1C1 : La réponse de l'élève est correcte. | I1C7 : L'élève a procédé par découpage et recombinaison. |
| I1C2 : La réponse est incorrecte. | I1C8 : L'élève a utilisé une autre méthode. |
| I1C3 : L'élève n'a pas répondu. | I1C9 : L'élève a porté des marques sur la figure originale. |
| I1C4 : L'élève a mesuré des longueurs. | I1C10 : Les marques ajoutées sont pertinentes. |
| I1C5 : L'élève a calculé un périmètre. | I1C11 : L'élève n'a pas justifié sa réponse. |
| I1C6 : L'élève a compté des (petits) carrés. | |

Item 2

Les comportements recensés à l'item 2 sont proches de ceux recensés à l'item 1 (un comportement inexistant à l'item 1, « Comptage d'autres éléments », est inséré en I2C12).

- | | |
|---|--|
| I2C1 : La réponse de l'élève est correcte. | I2C8 : L'élève a utilisé une autre méthode. |
| I2C2 : La réponse est incorrecte. | I2C9 : L'élève a porté des marques sur la figure originale. |
| I2C3 : L'élève n'a pas répondu. | I2C10 : Les marques ajoutées sont pertinentes. |
| I2C4 : L'élève a mesuré des longueurs. | I2C11 : L'élève n'a pas justifié sa réponse. |
| I2C5 : L'élève a calculé un périmètre. | I2C12 : L'élève a compté d'autres éléments. |
| I2C6 : L'élève a compté des triangles. | |
| I2C7 : L'élève a procédé par découpage et recombinaison. | |

Item 3

À cet item, nous avons recensé les comportements suivants :

- I3C1** : La réponse de l'élève est correcte (indépendamment de la justification).
I3C2 : La réponse est incorrecte.
I3C3 : L'élève a dessiné les quinze carrés roses dans le grand rectangle.
I3C4 : L'élève a procédé par comptage.
I3C5 : L'élève a mesuré des longueurs.
I3C6 : L'élève a utilisé un petit carré comme unité d'aire.
I3C7 : L'élève a effectué une division ou une multiplication.
I3C8 : La justification est correcte.
I3C9 : La justification est partielle mais sans erreur.
I3C10 : La justification est erronée.
I3C11 : L'élève n'a pas justifié sa réponse.

Item 4

Cette question ne comporte pas vraiment une « réponse correcte standard ». On s'est donc contenté de relever les réponses figurant sur les feuilles en distinguant les comportements suivants :

- I4C1** : L'élève fournit les réponses auxquelles les rédacteurs du questionnaire s'attendaient : un carré 1×1 , un carré 2×2 et un carré 3×3 .
I4C2 : Parmi les réponses fournies figure un carré 1×1 .
I4C3 : Parmi les réponses fournies figure un carré 3×3 .
I4C4 : Parmi les réponses fournies figure un carré plus grand que 3×3 .
I4C5 : La réponse comporte des répétitions.
I4C6 : La réponse fournie comporte une forme non carrée.

Item 5

Onze comportements ont été recensés pour cet item.

- I5C1** : L'élève produit un dessin acceptable.
I5C2 : L'élève ne produit pas un dessin acceptable.
I5C3 : Le dessin de l'élève est imprécis.
I5C4 : Le dessin de l'élève comporte moins de triangles que l'original.
I5C5 : Le dessin de l'élève comporte des traits de construction et ceux-ci sont respectés.
I5C6 : Les côtés obliques du triangle constituant le corps de la poupée sont correctement alignés sur la diagonale du cadre (mode *global* de construction).
I5C7 : L'élève a tenu compte des graduations portées sur les quatre côtés du cadre.
I5C8 : L'élève a porté des marques sur l'original.
I5C9 : L'élève a utilisé le mode de construction *atomisé*.
I5C10 : L'élève a été perturbé par le décalage en hauteur.
I5C11 : L'élève a utilisé le mode de construction *local*.

Le premier élément de cette liste soulève la question de savoir ce qu'est un dessin « acceptable ». Nous avons considéré que c'était le cas dès que le dessin était reconnaissable.

Item 6

Cette fois, nous distinguons quinze comportements :

- I6C1** : La réponse de l'élève est bonne et est accompagnée d'une justification correcte et complète.
- I6C2** : La réponse n'est pas bonne ou la justification n'est pas correcte et complète.
- I6C3** : La réponse est bonne (case rose cochée).
- I6C4** : La réponse est incorrecte (case bleue cochée).
- I6C5** : La justification est correcte.
- I6C6** : La justification est partielle.
- I6C7** : La justification est erronée.
- I6C8** : La justification est absente.
- I6C9** : L'élève calcule des aires en mesurant des longueurs et en appliquant une formule.
- I6C10** : L'élève utilise une translation.
- I6C11** : L'élève utilise, éventuellement de façon implicite, un découpage et une recomposition.
- I6C12** : L'élève utilise, éventuellement de façon implicite, un comptage.
- I6C13** : L'élève a apposé des marques sur la figure.
- I6C14** : Les marques apposées sont pertinentes.
- I6C15** : L'élève confond aire et périmètre ou s'imagine que l'aire grandit en même temps que le périmètre.

B.3.2 Des comportements de réussite et d'échec

Une première analyse implicative, portant sur l'ensemble des réponses des élèves, permet de dégager, item par item, les comportements associés à des réussites et ceux associés à des échecs.

Item 1

Le logiciel CHIC produit le graphe suivant :

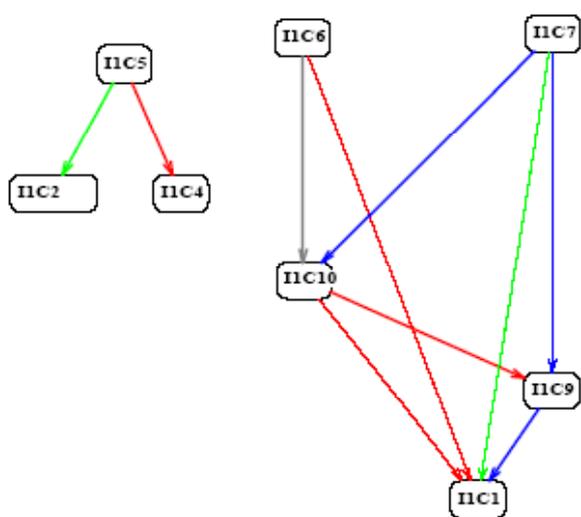


Fig. B.3

Sur les figures de ce type ne figurent que les codes associés à des comportements qui interviennent dans des implications ayant une intensité d'au moins 0,85.

La couleur d'une flèche indique l'intensité de l'implication correspondante :

- Rouge : intensité d'au moins 0,99.
- Bleu : intensité comprise entre 0,95 et 0,99.
- Vert : Intensité comprise entre 0,9 et 0,95.
- Noir : Intensité comprise entre 0,85 et 0,9.

Clairement, le graphe est divisé en deux sous-graphes. Celui de droite aboutit en I1C1 qui est la réussite. Les divers éléments de ce sous-graphe impliquent cette réussite, directement ou indirectement, et doivent donc être considérés eux-mêmes comme des comportements de réussite.

Les implications n'ont pas toutes la même intensité. Ainsi, le comptage de carrés (I1C6)

implique plus fortement la réussite que la méthode par découpage et recomposition (I1C7). On peut la considérer comme plus efficace (à cet item-ci).

Les deux comportements I1C6 et I1C7 impliquent aussi — avec des intensités différentes — le comportement I1C10 (le fait d'avoir porté des marques pertinentes sur la figure). Ceci montre l'utilité pour l'élève qui ne maîtrise pas d'emblée le problème, d'apposer des marques qui servent à supporter son raisonnement. On note d'ailleurs que les élèves qui comptent des carrés ont moins recours à cette aide possible : l'intensité de l'implication de I1C6 vers I1C10 est plus faible que celle de I1C6 vers I1C1 alors que celle de I1C7 vers I1C10 est plus forte que celle de I1C7 vers I1C1. Tout cela est cohérent avec l'idée que le comptage de carrés est — dans les circonstances de ce test — la méthode la plus performante.

L'implication de I1C10 vers I1C9 ne nous apprend rien : si les marques supplémentaires sont pertinentes, forcément il y a des marques. Quant au sous-graphe de gauche, il nous confirme que les élèves qui calculent des périmètres n'arrivent pas à répondre à la question correctement, ce qui ne nous surprend pas. Mais on notera que si le comportement I1C4 est plutôt un comportement d'échec puisqu'il se rattache à ce groupe, néanmoins il n'entraîne pas forcément la production d'une réponse incorrecte : l'implication correspondante n'apparaît pas sur le graphe, son intensité est donc inférieure à 0,85, (sa valeur exacte est 0,76, ce qui est peu significatif).

Item 2

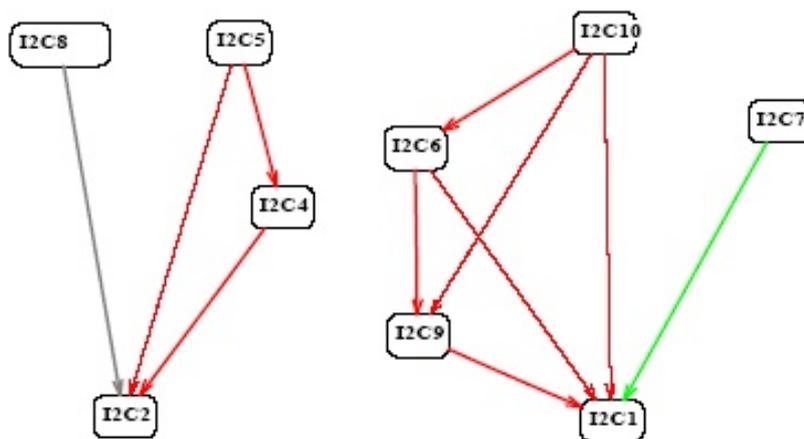


Fig. B.4

Bien que les items 1 et 2 puissent *a priori* être considérés comme assez semblables, on constate quelques différences. Le sous-graphe des comportements de réussite rassemble les mêmes comportements que dans l'item 1. Cependant, la procédure par découpage et recomposition (I2C7 dans l'item 2, I1C7 dans l'item 1) provoque (relativement) plus d'erreurs, ce qui se répercute sur l'intensité d'implication. De plus, les implications de ce comportement I2C7 vers I2C10 et I2C9 (apposition de marques sur le dessin) sont d'intensité inférieure à 0,85 et n'apparaissent donc pas sur le graphe. Ces marques supplémentaires sont sans doute plus difficiles à imaginer que dans l'item 1.

Le comportement I2C6 est impliqué par I2C10, alors que dans l'item 1, la flèche correspondante allait dans l'autre sens. Le comptage est donc plus fréquent que l'apposition de marques. Le rôle de celles-ci est différent. Dans le sous-graphe des comportements d'échec, la procédure par mesure de longueurs (I2C4) entraîne cette fois très nettement un échec.

Item 3

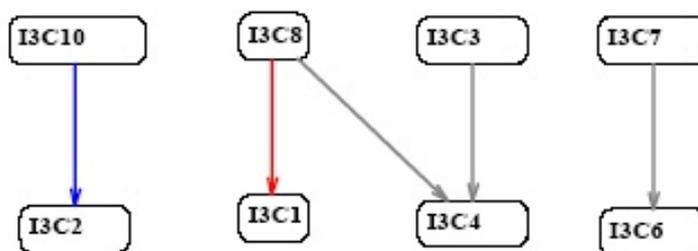


Fig. B.5

Ce graphe sépare bien les comportements d'échec I3C10 et I3C2. À la réussite I3C1 sont associés I3C8, ce qui est normal, mais aussi I3C3 (dessin des quinze carrés 3×3 dans le rectangle) et I3C4 (comptage), I3C3 entraînant — faiblement — I3C4. Tout en étant dans le même groupe que la réussite I3C1, ni I3C3, ni I3C4 ne l'entraînent significativement.

Un troisième groupe rassemble I3C6 (usage des petits carrés comme unités) et I3C7 (division ou multiplication). Ces procédures ne sont associées ni à la réussite ni à l'échec !

Item 4

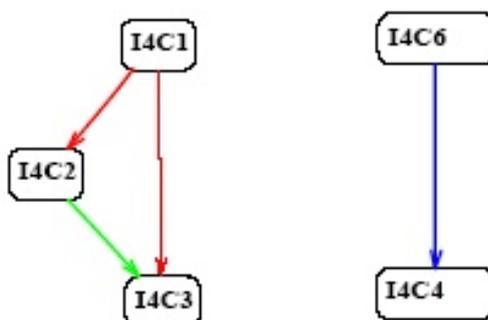


Fig. B.6

Le sous-graphe de gauche rassemble les comportements auxquels s'attendaient les auteurs du questionnaire, en particulier I4C1 (lequel entraîne fatalement I4C2 et I4C3). Nous les considérerons donc comme des comportements de réussite.

Nous le ferons d'autant plus facilement que le deuxième sous-graphe associe deux comportements (I4C4 : production d'un carré plus grand que 3×3 , I4C6 : production d'une forme non carrée) qui ne peuvent être considérés que comme des échecs.

Item 5

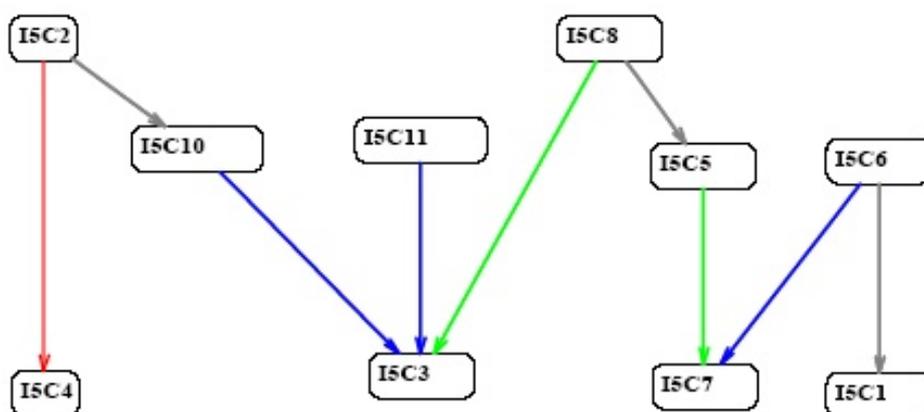


Fig. B.7

Voici un graphe dont on pourrait dire qu'il reflète une situation en pleine évolution. On n'y trouve pas de sous-graphes déconnectés, mais néanmoins trois parties clairement différentes.

À l'extrême gauche, l'implication $I5C2 \Rightarrow I5C4$ rassemble les dessins inacceptables et les dessins incomplets, deux productions certainement significatives d'échec. À l'extrême droite, I5C5 (respect des traits de construction), I5C6 (significatif de la perception globale), I5C7 (respect des graduations du cadre) et I5C1 (dessins acceptables) sont des comportements liés à la réussite.

Entre les deux, les comportements I5C10 (perturbation due au décalage en hauteur), I5C11 (perception locale), I5C3 (production de dessins imprécis) ne sont ni de vrais échecs, ni de vraies réussites. Ce groupe est lié aux deux autres d'une part par I5C2 (dessins inacceptables) qui entraîne — faiblement — I5C10 et d'autre part par I5C8 (apposition de traits sur l'original) qui entraîne — tout aussi faiblement — I5C5 et I5C3.

Le comportement I5C9, caractéristique de la perception atomisée, est absent sur le diagramme. En fait, l'intensité de l'implication de I5C9 vers I5C3 est de 0,75. I5C9 se rattache donc au groupe central.

Ainsi, des trois perceptions *atomisée*, *locale* et *globale* que nous avons détectées sur les copies des élèves, seule la perception globale est un signe de réussite à cet item. Les deux autres, constituent des étapes dont on peut souhaiter qu'elles ne soient que transitoires.

Item 6

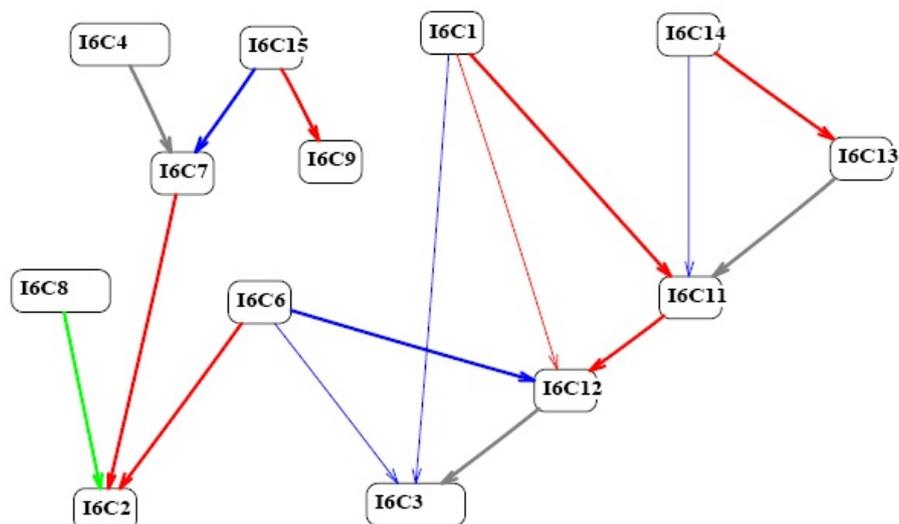


Fig. B.8

Mentionnons d'abord que pour simplifier ce graphe, nous en avons retiré le comportement I6C5 (Justification correcte qu'elle qu'en soit la forme) qui s'est avéré être rigoureusement équivalent à I6C1 (Bonne réponse avec justification correcte et complète). On distingue facilement deux grandes composantes :

- I6C4 (l'élève a coché la case correspondant à la mauvaise réponse), et I6C15 (confusion aire-périmètre) entraînent I6C7 (justification erronée). À ce trio de comportements d'échecs se rattache I6C9 (usage de formules) lui-même impliqué par I6C15. I6C8 (pas de justification) est aussi un comportement d'échec. I6C8 et I6C7 entraînent I6C2. C'est normal puisque le comportement I6C2 est attribué dès que la réponse est mauvaise ou que la justification est incorrecte ou incomplète. I6C2 n'est cependant pas significatif d'un échec, car il peut être dû à la production d'une justification partielle mais sans erreur. I6C2 fait le pont entre les deux parties du graphe.
- Les comportements I6C1, I6C13 (apposition de marques), I6C14 (pertinence des marques apposées), I6C11 (usage d'un puzzle), I6C12 (dénombrement) et I6C3 sont associés à la réussite et constituent la seconde partie du graphe.

En particulier, la réussite (avec justification) entraîne l'usage combiné d'un puzzle et d'un dénombrement (même si ces techniques sont utilisées implicitement). Par contre, elle n'entraîne pas l'apposition de marques sur la figure : certains élèves peuvent s'en passer.

B.3.3 Structurer les comportements d'échec

Au fil des paragraphes précédents, nous avons classé les comportements suivants comme significatifs d'échecs : I1C2, I1C4, I1C5, I2C2, I2C4, I2C5, I2C8, I3C2, I3C10, I4C4, I4C6, I5C2, I5C4, I6C4, I6C7, I6C8, I6C9, I6C15. En les rassemblant sur un même diagramme, nous ferons apparaître des implications entre comportements relatifs à des items différents.

Nous structurons ainsi notre approche de ces comportements d'erreur.

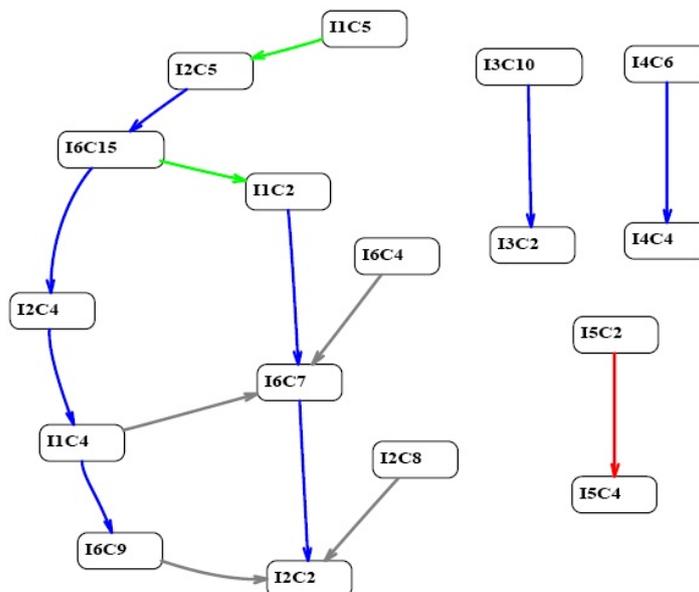


Fig. B.9

Par souci de lisibilité, seul le squelette du graphe implicatif des comportements mentionnés ci-dessus a été conservé. De façon plus précise, chaque fois que le graphe complet comportait trois implications dont l'une était la composée des deux autres, par exemple $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$ et $A \Rightarrow C$, on n'a conservé que les deux premières. Cette technique permet d'obtenir un graphe lisible en ne perdant qu'un minimum d'information.

Sur ce graphe nous constatons d'abord l'isolement des comportements d'erreur associés aux items 3, 4 et 5. Il s'agit donc d'erreurs spécifiques nécessitant des remédiations séparées. Par contre les comportements d'erreurs aux autres items s'organisent en une grande famille au long d'une courbe qui va de I1C5 à I6C9.

On trouve là, enchaînées, toutes les erreurs dues à l'usage de formules ou à des mesurages. On pourrait appeler cette courbe *la piste des calculs routiniers mal assimilés*. Mais ne dramatisons pas : ces erreurs sont relativement peu fréquentes. De I1C5 à I6C9, le taux d'erreur ne passe que de 6 % à 12 %. À la courbe précitée se raccrochent de façon naturelle les comportements I1C2, I6C7 et I2C2. L'implication de I6C4 vers I6C7 ne nous apprend pas grand-chose, cependant que I2C8 (usage d'une « autre méthode ») rassemble sans doute (notamment) des erreurs variées.

B.3.4 Structurer les comportements de réussite

Le graphe de la figure B.10 a été réalisé de la même manière que le précédent, à partir des comportements de réussite. Il s'agit des comportements suivants :

Item 1 : I1C1, I1C6, I1C7, I1C9, I1C10

Item 2 : I2C1, I2C6, I2C7, I2C9, I2C10

Item 3 : I3C1, I3C3, I3C4, I3C8

Item 4 : I4C1, I4C2, I4C3

Item 5 : I5C1, I5C5, I5C6, I5C7

Item 6 : I6C1, I6C3, I6C11, I6C12, I6C13, I6C14

À la différence du graphe des comportements d'erreur, le graphe des réussites n'est pas scindé en plusieurs parties, ce qui montre le caractère global des acquisitions à mettre en place.

Comme on l'a signalé plus haut, les implications figurant sur ce graphe, ne correspondent pas nécessairement à des relations de cause à effet. Ce n'est pas la justification partielle fournie à l'item 6 qui peut elle-même provoquer la réussite à l'item 1. Cependant, l'implication $I6C6 \Rightarrow I1C1$ a une intensité supérieure à 0,9. Rappelons donc que la signification à attribuer à cette implication est *les élèves qui produisent une justification partielle à l'item 6 ont tendance à figurer parmi ceux qui réussissent à l'item 1* (la tendance étant mesurée par l'intensité). On pourrait en déduire que *les compétences requises pour produire une justification partielle à l'item 6 permettent aussi à certains élèves — l'importance de ce certains étant liée à l'intensité de l'implication — de réussir à l'item 1*.

Remarquons sur le diagramme B.10 la chaîne de neuf implications très fortes (six d'entre elles sont d'intensité 0,99, les trois autres au moins 0,95) qui va de I5C6 à I1C1 :

$I5C6 \Rightarrow I6C1 \Rightarrow I6C11 \Rightarrow I2C10 \Rightarrow I2C6 \Rightarrow I2C9 \Rightarrow I1C6 \Rightarrow I6C12 \Rightarrow I2C1 \Rightarrow I1C1$

De plus sur cette chaîne vient se greffer une « déviation » (il est vrai un peu moins fortement enchaînée) : $I6C6 \Rightarrow I1C10 \Rightarrow I1C9 \Rightarrow I2C1$.

C'est ainsi un ensemble cohérent de comportements associés à la réussite des trois items qui portent sur la comparaison d'aires qui est mis en évidence. Il s'agit des comportements I1C9, I1C10, I2C9, I2C10, liés à l'apposition de marques sur les figures des items 1 et 2, à la réussite I6C1 à l'item 6, aux démarches I6C11 et I6C12 mises en œuvre à cette occasion (dénombrement et puzzle). Nous voyons que nous trouvons ici l'essentiel des éléments de la réussite aux items 1, 2 et 6. Nous pourrions parler ici d'un *modèle mental* de résolution de ces items, reposant sur des procédures de dénombrement et faisant appel à l'apposition de marques sur les figures.

Autre élément remarquable, la présence du comportement I5C6 à la source même de cette chaîne. Voilà qui montre bien l'importance de la perception globale dans les activités proposées.

Un autre modèle mental de résolution des items 1 et 2 apparaît dans la chaîne $I1C7 \Rightarrow I2C7 \Rightarrow I2C1 \Rightarrow I1C1$. Celui-ci repose sur les procédures de découpage et de recombinaison. Il est moins marqué et moins utilisé que le précédent.

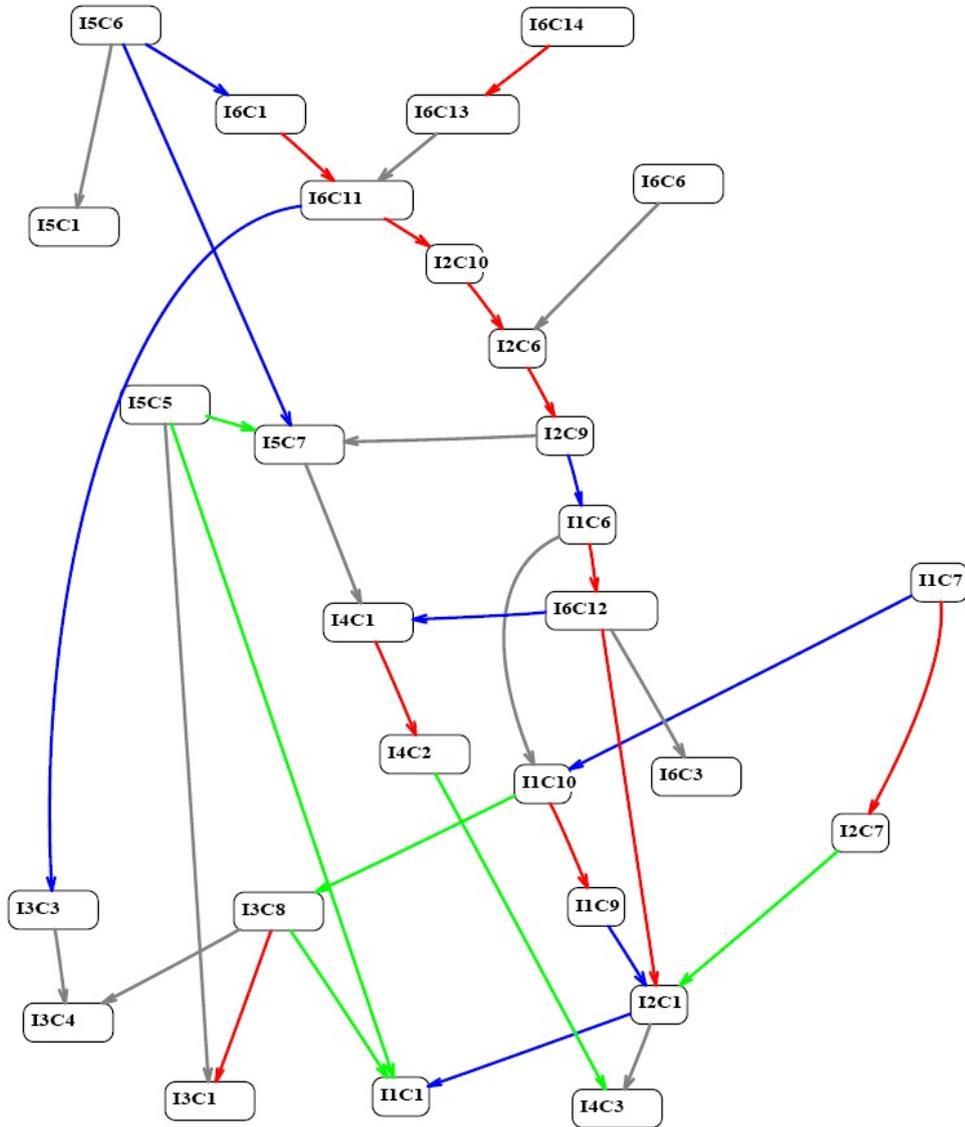


Fig. B.10

Intéressons-nous ensuite aux comportements situés aux sources du graphe B.10, c'est-à-dire ceux qui ne sont impliqués (avec au moins une intensité de 0,85) par aucun autre. Il s'agit des comportements I1C7, I5C5, I5C6, I6C6 et I6C14. Comme ils sont moins fréquents que ceux qu'ils impliquent, on peut admettre qu'ils sont plus difficiles à acquérir, qu'ils correspondent donc à une meilleure maîtrise des concepts en jeu. Ils ne sont cependant pas nécessairement rares comme le montre le tableau suivant :

Code	Fréquence	Signification
I6C14	7,2%	Pertinence des marques apposées, à l'item 6
I5C6	15,4%	Perception globale, à l'item 5
I1C7	19,2%	Méthode par découpage et recombinaison, à l'item 1
I6C6	34,8%	Justification partielle, mais sans erreur, à l'item 6
I5C5	48,6%	Usage et respect de traits de construction, à l'item 5

Ces cinq comportements correspondent à cinq facettes différentes de l'activité d'un élève qui remplit le questionnaire de ce pré-test. Leurs positions à la source du graphe leur confèrent une importance particulière.

Les figures ci-dessous indiquent les comportements impliqués directement par chacun des cinq comportements précités.

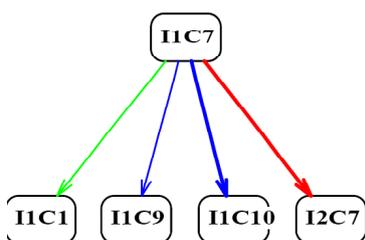


Fig. B.11

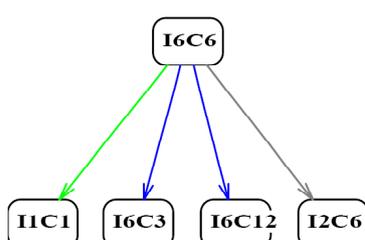


Fig. B.12

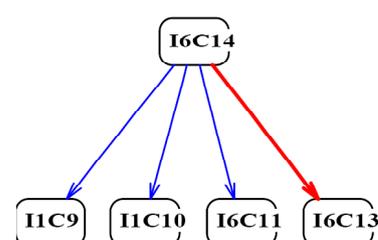


Fig. B.13

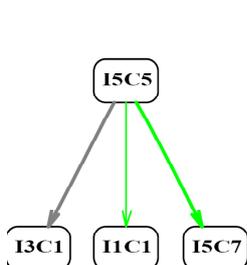


Fig. B.14

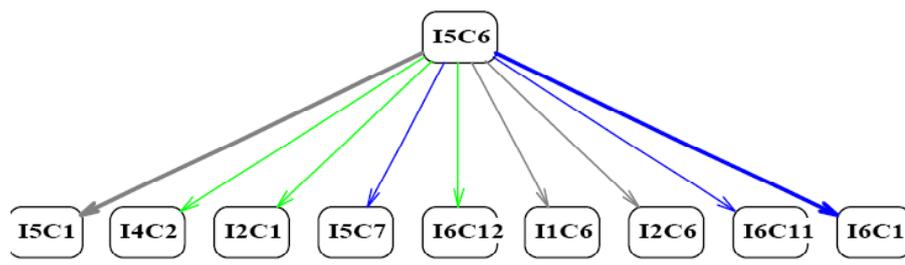


Fig. B.15

La plus spectaculaire de ces figures est la figure B.15 qui montre à nouveau l'importance de la perception globale telle qu'elle se manifeste à l'item 5. Elle entraîne en effet directement la réussite aux items 2, 5 et 6 (avec il est vrai des intensités n'atteignant pas 0,95). Elle entraîne aussi directement les démarches I6C11 et I6C12 déjà évoquées, ainsi que — fait nouveau — le comportement I4C2. Il s'agit de la production à l'item 4 d'un carré 1×1 . Nous avons déjà signalé que ce carré 1×1 apparaît plus rarement que les carrés 2×2 et 3×3 . Cela peut se comprendre car il n'y a rien à construire pour produire un tel carré à partir d'un ensemble de carrés identiques. Les élèves qui ont pensé à dessiner un carré 1×1 ont compris que ce dessin n'est qu'un cas limite d'une famille générale et qu'il n'y a pas lieu de le mettre à part. La perception globale apparaît ainsi comme un signe de maturité mathématique naissante.

D'autres comportements repris au tableau ci-dessus impliquent également directement la réussite à un ou plusieurs items : I5C5 implique les réussites I1C1 et I3C1 aux items 1 et 3, bien qu'avec une intensité n'atteignant pas 0,95. C'est une autre compétence qui est ainsi mise en évidence : réaliser des constructions correctement. De son côté, I6C6

implique I1C1.

Le rôle de I6C14 est sans doute moins clair car ce comportement n'entraîne directement la réussite à aucun item, et n'entraîne pas, même indirectement, la réussite à l'item 6. Sa position dans le graphe donne néanmoins à penser qu'il convient également de lui accorder une attention particulière. Apposer des marques sur une figure signifie construire soi-même le support de son raisonnement !

B.4 L'analyse du post-test de sixième primaire (2005–2006)

B.4.1 Les comportements possibles

Les codes utilisés pour désigner les comportements recensés au post-test sont semblables à ceux utilisés pour le pré-test. Pour les distinguer aisément de ceux-ci, les codes du post-test commencent par la lettre J au lieu de I.

Voici, item par item, les comportements qui ont été recensés et les codes qui leur ont été attribués. Aux items 1 et 2 les comportements recensés sont identiques à ceux du pré-test. Néanmoins, nous les rappelons ci-dessous.

Item 1

J1C1 : La réponse de l'élève est correcte.

J1C2 : La réponse est incorrecte.

J1C3 : L'élève n'a pas répondu.

J1C4 : L'élève a mesuré des longueurs.

J1C5 : L'élève a calculé un périmètre.

J1C6 : L'élève a compté des (petits) carrés.

J1C7 : L'élève a procédé par découpage et reposition.

J1C8 : L'élève a utilisé une autre méthode.

J1C9 : L'élève a porté des marques sur la figure originale.

J1C10 : Les marques ajoutées sont pertinentes.

J1C11 : L'élève n'a pas justifié sa réponse.

Item 2

J2C1 : La réponse de l'élève est correcte.

J2C2 : La réponse est incorrecte.

J2C3 : L'élève n'a pas répondu.

J2C4 : L'élève a mesuré des longueurs.

J2C5 : L'élève a calculé un périmètre.

J2C6 : L'élève a compté des triangles.

J2C7 : L'élève a procédé par découpage et reposition.

J2C8 : L'élève a utilisé une autre méthode.

J2C9 : L'élève a porté des marques sur la figure originale.

J2C10 : Les marques ajoutées sont pertinentes.

J2C11 : L'élève n'a pas justifié sa réponse.

J2C12 : L'élève a compté d'autres éléments.

Item 3

À cet item, nous avons recensé les comportements suivants :

- J3C1** : La réponse de l'élève est correcte (indépendamment de la justification).
J3C2 : La réponse est incorrecte.
J3C3 : L'élève a procédé par multiplication.
J3C4 : L'élève a procédé par division.
J3C5 : L'élève a compté des parallélogrammes.
- J3C6** : L'élève a compté des triangles
J3C7 : La justification est correcte.
J3C8 : La justification est partielle mais sans erreur.
J3C9 : La justification est erronée.
J3C10 : L'élève n'a pas justifié sa réponse.

Item 4

Pas plus qu'au pré-test, cette question ne comporte vraiment une « réponse correcte standard ». Les auteurs du questionnaire s'attendaient à trouver sur les feuilles au moins des assemblages de deux et quatre triangles. Certains élèves ont produit des assemblages de huit triangles ou plus. Nous avons limité le recensement aux comportements suivants :

- J4C1** : L'élève a produit un assemblage de deux triangles.
J4C2 : L'élève a produit un assemblage de quatre triangles.
J4C3 : L'élève a produit un assemblage (faux) de cinq triangles.
J4C4 : L'élève a produit un assemblage de huit triangles.
J4C5 : L'élève a produit un ou des assemblages de plus de huit triangles.
- J4C6** : La réponse comporte des répétitions.
J4C7 : La réponse fournie comporte une forme non triangulaire ou un triangle impossible à réaliser à partir des formes données.
J4C8 : L'élève mentionne l'impossibilité de réaliser des assemblages de trois, cinq ou six triangles.

Item 5

Quatorze comportements ont été recensés pour cet item.

- J5C1** : L'élève produit un dessin acceptable.
J5C2 : L'élève ne produit pas un dessin acceptable.
J5C3 : Le dessin de l'élève est imprécis.
J5C4 : Le dessin de l'élève est incomplet.
J5C5 : Le dessin de l'élève comporte des traits de construction et ceux-ci sont respectés.
J5C6 : Les côtés obliques du dessin qui devaient être alignés sur les diagonales du cadre le sont effectivement.
J5C7 : L'élève a tenu compte des graduations portées sur les quatre côtés du cadre.
J5C8 : L'élève a porté des marques sur l'original.
- J5C9** : L'élève a utilisé le mode de construction *atomisé*.
J5C10 : L'élève a été perturbé par le décalage en hauteur.
J5C11 : L'élève a utilisé le mode de construction *local*.
J5C12 : L'élève a utilisé le mode de construction *global*.
J5C13 : L'élève a dessiné le quadrillage oblique du cadre.
J5C14 : L'élève a dessiné le quadrillage cartésien du cadre

Comme au pré-test, nous avons considéré qu'un dessin était acceptable dès qu'il était reconnaissable.

Item 6

Cette fois, nous distinguons quinze comportements :

- J6C1** : La réponse de l'élève est bonne et est accompagnée d'une justification correcte et complète.
- J6C2** : La réponse n'est pas bonne ou la justification n'est pas correcte et complète.
- J6C3** : La réponse est équivalente à « les deux aires sont égales ».
- J6C4** : La case verte est cochée, mais pas la bleue.
- J6C5** : La case bleue est cochée, mais pas la verte.
- J6C6** : La justification est correcte, quelle qu'en soit la forme.
- J6C7** : La justification est partielle, sans erreur.
- J6C8** : La justification est erronée.
- J6C9** : La justification est absente.
- J6C10** : L'élève calcule des aires en mesurant des longueurs et en appliquant une formule.
- J6C11** : L'élève utilise, éventuellement de façon implicite, un découpage et une recombinaison.
- J6C12** : L'élève utilise, éventuellement de façon implicite, un comptage.
- J6C13** : L'élève a apposé des marques sur la figure.
- J6C14** : Les marques apposées sont pertinentes.
- J6C15** : L'élève confond aire et périmètre ou s'imagine que l'aire grandit en même temps que le périmètre.

B.4.2 Des comportements de réussite et d'échec

Item 1

Un premier diagramme implicatif nous montre que les comportements de réussite à cet item sont les mêmes qu'à l'item correspondant du pré-test (*figure B.3*), à l'exception de J1C7 qui n'apparaît pas sur la figure. La fréquence de la méthode par découpage et recombinaison baisse de 19,6 % au pré-test à 15,8 % au post-test. La non-présence de l'implication $J1C7 \Rightarrow J1C1$ montre aussi que cette méthode donne plus facilement lieu à des erreurs qu'au pré-test. Elle est donc moins performante.

Les comportements d'échecs, trop rares sans doute, ne donnent pas lieu à des implications significatives.

Nous pouvons vérifier la stabilité des comportements de réussite en rassemblant en un même diagramme ceux qui sont relatifs à l'item 1 du pré-test et ceux qui sont relatifs au post-test.

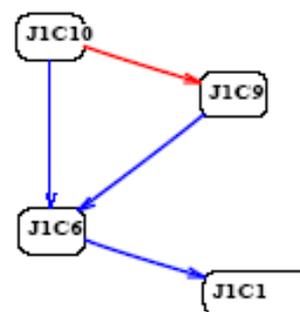


Fig. B.16

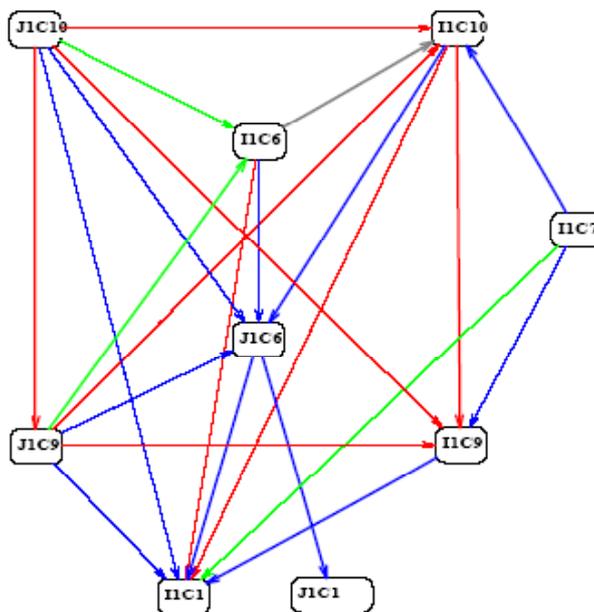


Fig. B.17

Certains comportements sont relativement stables : les élèves qui apposent des marques — pertinentes ou non — sur le dessin au post-test l’avaient déjà fait au pré-test. Mais cette fois ces marques servent surtout de support à la démarche de dénombrement des carrés puisque J1C9 et J1C10 impliquent J1C6. On note aussi que les élèves qui avaient utilisé le dénombrement au pré-test le font encore au post-test. La réussite J1C1 au post-test n’est impliquée que par J1C6. Cette réussite est cependant plus fréquente qu’au pré-test : son taux est de 92,5 % contre 85,9 % au pré-test.

Item 2

Nos constatations relatives à la réussite à cet item sont semblables à celles qui concernaient l’item 1 (voir la figure B.3). Ici aussi, la méthode par découpage et recomposition disparaît du graphique. Elle a cependant été utilisée par autant d’élèves que lors du pré-test. Elle s’avère donc moins performante, ainsi que c’était le cas à l’item 1.

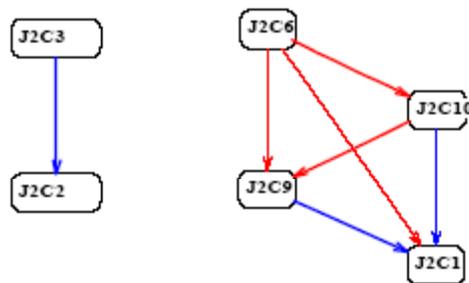


Fig. B.18

Un nouveau comportement d’échec apparaît : l’absence de réponse J2C3. Mais il convient de rester nuancé : cette absence de réponse n’est le fait que de moins de 5 % des élèves. Quant au taux de réussite, il est beaucoup plus important qu’à l’item 2 du pré-test : 84 % au lieu de 64 %. On note un nombre non négligeable de réussites basées sur le comptage d’autres éléments que les petits triangles.

La stabilité des comportements d’un test à l’autre apparaît sur le graphique « conjoint » ci-dessous :

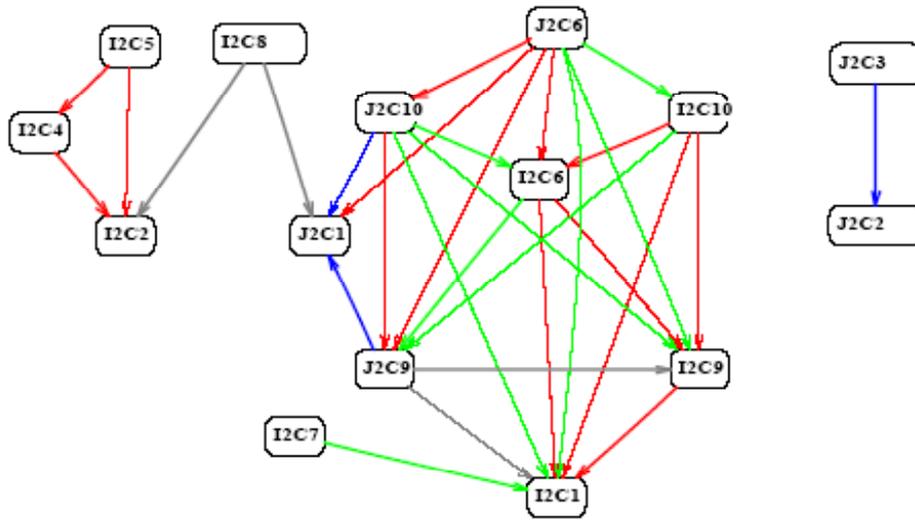


Fig. B.19

On y voit très clairement le rôle joué par l'apposition de marques ou dessins sur la figure dans la réussite. On remarque aussi que le comportement I2C8 (utilisation d'une « autre méthode » lors du pré-test) entraîne l'échec au post-test mais la réussite au pré-test. Voilà qui constituerait un progrès pour les élèves concernés, mais la faible intensité des deux implications issues de I2C8 invite à la prudence.

Item 3

L'analyse implicative ne nous apprend pas grand chose à propos de cet item. Contentons-nous du graphe conjoint des items 3 du pré-test et du post-test :

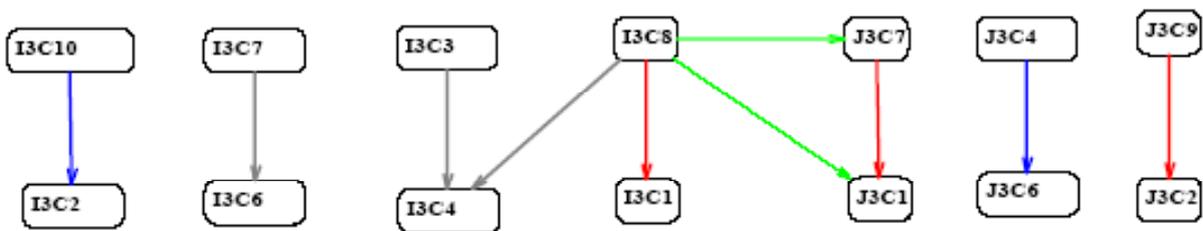


Fig. B.20

La seule information intéressante est constituée par l'implication (d'intensité comprise entre 0,9 et 0,95) de I3C8 vers J3C7 : les élèves qui lors du pré-test avaient fourni une justification partielle ont tendance à fournir une justification complète et correcte au post-test.

Item 4

Le graphe conjoint des deux items 4 du pré-test et du post-test attire l'attention sur le comportement J4C8 : avoir mentionné (au post-test) l'impossibilité de réaliser des assemblages de 3, 5 ou 6 triangles conformes à la consigne. Ce comportement — significatif

d'élèves maîtrisant la situation et n'hésitant pas à fournir un renseignement non demandé — entraîne au pré-test la production des trois carrés 1×1 , 2×2 , 3×3 et au post-test, il entraîne directement la production d'un assemblage de quatre triangles et indirectement celle d'un assemblage de deux triangles. Nous aurons l'occasion de reparler du comportement J4C8 dans la suite.

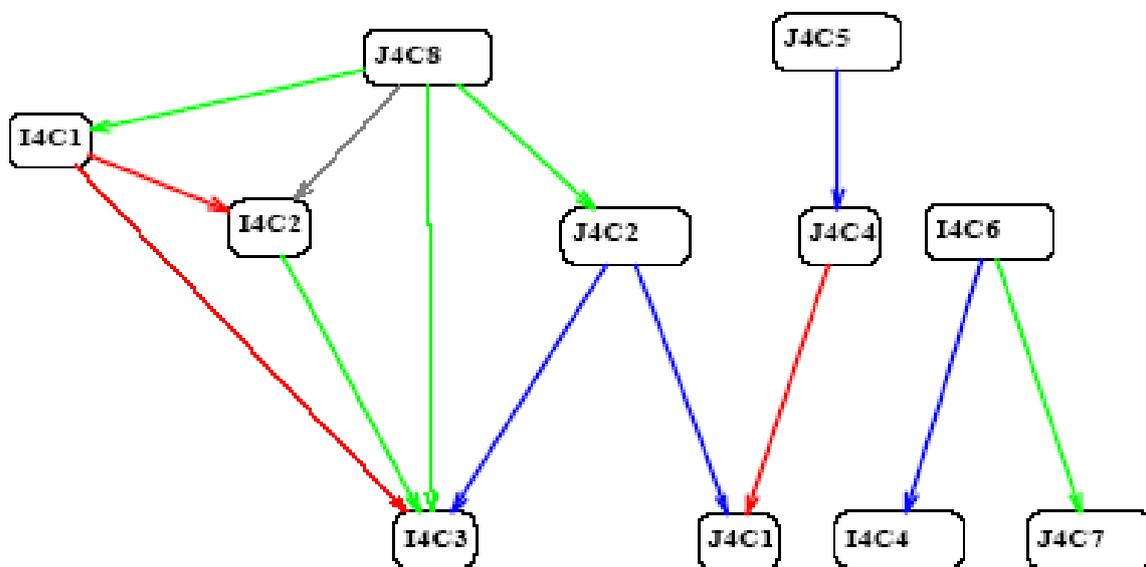


Fig. B.21

Item 5

Le graphe associé à cet item classe la perception atomisée J5C9 parmi les comportements d'échec (*figure B.23*).

Le sous-graphe des comportements de réussite (*figure B.22*) est assez touffu. On y remarque deux comportements-sources : J5C8 et J5C13.

Le premier (J5C8, « Apposition de marques sur l'original ») est à la base d'un flux d'implications boutissant à la réussite J5C1 en passant par J5C11 (perception locale). Du second (J5C2, « Dessin du quadrillage oblique du cadre ») jaillit un autre flux d'implications parmi lesquelles J5C12 (perception globale). Avant qu'ils se rejoignent en J5C5 et J5C7, le seul lien entre les deux flux est l'implication $J5C6 \Rightarrow J5C14$.

Les deux modes de perception, local et global, sont ainsi bien différenciés, tout en étant tous deux des facteurs de réussite.

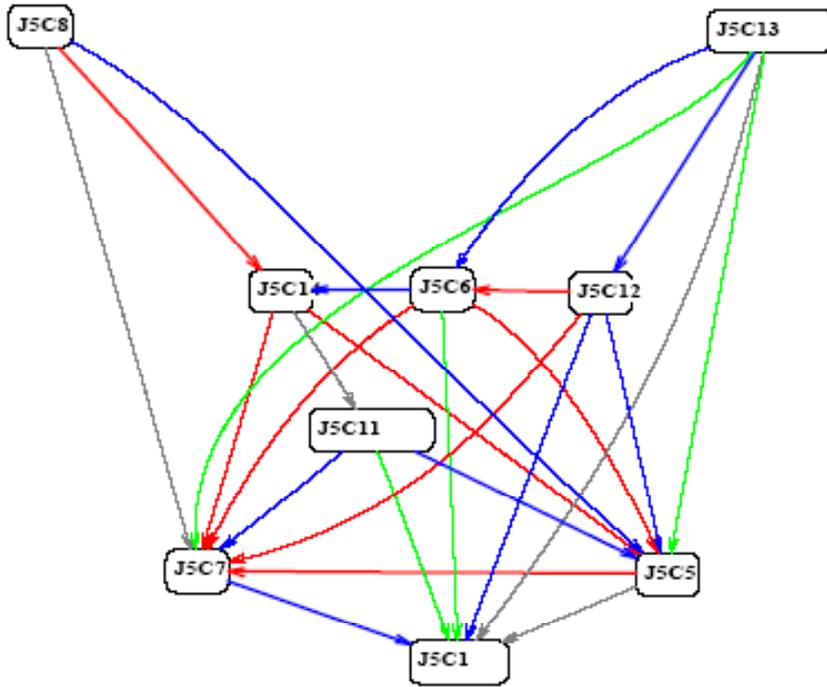


Fig. B.22

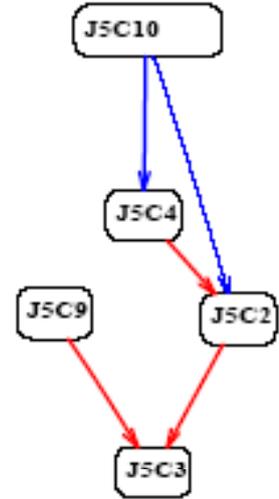


Fig. B.23

Nous ne dessinons pas ici l'intégralité du graphe conjoint des comportements relatifs aux items 5 des deux tests. Ce graphe est trop touffu pour être lisible. Mais nous en présentons un fragment : celui qui prend sa source en J5C8 (Fig. B.24). On y remarquera la flèche de J5C8 vers I5C9. Ainsi, les élèves qui, au post-test, se sont aidés de marques placées sur la figure originale avaient eu tendance au pré-test à adopter le mode de perception atomisé. Au post-test, ils ont évolué vers le mode local.

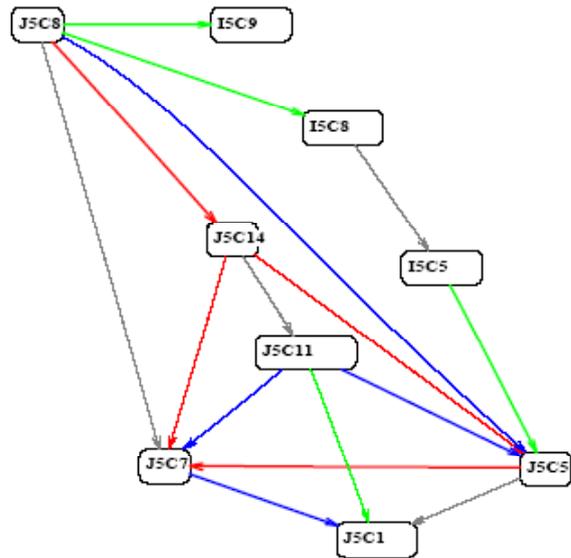


Fig. B.24

Item 6

Le graphe relatif à cet item est d'une limpidité absolue (comme au prétest, le comportement J6C6, strictement équivalent à J6C1, a été éliminé).

- à droite les comportements de réussite : J6C1, J6C3, J6C11 (découpage et recombinaison, même implicites), J6C12 (dénombrement, même implicite), J6C13 et J6C14

(apposition de marques et pertinence de celles-ci) ; J6C13 et J6C14 sont rigoureusement équivalents. Nous ne plaçons que J6C13 sur les diagrammes.

- à gauche les comportements d'échec : J6C4 et J6C5 (une seule des cases est cochée), J6C8 et J6C9 (justification incorrecte ou absente), J6C10 (usage de formules ou de mesure).

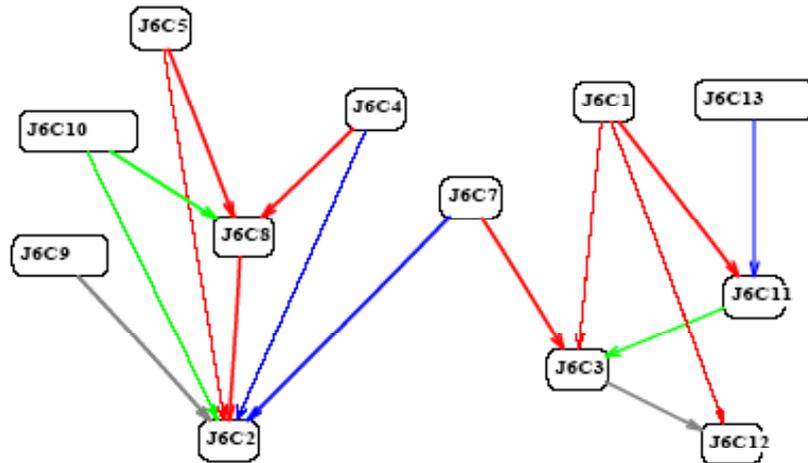


Fig. B.25

Entre les deux, l'implication $J6C7 \Rightarrow J6C2$ sert d'intermédiaire ; il en était déjà ainsi au pré-test (flèche $I6C6 \Rightarrow I6C2$, figure B.8).

À nouveau, le graphe conjoint des comportements de réussite aux items 6 du pré- et du post-test met en évidence la stabilité des démarches utilisées :

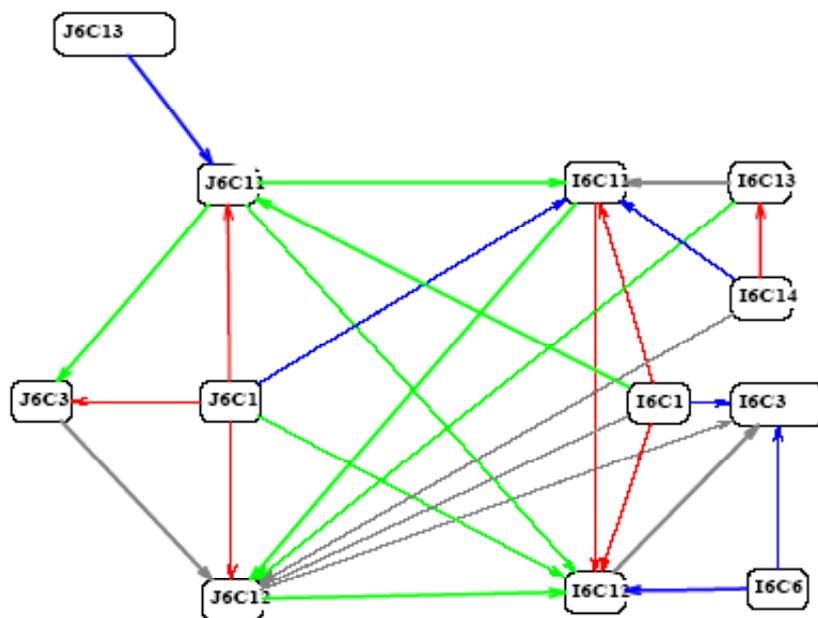


Fig. B.26

La principale différence entre les procédures utilisées lors des deux tests se manifeste dans l'absence d'une implication de J6C11 vers J6C12, alors que l'implication de I6C11 vers I6C12 est très forte. En d'autres termes, l'usage — même implicite — d'un puzzle pour résoudre l'item 6 du pré-test était nécessairement associé à un dénombrement. Au post-test, ce n'est pas le cas, l'usage du puzzle suffit. On peut penser que cela est lié aux figures familières d'un carré et d'un parallélogramme situés de surcroît dans un réseau qui facilite la visualisation du puzzle.

B.4.3 Structurer les comportements d'échec

Au fil des paragraphes précédents, nous avons classé les comportements suivants comme significatifs d'échecs : J2C2, J2C3, J3C2, J3C9, J4C7, J5C2, J5C3, J5C4, J5C9, J5C10, J6C4, J6C5, J6C8, J6C9, J6C10. Comme au pré-test, rassemblons ces comportements sur un seul diagramme :

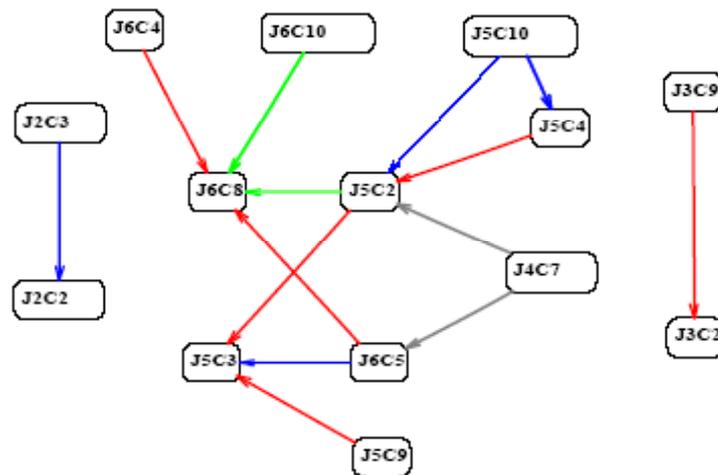


Fig. B.27

Première constatation : la piste des *calculs routiniers mal maîtrisés* n'est plus représentée que par le seul comportement J6C10. Cela correspond à l'augmentation des réussites aux items 1 et 2 du post-test par rapport aux items correspondants du pré-test.

Deuxième constatation : la partie centrale du diagramme rassemble des comportements des items 5 et 6, à une exception près, le comportement J4C7, production d'un assemblage non conforme à la consigne à l'item 4), qui trahit une mauvaise visualisation de ce qui était demandé à cet item. Il n'est pas surprenant que ce comportement implique directement — bien que faiblement — J5C2 (dessin inacceptable à l'item 5). Il implique aussi J6C5 (l'aire du parallélogramme bleu est plus grande que celle du carré vert, à l'item 6). Qu'en conclure sinon que les aires peuvent avoir été comparées en se basant uniquement sur une perception défailante par défaut d'analyse de la figure observée ?

B.4.4 Structurer les comportements de réussite

Les comportements suivants ont été classés comme comportements de réussite :

Item 1 : J1C1, J1C6, J1C9, J1C10

Item 2 : J2C1, J2C6, J2C9, J2C10

Item 3 : J3C1, J3C7

Item 4 : J4C1, J4C2, J4C4, J4C5, J4C8

Item 5 : J5C1, J5C5, J5C6, J5C7, J5C8, J5C12, J5C13, J5C14

Item 6 : J6C1, J6C3, J6C11, J6C12, J6C13

Le graphe — même simplifié — de ces comportements n'est pas très lisible.

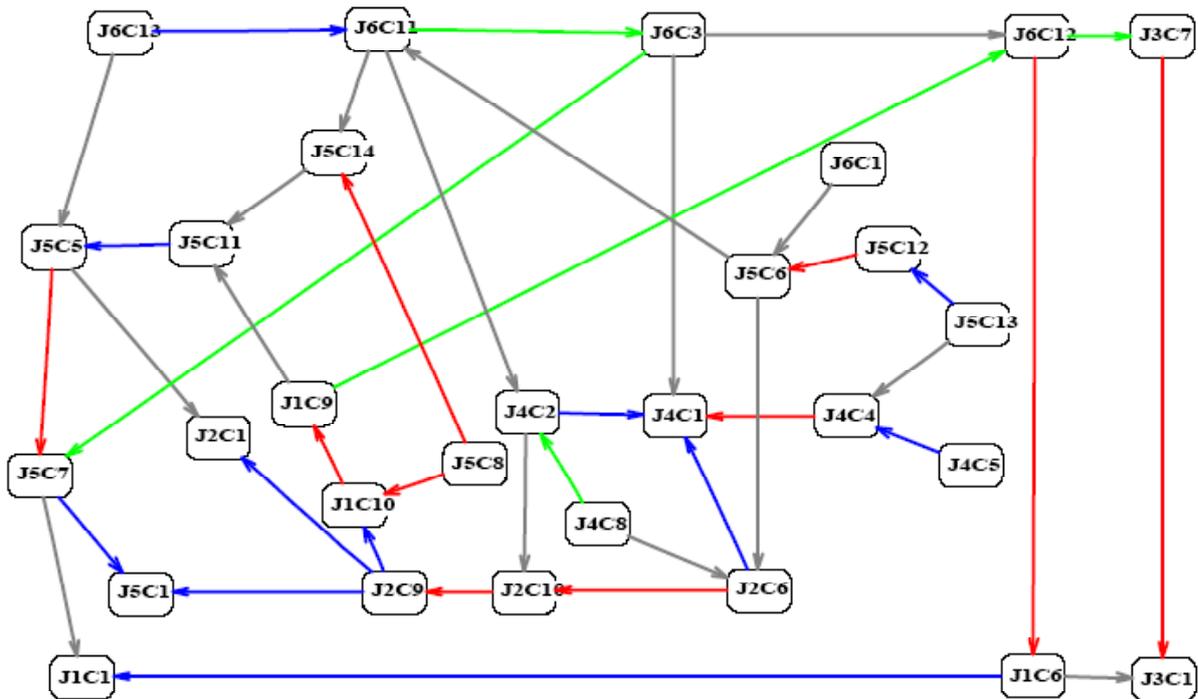


Fig. B.28

Ce graphe nous permet néanmoins de déterminer les comportements-sources dont nous avons vu l'intérêt dans l'analyse du pré-test. Il s'agit de J4C5, J4C8, J5C8, J5C13, J6C1, J6C13. Rappelons leurs significations et leurs fréquences.

Code	Fréquence	Signification
J4C5	13 %	Production d'un assemblage de plus de huit triangles à l'item 4
J4C8	10 %	Mention de l'impossibilité des assemblages de 3, 5 et 6 triangles
J5C8	22 %	Apposition de marques sur l'original
J5C13	6,5 %	Dessin du quadrillage oblique du cadre, à l'item 5
J6C1	15 %	Réussite à l'item 6, avec justification correcte et complète
J6C13	12 %	Apposition de marques sur la figure à l'item 6

A priori, on s'attendrait à ce que la réussite J6C1 à l'item 6 soit un élément terminal du graphe plutôt qu'un élément source. En effet, il ne s'agit certainement pas là d'un comportement élémentaire, mais bien de la résultante de plusieurs comportements élémentaires différents. Dans un cas pareil, il est bon de se souvenir que le graphe ne reprend que des implications d'intensité au moins égale à 0,85 et de consulter la liste de toutes les intensités afin de voir si on ne trouve pas une implication aboutissant à J6C1 dont l'intensité soit proche de 0,85. Effectivement, nous en trouvons une : l'implication de J5C12 vers J6C1 a une intensité de 0,84. Il n'est donc pas déraisonnable de considérer que la réussite à l'item 6 est impliquée par la perception globale à l'item 5 et que J6C1 s'insère dans une chaîne $J5C13 \Rightarrow J5C12 \Rightarrow J6C1 \Rightarrow J5C6$ caractéristique de la perception globale.

Les cinq autres comportements-sources mentionnés ci-dessus sont peut-être moins variés qu'il ne l'étaient au pré-test. J5C8 et J6C13 procèdent de la même idée : compléter la figure afin de mieux asseoir son raisonnement. J4C8 et J5C13 relèvent du mode de perception, J4C5 peut-être aussi. On pourrait croire que la variété comportementale dans la population d'élèves est plus faible au post-test qu'elle ne l'était au pré-test.

Pour approfondir notre étude, dressons les diagrammes des comportements directement impliqués par les comportements-sources.

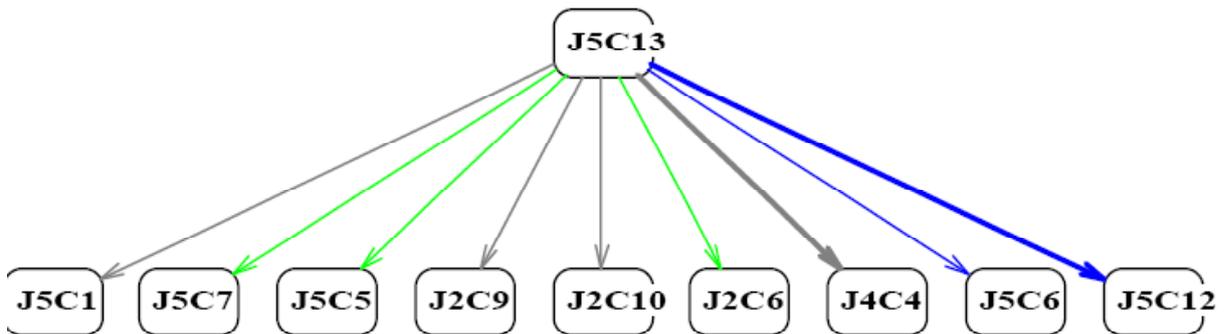
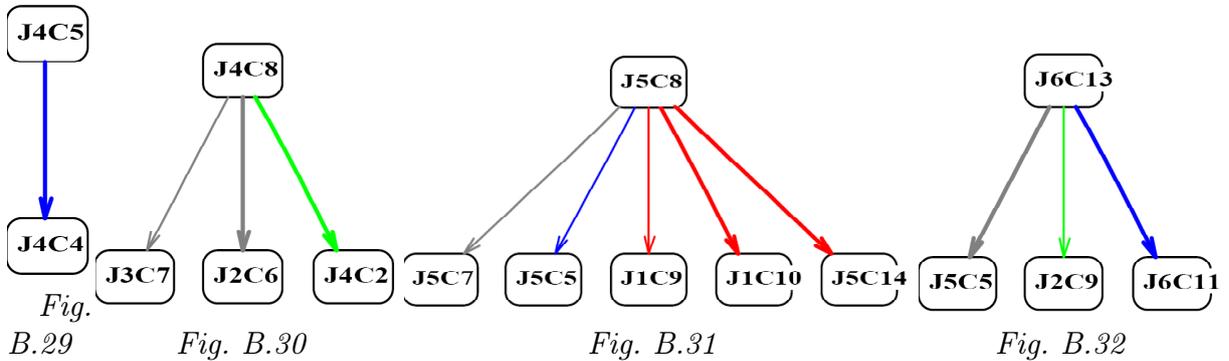


Fig. B.33

On retrouve ici à nouveau l'importance du comportement de perception globale à l'item 5 : le comportement J5C13 à la base de cette perception entraîne directement (figure B.33) neuf autres comportements, à l'instar de I5C6 au pré-test. De plus trois des comportements impliqués par J6C13, à savoir J5C1, J5C7 et J2C6, sont les correspondants de trois des comportements (I5C1, I5C7 et I2C6) impliqués par I5C6.

Remarquons aussi que J5C5 et J5C7 sont impliqués à la fois par J5C8 et J5C13. Ce sont donc des comportements non élémentaires. Par ailleurs les comportements J1C9, J1C10, J2C9, J2C10, consistant à apposer des marques sur les figures sont impliqués

– à l'item 1 par J5C8,

– à l'item 2 par J5C13,

ce qui tendrait à montrer que l'item 2 sollicite plus la perception globale que l'item 1.

B.5 L'analyse du pré-test de 5^e primaire (2006–2007)

B.5.1 Les comportements recensés

Item 1

Les comportements repérés pour l'item 1 du pré-test sont les suivants :

- | | |
|--|---|
| I1C1 : L'élève a répondu de manière correcte et complète. | une case cochée erronée). |
| I1C2 : L'élève n'a pas répondu de manière correcte ou complète. | I1C6 : L'élève a confondu « longueur » et « aire ». |
| I1C3 : L'élève a coché la case « temps » à la première question. | I1C7 : L'élève a confondu « aire » et « volume ». |
| I1C4 : La réponse est partielle mais correcte. | I1C8 : L'élève a confondu « longueur » et « volume ». |
| I1C5 : La réponse est, en partie, incorrecte (au moins une case cochée correcte et au moins | I1C9 : L'élève a coché la case « poids » aux questions 3, 4 ou 5. |
| | I1C10 : L'élève a coché la case « temps » aux questions 3, 4 ou 5. |

Item 2

À cet item, nous avons recensé les comportements suivants :

- | | |
|---|---|
| I2C1 : L'élève a répondu correctement. | I2C10 : L'élève a effectué une multiplication. |
| I2C2 : La réponse de l'élève est incorrecte. | I2C11 : L'élève a compté des (petits) carrés. |
| I2C3 : La justification est complète et correcte. | I2C12 : L'élève a procédé par découpage et recombinaison. |
| I2C4 : La justification est partielle mais correcte. | I2C13 : L'élève a compté des points. |
| I2C5 : La justification est erronée. | I2C14 : L'élève a porté des marques sur la figure originale. |
| I2C6 : La justification est absente. | I2C15 : Les marques ajoutées sont pertinentes. |
| I2C7 : L'élève n'a pas répondu. | I2C16 : L'élève confond « aire » et « forme ». |
| I2C8 : L'élève a mesuré des longueurs. | |
| I2C9 : L'élève a confondu « périmètre » et « aire ». | |

Item 3

A deux exceptions près, les comportements recensés à l'item 3 sont identiques à ceux recensés à l'item 2.

- | | |
|---|--|
| I3C1 : L'élève a répondu correctement. | I3C8 : L'élève a mesuré des longueurs. |
| I3C2 : La réponse de l'élève est incorrecte. | I3C9 : L'élève a confondu « périmètre » et « aire ». |
| I3C3 : La justification est complète et correcte. | I3C10 : L'élève a effectué une multiplication. |
| I3C4 : La justification est partielle mais correcte. | I3C11 : L'élève a compté des (petits) carrés. |
| I3C5 : La justification est erronée. | I3C12 : L'élève a procédé par découpage et recombinaison. |
| I3C6 : La justification est absente. | I3C13 : L'élève a compté des points. |
| I3C7 : L'élève n'a pas répondu. | |

- I3C14** : L'élève a procédé par complémentarité. originale.
I3C15 : L'élève a utilisé la même méthode qu'à l'item 2. **I3C17** : Les marques ajoutées sont pertinentes.
I3C16 : L'élève a porté des marques sur la figure **I3C18** : L'élève confond « aire » et « forme ».

Item 4

Pour cet item, quinze comportements ont été listés :

- I4C1** : La réponse de l'élève est correcte (indépendamment de la justification). **I4C8** : L'élève a effectué une division ou une multiplication.
I4C2 : La réponse est incorrecte (indépendamment de la justification). **I4C9** : La justification est correcte.
I4C3 : L'élève a répondu « 14 carrés » ou « 126 carrés ». **I4C10** : La justification est partielle mais sans erreur.
I4C4 : L'élève a dessiné les quinze carrés verts dans le rectangle bleu. **I4C11** : La justification est erronée.
I4C5 : L'élève a procédé par comptage. **I4C12** : L'élève n'a pas justifié sa réponse.
I4C6 : L'élève a mesuré des longueurs. **I4C13** : L'élève n'a pas répondu.
I4C7 : L'élève a utilisé un petit carré comme unité d'aire. **I4C14** : L'élève utilise le mode quantitatif atomisé (I4C5 × I4C7)
I4C15 : L'élève utilise le mode quantitatif global (I4C4 × I4C5)

Item 5

Nous avons repéré dix comportements susceptibles d'être produits par les élèves à cet item 5 :

- I5C1** : L'élève a répondu de manière correcte et complète au défi. **I5C7** : L'élève répond « 6 triangles et 2 carrés ».
I5C2 : L'élève n'a pas répondu de manière correcte et complète au défi. **I5C8** : L'élève fournit une réponse comprise entre (2,6) et (6,8).
I5C3 : Le nombre de carrés est exact. **I5C9** : L'élève a numéroté les carrés et les triangles.
I5C4 : Le nombre de triangles est exact. **I5C10** : L'élève colorie sans se préoccuper de dénombrer.
I5C5 : Le plus grand triangle a été dessiné.
I5C6 : Le plus grand carré a été dessiné.

Item 6

Treize comportements ont été recensés pour cet item.

- I6C1** : L'élève produit un dessin acceptable. angles que l'original.
I6C2 : L'élève ne produit pas un dessin acceptable. **I6C5** : Le dessin de l'élève comporte des traits de construction et ceux-ci sont utilisés.
I6C3 : Le dessin de l'élève est imprécis. **I6C6** : Les côtés obliques du triangle constituant le corps de la poupée sont correctement alignés sur la diagonale du cadre (mode *global*)
I6C4 : Le dessin de l'élève comporte moins de tri-

de construction).

I6C7 : L'élève a tenu compte des graduations portées sur les quatre côtés du cadre.

I6C8 : L'élève a porté des marques sur l'original.

I6C9 : L'élève a utilisé le mode de construction *atomisé*.

I6C10 : L'élève a été perturbé par le décalage en

hauteur.

I6C11 : L'élève a utilisé le mode de construction *local*.

I6C12 : L'élève a utilisé un mode *mixte* de construction.

I6C13 : L'élève n'a rien dessiné.

I6C14 : L'élève essaye d'occuper le cadre.

Item 7

Cette fois, nous distinguons dix-neuf comportements :

I7C1 : L'élève répond correctement « rose ».

I7C2 : L'élève répond incorrectement « bleue ».

I7C3 : L'élève a en mains de quoi fournir la bonne réponse, mais ne l'explique pas correctement.

I7C4 : L'élève répond « même aire ».

I7C5 : La justification est correcte et complète.

I7C6 : La justification est partielle mais sans erreur.

I7C7 : La justification est erronée (au moins UNE erreur).

I7C8 : La justification est absente.

I7C9 : L'élève a remis une feuille blanche

I7C10 : L'élève calcule des aires en mesurant des longueurs et en appliquant une formule.

I7C11 : L'élève utilise une translation.

I7C12 : L'élève utilise, éventuellement de façon implicite, un découpage et une recombinaison.

I7C13 : L'élève utilise, éventuellement de façon implicite, un comptage.

I7C14 : L'élève a apposé des marques sur la figure.

I7C15 : Les marques apposées sont pertinentes.

I7C16 : L'élève confond aire et périmètre.

B.5.2 Des comportements de réussite et d'échec

Item 1

L'analyse implicative ne fournit guère d'information intéressante à propos de l'item 1. Elle ne dégage d'implications qu'entre des comportements d'échec. Plusieurs sont naturelles, voire triviales. D'autres sont difficiles à interpréter.

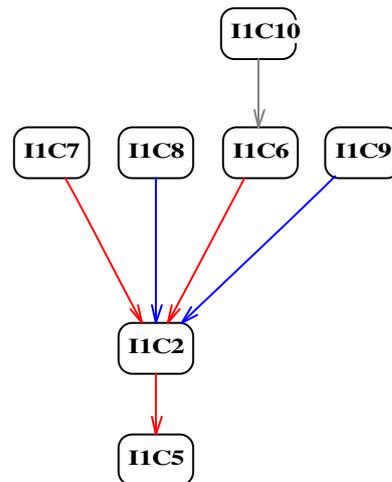


Fig. B.34

Item 2

Le graphe des implications relatives à cet item se décompose en deux sous-graphes aboutissant l'un (à gauche) au comportement I2C2 qui signifie que l'élève a remis une réponse incorrecte et l'autre (à droite) au comportement I2C1 qui signifie au contraire la production d'une bonne réponse.

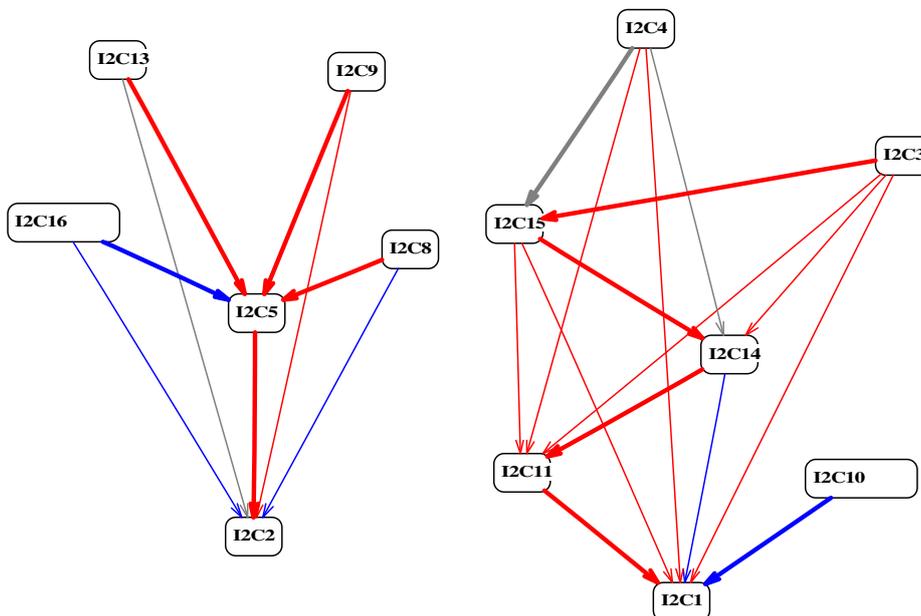


Fig. B.35

Le sous-graphe de gauche est donc celui des comportements d'échec, et le sous-graphe de droite celui des comportements de réussite.

Rappelons que la couleur des flèches indique l'intensité d'implication i :

1. Flèche rouge : implication très forte, $0,00 < i$.
2. Flèche bleue : implication forte, $0,95 < i \leq 0,99$.
3. Flèche verte : implication moyenne, $0,9 < i \leq 0,95$.
4. Flèche grise ou noire : implication faible, $0,85 < i \leq 0,9$

L'intensité d'implication d'une flèche ne dépend pas de son épaisseur.

Rappelons aussi que le comportement situé à l'extrémité d'une flèche est toujours plus fréquent que celui qui est à l'origine.

Examinant le sous-graphe des réussites, on détecte d'abord le quadrilatère orienté de I2C3-I2C15-I2C11-I2C14, orienté de I2C3 vers I2C11 et dont tous les côtés représentent des implications très fortes. Sont ainsi associés la justification complète et correcte, les deux comportements relatifs à l'apposition de marques et le comptage de petits carrés. On retrouve ainsi le rôle de l'apposition de marques sur une figure, en vue de supporter le raisonnement. De I2C11, on accède à la réussite I2C1 par une implication également très forte.

De I2C10 on accède également à I2C1 et à aucune autre nœud du graphe. Autrement

dit, le fait d'effectuer une multiplication en vue de comparer les deux aires, constitue une démarche de réussite isolée, non associée à d'autres.

À noter aussi les flèches partant de I2C4 (justification partielle mais correcte). C'est encore un comportement qui entraîne très fortement la réussite, mais qui n'entraîne que faiblement l'apposition de marques. On pourrait croire que les élèves concernés ont besoin de moins de support écrit et qu'ils prennent aussi moins la peine de justifier !

Le sous-graphe des comportements d'échec ne fait que nous confirmer que mesurer des longueurs, confondre aire et périmètre, confondre aire et forme ou encore compter des points entraînent à la fois la production de justifications erronées et l'échec. La place du comptage de points dans ce sous-graphe va aussi dans le sens de l'interprétation de ce comportement que nous avons donnée à la section 12.3.2.

Item 3

Le graphe d'implication de cet item 3 a bien des points communs avec celui de l'item 2.

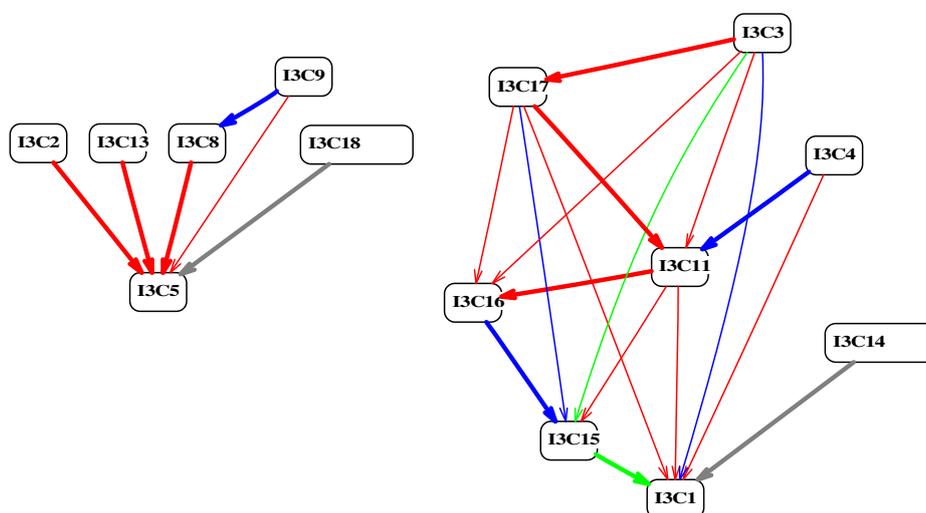


Fig. B.36

Dans le sous-graphe des comportements d'échec, on retrouve la confusion périmètre-aire (qui cette fois entraîne la mesure des longueurs), la confusion aire-forme, et le comptage de points. La seule différence importante est la permutation des rôles relatifs de la production d'une réponse erronée et de celle d'une justification incorrecte. En se reportant à la section 12.3.2, on pourra y vérifier que si le taux de justification erronée est à peu près le même à l'item 3 qu'à l'item 2, le taux de réponse incorrecte y est plus faible. On peut donc trouver des justifications erronées associées à des réponses correctes.

Du côté du sous-graphe des réussites, on constate l'absence du comportement multiplicatif I3C10, et son remplacement par le comportement d'équicomplémentarité I3C14. Comme I2C10 à l'item 2, I3C14 est isolé à l'item 3.

On retrouve aussi un quadrilatère orienté I3C3-I3C17-I3C16-I3C11 dont toutes les impli-

cations sont très fortes. Il associe de nouveau la justification correcte à l'apposition de marques et au comptage de carrés. Par rapport à l'item 2, une inversion se produit : I3C11 vient entre I3C17 et I3C16 alors que I2C11 était après I2C14. Plus important est l'absence de flèche directe de I3C16 vers la réussite I3C1. Ainsi, le fait d'apposer des marques n'est pas un indice de réussite aussi fort à l'item 3 qu'à l'item 2 : trop de marques ne sont pas pertinentes.

Tout naturellement, I3C15 s'insère dans la chaîne de I3C3 à I3C1 : la méthode utilisée à deux reprises aux items 2 et 3 est bien le comptage de carrés.

Les items 2 et 3 étant très semblables, construisons le graphe simultanément des comportements de réussite à ces deux items, en nous limitant au squelette du graphe (*voir page 489*).

Nous voyons apparaître le comportement multiplicatif I3C10 qui ne figurait pas dans le sous-graphe de réussite à l'item 3, mais entraîne fortement I2C10 et peut donc aussi être considéré comme un comportement de réussite.

Le graphe montre aussi la cohérence très forte de ces deux items. On remarque encore que les intensités d'implications décroissent du haut vers le bas : très fortes entre comportements de justification et d'apposition de marques (sauf de I2C4 vers I2C15), elles ne sont que fortes entre comportements multiplicatifs et de comptages. On peut supposer que les premiers sont plus stables que les seconds.

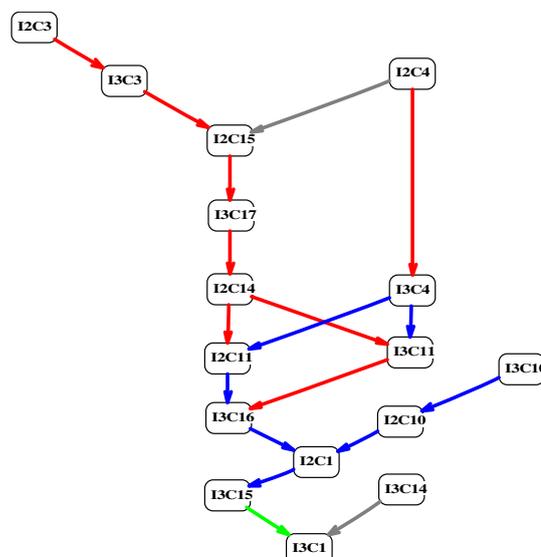


Fig. B.37

Item 4

Les comportements I4C14 (mode quantitatif atomisé) et I4C15 (mode quantitatif global) ont été déterminés à partir des autres :

- Un élève s'est vu attribuer le comportement I4C14 si et seulement s'il a procédé par comptage (I4C5) et utilisé un petit carré comme unité d'aire (I4C7).
- Un élève s'est vu attribuer le comportement I4C15 si et seulement s'il a procédé par comptage (I4C5) et dessiné les quinze carrés verts dans le rectangle bleu (I4C4).

Sur le graphe implicatif, les implications de I4C14 vers I4C5 et I4C7 d'une part, de I4C15 vers I4C5 et I4C4 d'autre part sont par conséquent automatiques.

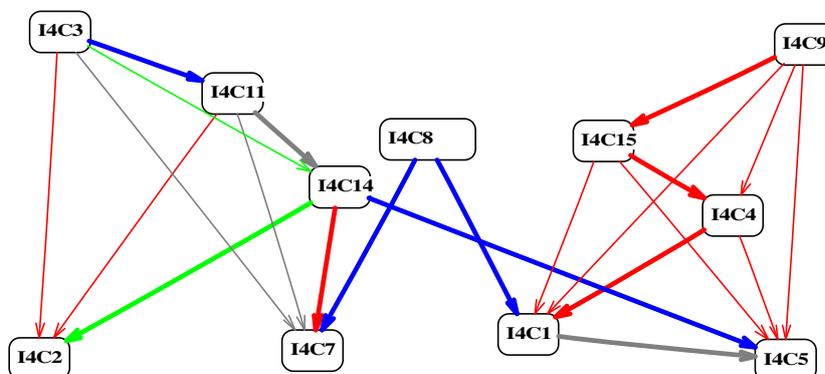


Fig. B.38

Ce graphe comporte trois nœuds terminaux : I4C2, I4C7 et I4C5.

I4C2 est le fait de produire une réponse incorrecte. Nous pouvons donc considérer comme des comportements d'échec les comportements I4C3 (répondre 14 ou 126 carrés), I4C11 (justification erronée) et I4C14 (mode quantitatif atomisé) qui l'entraînent.

Le graphe ne comporte pas de flèche de I4C7 vers I4C2 (l'intensité de l'implication correspondante est de 0,82, donc pas suffisamment importante pour être considérée comme significative). Nous ne pouvons donc pas affirmer que l'utilisation de petits carrés est en soi un comportement d'échec. De plus, I4C7 est lui-même impliqué par I4C8 (utilisation d'une multiplication ou d'une division), lequel a un caractère ambigu : en tenant compte des multiplications, il s'associe au mode quantitatif global qui est du côté des réussites, mais en tenant compte des divisions, il s'associe au mode quantitatif atomisé qui est du côté des échecs. Vu cette ambiguïté, nous ne classerons I4C8 ni en échec, ni en réussite. I4C8 et les flèches qui en sont issues jettent un pont entre les deux parties du graphe.

Dans la partie droite, I4C9 (justification correcte), I4C15 (mode quantitatif global), et I4C4 (dessin des quinze carrés verts) sont des comportements de réussite. Mais I4C5 (comptage) est impliqué (faiblement) par I4C1 et non l'inverse : les élèves qui réussissent ont tendance à avoir procédé par comptage, mais ce procédé ne suffit pas à entraîner significativement la réussite.

Item 5

Pris isolément, le graphe relatif à cet item ne nous apprend pas grand chose. Tout ce que le graphe permet d'affirmer est que « les élèves qui ont réussi ont bien répondu ».

Le faible taux de réussite à cet item explique que les taux d'intensité des implications de I5C1 vers les autres nœuds du graphe soient inférieurs à 0,99, même quand, du point de vue logique, l'implication est parfaite ⁽²⁾.

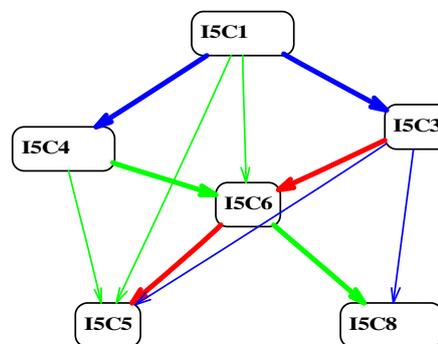


Fig. B.39

Item 6

Cet item avait déjà été soumis en 2005–2006 aux élèves de sixième primaire. Il avait été l'occasion de mettre en évidence la distinction à opérer entre les modes de perception *atomisé*, *local* et *global*.

Les comportements recensés sont les mêmes qu'en 2005–2006, complétés par les comportements I6C12 à I6C13. Le graphe implicatif obtenu présente des similitudes et des différences avec celui obtenu en 2005–2006.

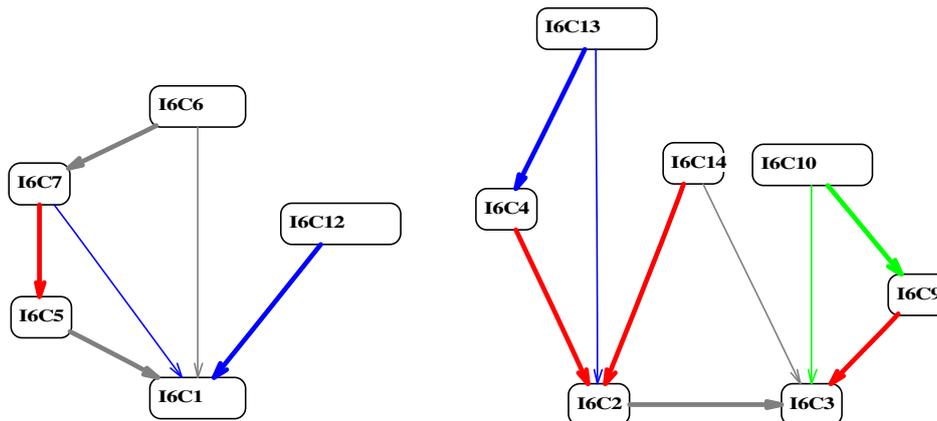


Fig. B.40

Du côté des réussites, nous retrouvons le comportement I6C6, lié à la perception globale, qui implique faiblement I6C1 (c'était déjà le cas en 2005–2006).

Le mode mixte de construction (I6C12), non recensé en 2005–2006, apparaît également comme un comportement de réussite, avec une intensité plus forte que celle de l'implication I6C6 → I6C1.

Dans l'autre partie du graphe, on trouve I6C2 (dessin non acceptable) qui n'est impliqué que par des comportements qui correspondent visiblement à des échecs : I6C4 (dessin

⁽²⁾ Ceci n'est pas un défaut de l'implication statistique, mais plutôt une qualité : il n'y a pas lieu d'attribuer une signification à une implication quand l'effectif est trop faible.

B.5.3 Structurer les comportements d'échec

En réalisant un graphe à partir des implications qui lient les comportements associés à des échecs, nous déterminons, la stabilité de ces comportements à travers les différents items du test.

Par souci de lisibilité, nous limitons ce graphe à un squelette, suivant la méthode indiquée à la page 489 : nous n'indiquons que les flèches directes, pas celles qui peuvent s'obtenir par composition de deux autres. Pour la même raison, nous nous limitons aussi à reproduire les implications d'intensité moyenne à très forte.

Le graphe comprend les comportements d'échecs suivants recensés à la section précédente (l'item 5 n'a pas fait apparaître de comportement d'échec significatif) :

- à l'item 1 : I1C2, I1C5, I1C6, I1C7, I1C8, I1C9, I1C10 ;
- à l'item 2 : I2C2, I2C5, I2C8, I2C9, I2C13, I2C16 ;
- à l'item 3 : I3C2, I3C5, I3C8, I3C9, I3C13, I3C18 ;
- à l'item 4 : I4C2, I4C3, I4C11, I4C14 ;
- à l'item 6 : I6C2, I6C3, I6C4, I6C13, I6C14 ;
- à l'item 7 : I7C2, I7C4, I7C7, I7C16.

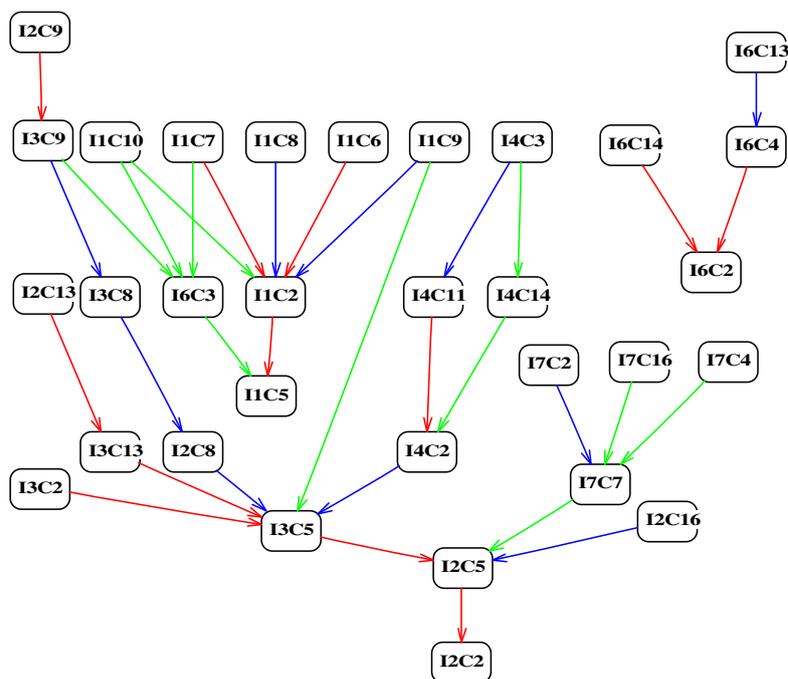


Fig. B.42

Le graphe montre bien la proximité des items 2 et 3. On retrouve en particulier ce que nous avons appelé au paragraphe B.3.3 la *piste des calculs routiniers mal assimilés*, c'est-à-dire la confusion aire-périmètre et des calculs ou mesures de longueurs inadéquats :

$$I2C9 \rightarrow I3C9 \rightarrow I3C8 \rightarrow I2C8 \rightarrow I3C5 \rightarrow I2C5$$

Cette imbrication entre les comportements associés aux items 2 et 3 est la seule vraiment présente. Les comportements associés aux autres items se raccrochent par des « extrémi-

tés » au groupe principal :

- Le groupe des comportements associés à l'item 1 entoure I6C3, qui semble un peu égaré. I1C9 entraîne I3C5.
- Les comportements associés à l'item 4 se raccrochent au nœud I3C5.
- Les comportements associés à l'item 7 se raccrochent au nœud I2C5.
- Quant aux comportements associés à l'item 6, ils ne se raccrochent pas vraiment au groupe principal, seule la position de I6C3 parmi les comportements associés à l'item 1 assure une liaison dont l'interprétation est difficile.

B.5.4 Structurer les comportements de réussite

Procédons de même avec les comportements associés à la réussite. Ceux-ci sont les suivants :

- à l'item 2 : I2C1, I2C3, I2C10, I2C11, I2C14, I2C15 ;
- à l'item 3 : I3C1, I3C3, I3C4, I3C10, I3C11, I3C14, I3C15, I3C16, I3C17 ;
- à l'item 4 : I4C1, I4C4, I4C5, I4C9, I4C15 ;
- à l'item 5 : I5C1, I5C3, I5C4, I5C5, I5C6, I5C8 ;
- à l'item 6 : I6C1, I6C5, I6C6, I6C7, I6C12 ;
- à l'item 7 : I7C1, I7C3, I7C5, I7C6, I7C8, I7C12, I7C13, I7C14, I7C15.

Le graphe implicatif (même limité au squelette) rassemblant ces comportements est fort embrouillé (*Fig. B.43*).

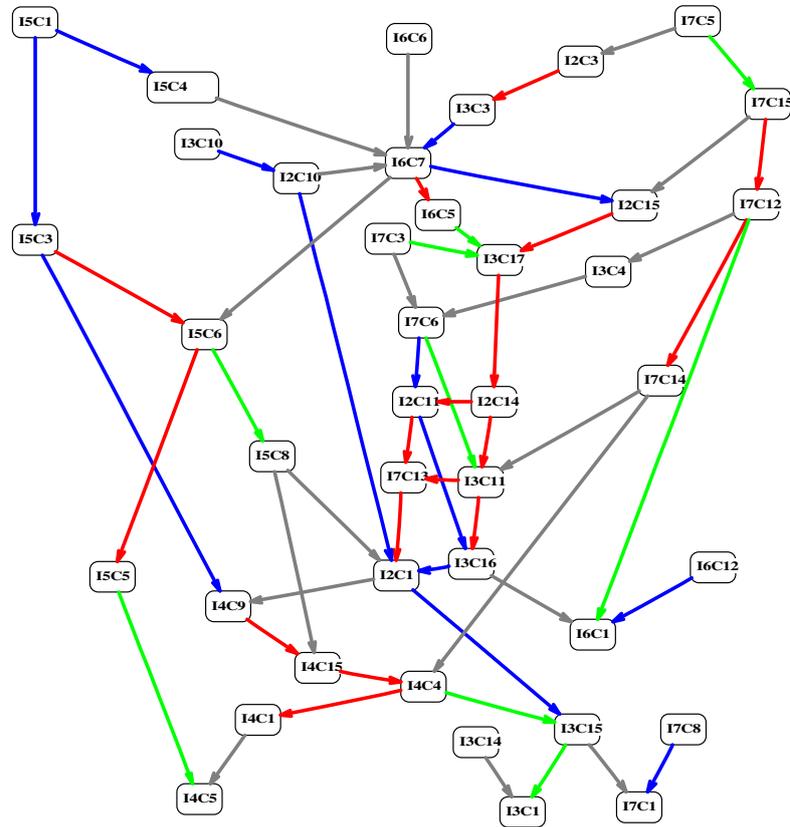


Fig. B.43

Commençons par relever sur ce graphe les comportements qui en constituent les sources, c'est à dire qui n'ont pas d'ascendants. Nous ne retenons pas le comportement I5C1 qui n'est que la conjonction de I5C3 et I5C4 et le remplaçons par ceux-ci. Les sources du graphe sont reprises, avec leurs fréquences dans le tableau suivant.

Code	Signification	Taux (arrondis)
I3C10	Usage d'une multiplication à l'item 3	3 %
I3C14	Complémentarité à l'item 3	11 %
I5C3	Nombre de carrés exact à l'item 5	19 %
I5C4	Nombre de triangles exact à l'item 5	6 %
I6C6	Mode global à l'item 6	4 %
I6C12	Mode mixte à l'item 6	7 %
I7C3	Bonne réponse non explicitée à l'item 7	6 %
I7C5	Justification correcte à l'item 7	7 %
I7C8	Pas de justification à l'item 7	16 %

À priori, un comportement source étant fatalement moins fréquent que les autres peut correspondre à une démarche plus difficile à acquérir. Son acquisition peut alors s'accompagner de celle d'autres démarches qui en dépendent. C'est pourquoi si une relation d'implication peut s'interpréter comme une relation de cause à effet, il est intéressant d'examiner quels sont les comportements directement impliqués par ceux qui sont situés à la source du graphe.

L'exemple du comportement I7C8 (absence de justification à l'item 7), qui implique la bonne réponse à cet item, montre que cette interprétation en tant que relation de cause à effet, n'est pas toujours possible. Il importe donc d'être prudent et d'analyser soigneusement les interprétations possibles des différentes implications révélées par l'analyse implicative.

Éliminons I7C8. Parmi les neuf comportements restants, on en trouve qui sont relatifs à la perception (I5C3, I5C4, I6C6, I6C12), à la multiplication (I3C10), à la complémentarité (I3C14), à la justification (I7C3, I7C5). Les figures ci-dessous indiquent les comportements impliqués directement par chacun des comportements-sources retenus.

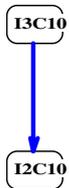


Fig. B.44

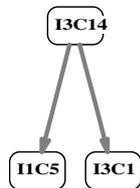


Fig. B.45

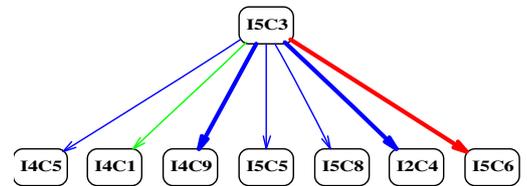


Fig. B.46

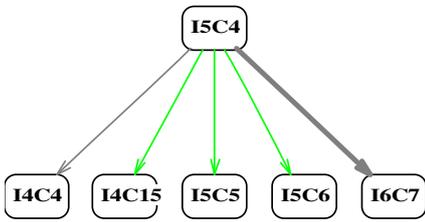


Fig. B.47

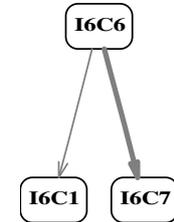


Fig. B.48

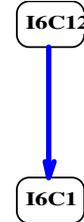


Fig. B.49

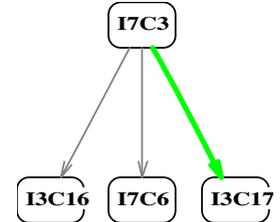


Fig. B.50

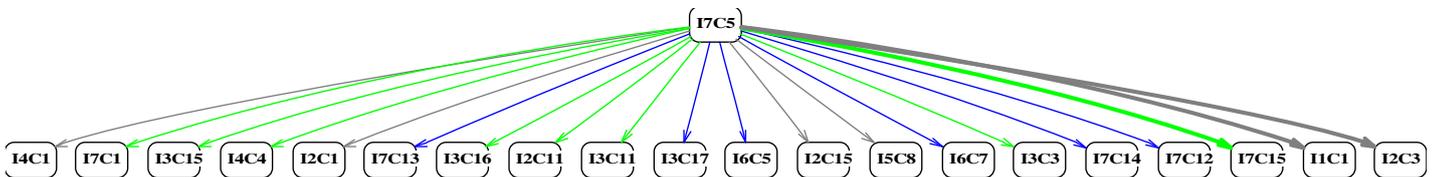


Fig. B.51

Nous constatons d'abord que les comportements I3C10 et I6C12 n'impliquent chacun directement qu'un seul autre comportement. On pourrait dire, en termes imagés, que de ces sources ne coulent que de minces filets d'eau.

La figure B.43 montre quand même que I3C10 entraîne fortement I2C10 lequel entraîne fortement et directement la réussite à l'item 2. Au delà, le flux arrive aussi en I3C1 (3) et I7C1. I2C10 comme I3C10 sont les comportements multiplicatifs observés aux items 2 et 3. Les items 2 et 3 étant très proches l'un de l'autre, on ne peut séparer vraiment I3C10 de son compère I2C10. Ensemble, ces deux comportements ont une influence importante sur la réussite aux items 2, 3 et 7.

Par contre I6C12 apparaît fort isolé. Comme le montre également la figure B.48, le comportement I6C6 est aussi un peu isolé (d'autant plus que les intensités d'implication sont

(3) La figure B.43 ne propose que le squelette du graphe complet et ne montre donc pas la flèche directe I2C1 → I3C1 ; celle-ci existe bel et bien et est d'intensité supérieure à 0,99.

faibles). Parmi les comportements associés à l'item 6, c'est I6C7 (prise en compte des graduations des côtés du cadre) qui s'intègre au sein du graphe de la figure B.43. Cette prise en compte des graduations portées par les côtés du cadre est sans doute un élément qui permet à l'élève d'atteindre un stade global de perception dans le cas de cet item. Rappelons qu'en 2005–2006, dans le même item, la perception globale jouait un rôle plus important que les graduations en question. Les élèves de sixième année étaient sans doute plus nombreux que ceux de cinquième à avoir atteint le stade perceptif global utile pour cet item. (Voir page 491 : le comportement I5C7 n'implique pas I6C1, ni directement, ni indirectement, par contre I5C6 le fait.)

Passons sur les figures B.45 et B.50 où les intensités d'implication sont faibles.

D'après les figures B.46 et B.47, les comportements I5C3 et I5C4 n'impliquent directement que des comportements associés aux items 4 et 5, à l'exception de I2C4 et I6C7. Leurs portées semblent ainsi assez limitées. Notons toutefois la présence à la figure B.47 des comportements I4C4 et I4C15 : les élèves qui *voient* tous les triangles à l'item 5, voient aussi les quinze carrés verts à l'item 4.

Enfin, la figure B.51 est impressionnante. L'influence directe du comportement I7C5 (justification correcte à l'item 7) est importante. Même en nous limitant aux implications fortes (flèches bleues), nous trouvons là I3C17 (pertinence des marques à l'item 3), I6C5, I6C7 (utilisation de traits de construction et prise en compte des graduations du cadre), I7C12, I7C13 et I7C14 (découpage et recomposition, comptage et marques à l'item 7). Si la présence des trois derniers comportements est assez naturelle, celle des trois premiers associe la lecture et le traitement (par apposition de traits supplémentaires) d'une figure à la justification.

À présent, isolons la zone centrale de la figure B.43. Nous retrouvons (Fig. B.52) la figure B.37 augmentée de quelques comportements n'appartenant pas aux items 2 et 3.

En haut de cette figure B.52, nous trouvons d'abord trois comportements, I5C4 (Nombre de triangles exact à l'item 5), I6C6 (Mode de perception global à l'item 6), et I6C7 (graduations prises en compte à l'item 6) qui relèvent tous trois d'un mode de perception global aux items 5 et 6.

Ensuite, avec I2C15, I6C5, I3C17, I2C14 et I3C16, nous rencontrons les comportements liés aux marques apposées par l'élève sur la figure, aux items 2, 3 et 6. Ne manque à l'appel que I6C8, qui n'est pas apparu parmi les comportements de réussite. Puis viennent les comportements liés à la méthode de comptage (de carrés) : I2C11, I3C11 (qui s'est inséré entre I2C14 et I3C16) et I7C13.

Cela mène déjà à deux « réponses correctes » : I2C1 et I6C1. Au delà, via I3C15 (même méthode aux items 2 et 3), on arrive aux deux autres « réponses correctes » : I3C1 et I7C1.

Cet enchaînement ne peut que nous rappeler la figure B.10 qui nous avait donné l'occasion d'évoquer une possibilité de *modèle mental* de résolution des items 1, 2 et 6 du pretest de 2005–2006. Ce modèle associerait des procédures de dénombrement et d'apposition de marques. La chaîne d'implications qui avait été remarquée à cette occasion était cependant plus cohérente que ce qui apparaît à la figure B.52.

Nous sommes peut-être ici en présence d'un premier stade du modèle mental en question.

Nous avons vu à plusieurs reprises le comportement I6C7 apparaître dans les analyses ci-dessus. Sur la figure B.43, nous constatons que c'est un peu un comportement « carrefour » : quatre flèches y aboutissent, trois en partent. En fait ce n'est là que la partie cachée de l'iceberg puisque le graphe représenté à la figure B.43 n'est qu'un squelette.

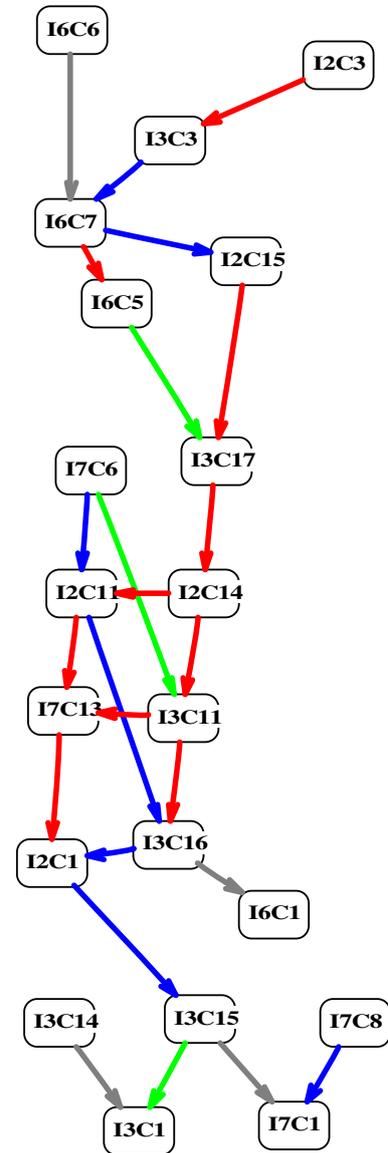


Fig. B.52

Le graphe ci-dessous montre toutes les flèches, d'intensité au moins 0,95, aboutissant à I6C7 ou en partant.

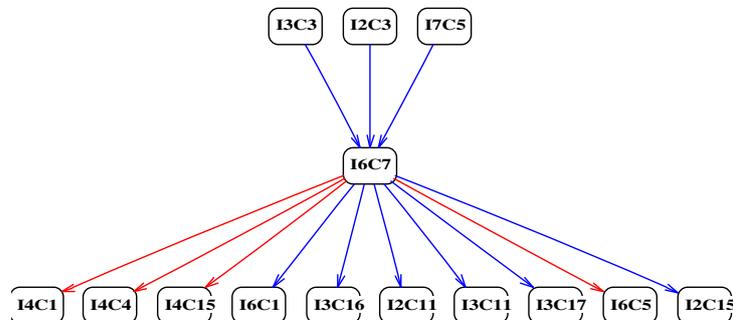


Fig. B.53

Nous y lisons par exemple que I3C3 implique fortement I6C7, autrement dit que les élèves qui justifient correctement et complètement leur réponse à l'item 3 ont fortement tendance à tenir compte de graduations du cadre à l'item 6. Cette propriété est peut-être plus significative si on la contrapose ⁽⁴⁾ :

Les élèves qui ne tiennent pas compte des graduations du cadre à l'item 6 ont fortement tendance à ne pas justifier correctement et complètement leur réponse à l'item 3.

De même

Les élèves qui ne tiennent pas compte des graduations du cadre à l'item 6 ont fortement tendance à ne pas justifier correctement et complètement leur réponse à l'item 2.

Les élèves qui ne tiennent pas compte des graduations du cadre à l'item 6 ont fortement tendance à ne pas justifier correctement et complètement leur réponse à l'item 7.

Quant aux implications de la seconde rangée, il n'est pas utile de les contraposer :

Les élèves qui tiennent compte des graduations du cadre à l'item 6 ont fortement, ou très fortement, tendance à

- compter des petits carrés à l'item 2 ;
- apposer des marques pertinentes à l'item 2 ;
- compter des petits carrés à l'item 3 ;
- apposer de marques à l'item 3 ;
- apposer des marques pertinentes à l'item 3 ;
- répondre correctement à l'item 4 ;
- dessiner les quinze carrés verts dans le carré bleu à l'item 4 ;
- utiliser le mode quantitatif global à l'item 4 ;
- produire un dessin acceptable à l'item 6 ;
- ajouter et utiliser des traits de construction à l'item 6.

La prise en compte des graduations du cadre à l'item 6 est l'aspect que prend le mode global de perception à cet item en cinquième primaire. Elle a la même importance que l'alignement sur la diagonale du cadre qui avait été rencontré dans le pré-test correspondant de sixième primaire.

B.5.5 L'analyse cohésitive

Quand on soumet les résultats du test à une analyse cohésitive, l'ordinateur constitue les classes suivantes parmi les comportements de réussite :

1. I2C10, I3C10
2. I5C1, I5C4, I5C5, I5C6
3. I4C1, I4C4, I4C5, I4C9, I4C15, I5C3, I5C8, I6C6
4. I2C1, I2C3, I2C11, I2C14, I2C15, I3C3, I3C11, I3C15, I3C16, I3C17, I6C5, I6C7, I7C13
5. I3C14, I6C1, I6C12

⁽⁴⁾ Une implication et sa contraposée ont toujours la même intensité.

6. I7C3
7. I7C5, I7C12, I7C14, I7C15
8. I3C1, I3C4, I7C6
9. I7C1, I7C8

Les distances aux différentes classes des groupes témoin et expérimental sont consignées dans le tableau suivant :

	Classe 1	Classe 2	Classe 3	Classe 4	Classe 5	Classe 7	Classe 8	Classe 9
Gr. témoin	0,44	0,21	0,05	0,02	0,46	0,02	0,03	0,836
Gr. expe.	0,55	0,76	0,93	0,97	0,53	0,97	0,95	0,18

On constate que le groupe témoin est plus proche que le groupe expérimental de toutes les classes de comportements de réussite, sauf de la dernière, constituée de I7C1 et I7C8. Autrement dit, l'implication de I7C8 (absence de justification à l'item 7) vers I7C1 (bonne réponse à l'item 7) est surtout due à des réponses d'élèves du groupe expérimental.

B.6 L'analyse du post-test de 5^e primaire (2006–2007)

B.6.1 Les comportements recensés

Défi 1

- | | |
|--|--|
| J1C1 : La valeur du périmètre est bonne. | par comptage. |
| J1C2 : La valeur du périmètre n'est pas bonne. | J1C9 : L'élève utilise une formule d'aire du triangle. |
| J1C3 : Pas de valeur pour le périmètre. | J1C10 : L'élève complète le triangle en un rectangle. |
| J1C4 : L'élève mesure les côtés à la latte. | J1C11 : L'élève calcule l'aire du rectangle et divise par 2. |
| J1C5 : La valeur de l'aire est bonne. | J1C12 : L'élève justifie incorrectement. |
| J1C6 : La valeur de l'aire n'est pas bonne. | |
| J1C7 : L'élève ne donne pas de valeur pour l'aire. | |
| J1C8 : L'élève dessine un quadrillage et procède | |

Défi 2

- | | |
|--|---|
| J2C1 : L'élève répond « égal ». | J2C6 : L'élève découpe un carré pour refaire un triangle. |
| J2C2 : L'élève répond « plus petite » ou « plus grande ». | J2C7 : L'élève mesure les périmètres. |
| J2C3 : L'élève ne répond pas. | J2C8 : L'élève fait d'autres mesures. |
| J2C4 : L'élève assemble deux carrés et deux triangles, puis compare les résultats. | J2C9 : L'élève utilise une formule d'aire. |
| J2C5 : L'élève découpe un triangle pour refaire un carré. | J2C10 : L'élève ne justifie pas. |
| | J2C11 : L'élève utilise un autre procédé. |

Défi 3

- J3C1 : L'élève donne la réponse correcte.
 J3C2 : L'élève donne une réponse incorrecte.
 J3C3 : L'élève ne répond pas.
 J3C4 : L'élève reconstitue le grand carré.
 J3C5 : L'élève soustrait correctement les carrés manquants.
 J3C6 : L'élève soustrait les carrés manquants, mais avec une erreur de comptage de ces carrés.
 J3C7 : L'élève soustrait les carrés manquants, mais avec une erreur de calcul.
 J3C8 : L'élève travaille par blocs.
 J3C9 : L'élève compte tous les petits carrés jaunes un à la fois.
 J3C10 : L'élève ne justifie pas.
 J3C11 : L'élève utilise un autre procédé.

Défi 4

- J4C1 : L'élève répond « égal ».
 J4C2 : L'élève répond « plus grande » ou « plus petite »
 J4C3 : L'élève ne répond pas.
 J4C4 : L'élève découpe les figures en triangles isométriques, puis compte.
 J4C5 : L'élève découpe l'hexagone en deux trapèzes par une diagonale.
 J4C6 : L'élève découpe en parallélogrammes, puis compte.
 J4C7 : L'élève fait d'autres découpes.
 J4C8 : L'élève mesure les périmètres.
 J4C9 : L'élève fait d'autres mesures.
 J4C10 : L'élève utilise des formules d'aire.
 J4C11 : L'élève ne justifie pas.
 J4C12 : L'élève utilise une autre méthode.
 J4C13 : L'élève ne procède à aucune découpe.

Défi 5

- J5C1 : L'élève a répondu correctement pour la mesure du périmètre.
 J5C2 : L'élève a répondu incorrectement pour le périmètre.
 J5C3 : L'élève n'a pas proposé de valeur pour l'aire.
 J5C4 : L'élève a répondu correctement pour la mesure de l'aire.
 J5C5 : L'élève a répondu incorrectement pour l'aire.
 J5C6 : L'élève n'a pas proposé de valeur pour l'aire.
 J5C7 : L'élève propose une justification correcte pour le périmètre.
 J5C8 : L'élève propose une justification correcte pour l'aire.
 J5C9 : L'élève utilise une bonne formule pour le périmètre.
 J5C10 : L'élève utilise une bonne formule pour l'aire.
 J5C11 : L'élève confond la formule pour le périmètre et la formule pour l'aire.
 J5C12 : L'élève a dessiné un quadrillage correct.
 J5C13 : L'élève a dessiné un quadrillage incorrect.
 J5C14 : L'élève a ébauché un quadrillage sans le terminer.
 J5C15 : L'élève a travaillé de façon cohérente et uniquement en cm et cm².
 J5C16 : L'élève a considéré ul comme équivalent à cm.
 J5C17 : L'élève a mélangé les deux systèmes d'unités.

B.6.2 Des comportements de réussite et d'échec

Item 1

Cet item comportait deux questions. Son graphe implicatif comprend trois parties :

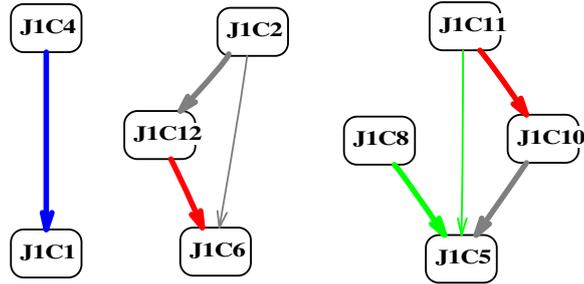


Fig. B.54

La première partie ne comprend qu'une implication : $J1C4 \rightarrow J1C1$. Il s'agit de deux comportements de réussite à la question concernant le périmètre. La seule chose à noter est que l'intensité de cette implication n'atteint pas 0,99, ce qui montre que mesurer à la latte les côtés du triangle donné n'est pas une garantie de bonne réponse. Mais comme nous n'avons pas pu recenser séparément les élèves qui ont *vu* les longueurs des côtés sur la figure donnée, la comparaison avec ce groupe d'élèves n'est pas possible.

La deuxième partie du graphe rassemble les comportements d'échec à la question relative au périmètre. Elle n'appelle aucun commentaire.

Quant à la troisième partie, elle rassemble les comportements de réussite à la question relative à l'aire. On y remarque que les deux implications $J1C11 \rightarrow J1C5$ et $J1C8 \rightarrow J1C5$ ont même intensité. Ainsi la méthode consistant à dessiner un quadrillage et à compter les carrés intérieurs au triangle apparaît aussi efficace que celle qui consiste à compléter le triangle en un rectangle et à diviser l'aire de celui-ci par 2. Cela peut paraître surprenant, mais peut provenir de ce qu'en considérant une réponse comme correcte par la méthode de quadrillage et comptage, nous avons accepté les imprécisions inhérentes à la méthode, si elles restaient dans des limites raisonnables.

Item 2

Le graphe implicatif associé à cet item se réduit à une flèche. Cela n'a rien d'étonnant : 113 élèves sur 123 répondent correctement, et 89 d'entre eux adoptent le comportement J2C5. L'analyse statistique « écrase » les comportements très peu fréquents, dans ce cas-ci, tous les autres !

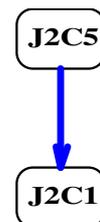


Fig. B.55

Item 3

Voici le graphe implicatif associé à cet item :

On remarque d'abord un fait assez rare mais sans signification particulière : une double flèche joignant J3C4 \leftrightarrow J3C1. Autrement dit les deux flèches J3C4 \rightarrow J3C1 et J3C1 \rightarrow J3C4 ont la même intensité et de plus, les deux comportements J3C1 et J3C4 ont le même taux d'apparition. L'ordinateur n'a pu départager les deux comportements en question. Cependant les deux ensembles d'élèves ayant ces comportements sont différents !

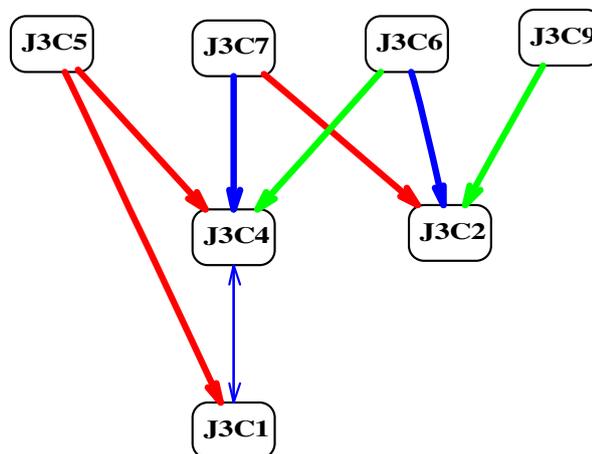


Fig. B.56

Le graphe n'est pas clairement séparé en une partie réussite et une partie échec. Cela provient de ce que J3C6 et J3C7 entraînent à la fois J3C4 (reconstituer le grand carré), qui est un comportement de réussite, et, du fait d'erreurs de comptage ou de calcul, J3C2 (réponse incorrecte). Puisqu'ils entraînent cette réponse, J3C6 et J3C7 rejoignent J3C9 dans le groupe des comportements d'échec.

Tout naturellement J3C5 (reconstitution du grand carré et soustraction correcte) est du côté des réussites.

À remarquer : l'absence sur le diagramme du comportement J3C8, de comptage par blocs, qui n'est donc ni une réussite, ni un échec. Du fait d'erreurs de calculs trop peu d'élèves qui ayant utilisé cette démarche ont fourni la réponse correcte pour que J3C8 soit à classer parmi les réussites. Et trop peu ont fait des erreurs de calcul pour qu'il soit classé parmi les échecs.

Item 4

Les sous-graphes des comportements de réussite et des comportements d'échec sont bien apparents.

Dans le premier, on trouve les découpages en triangles (J4C4) ou en parallélogrammes (J4C6).

Dans le second, le découpage de l'hexagone en deux trapèzes (J4C5), ainsi que les autres découpages (J4C7) et les erreurs « classiques » (calcul de périmètres, usage de formules...).

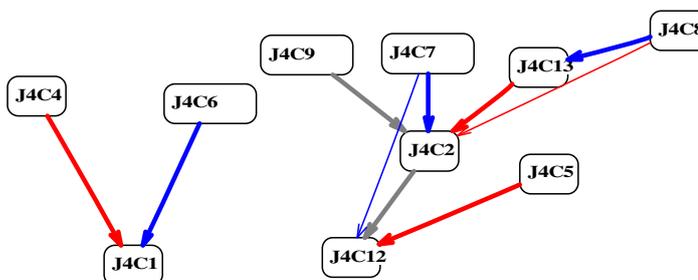


Fig. B.57

Item 5

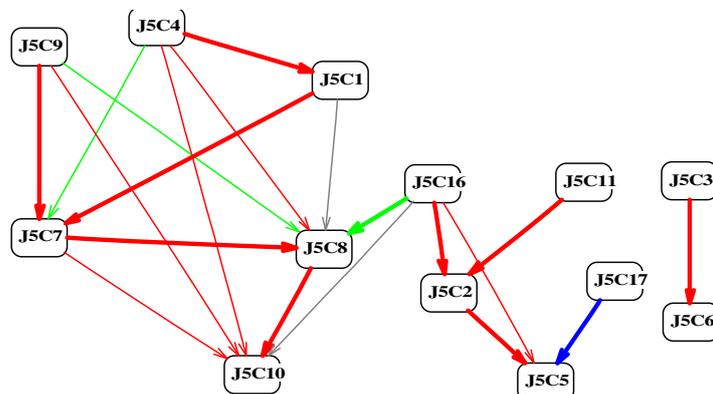


Fig. B.58

On remarque d'abord à une droite une flèche isolée. Elle relie deux comportements de non-réponse que nous classerons parmi les comportements d'échec.

Les deux sous-graphes des comportements de réussite et d'échec sont reliés par deux implications issues de J5C16. Ce comportement consistant à considérer que *ul* et *cm* sont des unités de longueur égales, avait pour cet item été considéré comme entraînant automatiquement des réponses erronées. Il est donc normal qu'il entraîne très fortement J5C2 et J5C5. Mais il n'empêche pas d'utiliser la bonne formule, ni de fournir une justification correcte pour l'aire, d'où la présence de flèches aboutissant en J5C8 et J5C10. Conservant le même point de vue que plus haut, nous classerons J5C16 parmi les comportements d'échec, mais ni J5C8, ni J5C10.

On note l'absence dans le diagramme des comportements J5C12 à J5C14 : à la fin de la cinquième primaire, la démarche de quadrillage n'est plus utilisée de façon significative quand il s'agit de déterminer l'aire d'un rectangle. Ce sont les formules qui sont utilisées tant pour le périmètre que pour l'aire (J5C9 et J5C10).

B.6.3 Structurer les comportements d'échec

Procédant comme pour le pré-test, nous rassemblons sur un seul graphe (qui est un graphe complet et non un squelette) les comportements d'échec recensés à la section précédente, c'est-à-dire les comportements suivants :

- à l'item 1 : J1C2, J1C6, J1C12 ;
- à l'item 3 : J3C2, J3C6, J3C7, J3C9 ;
- à l'item 4 : J4C2, J4C7, J4C8, J4C9, J4C12, J4C13 ;
- à l'item 5 : J5C2, J5C3, J5C5, J5C6, J5C11, J5C16, J5C17 ;

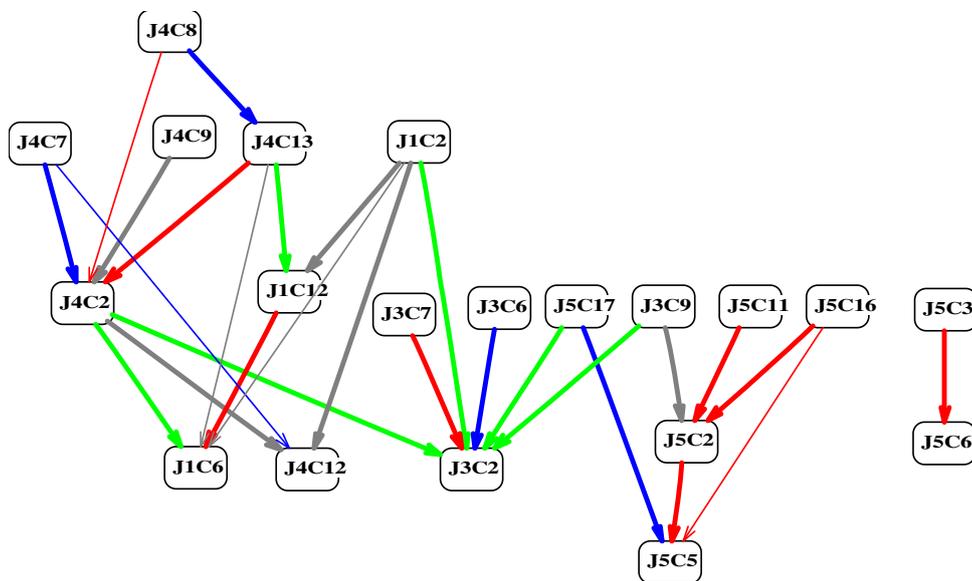


Fig. B.59

Ce graphe a en commun avec son *alter ego* du pré-test de ne pas beaucoup mélanger les différents items. Les seules implications d'un comportement associé à un item vers un comportement associé à un autre item sont les suivantes :

$J1C2 \rightarrow J3C2$, $J1C2 \rightarrow J4C12$, $J4C2 \rightarrow J3C2$, $J3C9 \rightarrow J5C2$ et $J5C17 \rightarrow J3C2$.

Aucune d'entre elles n'a une intensité supérieure à 0,95, ce qui oblige à une certaine prudence dans les interprétations. Notons néanmoins que les deux premières de ces implications montrent que les élèves incapables de calculer de façon acceptable le périmètre du triangle proposé à l'item 1 ont tendance à être aussi en difficulté à l'item 3 et à utiliser d'« autres méthodes » à l'item 4.

B.6.4 Structurer les comportements de réussite

Les comportements de réussite recensés précédemment sont les suivants :

- à l'item 1 : J1C1, J1C4, J1C5, J1C8, J1C10, J1C11 ;
- à l'item 2 : J2C1, J2C5 ;
- à l'item 3 : J3C1, J3C4, J3C5 ;
- à l'item 4 : J4C1, J4C4, J4C6 ;
- à l'item 5 : J5C1, J5C4, J5C7, J5C8, J5C9, J5C10 ;

Voici le squelette du graphe associé :

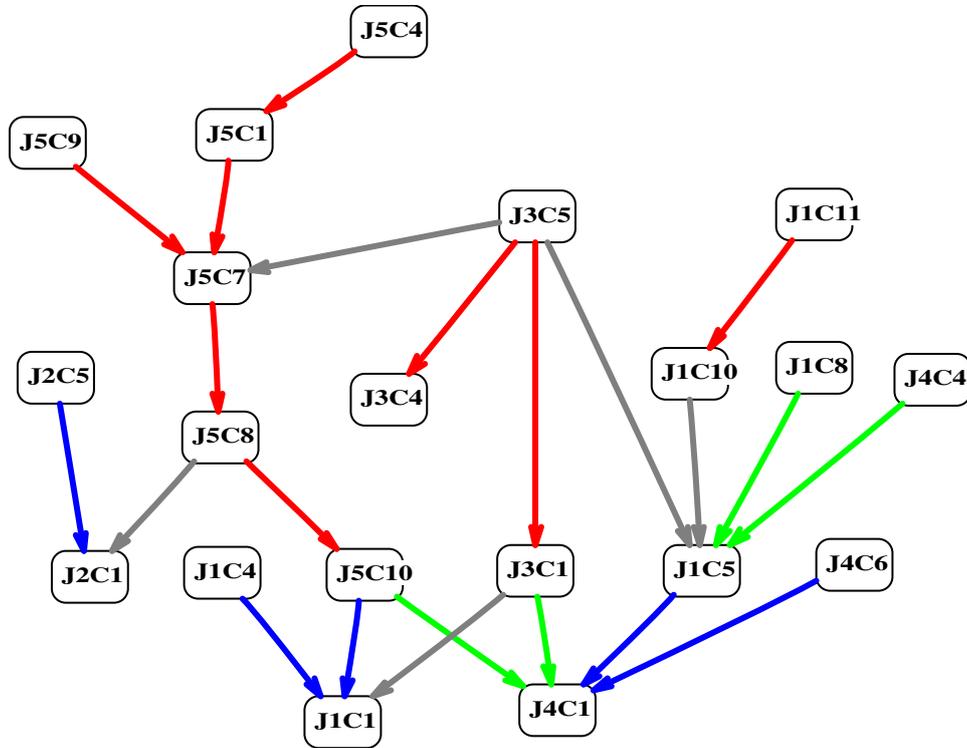


Fig. B.60

Une première remarque s'impose : le test comportait exactement deux calculs de périmètres. Les comportements associés se retrouvent, l'un, J5C1, presque à la source du graphe, l'autre, J1C1, en constitue un nœud terminal. Cette différence de positionnement sur le graphe correspond d'abord à une différence de taux de réussite : 79 % pour J1C1, 45 % pour J5C1. On ne peut en déduire qu'il est beaucoup plus facile de trouver le périmètre d'un triangle que celui d'un rectangle !

La différence provient du contexte dans lequel la question a été posée. À l'item 1, le périmètre pouvait être déterminé « à vue ». Et les élèves qui mesuraient à la latte trouvaient une réponse généralement acceptée, vu la différence insignifiante entre 1 cm et 1 ul. L'énoncé de l'item 5 était plus difficile à comprendre et le support visuel était absent.

Ce n'est pas la connaissance de la formule du périmètre qui est en cause, mais bien l'aptitude à lire un énoncé.

Les mêmes constatations peuvent être faites en comparant les réponses aux deux questions où on demandait de calculer une aire (également aux items 1 et 5). Les comportements associés sont l'un, J5C4, à la source du graphe, et l'autre, J1C5, est presque un nœud terminal. Comme dans le cas du périmètre, l'aire du triangle est plus souvent correcte que celle du rectangle (54 % contre 32 %), alors qu'on pourrait s'attendre au contraire. Ici aussi, ce n'est pas la formule de l'aire du rectangle qui est en cause, mais l'aptitude à lire et interpréter un énoncé.

Le lecteur sera peut être étonné de ne voir aucune flèche dénotant une implication de J5C9 (utilisation d'une bonne formule pour le périmètre) vers J5C1 (valeur du périmètre). On peut commettre une erreur de calcul en utilisant une bonne formule ! Signalons toutefois

que l'intensité de l'implication $J5C9 \rightarrow J5C1$ est de 0,84, c'est-à-dire juste en dessous de la limite de signification.

Aux sources de ce graphe, nous trouvons les comportements suivants :

Code	Signification	Taux (arrondis)
J1C4	Mesurer les côtés (item 1)	30 %
J1C8	Dessiner un quadrillage et compter (item 1)	53 %
J1C11	Calcul de l'aire du rectangle, puis division par 2 (item 1)	11 %
J2C5	Découpage d'un triangle (item 2)	72 %
J3C5	Reconstitution du grand carré, puis soustraction des carrés manquants (item 3)	34 %
J4C4	Découpage en triangles puis comptage (item 4)	24 %
J4C6	Découpage en parallélogrammes, puis comptage (item 4)	16 %
J5C4	Valeur correcte pour l'aire (item 5)	38 %
J5C9	Bonne formule pour le périmètre (item 5)	20 %

À l'exception de J5C10, voici rassemblées les démarches qui étaient les plus efficaces pour trouver les bonnes réponses aux cinq items.

Les figures suivantes indiquent les comportements de réussite directement impliqués par chacune des sources.



Fig. B.61

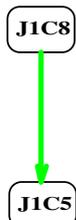


Fig. B.62

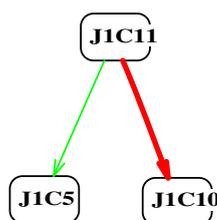


Fig. B.63



Fig. B.64

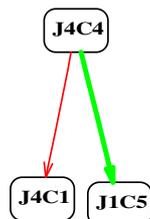


Fig. B.65



Fig. B.66

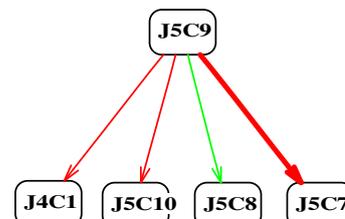


Fig. B.67

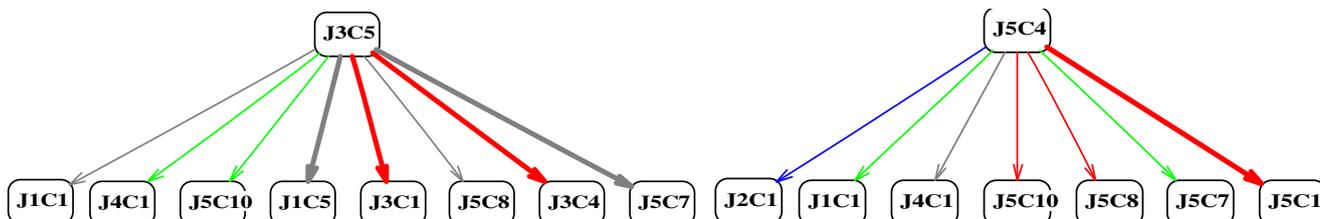


Fig. B.68

Fig. B.69

Les figures B.61 à B.66 ne nous montrent aucune implication que nous n'ayons déjà rencontrée sur d'autres figures.

Les trois figures B.67 à B.69 ont pour origine des comportements associés aux items 3 et 5.

À eux trois, ces comportements J3C5, J5C4 et J5C9 entraînent six « réponses correctes » : J1C1, J1C5, J2C1, J3C1, J4C1, J5C1. La septième « réponse correcte » est le comportement J5C4 lui-même.

On peut donc considérer que ces trois comportements sont relatifs à des compétences très significatives pour la réussite de ce test. Revenons sur ces deux items.

J3C5 : À l'item 3, l'élève reconstitue le grand carré et soustrait les carrés manquants.

C'est clairement un problème de perception globale.

J5C4 et J5C9 : On l'a dit plus haut, la difficulté de l'item 5 réside dans la lecture et l'interprétation de l'énoncé, non dans la technique.

Sur la base d'une étude statistique des copies des élèves, nous avons ainsi isolé les compétences qui sont probablement les plus difficiles à acquérir et contribuent par conséquent le plus à la dispersion des résultats des élèves. Rappelons néanmoins qu'il faut toujours se garder dans le domaine qui nous occupe de conclusions trop catégoriques. Les compétences que nous avons dégagées nous semblent très significatives. Ce ne sont pas nécessairement les seules.

B.7 L'analyse du pré-test de première secondaire (2006–2007)

B.7.1 Les comportements possibles

Voici d'abord, item par item, les comportements qui ont été recensés et les codes qui leur ont été attribués.

Item 1

Les vingt-et-un comportements repérés pour l'item 1 du pré-test sont les suivants :

- | | |
|--|--|
| I1C1 : L'élève a répondu de manière correcte et complète. | I1C12 : La définition de l'aire est générale et acceptable. |
| I1C2 : L'élève n'a pas répondu de manière correcte ou complète. | I1C13 : La méthode de calcul de l'aire est générale et acceptable. |
| I1C3 : L'élève a coché la case « temps » à la première question. | I1C14 : Quand il s'agit du calcul (du périmètre et de l'aire), l'élève donne comme exemple la formule du carré ou du rectangle. |
| I1C4 : Au moins une sous-réponse est correcte et au moins une est incorrecte. | I1C15 : Dans ses calculs, l'élève a confondu les formules du périmètre et d'aire. |
| I1C5 : L'élève a confondu « longueur » et « aire ». | I1C16 : L'élève n'a pas répondu à la seconde partie du défi. |
| I1C6 : L'élève a confondu « aire » et « volume ». | I1C17 : Le mot « périmètre » recouvre l'idée de « contour ». |
| I1C7 : L'élève a confondu « longueur » et « volume ». | I1C18 : Le mot « périmètre » recouvre l'idée de « mesure ». |
| I1C8 : L'élève a coché la case « poids » aux questions 2 et/ou 5. | I1C19 : Le mot « aire » recouvre l'idée d'« intérieur d'une courbe ». |
| I1C9 : L'élève a coché la case « temps » aux questions 3 ou 4. | I1C20 : Le mot « aire » est équivalent à « surface ». |
| I1C10 : La définition du périmètre est générale et acceptable. | I1C21 : Le mot « aire » évoque l'idée d'un calcul. |
| I1C11 : La méthode de calcul du périmètre est générale et acceptable. | |

Item 2

À cet item, nous avons recensé les dix comportements suivants :

- | | |
|--|--|
| I2C1 : La réponse de l'élève est correcte. | un parallélogramme. |
| I2C2 : La réponse est incorrecte. | I2C7 : Dans la seconde bande, l'élève a bien placé un carré. |
| I2C3 : Dans la première bande, l'élève a (mal) placé un carré. | I2C8 : Dans la seconde bande, l'élève a bien placé un rectangle. |
| I2C4 : Dans la première bande, l'élève a bien placé un rectangle. | I2C9 : Dans la seconde bande, l'élève a bien placé un triangle. |
| I2C5 : Dans la première bande, l'élève a bien placé un triangle. | I2C10 : Dans la seconde bande, l'élève a bien placé un parallélogramme. |
| I2C6 : Dans la première bande, l'élève a bien placé | |

Item 3

Quatorze comportements ont été recensés à l'item 3.

- | | |
|--|---|
| I3C1 : La réponse de l'élève est exacte (indépendamment de son raisonnement). | explicitement sur l'affirmation : « Les carrés sont de même dimension. ». |
| I3C2 : La réponse est inexacte. | I3C8 : L'élève a confondu « longueur » et « aire ». |
| I3C3 : Le raisonnement de l'élève est complet et correct. | I3C9 : L'élève ne compare pas les zones mais les carrés. |
| I3C4 : Le raisonnement de l'élève est incomplet mais correct. | I3C10 : L'élève a mesuré des longueurs. |
| I3C5 : Le raisonnement de l'élève est incorrect. | I3C11 : L'élève a comparé des périmètres. |
| I3C6 : Le raisonnement de l'élève est absent. | I3C12 : L'élève a calculé des aires. |
| I3C7 : L'élève, dans son raisonnement, s'est basé | I3C13 : L'élève a utilisé une autre méthode. |
| | I3C14 : L'élève n'a pas répondu. |

Item 4

Pour cet item, dix-sept comportements ont été retenus :

- | | |
|---|---|
| I4C1 : L'élève dessine le rectangle attendu. | I4C10 : L'élève a procédé par comptage. |
| I4C2 : L'élève dessine autre chose. | I4C11 : L'élève a appliqué une formule d'aire. |
| I4C3 : L'élève ne dessine rien. | I4C12 : L'élève a utilisé une autre méthode. |
| I4C4 : La réponse de l'élève à la première question est correcte. | I4C13 : Le raisonnement de l'élève est correct. |
| I4C5 : La réponse de l'élève à la seconde question est correcte. | I4C14 : Le raisonnement est partiel mais sans erreur. |
| I4C6 : L'élève n'a pas répondu aux deux questions. | I4C15 : Le raisonnement est erroné. |
| I4C7 : L'élève a tenu compte des points. | I4C16 : L'élève n'a pas explicité son raisonnement. |
| I4C8 : L'élève a reproduit un ou plusieurs petits rectangles dans le rectangle dessiné. | I4C17 : L'élève n'a répondu qu'à une des deux questions. |
| I4C9 : Les ou les rectangles reproduits dans le rectangle dessiné ne sont pas conformes. | |

Item 5

Nous avons repéré dix comportements à cet item 5 :

- | | |
|---|--|
| I5C1 : L'élève a trouvé l'intrus. | I5C6 : L'élève a raisonné à partir des graduations des bords de la bande. |
| I5C2 : L'élève a mentionné le « carré sur pointe » comme intrus. | I5C7 : L'élève a comparé ou calculé des aires. |
| I5C3 : L'élève n'a pas répondu. | I5C8 : La justification est partielle mais sans erreur. |
| I5C4 : L'élève a comparé des formes et non des aires. | I5C9 : La justification est erronée. |
| I5C5 : L'élève a comparé ou mesuré des longueurs. | I5C10 : L'élève n'a pas justifié sa réponse. |

Item 6

Quinze comportements ont été recensés pour cet item.

- | | |
|---|---|
| I6C1 : La réponse de l'élève est bonne. | I6C7 : L'élève a comparé ou calculé des aires. |
| I6C2 : La réponse n'est pas bonne. | I6C8 : Le raisonnement de l'élève est exact. |
| I6C3 : L'élève n'a pas répondu. | I6C9 : Le raisonnement est partiel mais sans erreur. |
| I6C4 : L'élève a tracé les médianes sur la figure originale. | I6C10 : Le raisonnement de l'élève est erroné. |
| I6C5 : L'élève a procédé par découpage et recombinaison. | I6C11 : L'élève n'a pas inscrit son raisonnement. |
| I6C6 : L'élève a mesuré des longueurs. | I6C12 : La réponse est 1. |

B.7.2 Des comportements de réussite et d'échec

Item 1

L'item 1 comportait deux parties distinctes. Son graphe implicatif en comporte trois.

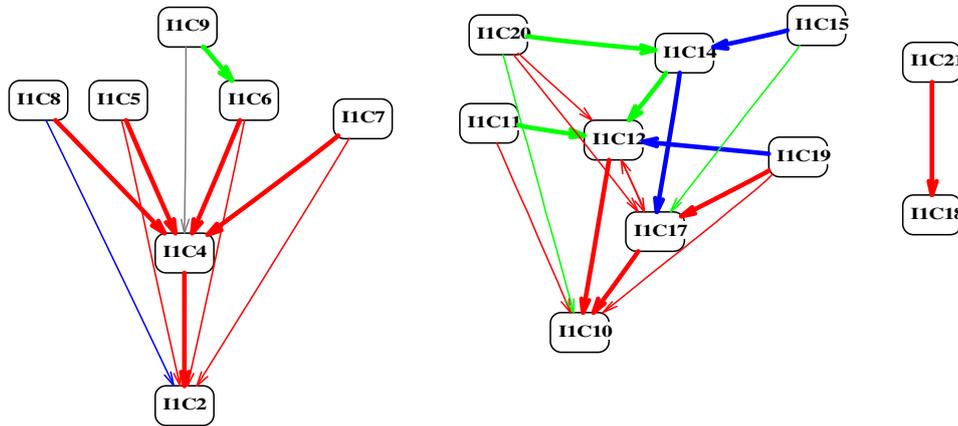


Fig. B.70

La partie de gauche est constitué des comportements d'échec à la première question de l'item. On y retrouve en particulier les confusions longueur–aire (I1C5), aire–volume (I1C6) et longueur–volume (I1C7). I1C8 est le fait d'avoir choisi « le poids » aux sous-questions 2 ou 5, I1C9 le fait d'avoir choisi « temps » aux sous-questions 3 ou 4. Le graphe est très semblable à celui qui rend compte de la même question posée aux élèves de cinquième primaire. En fait, cette question relève beaucoup plus de la vie courante que de l'activité scolaire et celle-ci n'influence sans doute guère les réponses.

Les deux autres composantes de la figure B.70 se rapportent à la seconde partie de l'item 1.

La flèche isolée I1C21 → I1C18 associe deux comportements strictement procéduraux : pour définir le mot « périmètre », l'élève décrit une procédure de mesure et pour définir le mot « aire », il décrit un algorithme de calcul. On sait que la description procédurale est à l'origine de la conceptualisation. Les élèves concernés sont donc à ce stade. L'isolement de

la flèche qui lie ces deux comportements I1C18 et I1C21 illustre bien le fait qu'on ne peut en déduire ni que les élèves énoncent des définitions suffisamment générales et acceptables, ni le contraire. Nous ne rangerons donc I1C18 et I1C21 ni dans les comportements de réussite, ni dans les comportements d'échec.

La partie centrale du graphe concerne les définitions et méthodes de calcul du périmètre et de l'aire. On y trouve notamment I1C15 (confusion des formules de périmètre et d'aire), qui entraîne fortement I1C14 (prédominance des formules du carré et du rectangle) et moyennement I1C17 (le mot « périmètre » évoque l'idée de contour — ce qui est un de ses usages dans le langage courant — plutôt que celle de longueur du contour).

Il est difficile de classer ces comportements en termes de réussite ou d'échec. Cet item montre surtout la nécessité de préciser l'usage du vocabulaire courant dans le cadre d'un cours de mathématique.

Item 2

Réussir à cette question, c'est placer un triangle, un rectangle et un parallélogramme dans chacune des bandes, placer un carré dans la bande inférieure et ne pas en placer un dans la bande supérieure. Dès lors le comportement I2C1 associé à la réussite entraîne *logiquement* chacun des comportements corrects I1C4 à I1C10, mais *statistiquement*... il le fait avec une intensité variable, d'autant plus faible que le comportement entraîné est fréquent.

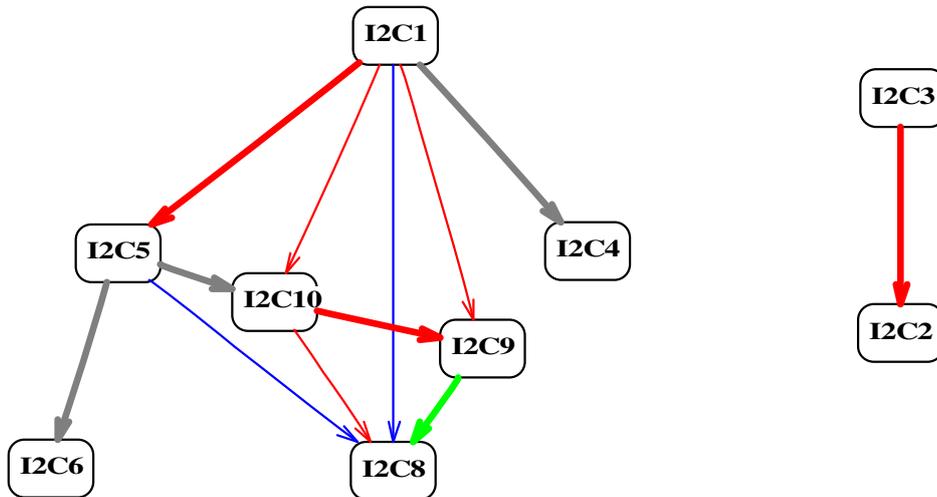


Fig. B.71

L'exemple flagrant est celui du comportement I2C7 (placer un carré dans la seconde bande) que *tous* les élèves ont eu. Dans ce cas l'intensité de la flèche $I2C1 \rightarrow I2C7$ tombe à 0 : elle ne signifie plus rien et elle ne figure même plus dans le graphe. De même l'intensité de $I2C1 \rightarrow I2C6$ est inférieure à 0,85.

Ainsi les flèches issues de I2C1 ne nous permettent de dire qu'une chose : I2C5, I2C10 et I2C9 sont moins fréquents que I2C8, lui-même moins fréquent que I2C4 et I2C6. Nous le savions déjà (*section 14.3.2*).

Les autres implications présentent dans le sous-graphe des réussites montrent que l'aptitude à placer une des formes (triangle, rectangle ou parallélogramme) dans l'une des bandes n'entraîne nullement l'aptitude à la placer dans l'autre bande : le graphe ne comporte aucune des implications pouvant associer I2C4 à I2C8 (les rectangles), I2C5 à I2C9 (les triangles) ou I2C6 à I2C10 (les parallélogrammes). Ceci montre bien que les manipulations à opérer pour réaliser ces placements rendent les deux situations fondamentalement différentes.

Quant au sous-graphe de comportements d'échec, son unique implication ne nécessite aucun commentaire.

Item 3

À cet item, c'est surtout le sous-graphe des comportements d'échec qui peut nous apprendre quelque chose.

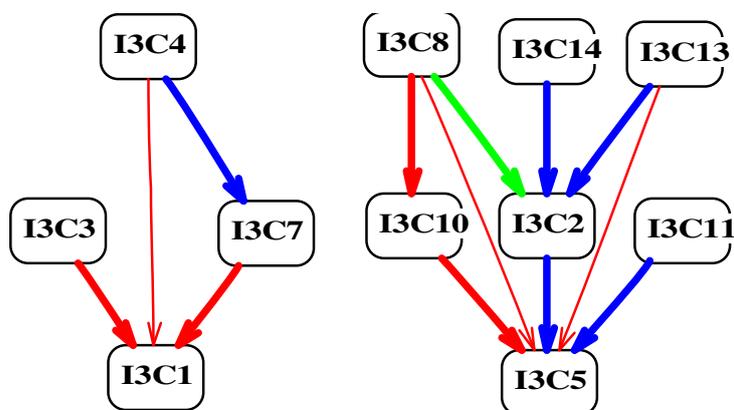


Fig. B.72

Les comportements les plus intéressants qui y figurent sont I3C8, I3C10 et I3C11. Les deux premiers sont relatifs à la confusion entre longueur et aire, qui réapparaît dans cette situation peu familière. Le troisième est la démarche consistant à *comparer les périmètres*, souvent à vue, sans les calculer et sans rien mesurer. Comme le montre le graphique, elle se démarque nettement des deux premières alors qu'on pourrait croire que ce n'en est qu'une variante.

Item 4

Le graphe implicatif associé à cet item est découpé en trois parties et aurait pu l'être en quatre parties.

À l'extrême droite, la flèche I4C11 \rightarrow I4C15 montre l'inefficacité de l'usage des formules d'aire pour aborder cette situation. Il s'agit bien entendu là de deux comportements d'échec.

Immédiatement à la gauche de cette flèche, on trouve I4C7 \rightarrow I4C2, qui ne demande guère de commentaires non plus : I4C7 est le comportement basé sur le comptage de points qui

débouche directement sur le problème des « piquets de clôture ».

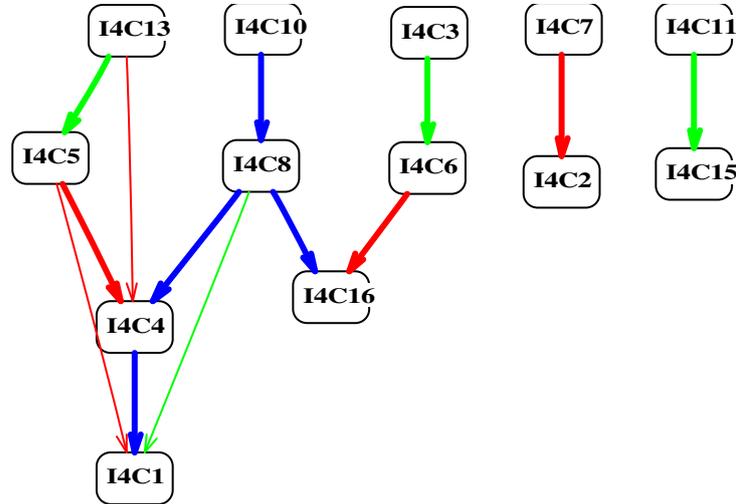


Fig. B.73

Vient ensuite la partie la plus importante du graphe. On y rencontre d'abord une chaîne $I4C3 \rightarrow I4C6 \rightarrow I4C16$ qui relie trois comportements de non-réponse ou de non-justification, donc également des échecs.

L'implication $I4C10 \rightarrow I4C8$ montre la procédure de construction du rectangle demandé par la reproduction du petit rectangle associée au comptage du nombre de copies nécessaires. Elle sert d'intermédiaire entre le sous-graphe des comportements de non-réponse à droite et celui des comportements de réussite à gauche. $I4C10$ et $I4C8$ sont plutôt des comportements de réussite. $I4C13$ et $I4C5$ en sont clairement aussi.

Item 5

À l'item 5 (le problème de « l'intrus »), $I5C2$ (choix du carré sur pointe), $I5C4$ (comparaison des formes et non des aires) sont évidemment des comportements d'échec. $I5C7$ et $I5C8$ entraînent la bonne réponse : ce sont des comportements de réussite. $I5C6$ (raisonnement à partir des graduations des bords de la bande) entraîne aussi bien un comportement d'échec qu'un comportement de réussite. Ce n'est ni l'un, ni l'autre.

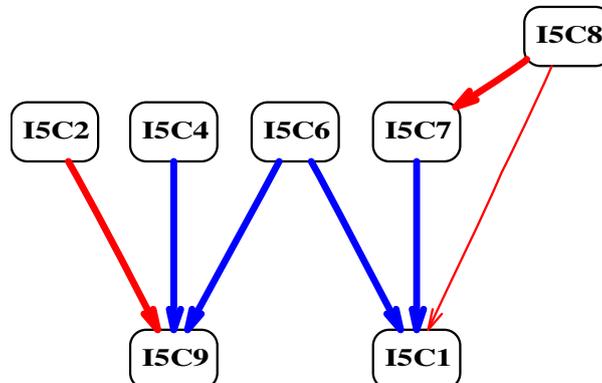


Fig. B.74

Item 6

Le graphe implicatif de cet item est bien séparé en deux parties. À gauche, le sous-graphe des comportements de réussite montre un groupe I6C4 (tracé des médianes du carré), I6C5 (découpage et recomposition), I6C8 (raisonnement correct) qui indique bien la procédure la plus utilisée pour arriver à la réponse. Le comportement isolé, I6C9, est le « raisonnement partiel mais correct ». Même partiel, il entraîne fortement la réussite.

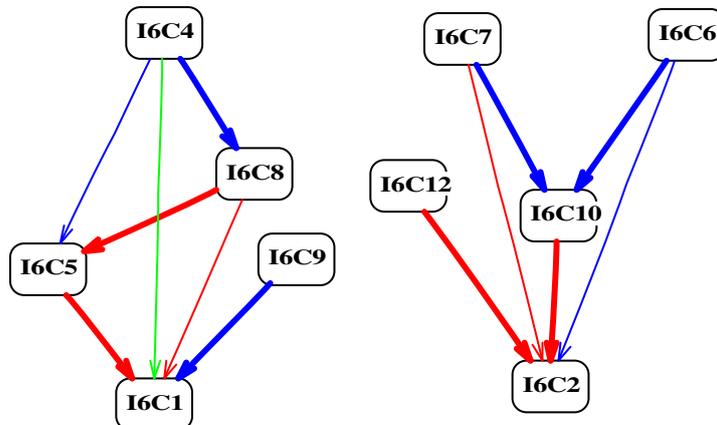


Fig. B.75

Dans le sous-graphe de échecs, on retrouve les démarches numériques : mesurer des longueurs, calculer des aires, qui débouchent sur des raisonnements erronés. Vouloir trouver l'aire de la zone orange en appliquant une formule n'était pas une bonne idée dans cet item !

Le comportement I6C12 consiste à fournir la réponse « 1 ». Il résulte d'une confusion entre « le carré » et « la zone verte » et constitue un élément bien distinct des autres comportements d'échec.

B.7.3 Structurer les comportements d'échec

Les comportements classés ci-dessus comme comportements d'échec sont les suivants :

- item 1 : I1C2, I1C4, I1C5, I1C6, I1C7, I1C8, I1C9 ;
- item 2 : I2C2, I2C3 ;
- item 3 : I3C2, I3C5, I3C8, I3C10, I3C11, I3C13, I3C14 ;
- item 4 : I4C2, I4C3, I4C6, I4C7, I4C11, I4C15, I4C16 ;
- item 5 : I5C2, I5C4 ;
- item 6 : I6C2, I6C6, I6C7, I6C10, I6C12.

Le graphe implicatif (limité au squelette, et amputé des implications de faible intensité) liant tous ces comportements montre peu de connections entre les différents items. Sans doute les démarches à mettre en œuvre varient-elles très fort d'un item à l'autre, donc les comportements d'échec aussi.

On pourrait néanmoins s'attendre à ce que des implications existent entre deux occurrences d'un même comportement. Or ce n'est pas le cas. Par exemple, il n'existe aucune

implication significative entre I1C5 (confusion entre longueur et aire à l'item 1) et I3C8 (même comportement à l'item 3).

Le contexte d'une activité reste donc un élément déterminant des types d'erreur susceptibles d'être commises.

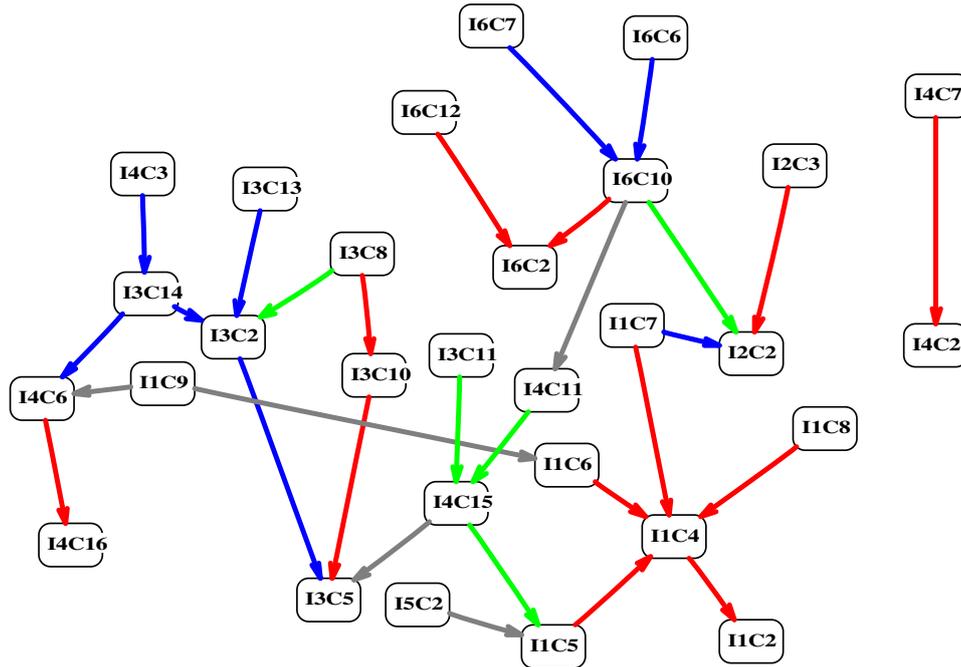


Fig. B.76

Les seules implications entre comportements associés à des items différents sont :

- I1C7 (confusion longueur-volume) → I2C2 (réponse incorrecte ou incomplète à l'item 2).
- I1C9 (choisir la réponse « temps » aux questions 3 ou 4 de l'item 1) → I4C16 (pas de réponse à l'item 4).
- I3C11 (comparer des périmètres à l'item 3) → I4C15 (raisonnement erroné à l'item 4).
- I3C14 s'insère entre I4C3 et I4C6 : ce sont trois comportements de non-réponse.
- I5C2 (choix du carré sur pointé comme intrus à l'item 5) → I1C5 (confusion longueur-aire).

La plupart de ces implications concernent au moins un comportement peu précis, pouvant recouvrir des démarches différentes et peu fréquentes (réponse incorrecte, absence de réponse...) ou encore un comportement pouvant être qualifié d'« impulsif », comme le choix du carré sur pointé à l'item 5.

B.7.4 Structurer les comportements de réussite

Les comportements suivants ont été recensés comme comportements de réussite :

- item 2 : I2C1, I2C4, I2C5, I2C6, I2C8, I2C9, I2C10 ;
- item 3 : I3C1, I3C3, I3C4, I3C7 ;
- item 4 : I4C1, I4C4, I4C5, I4C8, I4C10, I4C13 ;
- item 5 : I5C1, I5C7, I5C8 ;

– item 6 : I6C1, I6C4, I6C5, I6C8, I6C9.

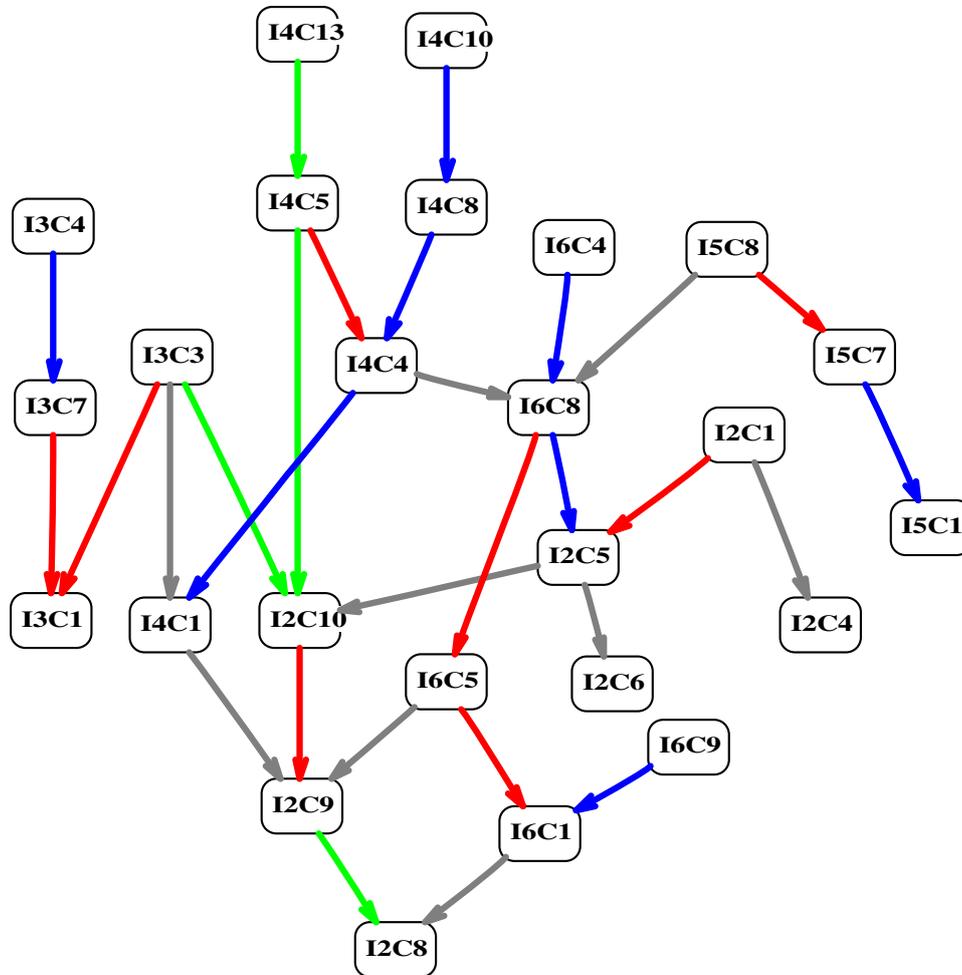


Fig. B.77

À part l’item 1 qui n’est pas représenté, les différents items sont plus imbriqués dans le graphe des comportements de réussite que dans le graphe des comportements d’échecs. Ainsi les items 2 et 6 sont chacun « en communication » avec trois autres items. Selon notre habitude, relevons les comportements situés à la source du graphe et, pour chacun d’entre eux, quels autres comportements de réussite il implique directement.

Il s’agit des comportements suivants :

Code	Signification	Taux (arrondis)
I2C1	Réponse correcte à l’item 2	28 %
I3C3	Raisonnement complet et correct à l’item 3	16 %
I3C4	Raisonnement incomplet mais correct à l’item 3	14 %
I4C10	Procédure par comptage à l’item 4	3 %
I4C13	Raisonnement correct à l’item 4	5 %
I5C8	Justification partielle mais sans erreur à l’item 5	12 %
I6C9	Raisonnement partiel mais sans erreur à l’item 6	11 %

On ne peut manquer d’être frappé par une différence importante entre cette liste de comportements-sources et celles que nous avons rencontrées dans les analyses de tests

concernant les classes de cinquième et sixième primaire. À une ou deux exceptions près, ce ne sont plus des savoirs ou des procédures qui sont listées, mais bien des capacités de raisonnement. Les questions du test étaient sans doute moins techniques, mais émettre un raisonnement correct ne peut se faire sans que des savoirs aient été conceptualisés.

Voici à présent les graphiques qui montrent les comportements de réussite directement impliqués par chacun des comportements sources.

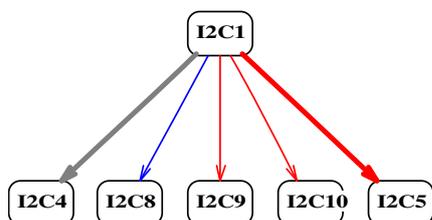


Fig. B.78

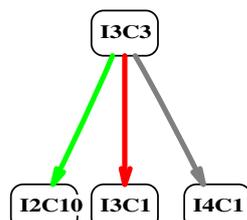


Fig. B.79

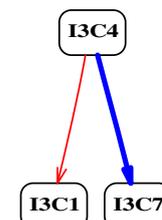


Fig. B.80



Fig. B.81

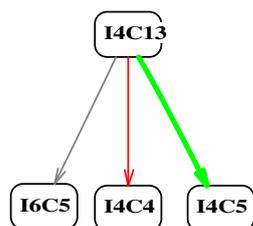


Fig. B.82

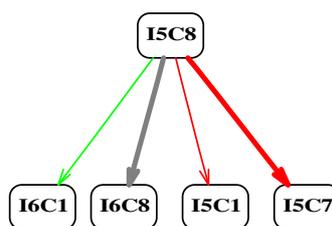


Fig. B.83

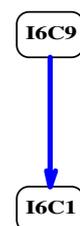


Fig. B.84

Les figures B.78, B.80, B.81, B.84 ne nous montrent aucune implication que nous n'ayons déjà rencontrée.

À la figure B.79, nous voyons que raisonner correctement à l'item 3 (I3C3) entraîne moyennement le bon placement d'un parallélogramme dans la seconde bande à l'item 2 (I2C10) et faiblement le dessin d'un bon rectangle à l'item 4 (I4C1). Les trois comportements peuvent être considérés comme liés à une bonne perception visuelle.

À la figure B.82, nous repérons l'implication (d'intensité faible) $I4C13 \rightarrow I6C5$: raisonner correctement amène aussi le bon raisonnement (découpage et recomposition) à l'item 6. Nous sommes ici dans un domaine plus numérique qu'au paragraphe précédent où on se contentait de comparer des aires.

Enfin, à la figure B.83, on observe des implications d'un comportement de justification partielle mais sans erreur vers d'autres comportements analogues (en plus des implications vers I5C1 et I5C7).

Ainsi qu'il en a été lors des analyses antérieures, nous constatons que, exception faite de l'item 1, qui joue un rôle séparé, toutes les « réponses correctes » aux items de ce pré-test soit sont elles-mêmes des comportements sources du graphe des comportements de réussite, soit impliquées par l'un d'entre eux.

B.8 L'analyse du post-test de première secondaire (2006–2007)

B.8.1 Les comportements possibles

Voici d'abord, item par item, les comportements qui ont été recensés et les codes qui leur ont été attribués.

Item 1

- | | |
|---|---|
| J1C1 : L'élève a dessiné correctement un parallélogramme. | J1C14 : L'élève a dessiné un losange incorrectement pour d'autres raisons. |
| J1C2 : L'élève a dessiné incorrectement un parallélogramme. | J1C15 : L'élève n'a pas dessiné de losange. |
| J1C3 : L'élève n'a pas dessiné de parallélogramme. | J1C16 : L'élève a dessiné correctement un trapèze. |
| J1C4 : L'élève a dessiné correctement un rectangle. | J1C17 : L'élève a dessiné un trapèze incorrectement. |
| J1C5 : L'élève a dessiné incorrectement un rectangle. | J1C18 : L'élève n'a pas dessiné de trapèze. |
| J1C6 : L'élève n'a pas dessiné de rectangle. | J1C19 : L'élève a noté que les aires du parallélogramme, du rectangle et du losange sont égales. |
| J1C7 : L'élève a noté qu'on ne pouvait pas dessiner de carré. | J1C20 : L'élève a noté que les aires du parallélogramme et du rectangle sont égales (mais pas le losange). |
| J1C8 : L'élève a justifié pourquoi on ne pouvait pas dessiner de carré. | J1C21 : L'élève a produit cinq bonnes réponses. |
| J1C9 : L'élève a tenté de dessiner un carré. | J1C22 : L'élève a produit quatre bonnes réponses. |
| J1C10 : L'élève a dessiné un carré sans respecter la mesure de $[AB]$. | J1C23 : L'élève a produit trois bonnes réponses. |
| J1C11 : L'élève a dessiné correctement un losange. | J1C24 : L'élève a produit deux bonnes réponses. |
| J1C12 : L'élève a dessiné incorrectement un losange. | J1C25 : L'élève a produit une bonne réponse. |
| J1C13 : L'élève a dessiné un losange incorrectement car n'a pas respecté la mesure de $[AB]$. | J1C26 : L'élève n'a produit aucune bonne réponse. |

Item 2

- | | |
|---|---|
| J2C1 : L'élève a dessiné correctement $ABEF$. | $ABCD$ sont égales. |
| J2C2 : L'élève a dessiné incorrectement $ABEF$. | J2C7 : L'élève a donné une autre réponse. |
| J2C3 : L'élève n'a pas dessiné $ABEF$. | J2C8 : L'élève n'a pas répondu. |
| J2C4 : L'élève a dessiné un parallélogramme. | J2C9 : L'élève a justifié correctement. |
| J2C5 : L'élève a respecté les consignes. | J2C10 : L'élève a justifié incorrectement. |
| J2C6 : L'élève a noté que les aires de $ABEF$ et | J2C11 : L'élève n'a pas justifié. |

Item 3

- J3C1** : L'élève a répondu correctement.
J3C2 : L'élève a répondu incorrectement.
J3C3 : L'élève n'a pas répondu.
J3C4 : L'élève a utilisé une formule « coté \times côté ».
J3C5 : L'élève a utilisé la formule du périmètre.
J3C6 : L'élève a procédé par découpage en tranches.
J3C7 : L'élève a tracé la hauteur relative à $[AB]$.
J3C8 : L'élève a mesuré $[AB]$ et la hauteur relative.
J3C9 : L'élève a calculé l'aire avec ces mesures.
J3C10 : L'élève a tracé la hauteur relative à $[BC]$.
J3C11 : L'élève a mesuré $[BC]$ et la hauteur relative.
J3C12 : L'élève a calculé l'aire avec ces mesures.
J3C13 : L'élève a tracé d'autres éléments.
J3C14 : L'élève a fait d'autres mesures.
J3C15 : L'élève a utilisé un autre procédé.
J3C16 : L'élève n'a pas justifié.

Item 4

- J4C1** : L'élève a répondu que les aires des triangles ABC et ADC sont égales.
J4C2 : L'élève a répondu incorrectement.
J4C3 : L'élève n'a pas répondu.
J4C4 : L'élève a utilisé une formule d'aire.
J4C5 : L'élève a procédé par comptage.
J4C6 : L'élève a justifié correctement par l'égalité des bases et des hauteurs.
J4C7 : L'élève a justifié par coupage selon une diagonale.
J4C8 : L'élève a donné une autre justification.
J4C9 : L'élève n'a pas justifié.
J4C10 : L'élève a justifié partiellement à la première question.
J4C11 : L'élève a justifié erronément à la première question.
J4C12 : L'élève a donné la mesure correcte de l'aire.
J4C13 : L'élève a donné une mesure incorrecte.
J4C14 : L'élève n'a pas donné de mesure pour l'aire.
J4C15 : L'élève a utilisé la formule d'aire du triangle.
J4C16 : L'élève a utilisé la formule « côté \times côté ».
J4C17 : L'élève a utilisé une autre méthode.
J4C18 : L'élève n'a pas justifié.
J4C19 : L'élève n'a pas tracé le segment $[AC]$.
J4C20 : L'élève a confondu périmètre et aire.
J4C21 : L'élève a utilisé une mauvaise hauteur.

Item 5

- J5C1** : L'élève a fourni la mesure correcte de l'aire.
J5C2 : L'élève a donné une mesure incorrecte de l'aire.
J5C3 : L'élève n'a pas calculé la mesure de l'aire.
J5C4 : L'élève a tracé au moins une diagonale.
J5C5 : L'élève n'a rien tracé sauf éventuellement le rectangle.
J5C6 : L'élève a mesuré au moins une diagonale.
J5C7 : L'élève a mesuré les côtés.
J5C8 : L'élève a justifié correctement en décomposant en deux triangles.
J5C9 : L'élève a justifié correctement par le demi-produit des deux diagonales.
J5C10 : L'élève a justifié correctement d'une autre manière.
J5C11 : L'élève a justifié incorrectement.
J5C12 : L'élève n'a pas justifié.
J5C13 : L'élève a dessiné correctement le rectangle.
J5C14 : L'élève a dessiné un rectangle incorrect.
J5C15 : L'élève n'a pas dessiné le rectangle.

B.8.2 Des comportements de réussite et d'échec

Item 1

La partie du gauche du graphe implicatif constitue, pour l'essentiel, le sous-graphe des réussites. On y remarque d'abord les comportements J1C21 (cinq bonnes réponses) et J1C22 (quatre bonnes réponses), mais pas J1C23 (trois bonnes réponses). On doit donc considérer que la réussite à cet item nécessite la production d'au moins quatre bonnes réponses (l'une d'entre elles peut être le non-dessin du carré), ce qui fixe à 55 % le taux de réussite.

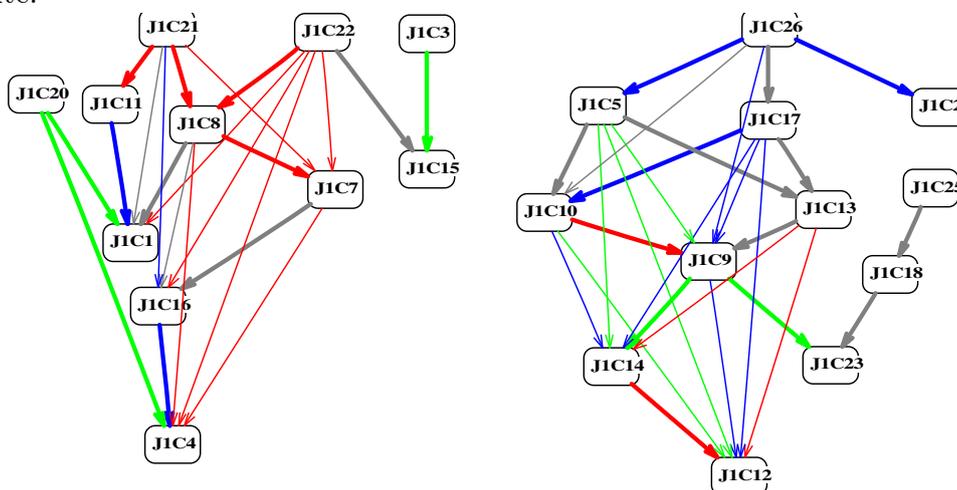


Fig. B.85

On voit immédiatement quel polygone n'a majoritairement pas été dessiné par les élèves qui ne produisent que quatre bonnes réponses puisque J1C22 implique J1C15 (le losange n'est pas dessiné). Toutefois l'intensité de l'implication $J1C22 \rightarrow J1C15$ est faible.

J1C3 (non-dessin du parallélogramme) n'est évidemment pas un comportement de réussite mais s'accroche à ce sous-graphe du fait qu'il entraîne également J1C15.

Très logiquement, J1C22 n'entraîne pas J1C8 (dessin du losange), mais entraîne les quatre autres bonnes réponses : J1C1 (dessin du parallélogramme), J1C4 (dessin du rectangle), J1C7 (non-dessin du carré) et J1C16 (dessin du trapèze). Encore plus logiquement, J1C21 entraîne les cinq bonnes réponses. Toutefois, l'implication $J1C21 \rightarrow J1C1$ est faible, ce qui est probablement dû au fort taux de réussite pour le dessin de ce parallélogramme.

Dans ce sous-graphe, les cinq comportements de bonne réponse sont rangés au long de deux chaînes qui séparent les cinq formes considérées en deux groupes :

$J1C21 \rightarrow J1C8 \rightarrow J1C16 \rightarrow J1C4$ (cinq réponses correctes \rightarrow non-dessin du carré \rightarrow dessin du trapèze \rightarrow dessin du rectangle)

$J1C21 \rightarrow J1C11 \rightarrow J1C1$ (cinq réponses correctes \rightarrow dessin du losange \rightarrow dessin du parallélogramme).

Rappelons qu'au long d'une chaîne de ce type, les taux de réponse vont en croissant.

Le sous-graphe des comportements d'échec prend sa source en J1C26 (aucune bonne

réponse) qui implique directement les « dessins incorrects » : J1C2 (parallélogramme), J1C5 (rectangle) J1C17 (trapèze) ainsi que J1C10 (dessin d'un carré sans respecter la contrainte sur longueur du côté). La plupart des autres réponses incorrectes sont également présentes. On remarque aussi la branche latérale J1C25 → J1C18 → J1C23 qui montre que si un élève ne fournit qu'une bonne réponse, celle-ci n'est généralement pas un trapèze.

Item 2

Le graphe implicatif relatif à cet item est limpide :

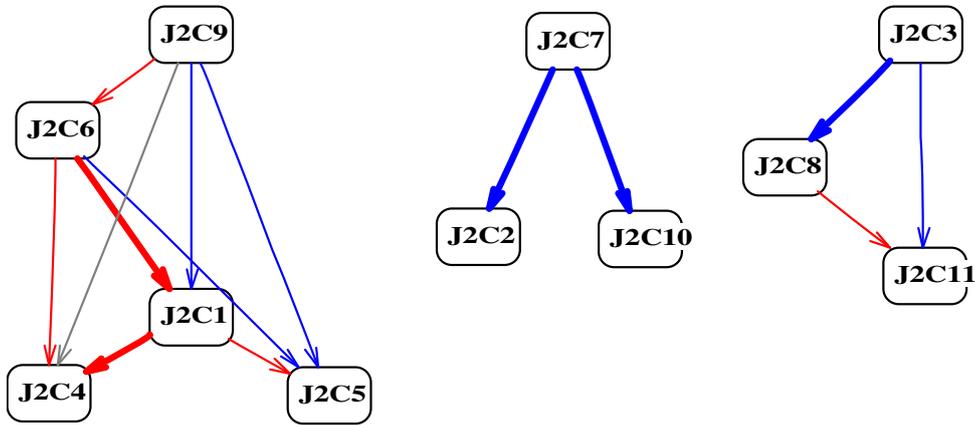


Fig. B.86

À gauche, on trouve le sous-graphe des réussites, ayant comme source la justification correcte (pour la valeur de l'aire). Au centre le sous-graphe des comportements d'échec proprement dits ne comporte que trois comportements. À droite figurent les non-réponses ou non-justifications, à classer également parmi les échecs.

Item 3

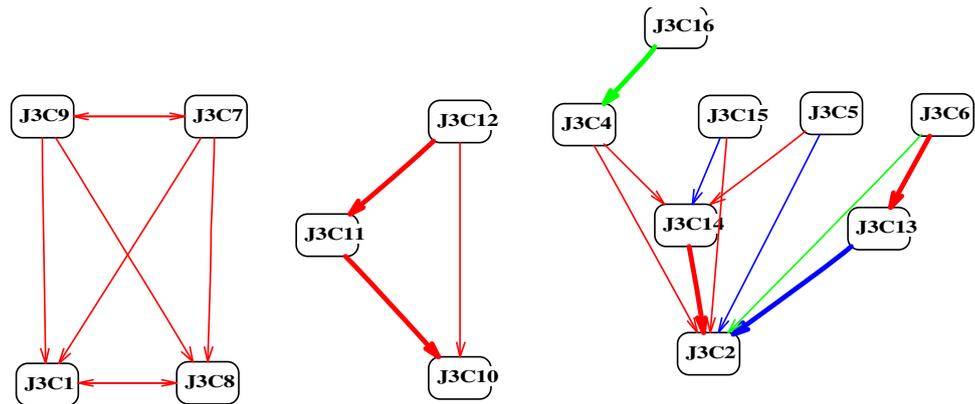


Fig. B.87

Première constatation, l'analyse implicative distingue nettement les deux choix possibles pour la base et la hauteur du parallélogramme. Seul le choix de $[AB]$ (J3C8) comme base entraîne la réussite (J3C1) et lui est même équivalent. Le choix de $[BC]$ comme base

(J3C11), tout comme ses compères J3C10 et J3C12 ne peut être considéré ni comme un comportement de réussite, ni comme un comportement d'échec.

Dans le sous-graphe des comportements d'échec, on trouve notamment la non-justification J3C16, l'usage de mauvaises formules J3C4 et J3C5 ainsi que le découpage en tranches J3C6.

Item 4

L'item 4 comporte deux questions distinctes : comparer les aires des triangles ABC et ABD et donner la valeur de l'aire du triangle ABC . La formule « côté \times côté » parfois utilisée pour calculer l'aire d'un parallélogramme va amener l'élève à réussir l'activité de comparaison mais à échouer au calcul de l'aire. Il en résulte que le graphe implicatif mélange les comportements de réussite et d'échec :

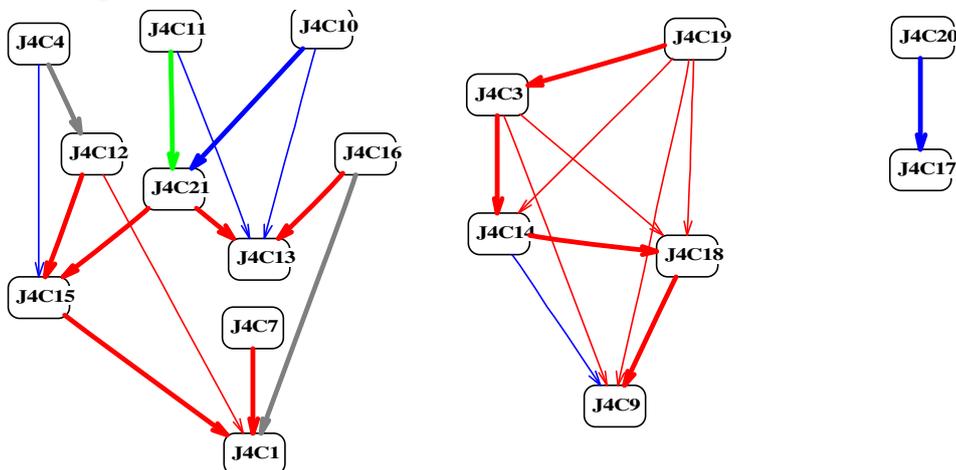


Fig. B.88

Ainsi, dans la partie gauche du graphe, on trouve les comportements d'échec J4C11 (justification erronée pour la comparaison), J4C21 (mauvais choix de hauteur), J4C13 (valeur incorrecte pour l'aire) et J4C16 (formule côté \times côté). Le comportement J4C10 (justification partielle pour la comparaison) sera également classé parmi les comportements d'échec puisqu'il entraîne J4C21. Dans cette partie du graphe, restent alors J4C4 (usage d'une formule d'aire), J4C12 (bonne valeur pour l'aire), J4C15 (emploi de la formule d'aire du triangle) et J4C1 (bonne réponse pour la comparaison) et J4C7 (méthode de coupage). À noter la faiblesse de l'implication $J4C4 \rightarrow J4C12$ et l'absence d'implication entre J4C7 et J4C12. Tous ces comportements sont à classer parmi les réussites.

La partie centrale du graphe rassemble les comportements de non réponse et non justification : J4C3, J4C14, J4C19, J4C18 et J4C9.

À droite, on constate l'isolement de J4C20 (confusion entre périmètre et aire).

Item 5

Dans la partie droite du graphe associé à l'item 5, on reconnaît immédiatement les comportements liés à la non-réponse ou la non-justification.

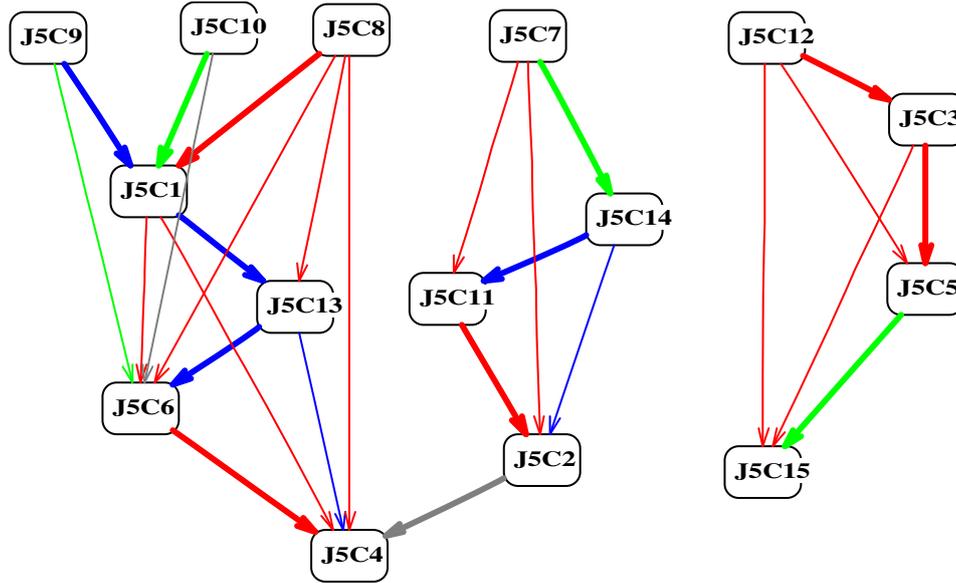


Fig. B.89

Dans la partie gauche, le comportement J5C4 (avoir tracé une diagonale du cerf-volant) est commun à deux sous-graphes bien distincts.

D'une part, J5C7 (mesurer les côtés), J5C14 (dessiner un rectangle incorrect), J5C11 (justifier incorrectement) et J5C2 (attribuer une mauvaise valeur à l'aire) sont des comportements d'échec.

D'autre part, la justification correcte sous trois variantes J5C8, J5C9 et J5C10, la bonne réponse, J5C1, le bon dessin pour le rectangle J5C13 et le fait de mesurer une diagonale, J5C6 sont des comportements de réussite.

J5C4, impliqué à la fois par des réussites et par des échecs, n'est ni l'un, ni l'autre.

Il est intéressant de noter que J5C13 est impliqué directement par J5C8 (décomposition en deux triangles), mais pas par J5C9 (formule du demi-produit des diagonales) ni J5C10 (autre méthode). Ceci montre bien que le dessin du rectangle basé sur les diagonales du cerf-volant résulte d'un processus géométrique et non numérique. Il pourrait servir de base à l'établissement de la formule du demi-produit des diagonales, ce qui aurait aussi pour avantage de faire jouer le même rôle par les deux diagonales.

Structurer les comportements d'échec

Le graphe, même réduit au squelette, des comportements d'échec étant beaucoup trop embrouillé, en voici quelques extraits.

Presque tous les comportements d'échec à l'item 1 impliquent l'échec à la première ques-

tion de l'item 2, c'est-à-dire la production d'un parallélogramme $ABEF$ à partir de $ABCD$.

Exception notable : J1C2 n'entraîne pas J2C2. Autrement dit, dessiner incorrectement le parallélogramme demandé à l'item 1 n'entraîne pas le dessin incorrect d'un parallélogramme analogue à l'item 2, alors que les situations sont très proches. Par contre, dessiner incorrectement un carré, un losange, un rectangle ou un trapèze à l'item 1 entraîne l'incorrection du dessin d'un parallélogramme à l'item 2.

Cette bizarrerie nous rappelle opportunément que, comme pour tout paramètre statistique, la signification de l'intensité d'implication dépend de la taille de l'échantillon considéré. Dans le cas présent, il n'y a que 8 % d'élèves qui ont eu le comportement J1C2. Si la population testée avait été plus nombreuse, peut-être l'implication de J1C2 vers J2C2 deviendrait-elle significative.

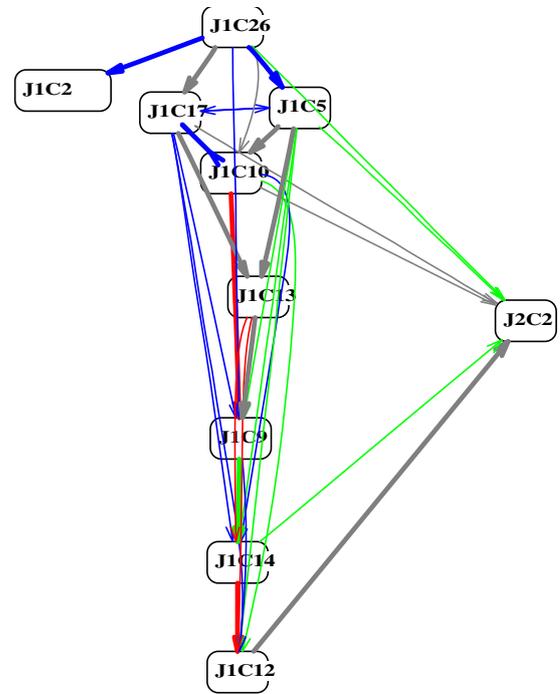


Fig. B.90

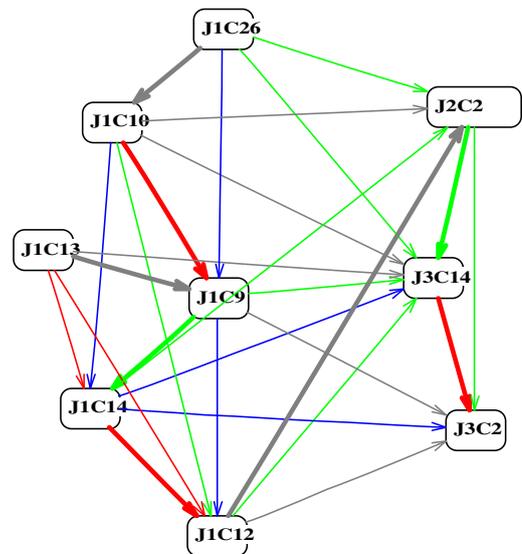


Fig. B.91

Dessiner incorrectement un carré ou un losange à l'item 1 entraîne non seulement l'échec à l'item 2, mais également à l'item 3.

Comme le montre le graphe ci-contre, les items 1,2 et 3 sont très liés.

Les comportements d'erreur aux items 4 et 5 sont fortement imbriqués :

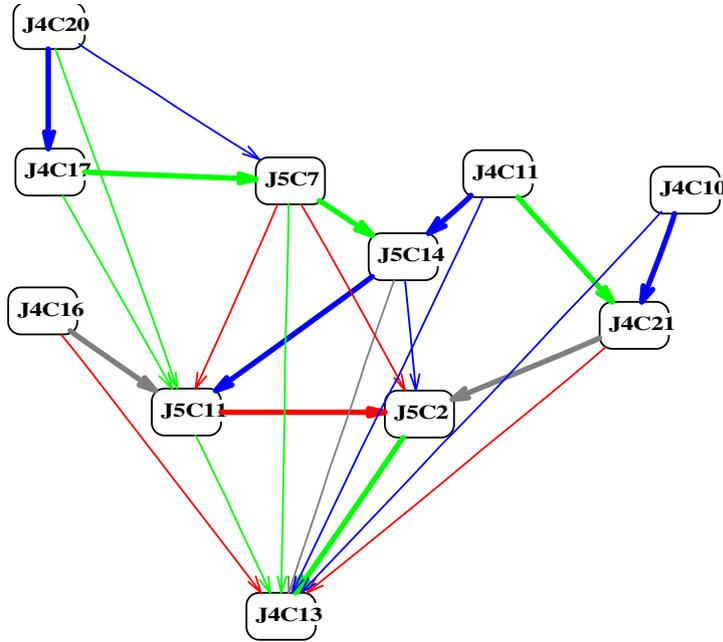


Fig. B.92

Les nœuds relatifs à l’item 5, J5C7 (mesurer les côtés du cerf-volant), J5C14 (dessiner un rectangle incorrect), J5C11 (justification incorrecte) et J5C2 (valeur de l’aire incorrecte) sont aux sommets d’un quadrilatère entouré des nœuds associés à l’item 4. On y rencontre notamment J4C20 (confusion périmètre–aire), J4C16 (formule coté \times côté), J4C21 (emploi d’une mauvaise hauteur), J4C13 (valeur incorrecte pour l’aire), ainsi que des justifications erronées ou partielles. C’est l’absence de maîtrise des aspects numériques du calcul d’une aire qui est ainsi caractérisée.

Explorons les liens entre les comportements de non réponse ou de non justification :

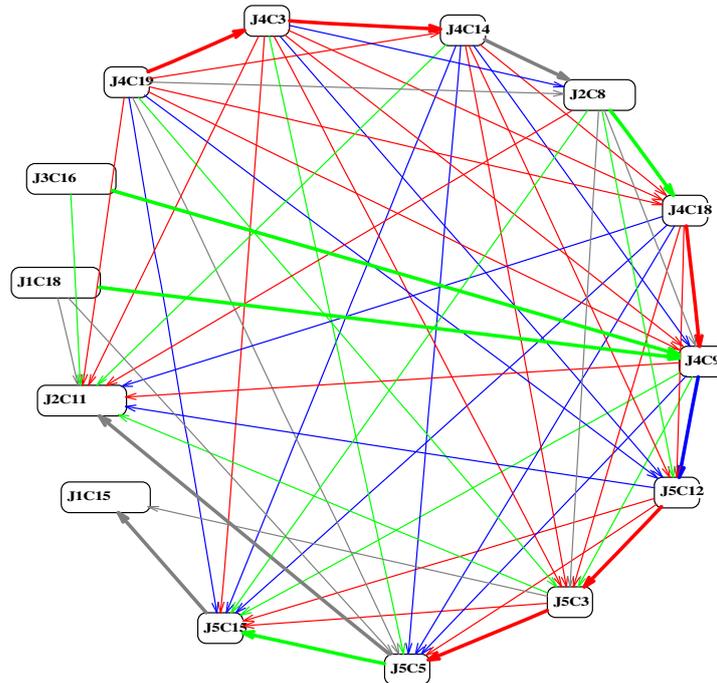


Fig. B.93

Nous obtenons le graphe ci-dessus qui montre que les comportements de non-réponse s’organisent en une longue chaîne de J4C19 à J5C15, complétée par de petites branches latérales. Chaque nœud de la chaîne principale implique presque tous les nœuds qui le suivent. Beaucoup d’implications sont très fortes, ce qui donne à l’ensemble une cohérence remarquable. Enfin, on constate aussi que les comportements de non-réponse affectent les

mêmes questions que les comportements d'erreur : ce n'est pas par hasard que l'un des nœuds terminaux (qui est donc un des comportements les plus fréquents) est le non-dessin du losange à l'item 1.

La cohérence de ce graphe contribue fortement à valider le test lui-même.

Structurer les comportements de réussite

Le squelette du graphe des comportements de réussite nous permet de déterminer des comportements sources et des comportements carrefours.

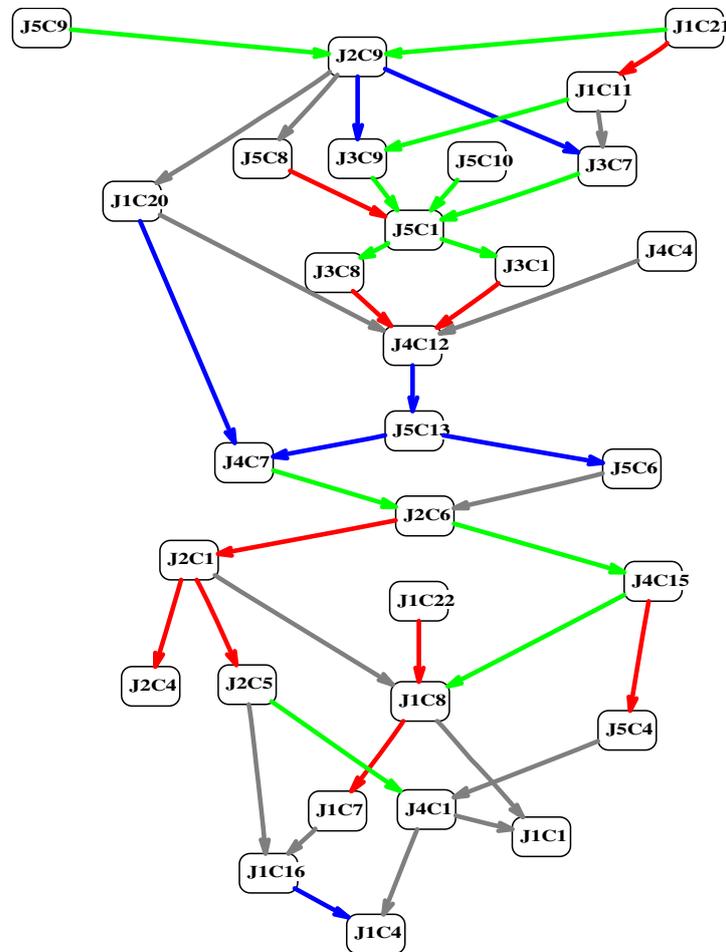


Fig. B.94

Les sources sont au nombre de quatre :

Code	Signification	Taux (arrondis)
J1C21	Cinq bonnes réponses à l'item 1	12 %
J1C22	Quatre bonnes réponses à l'item 1	43 %
J4C4	Emploi d'une formule d'aire à l'item 4	15 %
J5C9	Justification par le produit des demi-diagonales à l'item 5	3 %
J5C10	Autre justification correcte à l'item 5	3 %

Les deux premiers comportements de cette liste ne nécessitaient aucun calcul. Seule une

bonne *vision* géométrique était nécessaire. Le troisième porte sur l'emploi d'une formule connue. Le quatrième porte sur la transposition de la formule du losange au cas du cerf-volant et demande donc une certaine maturité conceptuelle.

La présence de ces quatre comportements à la source du graphe confirme qu'ils représentent l'essentiel des difficultés du sujet et peuvent être utilisés pour tester l'efficacité des séquences de formation.

Il est intéressant de visualiser les comportements directement impliqués par les comportements sources.

L'impact de J1C21 est impressionnant :

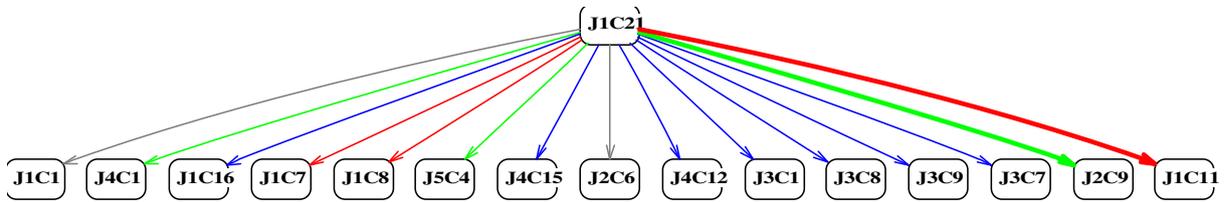


Fig. B.95

Comme on le voit, le fait de fournir les cinq réponses correctes à l'item 1, entraîne (plus ou moins fortement) la réussite aux items 2, 3 et 4 et un des éléments de réussite à l'item 5. En effet de J1C21 partent des implications vers la reconnaissance et la justification de l'égalité des aires des deux parallélogrammes à l'item 2 (J2C6 et J2C9), la bonne valeur pour l'aire à l'item 3 (J3C1) et son calcul à partir de la base $[AB]$ (J3C7, J3C8 et J3C9), la bonne valeur pour l'aire à l'item 4 (J4C12) et son calcul à partir de la formule d'aire du triangle (J4C15), ainsi que le fait de tracer une diagonale à l'item 5 (J5C4).

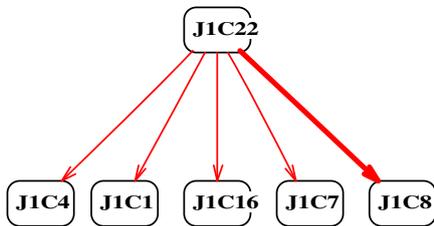


Fig. B.96

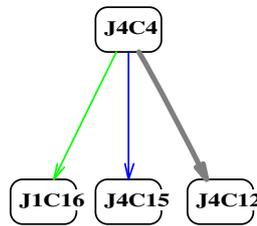


Fig. B.97

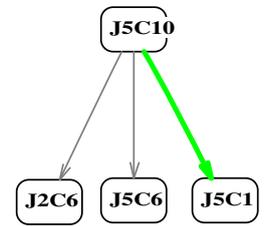


Fig. B.98

Par contre l'impact de J1C22 (quatre réponses bonnes à l'item 1) se limite à l'item 1 : le graphe issu de cette source ne nous fournit que deux renseignements : la réponse manquante est le dessin du losange et l'élève a expliqué pourquoi on ne peut dessiner un carré.

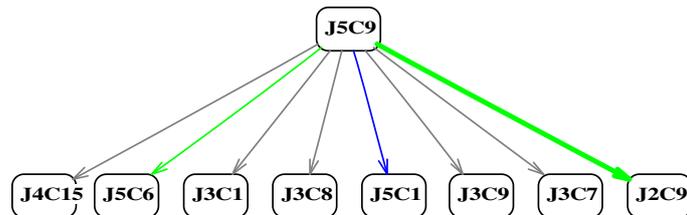


Fig. B.99

J5C9 (Fig. B.99) entraîne non seulement la bonne réponse à l'item 5, par la mesure des

diagonales, mais aussi une justification correcte de l'égalité d'aires à l'item 2 (J2C9), la bonne valeur pour l'aire à l'item 3, calculée à partir de la base $[AB]$ (J3C1, J3C7, J3C8 et J3C9) et enfin l'emploi de la formule du triangle à l'item 4.

Quant à J5C10 (Fig. B.98), son impact hors de l'item 5 se limite à l'égalité des aires à l'item 2.

Enfin, J4C4 (Fig. B.97) est l'emploi d'une formule d'aire pour *comparer* les aires des deux triangles ABC et ABD . Les élèves qui utilisent cette méthode ont aussi tendance à l'utiliser pour *calculer* l'aire de ABC (J4C12 et J4C15). J4C4 entraîne également J1C16 : le dessin (correct) du trapèze à l'item 1.

Comme on le voit, les deux comportements sources principaux sont J1C21 et J5C9.

Un comportement « carrefour » intéressant est la réussite à l'item 5 (J5C1). Le graphe suivant montre toutes les implications directes qui y arrivent ou en partent :

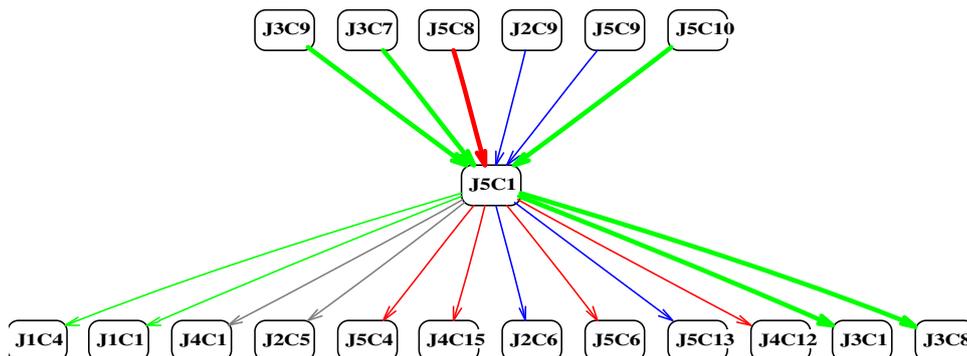


Fig. B.100

Que J5C1 soit impliqué par J3C8, J5C9 et J5C10 n'est que normal. Que J5C1 entraîne J5C4 et J5C6 montre des éléments d'une méthode efficace pour calculer l'aire du cerf-volant. J5C1 entraîne aussi J5C13 (dessin d'un rectangle correct) : ce n'était pas aussi évident. Mais J5C1 est aussi en relation d'implication avec des comportements relevant de *tous* les autres items. Rappelons que l'aire du cerf-volant avait à peine été évoquée, et non calculée, à la fin des activités réalisées avec les élèves. Pour ceux-ci, l'item 5 constituait une extension dont on voit qu'elle mobilise l'ensemble des connaissances acquises auparavant à propos des aires des formes géométriques élémentaires.

Annexe C

Index

- Additivité, 146, 150
- Agrandissement, 154
- Aire, 65, 107, 108, 140, 141, 150, 154, 253, 260
- Analyse
 - implicative, 479, 508
- Angle
 - solide, 141
- Animation, 54
- ARCHIMÈDE, 95, 96, 99
- Argumenter, 254
- ARISTOTE, 93, 96, 98, 99
- Arithmétique, 83
- Arpentage, 139
- ASSUDE, T., 29, 56
- Auto-évaluation, 57

- BALACHEFF, N., 53
- Bande, 54, 253
- BARUK, S., 107, 125
- BATTISTA, M., 23
- BAYART, F., 41
- BKOUCHE, R., 108
- BOLYAI, J., 142
- BOREL, E., 102
- Botaniste, 53
- BRAHMAGUPTA, 143

- Cabri-Géomètre, 15, 18, 24
- Cabri-Géomètre , 34
- Cabri3d, 24
- Cadre, 471

- Calcul
 - intégral, 137
- CAVALIERI, B., 102
- Cercle, 58, 141
- Chamois, 36
- Cinderella, 37
- Circonférence, 141
- CLEMENTS, D., 23
- Comparer, 260
- Compas, 58
 - parfait, 90
- Compétence
 - transversale, 143
- Compétences, 61
- Comportement, 363, 479
- Compression, 21, 145, 476
- Comptage, 126, 151
- Conceptualisation, 143
- Condition
 - déterminante, 63, 254, 261
- Cône, 141
- Constructeur, 53, 54
- Constructivisme, 142
- Continu, 85
- Conversion, 18, 20, 55
- Convertir, 472
- Convivialité, 34
- Corde, 58
 - à nœuds, 80
- Corps
 - rond, 141

- Correspondance
 - biunivoque, 150
- CROWDER, N., 16
- Cylindre, 141
- Déclic, 38
- Décomposition, 65, 109
- Déconstruction
 - dimensionnelle, 54
- Découpage, 49, 65, 150
- Découper, 55
- Déformer, 55
- Démarche
 - de découverte, 66
 - de généralisation, 66
 - de vérification, 66
 - de validation, 66
 - d'évaluation et d'auto-évaluation, 29
 - de découverte, 25, 54
 - de généralisation, 27, 54
 - de vérification, 26, 54
- Demi-droite, 54
- Démontrer, 254
- Dénombrement, 152
- Déplacement, 150
- Déplacer, 55, 150
- Derive, 15
- DESCARTES, 90, 97
- Didacticiel, 14
- Dimension, 154
- Disque, 141
- Distracteur, 16
- Diviser, 55
- DOUADY, R., 57, 226, 471, 472
- Droite, 54, 142
 - illimitée, 142
 - réelle, 97
- Duplication, 49
- DUVAL, R., 7, 20, 23, 54, 162, 343, 472, 474
- E.A.O., 17
- Égalité
 - d'aires, 150, 151
- Égypte, 80
- Équicomplémentarité, 111
- Équidécomposition, 110
- Équilibrage
 - majorante, 144
- ÉRATOSTHÈNE DE CYRÈNE, 85
- Estimation, 260
- Étalon
 - conventionnel, 124
 - de mesure, 103
- EUCLIDE, 83, 84, 92–94, 113, 115, 139, 255
- EUDOXE, 83, 94
- Évaluation, 57
- Fichier
 - dynamique, 64
 - historique, 55, 56
- Figure
 - géométrique, 29
- Figures, 61, 62
- Forme
 - libre, 3
 - standard, 2
- Former, 472
- Formules, 128, 253, 260
 - d'aires, 155, 156
 - de calcul, 153
 - de périmètres, 156
- Fraction, 53, 58
- FRIEDELMEYER, J.-P., 81, 255
- Fusion, 49, 109
- Fusionner, 55
- Gabarit, 58
- GALILÉE, 99
- GALLOU, E., 22
- GÉLIS, J.-M., 29, 56
- GeoGebra, 39
- GeoLabo, 41
- Géométrie, 80, 83
 - dynamique, 2, 25
- Geonext, 42
- Géoplan, 151
- Glisser, 55, 63, 147
- Grandeur, 53, 61, 108, 150
 - géométrique, 58
- Grandeurs, 79, 107
 - commensurables, 84
 - incommensurables, 84, 93

- GRAS, R., 479
 Groupe, 142
 de transformations, 142
- HÉRODOTE, 80
 HÉRON D'ALEXANDRIE, 90
 HILBERT, D., 142
 HILLEL, J., 21, 23
 HIPPOCRATE DE CHIO, 101
 HOHENWARTER, M., 39
 Homothétie, 64
 Horizontale, 155
 AL-HUWARIZMI, 88
- Infini, 86
 Intensité
 d'implication, 479, 482
 Interactif, 66
 Invariance, 150, 153, 154
 Inventeur-bricoleur, 53, 54
 Isométrie, 142
 Isométrique, 150
- JORDAN, C., 102
 Justifier, 254
- ABU KAMIL, 90
 KAPUT, J., 53
 AL-KARAGI, 92
 AL-KASHI, 95
 AL-KHHAYAM, 93, 95
 KIERAN, C., 23
 Kit
 libre, 3
 standard, 3
 KITTEL, M., 25
 KLEIN, F., 142
 KORTENKAMP, U., 37
 KUNTZ, G., 25
- Laboratoire
 d'informatique, 14
 LABORDE, J.-M., 2, 18
 LE CORBUSIER, C.-E., 169
 LEBESGUE, H., 102
 LEGENDRE, A.-M., 139, 142
 LEIBNIZ, 102
- Ligne
 polygonale, 146
 Lignes
 parallèles, 142
 Lisp, 19
 LOBACHEVSKY, N., 142
 Logo, 15, 18, 19, 59, 146, 148
 Logo3d, 147
 Logos, 85
 Longueur, 107, 108, 141, 150, 154
 Lunule, 101
- Macro, 54
 Mathématiques
 arabes, 87, 88
 modernes, 142
 Mesure, 53, 58, 81, 85, 93, 107, 108, 140, 141
 Mesurer, 260
 Métacognition, 55, 57
 Méthode
 d'exhaustion, 87
 Micro-monde, 1, 23, 53
 Mode
 commande, 33
 de raisonnement, 420
 réponse, 33
 Modèle
 mental, 491
 Monade, 83
 Mouvement, 22, 49, 142
 Multiplication
 d'une aire par un naturel, 114
- Narration
 de recherche, 56
 Niveau, 53
 de van Hiele, 473
 Nombre, 79
 d'or, 96
 entier, 82
 irrationnel, 85
 naturel, 82
 réel, 82
 rationnel, 85
 Noss, R., 22
 Numérisation, 124

- Opérateur
 - multiplicatif, 114
- OSTENNE, E., 38
- Ouverture, 34
- PAPERT, S., 2, 18
- Papier
 - quadrillé, 151
 - triangulé, 152
- Pavage, 45
 - semi-régulier, 70
- Pédagogie
 - différenciée, 56
- Pentamino, 3
- Perception, 150
 - mixte, 114
 - qualitative, 108
- Périmètre, 141, 253, 260
- Perspective
 - cavalière, 70
- Pertinence, 34
- Physique, 99
- PIAGET, J., 142–147, 151, 154
- PLATON, 99
- Plutarque, 81
- Polyèdre, 141
- Principe
 - d'égalité par superposition, 108
- Procept, 477
- Projet, 20, 148
- Pythagoricien, 82
- Quadrillage, 60, 65
- Quantification, 118, 151
 - par encadrement, 120
- AL-QUHI, 90
- Rapport, 141
 - de deux aires, 116
 - de grandeurs, 83, 94
- Ratio, 85
- Rayon, 59
- Recollement, 65
- Recomposition, 150
- Registre
 - de représentation, 55
 - sémiotique, 18, 472
- Régression, 440
- Repérage, 154
- Représentation, 145
- Retournement, 150
- Retourner, 55, 63, 150
- Réversibilité, 146
- RICHTER-GEBERT, J., 37
- RIEMANN, B., 102, 142
- Rotation, 54, 55, 64, 147
- ROUCHE, N., 85
- Secteur angulaire, 54
- Segment, 142
 - de sphère, 141
- Service, 34
- Seuil
 - épistémologique, 154
 - d'intensité, 480
- Similitude, 142
- Situation-problème, 1, 57
- Sketchpad, 44
- SKINNER, B. F., 16
- Socles
 - de compétences, 7, 57, 61, 256
- Solides, 61
- Sphère, 141
- STEVIN, S., 96
- Structuration, 143
- Structurer, 62
- Super-tableau, 17
- Superposabilité, 150
- Symétrie axiale, 54, 55, 64
- Synthétiser, 62
- Tangram, 3
- THALÈS, 81
- Théorème
 - de Pythagore, 65, 80, 141, 254
 - de Thalès, 81, 82, 84, 140, 141, 254
 - du papillon, 28
 - en acte, 144
- Théorie
 - de la mesure, 102
 - des proportions, 83
- TICE, 29

Tourner, 55, 63, 147

Traiter, 472

Transformation, 49, 63

Transitivité, 109

Translation, 54, 55, 64, 147

Triangle

 sphérique, 141

AL-TUSI, 95

Unité

 commune de mesure, 153

 conventionnelle, 107, 151, 153

VAN HIELE, P. et D., 53, 472

Variable, 156

VERGNAUD, G., 21, 144

Verticale, 155

VIÈTE, 95

Vitesse, 100

Volume, 141, 154, 260

ABU-L-WAFA, 92

Annexe D

Bibliographie

- [1] P. Abgrall. *Le développement de la géométrie aux IX^e–XI^e siècles*. A. Blanchard, Paris, (2004).
- [2] Aristote. *Physique*. Les belles lettres, Paris, (1990).
- [3] N. Artemiadis. *History of mathematics : from a mathematician's vantage point*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, (2004).
- [4] T. Assude et J.-M. Gelis. La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire. *Educational Studies in Mathematics*, **50**, 3, 259–287, (2002).
- [5] N. Balacheff and J. Kaput. Computer-based Learning Environments in Mathematics. In Bishop et al. [11], pages 469–501.
- [6] M. Ballieu, R. Giot, F. Higuët, B. Honclaire, G. Noël, et Y. Noël-Roch. *Jeux mathématiques 1*. Université de Mons-Hainaut, Centre de Didactique des Sciences, (1992). Manuel d'utilisation des logiciels CDS-Math 6.
- [7] M. Ballieu, R. Giot, F. Higuët, B. Honclaire, G. Noël, et Y. Noël-Roch. *Géométrie de l'espace 1*. Université de Mons-Hainaut, Centre de Didactique des Sciences, (1994). Manuel d'utilisation des logiciels CDS-Math 7.
- [8] E. Barbin. Qu'est-ce que faire de la géométrie ? *Repères-IREM*, pages 59–82, (2001).
- [9] G. Barthélemy. *2500 ans de mathématiques : l'évolution des idées*. Ellipses, Paris, (1999).
- [10] S. Baruk. *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*. Ed. du Seuil, Paris, (1992).
- [11] A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, and C. Laborde, éditeurs. *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1996).
- [12] R. Bkouche. La Géométrie entre mathématiques et sciences physiques. In M. Kourkoulos, G. Troulis, et C. Tzanakis, éditeurs, *Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, volume 2, Rethymnon, (2006). Université de Crète.
- [13] C. Boyer and U. Merzback. *A history of mathematics*. Wiley, Singapore, (1989).

- [14] G. Brousseau. *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage, Grenoble, (1998).
- [15] M. Caveing. *Quelques remarques sur le traitement du continu dans les « Éléments » d'Euclide et la « Physique » d'Aristote*. In *Penser la science*. Points Sciences, Seuil, (1982).
- [16] M. Caveing. *La figure et le nombre : recherche sur les premières Mathématiques des Grecs*. Presses Universitaires du Septentrion, Paris, (1998).
- [17] D. H. Clements and M. T. Battista. The effects of Logo on children's conceptualizations of angle and polygons. *Journal for Research in Mathematics Education*, **21**, 5, 356–371, (1990).
- [18] CREM. *Apprenti Géomètre. Grandeurs, fractions et mesures*. Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2003).
- [19] CREM. *Apprenti Géomètre. Rapport de recherche 2003-2004*. Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2004).
- [20] CREM. *Apprenti Géomètre. Un outil de différenciation des apprentissages en mathématique*. Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2005).
- [21] E. Crone, E. Dijksterhuis, and al. *The principal works of SIMON STEVIN, volumes IIA et IIB*. C.V. Swets & Zeitlinger, Amsterdam, (1958).
- [22] N. Crowder. Automatic Tutoring by means of intrinsic programming. In Galantes [38].
- [23] R. Cuppens. *Faire de la géométrie en jouant avec Cabri-Géomètre*. Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Paris, (1996). Deux tomes.
- [24] A. Dahan-Dalmedico et J. Peiffer. *Une histoire des mathématiques*. Editions du Seuil, (1986).
- [25] A. Djebbar. *Une histoire de la science arabe*. Editions du Seuil, (2001).
- [26] A. Djebbar. *L'algèbre arabe, genèse d'un art*. Vuibert-Adapt, Paris, (2005).
- [27] *Décret « Missions de l'École », Mon école comme je la veux*. Ministère de la Communauté française — AGERS, Bruxelles, (1997).
- [28] *Socles de compétences (Enseignement fondamental et premier degré de l'enseignement secondaire)*. Ministère de la Communauté française — AGERS, Bruxelles, (1999). www.enseignement.be/@librairie/documents/socles/telechargement/pdf/socle_math.pdf.
- [29] *Mathématiques — Premier degré – 1^{re} A et 2^e Commune*. Fédération de l'Enseignement secondaire catholique, Bruxelles, (2000). www.segec.be/Documents/Fesec/Programmes/15_MATH1.pdf.
- [30] *Programme d'études du cours de mathématiques — 1^{re} année A – 2^e année commune*. Ministère de la Communauté Française — AGERS, Bruxelles, (2000). www.restode.cfwb.be/download/programmes/10-2000-240.pdf.
- [31] R. Douady. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, **7**, 2, 5–31, (1986).

- [32] J.-C. Duperret. Le geste géométrique ou l'art de démontrer. *Repères-IREM*, pages 83–116, (2001).
- [33] R. Duval. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **5**, 37–65, (1993).
- [34] R. Duval. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **10**, 5–53, (2005).
- [35] Euclide. *Les éléments, traduction en français du texte de Heiberg par B. Vitrac*. Presses Universitaires de France, Paris, (1994).
- [36] J.-P. Friedelmeyer. Les aires : outil heuristique - outil démonstratif. *Repères-IREM*, **31**, 39–62, (1998).
- [37] J.-P. Friedelmeyer. Grandeurs et nombres : l'histoire édifiante d'un couple fécond. *Repères*, **44**, 5–31, juillet 2001. Topiques Éditions, Metz.
- [38] E. Galantes, éditeur. *Automatic Teaching : the state of the art*. Wiley, New York, (1959).
- [39] Galilée. *Discours concernant deux sciences nouvelles*. Presses Universitaires de France, (1995). D'après une traduction de Maurice Clavelin.
- [40] E. Gallou-Dumiel. Symétrie orthogonale et micro-ordinateur. *Recherches en didactique des mathématiques*, **8**, 1–2, 5–60, (1987).
- [41] GEM. *L'archipel des isométries*. Ed. GEM, Louvain-la-Neuve, (1982).
- [42] R. Gras. Panorama du développement de l'A.S.I. à travers des situations fondatrices. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, **Supplément n°15**, 9–33, (2005).
- [43] R. Gras et al. *L'implication statistique*. La Pensée Sauvage, Grenoble, (1996).
- [44] E. M. Gray and D. Tall. Duality, ambiguity and flexibility : A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, **25**, 2, 116–140, (1994).
- [45] Herodote. *Histoires, traduit en français par Larcher*. Charpentier, Paris, (1850). En ligne sur Gallica.bnf.fr.
- [46] J. Hillel. Mathematical and programming concepts acquired by children, aged 8–9, in a restricted Logo environment. *Recherches en didactique des mathématiques*, **6**, 2–3, 215–268, (1985).
- [47] J. Hillel and C. Kieran. Schemas used by 12-years olds in solving selected turtle geometry tasks. *Recherches en didactique des mathématiques*, **8**, 1–2, 61–102, (1987).
- [48] J. Hoyrup. *Lengths, widths, surfaces : a portrait of old babylonian : algebra and its skin*. Springer-Verlag, New York, (2002).
- [49] M. Kittel et G. Kuntz. De la possible influence de l'environnement informatique sur l'enseignement des mathématiques. Etude d'un exemple. *Repères IREM*, **49**, 41–58, (2002).
- [50] M. Kline. *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press, New York, (1990).

- [51] C. Laborde and B. Capponi. Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques*, **14**, 1–2, 165–210, (1994).
- [52] J.-M. Laborde and R. Strässer. Cabri-géomètre, a microworld of geometry for guided discovery learning. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, **90**, 5, 171–190, (1990).
- [53] M. Lebrun. *Des technologies pour enseigner et apprendre*. 2e édition, De Boeck, Bruxelles, (2002).
- [54] A.-M. Legendre. *Éléments de Géométrie avec des notes, suivis d'un traité de trigonométrie*. Société Nationale pour la propagation des bons livres, Bruxelles, (1838).
- [55] L. Lismont et N. Rouche, éditeurs. *Formes et Mouvements*. Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2001).
- [56] R. Noss. Children's learning of geometrical concepts through Logo. *Journal for Research in Mathematics Education*, **18**, 5, 343–362, (1987).
- [57] S. Papert. *Jaillissement de l'esprit*. Flammarion, Paris, (1980).
- [58] J. Piaget. *Six études de psychologie*. Gonthier, Genève, (1964).
- [59] J. Piaget, B. Inhelder, et A. Szeminska. *La géométrie spontanée de l'enfant*. Presses Universitaires de France, Paris, (1948).
- [60] Plutarque. *Œuvres morales. Le banquet des sept sages. traduit en français par V. Bétolaud*. Hachette, (1870). En ligne sur hodoi.fltr.ucl.ac.be/concordances.
- [61] C. Pribetich Aznar. La formulation des surfaces des bâtiments et des superficies des terrains aux XIV^e–XVI^e siècles dans le sud-est de la France. *Histoire et mesure*, **XVI - n°3/4**, (2005). mis en ligne le 7 décembre 2005, référence du 25 avril 2007, disponible sur : <http://histoiremesure.revues.org/document142.html>.
- [62] R. Rashed et B. Vahabzadeh. *Al-Khayyām Mathématicien*. Albert Blanchard, Paris, (1999).
- [63] X. Roegiers. *Les Mathématiques à l'école primaire (tome 2)*. De Boeck, (2000).
- [64] N. Rouche. *Le sens de la mesure*. Didier-Hatier, Bruxelles, (1992).
- [65] N. Rouche et P. Skilbecq. Apprenti Géomètre, un nouveau logiciel. *Mathématique et Pédagogie*, **149**, 68–84, (2004).
- [66] N. Rouche et P. Skilbecq. *Apprenti Géomètre : pourquoi un nouveau logiciel*. CREM, Nivelles, (2006).
- [67] C. Ruby. Lire (vraiment) Leibniz. *EspacesTemps.net*, (Mis en ligne le 5 mai 2004).
- [68] M. Serres. *Les origines de la géométrie*. Flammarion, (1993).
- [69] B. F. Skinner. *La révolution scientifique de l'enseignement*. Ed. Dessart, Bruxelles, (1969).
- [70] S. Stévin. *L'Arithmétique et la Pratique d'Arithmétique. Les Œuvres Mathématiques*. Ed. A. Girard, Leyde, (1634).
- [71] D. Tall. Understanding the processes of advanced mathematical thinking. *L'enseignement mathématique*, **42**, 395–415, (1996).

- [72] D. Tall. A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, **11**, 195–215, (2006).
- [73] R. Taton. *La science antique et médiévale*. Presses universitaires de France, Paris, (1957).
- [74] P. van Hiele. La signification des niveaux de pensée dans l'enseignement par la méthode déductive. *Mathematica & Paedagogia*, **16**, 25–34, (1958/59).
- [75] G. Vergnaud. Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, **2**, 2, 215–232, (1981).
- [76] G. Waldegg. L'arithmétisation des grandeurs géométriques chez STÉVIN. Peyresq, (1999). Actes du colloque « La pensée numérique », www.peiresc.org/New%20site/Actes.Dhombres/Pensee.numer.htm.
- [77] F. Woepcke. *Études sur les mathématiques arabo-islamiques*. Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften an der Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main, (1986).
- [78] A. Youschkevitch. *Les mathématiques arabes (VII^e- XV^e siècles)*. Librairie philosophique J. Vrin, Paris, (1976).

Table des matières

0 Introduction	1
0.1 Motivation et objectifs de la recherche	1
0.2 Les caractéristiques d' <i>Apprenti Géomètre</i>	2
0.3 Le contenu de la recherche	4
0.4 Le contenu du rapport	8
I L'état des lieux	11
1 Le contexte informatique	13
1.1 L'informatique dans les écoles : une réalité	13
1.2 Plusieurs types de logiciels	14
1.3 To clic or not to clic ?	15
1.4 Aux débuts de l'informatique dans les classes	15
1.5 Quand l'élève pilote l'ordinateur	18
1.6 Logo	19
1.7 Cabri	24
2 Analyse de didacticiels de géométrie dynamique	33
2.1 Deux modes de fonctionnement	33
2.2 Analyse de logiciels	34
2.3 Cabri II+	34
2.4 Chamois	36
2.5 Cinderella	37
2.6 Déclic	38
2.7 GeoGebra	39
2.8 GeoLabo	41
2.9 Geonext	42
2.10 Sketchpad	44

2.11	En situation	45
2.12	Conclusions	49
3	<i>Apprenti Géomètre</i>	53
3.1	Un micro-monde évolutif	53
3.2	Un instrument d'auto-évaluation	55
3.3	Le langage d' <i>Apprenti Géomètre</i>	55
3.4	Des objectifs d' <i>Apprenti Géomètre</i> à l'école primaire	56
3.5	Des objectifs d' <i>Apprenti Géomètre</i> à l'école secondaire	60
3.6	<i>Apprenti Géomètre</i> résiste-t-il au test ?	66
3.7	Des activités d'initiation	67
II	La mesure des aires	77
4	Aperçu de l'histoire de la mesure	79
4.1	Grandeurs et nombres	79
4.2	À l'origine	80
4.3	Des entiers aux réels	82
4.4	De la décomposition infinie au calcul intégral	98
4.5	Histoire rapide des étalons de mesure	103
5	Une grandeur de base : l'aire	107
5.1	Introduction	107
5.2	Au début était le verbe...	108
5.3	Perception qualitative de l'aire	108
5.4	Perception mixte de l'aire	114
5.5	Quantification de l'aire	118
5.6	Numérisation de l'aire	124
5.7	Calcul de la mesure de l'aire par les mesures de longueurs	125
5.8	Etablissement de formules du calcul de la mesure de l'aire de quelques polygones	128
5.9	Une autre voie vers le calcul des aires	137
6	Une approche épistémologique	139
6.1	Un préalable : la géométrie	139
6.2	La conceptualisation	142
6.3	Le cas de la mesure	145

<i>Table des matières</i>	567
III Activités pour le cycle 10/12 ans	157
Présentation	159
7 L'expérimentation en cinquième primaire (2006–2007)	161
7.1 Comparer des aires	163
7.2 Périmètres et aires des carrés et des rectangles	180
7.3 L'aire des parallélogrammes	205
8 L'expérimentation en sixième primaire (2005–2006)	223
8.1 L'aire de carrés	224
8.2 L'aire des rectangles et des parallélogrammes	247
IV Activités pour le cycle 12/14 ans	249
Présentation	251
9 Vers les formules d'aires en première année du secondaire	253
9.1 Objectifs généraux	253
9.2 La transition primaire - secondaire	255
9.3 Annexe : exercice coté	269
9.4 Voir des quadrilatères à l'intersection de deux bandes	270
9.5 L'aire du parallélogramme	286
9.6 L'aire du triangle	296
9.7 L'aire du trapèze	304
9.8 L'aire du losange et du cerf-volant	309
9.9 L'aire d'un polygone régulier	318
9.10 L'aire du disque	324
9.11 Agrandir, réduire	332
V Les tests	339
10 Un pré-test en sixième primaire (2005–2006)	343
10.1 Les objectifs des tests	343
10.2 Les énoncés	344
10.3 Analyse des items	345
10.4 Des comportements de réussite ou d'échec	363
10.5 La population testée est-elle initialement homogène?	364

11 Un post-test en sixième primaire (2005–2006)	367
11.1 L’objectif du test	367
11.2 Les énoncés	367
11.3 Analyse des items	369
11.4 Des comportements de réussite ou d’échec	378
11.5 L’impact d’ <i>Apprenti Géomètre</i>	380
12 Un pré-test en cinquième primaire (2006–2007).	385
12.1 Les objectifs des pré- et post-tests	385
12.2 Les énoncés	385
12.3 Analyse des items	388
12.4 Des comportements de réussite ou d’échec	397
12.5 Une comparaison cinquième-sixième	399
12.6 La population testée est-elle initialement homogène?	400
13 Un post-test en cinquième primaire (2006–2007).	403
13.1 Les énoncés	403
13.2 Analyse des items	405
13.3 Des comportements de réussite ou d’échec	423
13.4 L’impact d’ <i>Apprenti Géomètre</i>	425
14 Un pré-test en première secondaire (2006–2007)	429
14.1 Les objectifs des pré- et post-tests	429
14.2 Les énoncés	429
14.3 Analyse des items	432
14.4 Des comportements de réussite ou d’échec	441
14.5 La population testée est-elle initialement homogène?	443
15 Un post-test en première secondaire (2006–2007).	445
15.1 Les énoncés	445
15.2 Analyse des items	448
15.3 Des comportements de réussite ou d’échec	465
15.4 L’impact d’ <i>Apprenti Géomètre</i>	465
VI Annexes	469
A Quelques outils de base	471
A.1 Les cadres de R. Douady	471

A.2	Les registres de R. Duval	472
A.3	Les niveaux de Van Hiele	472
A.4	La déconstruction dimensionnelle selon Duval	474
A.5	La croissance cognitive selon Tall	476
B	L'analyse statistique implicative	479
B.1	Présentation	479
B.2	La technique	480
B.3	L'analyse du pré-test de sixième primaire (2005–2006)	483
B.4	L'analyse du post-test de sixième primaire (2005–2006)	494
B.5	L'analyse du pré-test de 5 ^e primaire (2006–2007)	506
B.6	L'analyse du post-test de 5 ^e primaire (2006–2007)	522
B.7	L'analyse du pré-test de première secondaire (2006–2007)	531
B.8	L'analyse du post-test de première secondaire (2006–2007)	541
C	Index	553
D	Bibliographie	559
VII	Fiches didactiques pour le cycle 10-12 ans	
VIII	Fiches didactiques pour le cycle 12-14 ans	