# Troisième partie

# Construire et représenter

## Un aspect de la géométrie de 15 à 18 ans

*Ombres et lumière*

## Remerciements

Les activités présentées au chapitre 8 à la page suivante ont été testées dans différentes classes de quatrième année, de l'enseignement général et de l'enseignement technique. Nous remercions les professeurs qui nous ont accueillis dans leur classe : Serge Sabbatini, professeur de mathématique à l'Institut des Sacrés Cœurs à Waterloo, ainsi que Pascale Guissard et Marianne Bouton, professeurs de mathématique à l'Institut Saint Julien Parnasse à Auderghem. Leurs observations et leurs suggestions ont contribué à la mise au point de ces activités.

# 8

# Vers la géométrie affine de l'espace

## 1 Ombres au soleil et projection parallèle.

*De quoi s'agit-il ?*

En étudiant les ombres au soleil, établir leur lien avec les projections parallèles et la perspective parallèle.

*Enjeux*

Montrer que toute *projection parallèle*[1] d'un objet de l'espace sur un plan est une représentation de cet objet en *perspective parallèle*[1]. Ceci permet a posteriori de donner du sens aux règles appliquées lors de représentations en *perspective cavalière*[1], qui est un cas particulier de perspective parallèle.

***Matières couvertes.*** – *Représentations d'objets de l'espace en perspective parallèle.*

***Compétences.*** – *Maîtriser un outil de représentation pour aborder l'incidence et le parallélisme en géométrie de l'espace.*

*De quoi a-t-on besoin ?*

***Matériel.*** – Pour chaque groupe d'élèves :

Une vitre de format plus ou moins 18 × 24 cm, ou mieux, une plaque de plexiglas transparent. Dans la suite, celle-ci sera simplement appelée *la vitre*. Deux équerres à étagère. Une grande pince métallique clip (voir figure 3 à la page 265).

Une photocopie sur transparent de la figure fournie en annexe à la page 378, reproduite en petit à la figure 4 à la page 265. Ce transparent, qu'on découpera de manière à ce que le point $A$ coïncide avec le bord de la vitre, y sera fixé par du papier adhésif, en veillant à ce qu'il y adhère au mieux. Ces précautions ont pour but de limiter les erreurs de mesure.

Des photographies fournies en annexe aux pages 376 et 377, reproduites en petit dans les figures 1 à la page suivante et 2 à la page 265.

Un prisme droit en plexiglas ou en tiges, d'environ 15 cm de hauteur, à base triangulaire équilatérale.

Des feuilles de papier blanc grand format (A3 par exemple).

Des marqueurs sur transparents.

[1] Le sens précis de ce terme est repris dans le glossaire.

***Prérequis.*** – On accepte l'hypothèse que les rayons du soleil sont rectilignes.

Connaissance de notions élémentaires de perspective parallèle (voir le chapitre 7), en l'occurrence savoir que des segments parallèles et égaux sont représentés par des segments parallèles et égaux, mais que des segments égaux et non parallèles ne sont pas nécessairement représentés par des segments égaux.

Par deux points passe une seule droite. Elle appartient à une seule direction ou faisceau de droites parallèles.

Par trois points non alignés passe un seul plan. Il appartient à un seul faisceau de plans parallèles.

Le théorème de Thalès dans le plan.

***Local.*** – Si possible, disposer d'un local ensoleillé.

## 1.1 Ombres au soleil.

*Comment s'y prendre ?*

Nous nous proposons d'étudier les projections parallèles. Les ombres au soleil nous en donnent une bonne approche intuitive. Cependant, il n'est pas certain que les rayons du soleil soient perçus par les élèves comme étant parallèles. D'où la question suivante :

> Les photographies des figures 1 et 2 à la page suivante suggèrent des conclusions opposées. Dans la première, il semble évident que les rayons du soleil divergent radialement. L'autre au contraire nous invite à accepter l'idée que sur terre, les rayons nous parviennent plutôt parallèles. Qu'en est-il ?

*Fig. 1 : Coucher de soleil à La Panne (Belgique) 28 décembre 1998*

*Fig. 2 : Grand Central Station (New York), inondée par la lumière*

Après une courte discussion, un dispositif expérimental de facture simple (figure 3) est introduit pour guider la réflexion. Ceci devrait éviter que trop de temps soit consacré à cette activité préliminaire.

Les élèves sont répartis en petits groupes. Chaque groupe dispose du matériel décrit plus haut. Les élèves collent sur la vitre le transparent réalisé au moyen du modèle de la figure 4. Celle-ci est ensuite placée verticalement entre deux équerres et maintenue par une pince de bureau (figure 3). Il est important que la feuille de papier soit bien tendue sur la table exposée au soleil, et que feuille et vitre restent parfaitement immobiles pendant toute la manipulation.

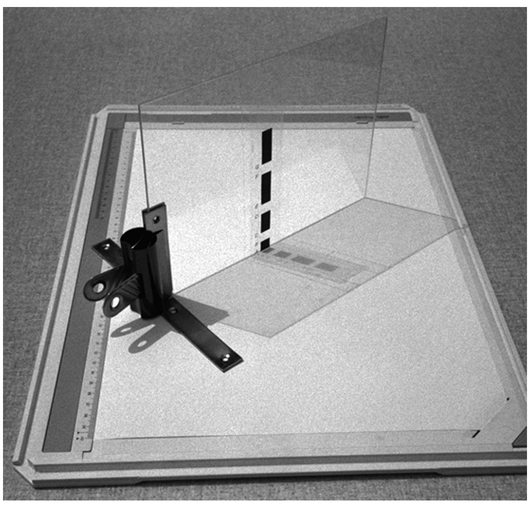


*Fig. 3*


*Fig. 4 : Modèle à photocopier sur transparent, fourni en vraie grandeur dans l'annexe*

On demande aux élèves de marquer sur la feuille de papier les extrémités des différentes ombres produites. Dans les conditions de l'expérience, peut-on « raisonnablement » considérer que les rayons du soleil sont parallèles ?

Quelques constatations s'imposent immédiatement :
les zones éclairées sont de longueurs égales ;
les ombres correspondent aux plages sombres du modèle.

Des ficelles peuvent être tendues, et fixées avec du papier adhésif, entre les points de la vitre et leurs ombres projetées. Cette situation géométrique est représentée par la figure 5.

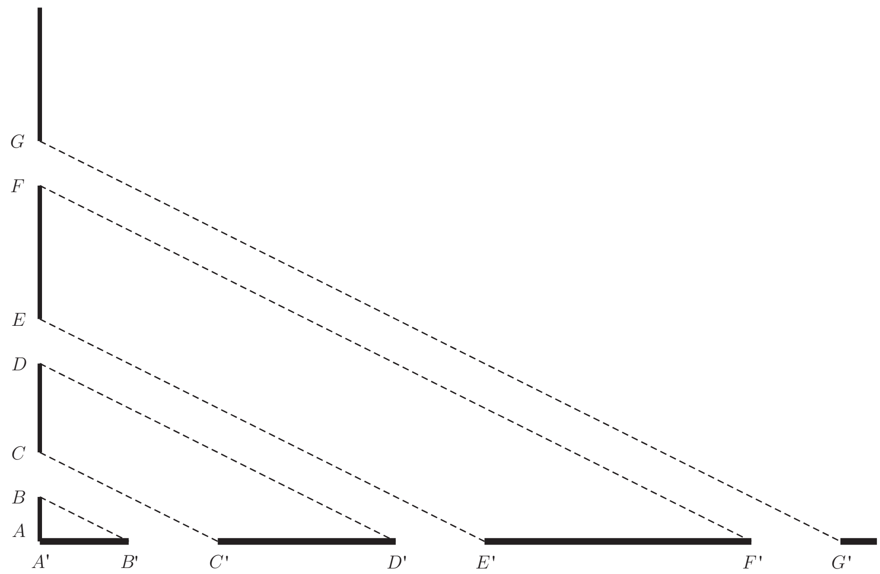



*Fig. 5 : Vue de profil du dispositif*

Sur la feuille où l'on a déjà dessiné les ombres $[A'B']$, $[C'D']$, $[E'F']$, ... on trace, à partir de $A'$ et dans une direction faisant un angle droit avec celle de l'ombre, un segment sur lequel on reporte les points $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, en respectant les mesures du modèle de la figure 4. On joint ensuite $BB'$, $CC'$, $DD'$, $EE'$, $FF'$ et $GG'$ et on vérifie le parallélisme avec les instruments.

Remarquons déjà que :

– l'image d'un point de la vitre est un point du plan sur lequel on projette ;
– l'image d'un segment est un segment ;
– l'image d'une droite est une droite (par prolongation) ;
– les droites joignant les points de l'espace à leur point image sont toutes parallèles. On les appelle *projetantes.*

Ceci nous fournit une perception intuitive d'une *projection parallèle*, qui envoie les points de l'espace sur un plan, dans une direction donnée. Nous définirons cette notion plus tard.

| Et s'il n'y a pas de soleil, peut-on utiliser une lampe ? |
|---|

Les élèves sont invités à transposer le schéma de la figure 5 à la page précédente pour le cas d'une source de lumière ponctuelle rapprochée, et à faire l'expérience si nécessaire.

*Échos des classes*

Certains élèves ne concevaient pas clairement que les ombres étaient dues à l'interruption des rayons du soleil par les zones opaques du modèle de la figure 4 à la page 265. Ce problème a surgi lorsqu'on leur a demandé de tirer des ficelles représentant les rayons lumineux. Une fois cette difficulté levée, l'illustration de l'expérience de l'ombre à la lampe par transposition du schéma de la figure 5 à la page précédente n'a pas posé de problème.

*Prolongements possibles*

***Les rayons du soleil sont-ils des droites parallèles ?*** – Dans les situations-problèmes que nous proposons, l'ombre au soleil est considérée comme une projection parallèle. Il est utile de se demander dans quelle mesure cette projection que nous offre la nature, et qui est attrayante sur le plan pédagogique, est bien effectivement parallèle. Nous montrons ci-après que deux rayons issus d'un même point du soleil et observés sur la terre, sont indiscernables de deux rayons parallèles. Nous montrons aussi que le phénomène de pénombre risque d'être un peu plus gênant pour les expérimentations dans les classes.

*Les rayons du soleil sont presque parallèles*

Il n'existe pas de source lumineuse ponctuelle. En particulier le soleil, bien que nous le voyions assez petit, est un astre énorme, et aucune source lumineuse usuelle n'est réduite à un point. Néanmoins, dans ce qui suit, nous allons considérer en pensée une source ponctuelle $S$, rayonnant dans toutes les directions (figure 6).

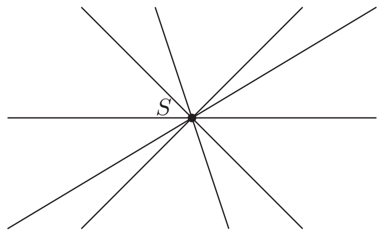



*Fig. 6*

Si on observe deux rayons quelconques d'une telle source dans une région $A$ proche de la source (figure 7), on n'a aucune peine à observer qu'ils ne sont pas parallèles.

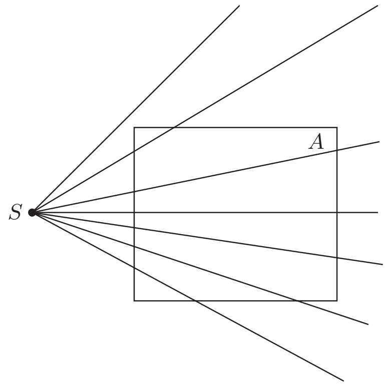



*Fig. 7*

Par contre les rayons observés dans une région située loin de la source ressemblent davantage à des parallèles (figure 8). Cet effet est d'autant plus marqué que la région $A$ est éloignée de la source $S$.

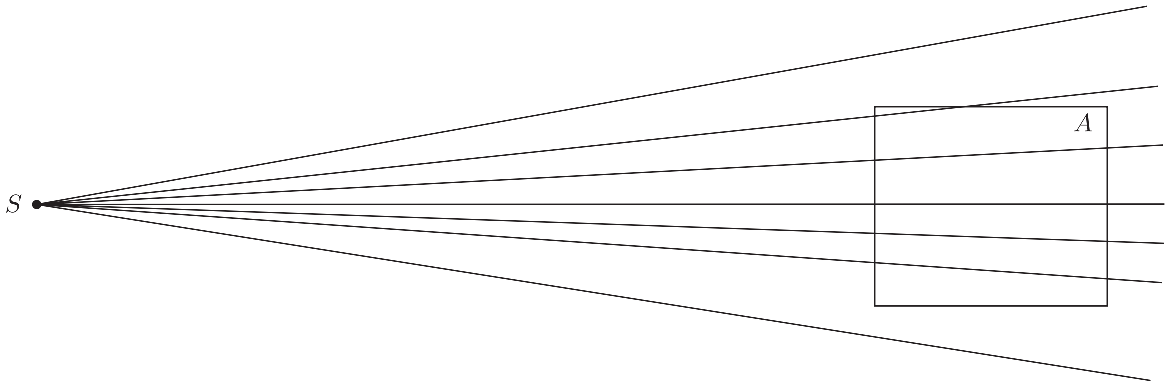



*Fig. 8*

Considérons, comme sur la figure 9, un rayon $x$ issu d'une source $S$ et passant par un point $P$ situé à une distance $d$ de $S$. Un deuxième rayon $y$ passe à 1 m de $P$. À 1 m à droite de $P$, l'écart (exprimé en mètres) entre les deux rayons vaut $1+\varepsilon$, avec $\varepsilon = \frac{1}{d}$.

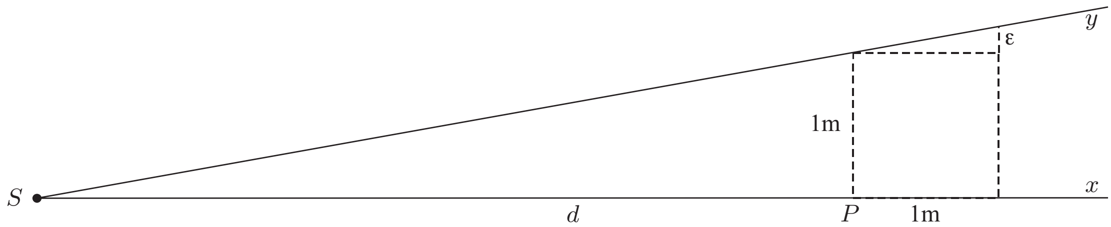



*Fig. 9*

La distance de la terre au soleil vaut 150 millions de kilomètres. Si donc nous considérons deux rayons issus *d'un même point de la surface du soleil*, nous observerons dans les conditions décrites ci-dessus un écart (exprimé en mètres) de

$$\varepsilon = \frac{1}{150.10^9} = 6,7.10^{-12}.$$

ou encore 6,7.$10^{-9}$ mm. À l'échelle humaine, un tel écart est absolument négligeable.

*Le phénomène de pénombre*

L'ombre au soleil portée par un objet sur un écran situé à moins de 50 cm de lui est assez nette. Par contre, les ombres projetées au-delà d'un mètre ont des contours assez flous. Et la zone de flou s'élargit au fur et à mesure qu'on écarte l'écran de l'objet. La zone en question est appelée *zone de pénombre*. Voyons à quoi elle est due.

Depuis la terre, nous voyons le soleil sous un angle $\alpha$ qui vaut environ $\frac{1}{2}$ degré. Pour la facilité de l'explication, nous avons exagéré l'amplitude de cet angle sur la figure 10.

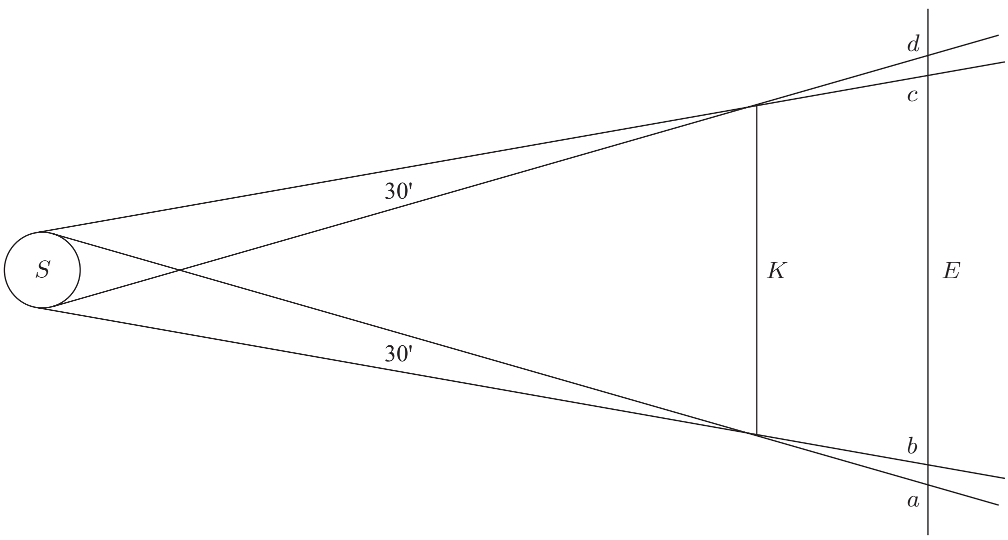



*Fig. 10*

Cette vue de profil montre l'ombre produite par un objet $K$ sur un écran $E$ proche de lui. Tous les points de l'écran situés en dessous de $a$ sont en plein soleil. Les points situés entre $a$ et $b$ ne reçoivent qu'une partie de la lumière du soleil, et ils en reçoivent d'autant moins qu'ils sont plus proches de $b$. Un observateur situé entre $a$ et $b$ n'apercevrait qu'une partie du disque solaire. La zone entre $a$ et $b$ est une zone de pénombre. Entre $b$ et $c$ l'ombre est totale. La zone entre $c$ et $d$ est une autre zone de pénombre. Et les points au dessus de $d$ sont en plein soleil.

Nous pouvons calculer la largeur $l$ de la zone de pénombre en fonction de la distance $d$ de l'écran à l'objet. La figure 11 montre que cette largeur vaut

$$l = d \times \operatorname{tg} 30' = d \times 0,009.$$

En particulier, cette largeur vaut

à 50 cm     0,45 cm,

et à 1m    0,9 cm.

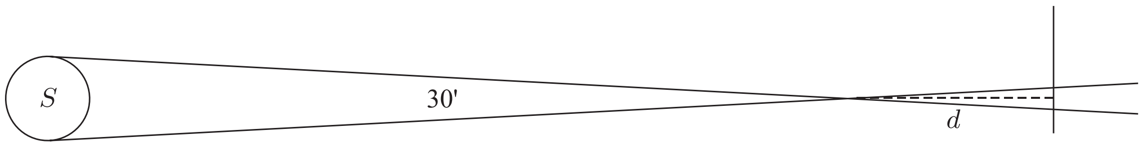



*Fig. 11*

Remarque. – Les deux questions traitées dans cette note pourraient être utilisées comme problèmes dans des classes.

***L'ombre à la lampe.*** – Elle sera développée dans l'activité 1 du chapitre 10 . Elle conduit à la perspective centrale, dont les peintres et mathématiciens du Quattrocento[2] ont établi les règles bien avant que n'intervienne une autre forme de représentation plane de l'espace, la *perspective cavalière.*

### Commentaires

La perspective cavalière est entrée dans la pratique à la fin du seizième siècle en Europe. Elle convient parfaitement pour réaliser des plans d'architecture classique, pour laquelle elle fait mieux percevoir les alignements, les symétries, le parallélisme, ... Elle donne une vue plus globale des objets puisque, comme nous le verrons dans l'activité 1 du chapitre 10, le point de vue de l'observateur est rejeté « très loin ». Elle aura également beaucoup d'applications dans l'art de la guerre, car il est plus facile d'y mesurer les objets, les distances. Dans ses *Cours de mathématique nécessaires à un homme de guerre* (1693), ouvrage cité par P. Comar [1996], Ozanam écrit :

« Pour représenter les fortifications, on se sert d'une perspective [...] qu'on appelle *Perspective Cavalière* et *Perspective Militaire*, qui suppose l'œil infiniment éloigné du Tableau, [...] et quoiqu'elle soit naturellement impossible, la force de la vue ne pouvant se porter à une distance infinie, elle ne laisse pas néanmoins de faire bon effet. »

Signalons encore que depuis l'Antiquité et notamment en Extrême-Orient (voir les estampes japonaises de l'activité 9 du chapitre 7), on trouve des utilisations de cette perspective, mais pas comme moyen global de représentation. Ainsi, une partie du « tableau » qui fait penser à une perspective cavalière peut avoisiner une projection orthogonale, par exemple. C'est surtout une manière empirique de suggérer le relief.

## 1.2 Ombre d'un prisme.

*Comment s'y prendre ?*

On observe l'ombre au soleil d'un prisme droit (figure 12 à la page suivante) déposé dans le coin d'une feuille de papier de format A3. Sur chaque arête verticale, on place un point à des hauteurs différentes, par exemple $G$ au milieu de $[AD]$, $H$ au tiers de $[BE]$ et $J$ au quart de $[CF]$.

Les élèves dessinent la base du prisme et l'ombre portée sur la feuille ; ils notent ensuite la position des ombres des points $G$, $H$ et $J$, afin de garder la trace de l'expérience les jours suivants pour le cas où il n'y aurait plus de soleil. Le professeur suscite les questions suivantes :

[2] Les Italiens n'utilisent pas la même terminologie que nous pour désigner les siècles. Ainsi *Quattrocento* signifie littéralement les années quatre cents (sous-entendu après l'an mil), c'est-à-dire en fait notre quinzième siècle.

> - Les ombres des arêtes parallèles sont-elles parallèles ?
> - Les ombres des arêtes sécantes sont-elles sécantes ?
> - Comment est l'ombre de $[DE]$ par rapport à $[AB]$, celle de $[EF]$ par rapport à $[BC]$, et celle de $[DF]$ par rapport à $[AC]$ ?

Les élèves mesurent les longueurs de toutes les arêtes du prisme et celles des segments $[AG]$, $[BH]$ et $[CJ]$, ainsi que les longueurs de leurs ombres. Ils comparent les longueurs des segments aux longueurs de leurs ombres.

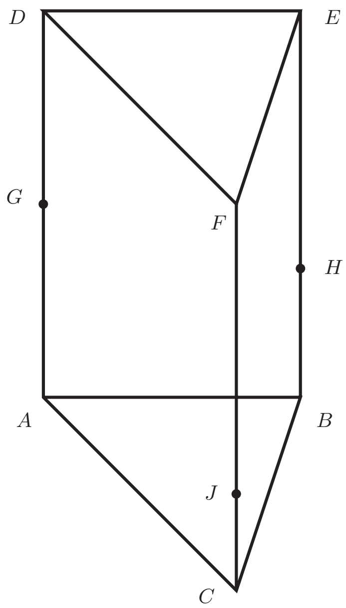



*Fig. 12 : Prisme à base triangulaire*

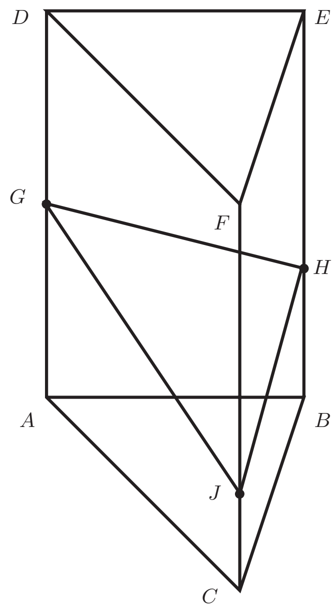



*Fig. 13 : Prisme tronqué*

> - Que constate-t-on pour
>   - $[DE]$, $[EF]$, $[FD]$ et leurs ombres ?
>   - $[AD]$, $[BE]$, $[CF]$ et leurs ombres ?
> - Où se trouve l'ombre de $G$ sur l'ombre de $[AD]$, celle de $H$ sur l'ombre de $[BE]$, et celle de $J$ sur l'ombre de $[CF]$ ?

Joignons $G$, $H$, $J$ sur les faces du prisme pour faire apparaître les segments $[GH]$, $[HJ]$ et $[JG]$ et le prisme tronqué $ABCJGH$ (figure 13).

> Que peut-on dire de l'ombre du triangle $GHJ$ ?

L'ombre du prisme est l'image de celui-ci sur le plan de la table par une projection parallèle à la direction des rayons du soleil. Les projetantes sont donc les rayons du soleil.

Nous souhaitons traduire les observations faites à partir du prisme en des énoncés mathématiques plus généraux. Les constatations effectuées par les élèves sont d'abord reportées dans la colonne de gauche d'un tableau à deux colonnes. Les élèves sont invités à les reformuler en termes de projections parallèles. Ces conjectures sont alors inscrites vis-à-vis dans la colonne de droite.

| Les élèves observent que : | Les élèves conjecturent que : |
|---|---|
| L'ombre d'une arête est un segment. | La projection parallèle d'un segment est un segment[3]. |
| Les arêtes $[AD]$, $[BE]$, $[CF]$ ont des ombres parallèles. | Des droites parallèles se projettent selon des droites parallèles[4]. |
| Les arêtes $[AD]$ et $[DF]$, $[AD]$ et $[DE]$, ... ont des ombres sécantes. | Des droites sécantes se projettent selon des droites sécantes[5]. |
| L'ombre de $[DE]$ est parallèle à $[AB]$ donc à $[DE]$. Il en va de même pour $[EF]$ et $[DF]$. | Des droites parallèles au plan de projection se projettent parallèlement à elles-mêmes. |
| Les segments $[DE]$, $[EF]$ et $[DF]$ ont la même longueur que leur ombre.<br>Les ombres des arêtes verticales sont égales entre elles, mais n'ont pas nécessairement la même longueur que les arêtes. | Des segments parallèles au plan de projection se projettent en vraie grandeur.<br>Des segments non parallèles au plan de projection se projettent sans conserver leur longueur, mais des segments égaux et parallèles se projettent suivant des segments égaux et parallèles. |
| L'ombre de $G$ est à la moitié de $[AD]$, celle de $H$ au tiers de $[BE]$ et celle de $J$ au quart de $[CF]$. | La projection parallèle conserve les rapports des segments dans une direction donnée. |

[3] La projection parallèle d'un segment peut aussi être un point.

[4] Deux droites parallèles peuvent aussi se projeter selon deux points, ou une seule droite.

[5] Deux droites sécantes peuvent aussi se projeter selon une seule droite.
Il ne nous paraît pas opportun de débattre ici des cas particuliers, mais il vaut mieux ne pas les éluder si les élèves les abordent spontanément.

La dernière conjecture est proposée aux élèves en activité de démonstration (Théorème de Thalès dans le plan). Les autres seront démontrées dans les activités 2 et 3.

***Exercices.*** – La perspective cavalière fournit une représentation plane des objets de l'espace. Montrons au travers d'exercices que les propriétés mises en évidence dans le tableau ci-dessus correspondent aux règles utilisées dans la représentation en perspective cavalière.

**1.** Quelle forme peut avoir l'ombre ou la projection parallèle

– d'un carré ?

– d'un rectangle ?

– d'un triangle équilatéral ?

– ...

**2.** Voici un cube en tiges vu du dessus et l'ombre d'une arête verticale. Dessiner l'ombre complète du cube.

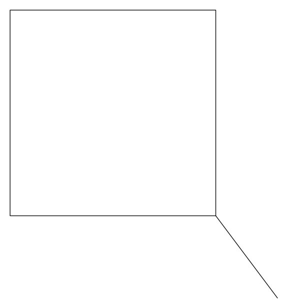


*Fig. 14*

**3.** Dessiner un cube en perspective cavalière.

**4.** Dessiner un prisme à base triangulaire en perspective cavalière.

**5.** Dessiner un tétraèdre en perspective cavalière.

**6.** Le tétraèdre $DA'C'B$ est inscrit dans un cube en perspective cavalière (figure 15). Démontrer qu'il est régulier.

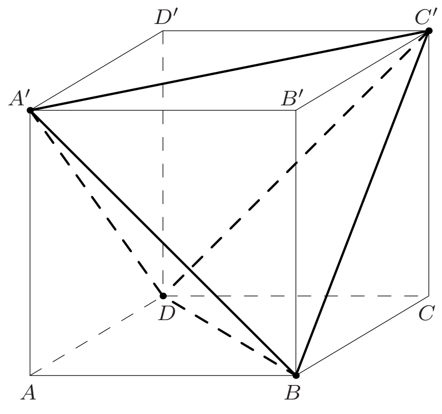



*Fig. 15*

**7.** Quatre points quelconques, non alignés, peuvent-ils toujours être les sommets de la représentation en perspective cavalière d'un tétraèdre régulier ? (V)[6]

**8.** Cinq points quelconques, non alignés, peuvent-ils toujours être les sommets de la représentation en perspective cavalière d'un cube ? (F)[6]

Toutes les réflexions suscitées par cette activité devraient convaincre les élèves du lien entre ombre au soleil, projection parallèle et perspective parallèle.

*Échos des classes*

La première classe où cette activité a été expérimentée a bénéficié d'une longue période de beau temps. Lors des expérimentations suivantes, les conditions météorologiques très instables nous ont incités à prendre les devants pour être sûrs de pouvoir travailler. Quelques jours avant le début de l'activité, nous avons montré aux élèves comment construire un prisme en tiges et nous leur avons demandé de profiter d'une éclaircie pour dessiner l'ombre de leur prisme sur une feuille A3. Le travail en classe a donc pu directement démarrer par l'exploitation des productions des élèves. Certains d'entre eux ont construit leur prisme avec beaucoup de précision, et leur travail était très soigné. D'autres ont rapidement constaté que la qualité médiocre de leur dessin rendait plus difficile la lecture des informations.

Pour l'élaboration du tableau de la page 272, il a fallu poser des questions assez précises pour obtenir les énoncés des observations. Une intervention assez active du professeur a été nécessaire pour dégager les deux premières conjectures. À partir de ces exemples, les élèves ont compris comment les mots du langage courant se transposent en termes mathématiques et les autres énoncés sont arrivés facilement.

## 2 Ombres au soleil et propriétés d'incidence.

*De quoi s'agit-il ?*

Étudier les propriétés d'incidence à partir de l'ombre d'un bâton.

*Enjeux*

***Matières couvertes.*** – *Propriétés d'incidence et caractérisations d'une droite et d'un plan.*

***Compétences.*** – *Rechercher et énoncer correctement des propriétés géométriques à partir de situations concrètes, apprendre à modéliser mathématiquement.*

*De quoi a-t-on besoin ?*

***Matériel.*** – Des plaques transparentes rigides et leurs supports comme décrits dans l'activité 1 .

De la ficelle de deux couleurs différentes.

Du papier adhésif.

[6] Les indications de réponse sont destinées au professeur.

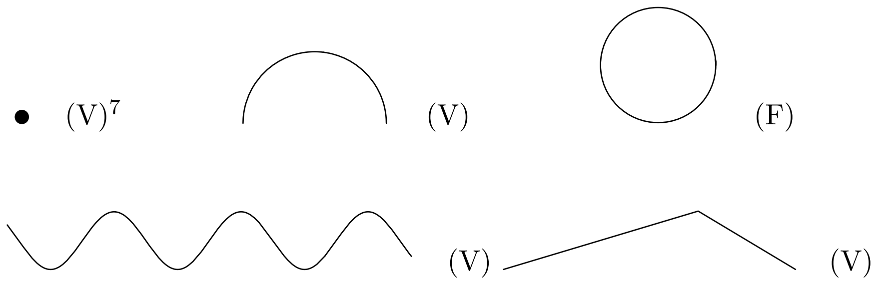
Des photocopies sur transparent de la feuille fournie en annexe à la page 380, reproduite en petit à la figure 16 à la page suivante.

***Prérequis.*** – Les mêmes que pour l'activité 1 et l'activité 1 elle-même.

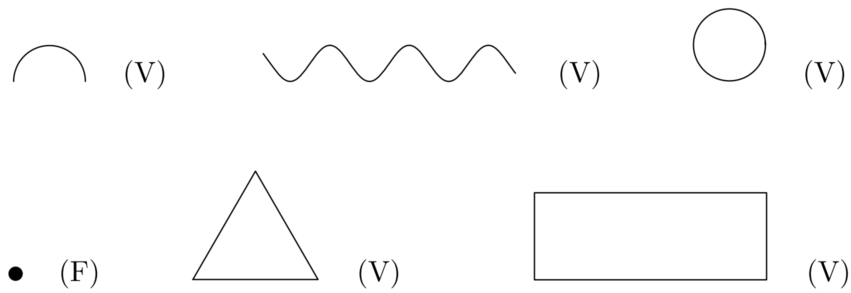
### 2.1 Propriétés d'incidence

*Comment s'y prendre ?*

Nous avons remarqué que l'ombre d'un « segment » sur une plaque était un « segment ». Qu'en est-il sur d'autres supports ? Quelles sont, parmi les figures suivantes, celles qui peuvent être l'ombre d'un bâton ?




De même, si l'ombre d'un objet est ________ , cet objet peut être




Toutes ces questions ont pour but de faire émerger l'idée que la réponse dépend du support sur lequel l'ombre est projetée (ballon, tôle ondulée, angle de deux murs, ...) et de la position de l'objet par rapport aux rayons solaires.

Après avoir mis en évidence la complexité de certaines situations, nous revenons à un cas très simple, celui de l'ombre d'un bâton sur un plan. Nous commençons par réaliser un transparent reproduisant la figure 16 à la page suivante.

On fournit à chaque groupe d'élèves un transparent et le matériel déjà utilisé lors de l'activité 1. Les élèves fixent le transparent sur la vitre et

[7] Les indications de réponse ne sont pas communiquées aux élèves.

collent en $B$ et $P$ des fils d'une même couleur ; aux autres points, ils collent deux fils d'une autre couleur (figure 17).


*Fig. 16 : Ce qui nous servira de bâton*

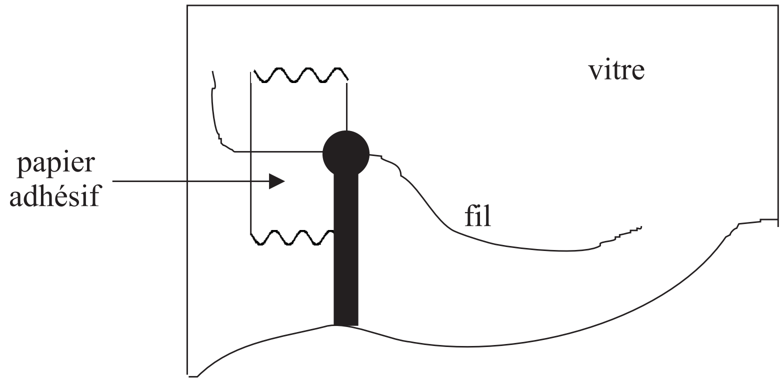



*Fig. 17 : Fixation des fils*

Chaque groupe d'élèves dispose le montage sur une table ensoleillée et tend chaque fil du point jusqu'à son ombre en le fixant au moyen de papier adhésif (figure 18).

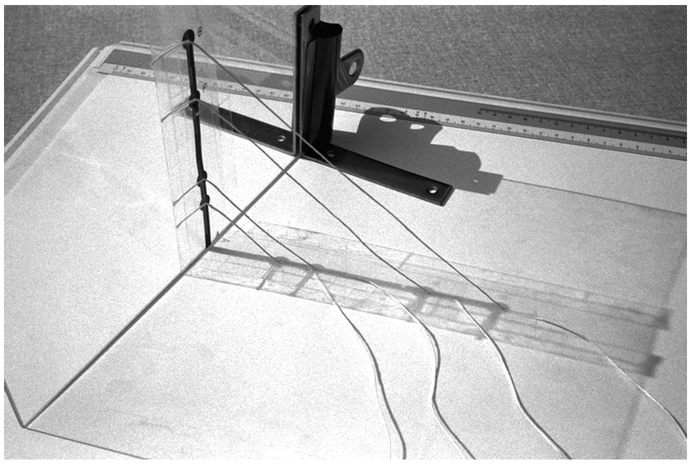


*Fig. 18*

S'il n'y a pas de soleil, des fils parallèles représentant les rayons du soleil pourront matérialiser la situation. L'activité 1 nous a montré que ces fils représentant les rayons du soleil doivent être parallèles.

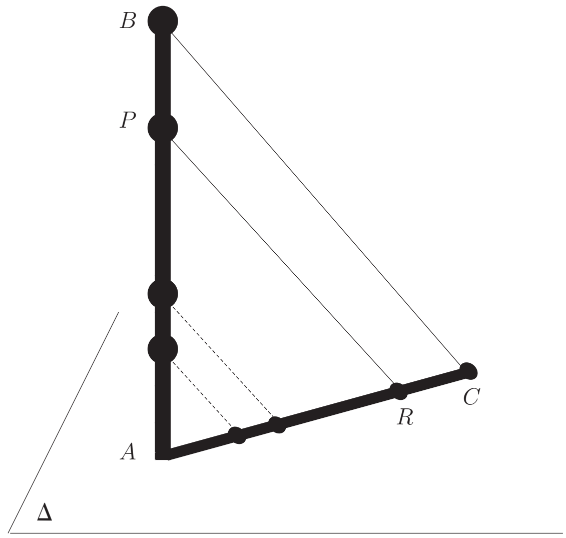



*Fig. 19 : Résultat de la manipulation*

La figure 19 fait apparaître deux plans : le plan $\Delta$ sur lequel l'ombre est projetée et le plan $ABC$. Elle fait également apparaître plusieurs droites concrétisées ici par le segment $[AB]$, son ombre $[AC]$ et les rayons solaires $BC$, $PR$, ...

On demande aux élèves d'analyser cette situation du point de vue des positions relatives des droites et des plans, en tentant de dégager les propriétés géométriques qui expliquent le fait que l'ombre du segment $[AB]$ est le segment $[AC]$, en particulier tout point de $[AB]$ a son ombre sur $[AC]$.

On peut guider les élèves en posant quelques questions :

| |
|---|
| Comment détermine-t-on l'ombre du point $B$, du point $P$ ?<br>Y a-t-il des points de $[AB]$ dont l'ombre n'est pas sur $[AC]$ ?<br>Pourquoi les rayons du soleil passant par les points de $[AB]$ sont-ils dans un même plan ? |

Le professeur divise le tableau en deux colonnes et note les suggestions des élèves dans la colonne de gauche. Ceci fait, il demande aux élèves de formuler en termes mathématiques les propriétés ainsi dégagées. Le résultat pourrait ressembler à ce qui suit.

| Faits observés sur le dispositif expérimental | Énoncés mathématiques |
|---|---|
| Un rayon solaire passe par $B$ et atteint le plan horizontal en un point $C$.<br><br>$C$ est l'ombre du point $B$. | Une droite non contenue dans un plan et qui a une intersection avec ce plan le perce en un point. |
| Tous les points de $[AB]$ ont leur ombre sur $[AC]$ et tout point de $[AC]$ est l'ombre d'un point de $[AB]$. | L'image d'un segment rectiligne $[AB]$ par une projection parallèle est un segment rectiligne $[AC]$. |
| Tous les points de l'ombre $[AC]$ sont dans le plan $\Delta$. | Une droite dont deux points sont dans un plan est entièrement contenue dans ce plan. |
| Par $P$, point de $[AB]$, passe un et un seul rayon solaire parallèle à $BC$, qui perce $\Delta$ en $R$ (ombre de $P$). | Par un point, on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée (axiome d'Euclide). |
| Ce rayon est contenu dans le plan $ABC$. En effet, il passe par le point $P$ de $ABC$ et est parallèle à la droite $BC$ de $ABC$. | Si, par un point d'un plan, on mène une parallèle à une droite du plan, cette parallèle est contenue dans le plan. |

Comme nous l'avons déjà dit, ce tableau doit être construit grâce à une discussion au sein de la classe. Le rôle du professeur consiste, dans un premier temps, à organiser les observations particulières, formulées dans le vocabulaire du monde observable. Ensuite, il veille à assurer une transition harmonieuse entre ces observations et les propriétés générales qu'elles soustendent, exprimées dans le langage des mathématiques.

Le professeur pose ensuite d'autres questions pour faire émerger les fondements de la géométrie de l'espace.

> Les deux plans $\Delta$ et $ABC$ déterminent-ils la droite de l'ombre $[AC]$ et pourquoi ?
> Peut-on imaginer d'autres manières de déterminer le plan $ABC$ ?

Les réponses fournies par les élèves sont des « énoncés mathématiques naïfs » (colonne de gauche). Le professeur veille à les généraliser de manière à obtenir des énoncés qui seront acceptés et formeront la base de l'étude qui va être développée (colonne de droite).

| Faits observés sur le dispositif expérimental | Énoncés mathématiques |
|---|---|
| Les deux plans $\Delta$ et $ABC$ sont sécants, puisqu'ils ont un point en commun, par exemple $A$. | Deux plans ayant un point en commun sont sécants[8]. |
| La droite $AC$ est contenue dans le plan $\Delta$ et dans le plan $ABC$. Elle est donc leur droite d'intersection. | Deux plans sécants se coupent suivant une droite. |
| Soit le plan $ABC$.<br>Ce plan<br>– contient entièrement les deux droites sécantes $AB$ et $AC$. On peut dire que le plan $ABC$ est déterminé par les deux droites sécantes $AB$ et $AC$ ;<br>– contient entièrement les deux droites parallèles $BC$ et $PR$. On peut dire que le plan est déterminé par les deux droites parallèles $BC$ et $PR$ ;<br>– est aussi déterminé par le point $A$ et la droite $BC$. | Par trois points non alignés passe un unique plan.<br>– Deux droites sécantes déterminent un plan.<br>– Deux droites parallèles déterminent un plan.<br>– Une droite et un point extérieur déterminent un plan. |

Nous disposons à présent des outils nécessaires pour définir la projection parallèle.

***Définition de la projection parallèle.*** – *Soit un plan et une droite non parallèle au plan. L'image d'un point de l'espace par la projection sur le plan donné parallèlement à la droite donnée est le point de percée dans le plan de l'unique parallèle à la droite donnée passant par le point.*

[8] Il est entendu que lorsqu'on dit ici deux droites ou deux plans, il s'agit d'objets mathématiques distincts (voir commentaires de l'activité 3).

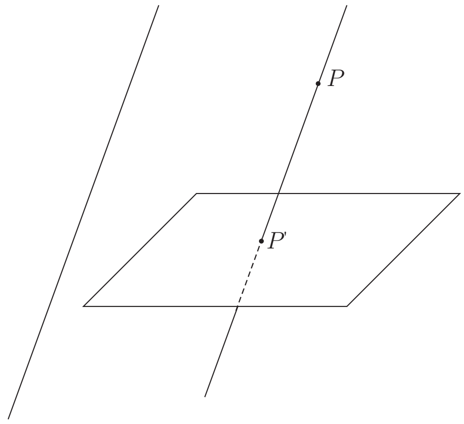



*Fig. 20 : $P'$ est l'image de $P$*

*L'image d'un objet de l'espace par cette même projection parallèle est l'ensemble des images des différents points de cet objet.*

***Exercices.*** – Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Une projection parallèle d'une droite sur un plan peut être

- une droite ; (V)[9]
- un segment ; (F)
- une demi-droite ; (F)
- un point. (V)

Une projection parallèle d'un plan sur un plan peut être

- un plan ; (V)
- un parallélogramme ; (F)
- un demi-plan ; (F)
- une droite ; (V)
- un point. (F)

*Échos des classes*

Les questions préliminaires concernant la forme de l'ombre d'un bâton, ou la forme de l'objet dont on voit l'ombre ont suscité de nombreuses discussions au sein de la classe et ont permis aux élèves les plus inventifs de donner libre cours à leur imagination.

Le rôle du professeur est primordial dans l'élaboration des deux tableaux aux pages 277 et 279. Il faut poser des questions précises pour obtenir les propriétés que l'on souhaite mettre en évidence. Les questions reprises dans le texte sont celles qui ont donné les meilleurs résultats dans les différentes classes où l'expérience a été menée, mais il se peut que le professeur doive en imaginer d'autres pour débloquer la situation dans sa classe.

Quelques problèmes, liés au passage du concret à l'abstrait, ont surgi lors de la formulation des énoncés mathématiques. Concevoir une droite infinie

[9] Les indications de réponse ne sont pas communiquées aux élèves.

comme extension d'un segment, et un plan infini à partir d'un rectangle ou d'un parallélogramme est loin d'être évident pour tous. Or, les élèves doivent avoir franchi cette étape pour comprendre et admettre que deux plans sécants se coupent suivant une droite (et non suivant un segment ou un point). D'autres difficultés sont apparues lors des exercices qui ont suivi la définition de la projection parallèle. Certains élèves ne pouvaient imaginer que les points situés sous le plan aient une projection parallèle sur celui-ci. Ils pensaient que la projection parallèle d'une droite qui perce le plan sur lequel on projette était une demi-droite.

*Prolongements possibles*

***Un célèbre théorème***

Reprenons l'expérience décrite dans l'activité 1 (figure 13 à la page 271). Sur la feuille de papier, notons $G'$, $H'$ et $J'$ les ombres respectives de $G$, $H$ et $J$. Dans le plan de la feuille, prolongeons $G'H'$ et $AB$, $H'J'$ et $BC$, $G'J'$ et $AC$. Que remarquons-nous ?

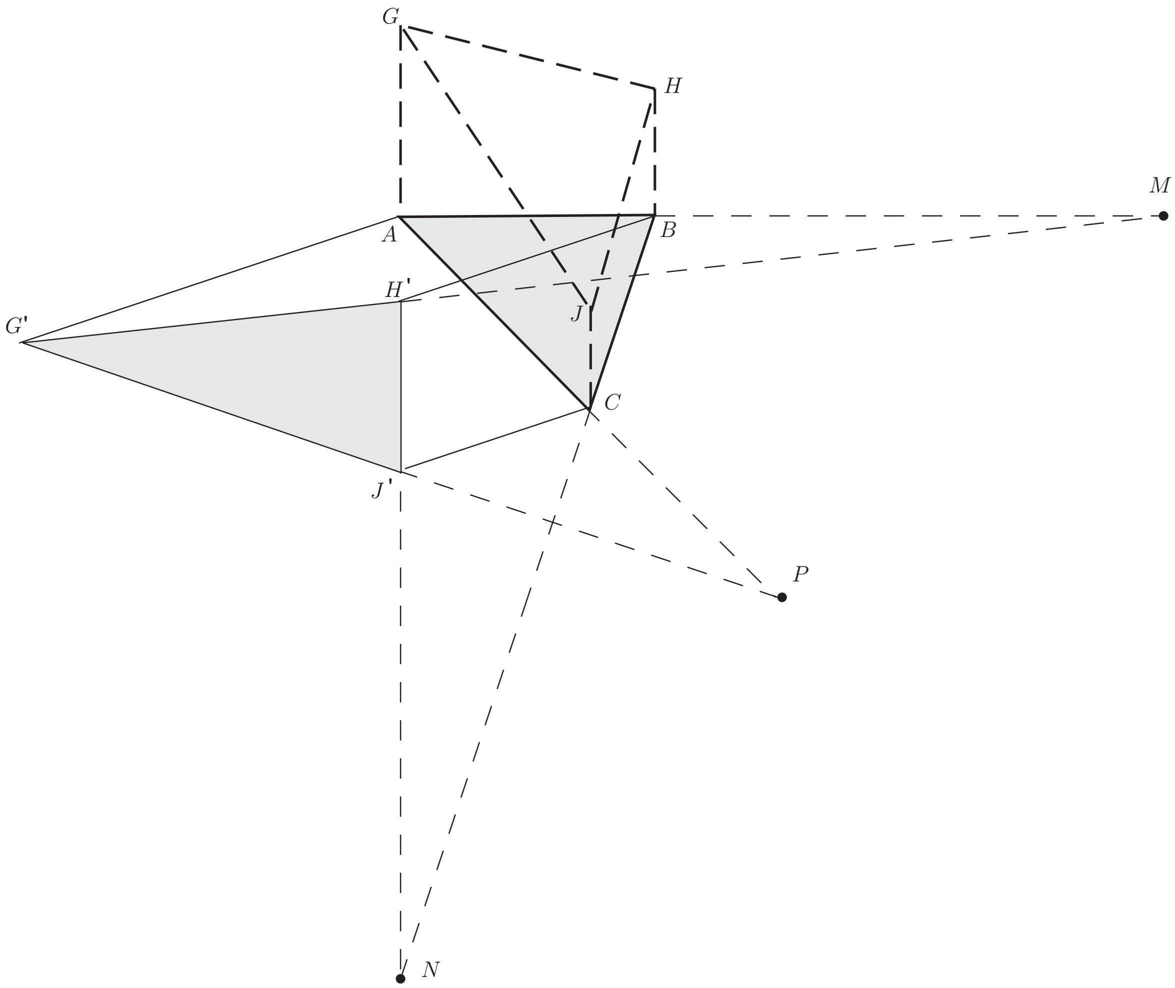



*Fig. 21 : $M$, $N$, $P$ alignés ?*

Après discussion, les élèves seront amenés à conjecturer que, aux erreurs expérimentales près, les droites $G'H'$ et $AB$, $H'J'$ et $BC$, $G'J'$ et $AC$ se coupent respectivement en trois points $M$, $N$ et $P$ qui sont alignés. Il reste maintenant à le démontrer et la conjecture deviendra un théorème qui s'énonce :

*Si deux triangles sont tels que leurs sommets sont deux à deux sur des droites parallèles, et que leurs côtés correspondants se coupent deux à deux, alors les points d'intersection sont des points alignés.*

Ce théorème est dû à Desargues. Sa démonstration est très simple si les triangles ne sont pas dans un même plan. Considérons les triangles $ABC$ et $GHJ$.

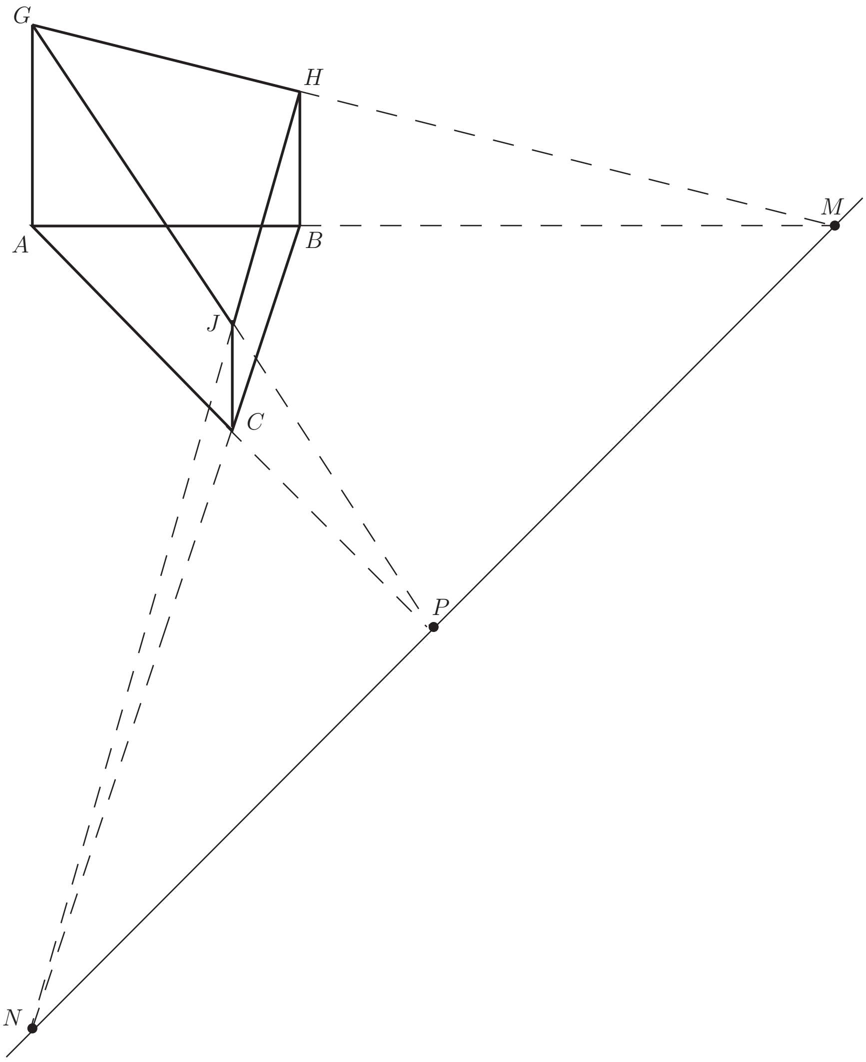



*Fig. 22 : Le théorème de Desargues dans l'espace*

Il faut amener les élèves à voir que les deux bases du prisme tronqué sont deux plans sécants. Dès lors, puisque les droites $AB$ et $GH$ sont coplanaires, elles se coupent en $M$. Il en va de même pour les droites $AC$ et $GJ$ qui se coupent en $P$ et les droites $BC$ et $HJ$ qui se coupent en

$N$. Ces points $M$, $N$ et $P$ sont communs aux deux plans sécants $GHJ$ et $ABC$. Par conséquent, ils sont sur leur droite d'intersection.

Si les triangles sont dans un même plan, comme les triangles $ABC$ et $G'H'J'$ de la figure 21 à la page 281, il est commode de considérer la situation plane comme l'image par une projection parallèle de la situation spatiale (figure 23).

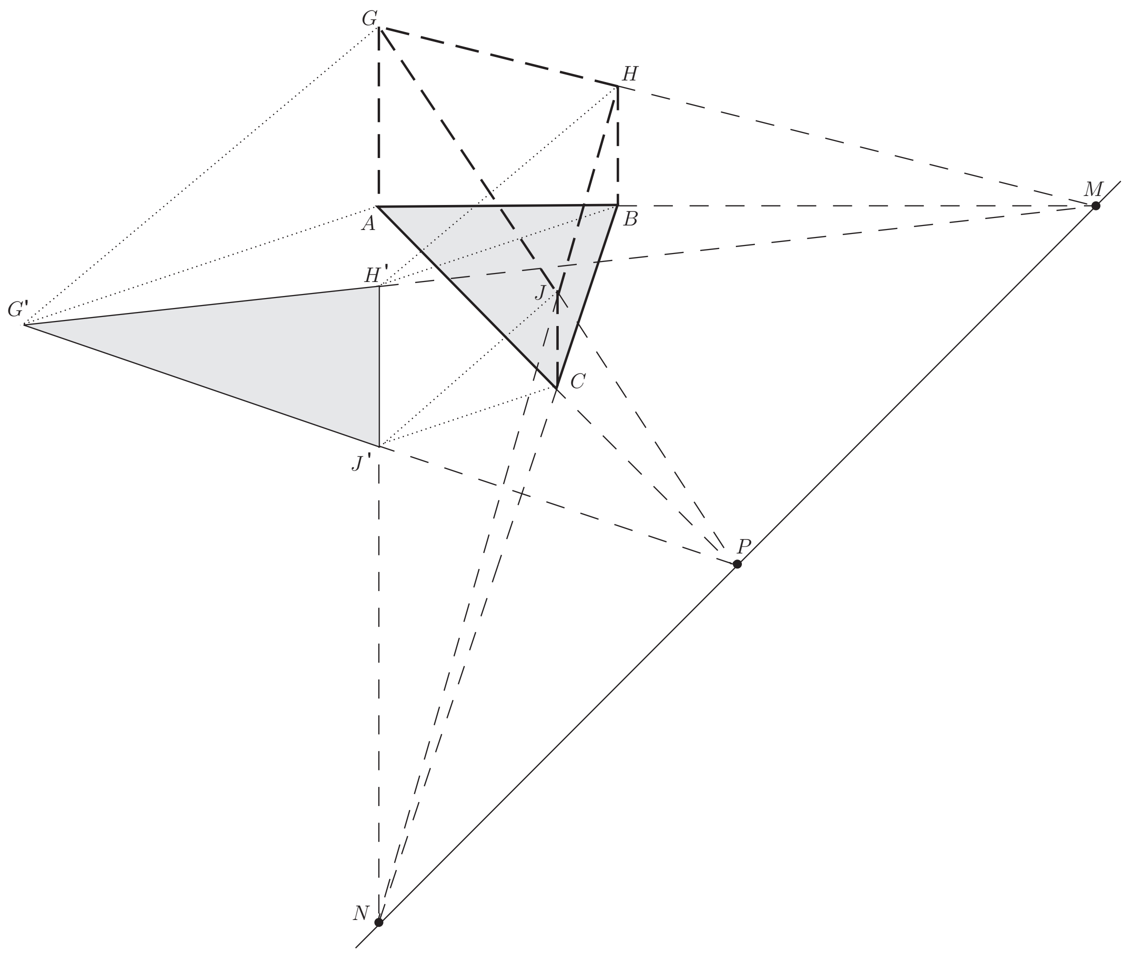



*Fig. 23 : Le théorème de Desargues dans le plan*

Le tableau suivant précise les images des points qui nous intéressent, par la projection parallèle dont les projetantes sont les rayons du soleil.

| | | |
|---|---|---|
| $G \longrightarrow G'$ | $H \longrightarrow H'$ | $J \longrightarrow J'$ |
| $A \longrightarrow A$ | $B \longrightarrow B$ | $C \longrightarrow C$ |
| $M \longrightarrow M$ | $N \longrightarrow N$ | $P \longrightarrow P$ |

Comme le plan $ABC$ est le plan de projection de la projection parallèle considérée, celle-ci envoie chacun des trois points $M$, $N$ et $P$ sur lui-même. Rappelons que toute projection parallèle conserve les incidences. Le point $M$, point d'intersection des droites $AB$ et $GH$ est donc aussi le point d'intersection des droites $AB$ et $G'H'$ dans le plan $ABC$. Le théorème de Desargues est ainsi établi, puisque ce raisonnement peut être répété pour les points $N$ et $P$.

### Commentaires

Il existe un autre théorème, parent de celui-ci et dû également à Desargues, dans lequel les sommets des deux triangles sont deux à deux situés sur trois sécantes issues d'un même point.

Le mathématicien français Girard Desargues (1593 – 1662) est avec son contemporain Blaise Pascal (1623 – 1662), un des précurseurs de la géométrie projective.

## 2.2 Sections planes et points de percée

*Comment s'y prendre ?*

Construire la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan $\Pi$ déterminé par $M$, $N$ et $P$ (figure 24). Le point $M$ est sur l'arête $[CD]$, $N$ sur $[AD]$ et $P$ sur $[BD]$.

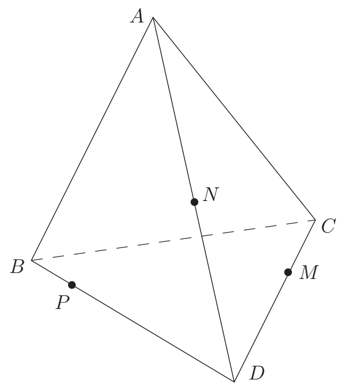



*Fig. 24 : Section de tétraèdre*

La section de tétraèdre ci-dessus est relativement simple à réaliser. Mais, pour familiariser les élèves avec le fonctionnement des propriétés d'incidence et pour leur en faire découvrir la véritable portée, on leur propose toute une série de problèmes de construction. On fixe le plan de section soit par trois points, soit par un point et une droite ; ces données permettent de déterminer univoquement la section.

Lors d'un premier contact avec ce type de problème, la plupart des élèves sont désarmés et ne savent par où commencer : selon leurs dires, *ils n'y voient rien !*

L'expérience montre que le support d'un tableau d'incidence, tel que nous le décrivons ci-dessous, permet aux élèves les plus « récalcitrants » d'arriver à réaliser la construction. Après en avoir effectué quelques-unes, ils finissent en général par y voir plus clair et se dégagent progressivement de cette « méthode mécanique ».

Prenons par exemple le problème qui consiste à construire la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan $\Pi$ déterminé par $M$, $N$ et $P$ (figure 25). Le point $M$ est sur $[AB]$, $N$ sur $[AC]$ et $P$ sur $[CD]$.

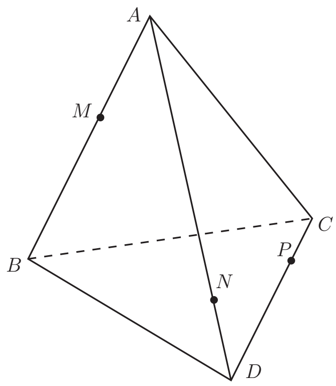



*Fig. 25 : Section de tétraèdre*

Le point $M$ est sur $[AB]$ et, par conséquent, $M$ est dans le plan $ABC$ et dans le plan $ABD$. Il est important de faire remarquer que tout point sur une arête appartient à deux faces. De la même manière, $N$ est dans les plans $ABD$ et $ACD$ et $P$ dans les plans $ACD$ et $BCD$.

On note ces renseignements dans le tableau ci-dessous, où on perçoit alors clairement que les points $M$ et $N$ sont dans une même face $ABD$. Remarquons également que, par l'énoncé du problème posé, ils sont également dans le plan de section $\Pi$. Donc $M$ et $N$ déterminent l'intersection de la face $ABD$ et du plan $\Pi$.

| $\Pi$ | Arrière $ABC$ | Gauche $ABD$ | Droite $ACD$ | Base $BCD$ |
|---|---|---|---|---|
| $M$<br>$N$<br>$P$ | $M$ | $M$<br>$N$ | <br>$N$<br>$P$ | <br><br>$P$ |

Dans $ABD$, parmi les droites dessinées, la droite $MN$ ne peut couper que les droites $AB$, $AD$ ou $BD$. Elle coupe $AB$ en $M$, $AD$ en $N$ et $BD$ en $R$ (voir figure 26 à la page suivante), qu'on reporte dans le tableau (faces $ABD$ et $BCD$).

C'est l'occasion d'attirer l'attention des élèves sur le fait que, dans la représentation plane, les droites $MN$ et $BC$ semblent se couper, alors qu'en fait, ce sont des droites gauches, c'est-à-dire des droites non coplanaires et donc disjointes.

Le tableau montre aussi que $N$ et $P$ appartiennent tous deux à la face $ACD$ et au plan $\Pi$. Donc $NP$ est l'intersection de $\Pi$ avec cette face. La droite $NP$ coupe $AD$ en $N$, $CD$ en $P$ et $AC$ en $S$ (voir figure 27), qu'on reporte dans le tableau (faces $ABC$ et $ACD$).

On peut terminer la construction de la section en utilisant $MS$ dans $ABC$, ou $PR$ dans $BCD$. Quelle que soit la paire de points choisie, $MS$ ou $PR$, on détermine le même point $T$ sur l'arête $BC$ (voir figure 28).

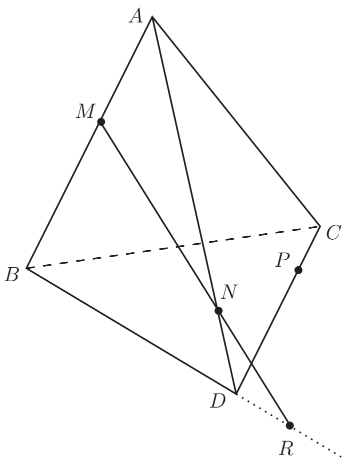



*Fig. 26 : Point R*

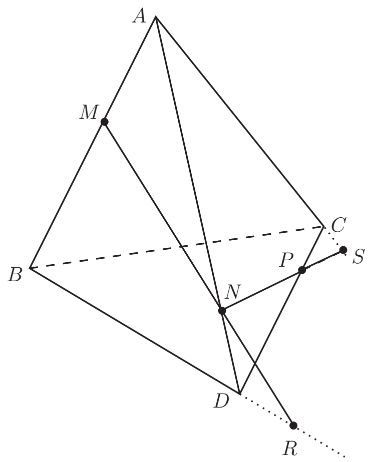



*Fig. 27 : Point S*

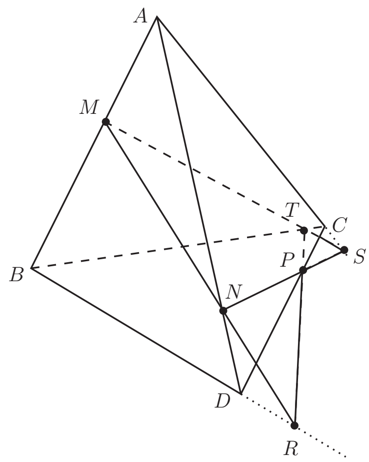



*Fig. 28 : Point T*

Dans $\Pi$, on repère :

| $\Pi$ | Arrière $ABC$ | Gauche $ABD$ | Droite $ACD$ | Base $BCD$ |
|---|---|---|---|---|
| $M$ | $M$ | $M$ | | |
| $N$ | | $N$ | $N$ | |
| $P$ | | | $P$ | $P$ |
| $R$ | | $R$ | | $R$ |
| $S$ | $S$ | | $S$ | |
| $T$ | $T$ | | | $T$ |

Cette méthode, ou d'autres qui s'en rapprochent, a été utilisée par plusieurs enseignants du secondaire pendant des années, dans des classes de différents niveaux, y compris dans l'enseignement technique. Chaque fois, la plupart des élèves, qui au départ étaient rebutés par les problèmes de section, ont bien progressé dans la compréhension de la représentation plane de l'espace.

Comme cette méthode leur permet de résoudre l'exercice, ils éprouvent la satisfaction d'avoir surmonté une difficulté, ils ont envie de s'attaquer à d'autres ; ainsi, petit à petit, *ils y voient plus clair* et se dégagent d'eux-mêmes de l'utilisation du tableau d'incidence.

Toutefois, cette technique n'est pas une panacée : certains élèves ne parviennent jamais à construire une section sans l'aide du tableau.

***Exercices.*** – Les énoncés de ces exercices sont repris en annexe aux pages 381 à 386 sous forme de fiches photocopiables pour les élèves.

**1.** Construire la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan $\Pi$, dans les cas suivants (figure 29) :

1. $\Pi$ est le plan déterminé par $d$ et $P$ où $d \subset ABC$ et $P \in ACD$.
2. $\Pi$ est le plan déterminé par $d$ et $P$ où $d \subset ABD$ et $P \in ACD$.

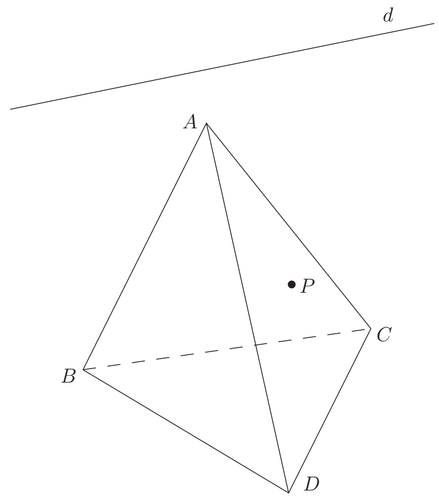



*Fig. 29*

**2.** Construire le point de percée de la droite $MN$ dans le plan de la face $BCD$. Le point $M$ est sur l'arête $[AB]$ et $N$ est dans le plan $ACD$ (figure 30). Suggestion : utiliser la section du tétraèdre par un plan auxiliaire contenant la droite $MN$.

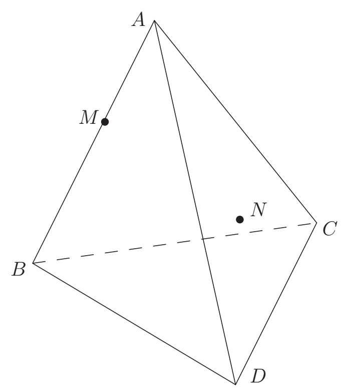



*Fig. 30*

**3.** Construire le point de percée de la droite $MN$ dans le plan de la face $ACD$. Le point $M$ est dans le plan $ABD$ et $N$ est dans le plan $BCD$ (figure 31 à la page suivante).

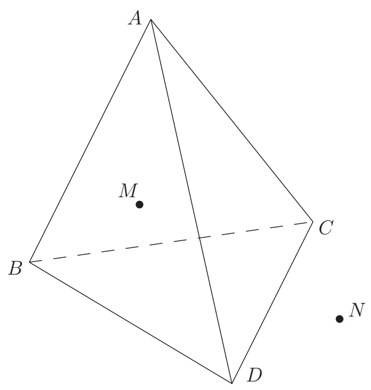



*Fig. 31*

**4.** Construire la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan $\Pi$ déterminé par les trois points $M$, $N$ et $P$. $M$ appartient au plan de la face $BCD$, $N$, au plan de la face $ACD$ et $P$ à l'arête $[CD]$ (figure 32).

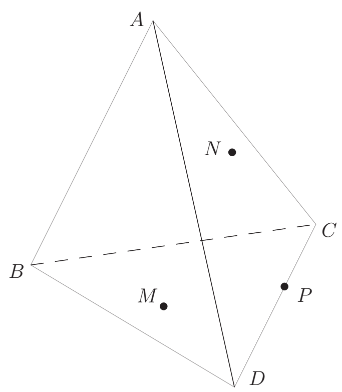



*Fig. 32*

**5.** Construire la section de la pyramide à base carrée $SABCD$ par le plan $MRN$ (figure 33).

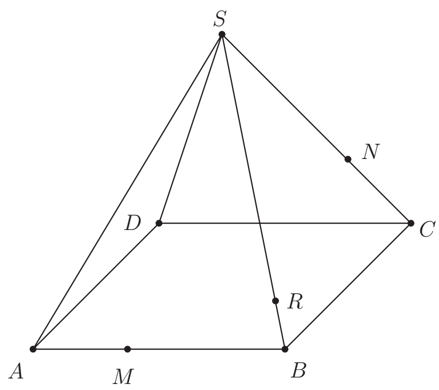



*Fig. 33*

**6.** Dans chacun des cas suivants, $PRST$ est-il une section du tétraèdre $ABCD$ par un plan (figures 34, 35 et 36 à la page suivante) ?

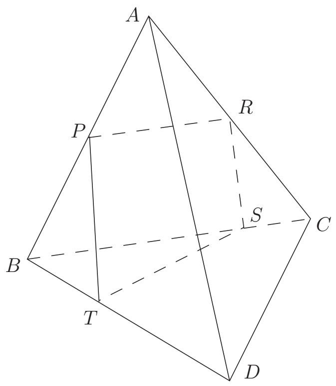



*Fig. 34 : Premier cas*

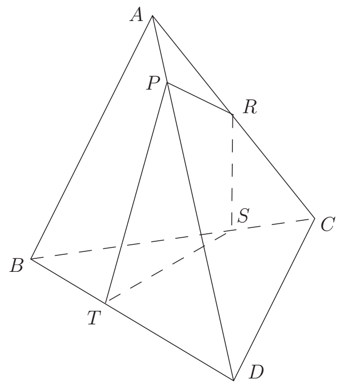



*Fig. 35 : Deuxième cas*

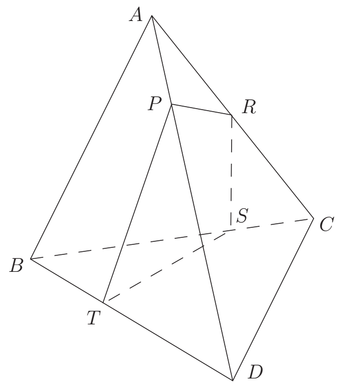



*Fig. 36 : Troisième cas*

*Échos des classes*

Après une prise de contact un peu difficile, tous les élèves ont manifesté un intérêt certain pour ce type d'exercices, même des élèves qui avaient perdu toute motivation pour le cours de mathématique à cause de leurs résultats catastrophiques. Cette attitude est sans doute due au fait que la résolution de ces problèmes ne nécessite ni calcul, ni formule, ni prérequis sauf les propriétés établies dans le début de cette séquence d'apprentissage. Le même intérêt a été rencontré dans une classe de l'enseignement technique réputée « faible en mathématiques ». Le recours au tableau d'incidence s'est révélé une aide très précieuse pour les élèves.

Les erreurs et les difficultés les plus souvent rencontrées sont les suivantes :

– Certains élèves utilisent au cours de la construction un point d'intersection apparent, correspondant en fait au croisement de deux droites gauches.
– Ils ne conçoivent pas clairement que la section dans une face du tétraèdre doit être un segment dont les extrémités sont sur les arêtes qui bordent cette face. Ainsi, ils ne pensent pas à prolonger jusqu'aux bords de la face un segment appartenant à la section mais limité par un point donné à l'intérieur de celle-ci (par exemple le segment $NP$ de la figure 32 à la page précédente).
– Tout en sachant que, dans certains cas, il faut prolonger des arêtes pour obtenir des points « utiles », ils ne voient pas toujours clairement quelle arête utiliser.

Les élèves ont observé avec intérêt que certaines constructions pouvaient être menées à bien par différents cheminements conduisant à la même solution. À cet égard, les exercices de construction de points de percée présentent l'intérêt supplémentaire de montrer que le choix arbitraire du plan auxiliaire n'a pas d'influence sur le résultat. Ainsi, dans l'exercice 3, les élèves ont utilisé indifféremment l'un des plans $AMN$ ou $BMN$, plus rarement $CMN$ ou $DMN$. L'un d'entre eux a même imaginé de choisir un plan $PMN$, où $P$ était un point tout à fait quelconque du plan $ABD$ ; il est parvenu au bout de sa construction malgré cette difficulté supplémentaire.

À la fin de cette séquence d'apprentissage, la méthode de construction d'une section plane était comprise par tous les élèves. Ils étaient tous capables de refaire un exercice vu en classe et presque tous pouvaient mener à bien une construction nouvelle. Cependant, la rédaction de leur raisonnement en justifiant les différentes étapes est restée un problème pour certains, malgré le temps passé en classe à exercer cette activité et à corriger les productions individuelles.

## 3 Parallélisme

*De quoi s'agit-il ?*

Par un jeu d'ombres et de lumière, étudier le parallélisme dans l'espace.

*Enjeux*

Étudier les propriétés du parallélisme dans l'espace et les sections planes dans les cubes.

***Matières couvertes***

*Propriétés du parallélisme de deux droites, de deux plans, d'une droite et d'un plan.*

*Critère de parallélisme d'une droite et d'un plan.*

*Critère de parallélisme de deux plans.*

***Compétences.*** – *Déterminer un point de percée et construire une section plane en justifiant les différentes étapes.* Maîtriser les notions de *condition nécessaire* et de *condition suffisante*, *pratiquer la démonstration par l'absurde.*

*De quoi a-t-on besoin ?*

***Matériel.*** Des plaques de verre ou de plexiglas et leur support (matériel décrit à l'activité 1). Il en faut au moins deux.

Du fil et du papier adhésif.

Des transparents.

Un cube de plexiglas transparent dont une face est absente et dont les autres faces sont recouvertes de papier calque.

Un masque percé d'une fente rectiligne de 0.1 mm de large (ce matériel peut être réalisé par photocopie sur transparent du modèle fourni en annexe à la page 387).

Un rétroprojecteur.

***Prérequis.*** – Préciser le sens exact du mot « parallèle ». On peut faire les mises au point nécessaires en partant d'observations sur les arêtes et les faces d'un cube.

DROITES PARALLÈLES : Deux droites coplanaires distinctes sont soit sécantes, soit parallèles. Lorsqu'elles sont sécantes, elles ont un seul point d'intersection. Lorsqu'elles sont parallèles, elles n'ont aucun point d'intersection ; on dit aussi qu'elles sont disjointes.

PLANS PARALLÈLES : Deux plans distincts sont soit sécants, soit parallèles. Lorsqu'ils sont sécants, ils ont une droite d'intersection.
Lorsqu'ils sont parallèles, ils n'ont aucun point d'intersection ; on dit aussi qu'ils sont disjoints.

DROITE PARALLÈLE À UN PLAN : Une droite est parallèle à un plan si elle ne perce pas ce plan ou si elle est contenue dans ce plan.

## 3.1 Ombres d'un segment
## Critère de parallélisme d'une droite et d'un plan

*Comment s'y prendre ?*

La première question est celle-ci :

> L'ombre d'un segment peut-elle être parallèle à ce segment, et si oui dans quel(s) cas ?

En manipulant une règle ou un crayon, les élèves arrivent à distinguer deux cas. Le segment peut être placé de telle manière que la droite qui le prolonge soit

– oblique et perce le plan de projection ;

– parallèle au plan de projection.

Le segment est parallèle à son ombre dans le deuxième cas. Pour illustrer et analyser chacune de ces deux situations, collons sur deux vitres des transparents réalisés suivant les figures 37 et 38 (en annexe page 388 ):

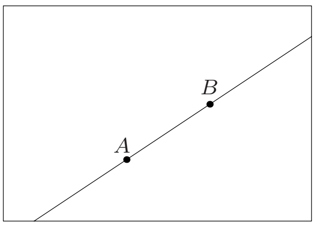



*Fig. 37*

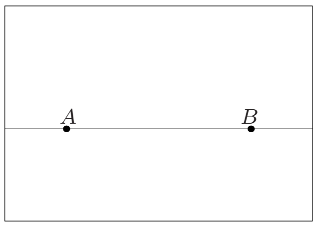



*Fig. 38*

Des fils sont tendus et fixés avec du papier adhésif entre les points $A$ et $B$ et leurs ombres respectives. S'il n'y a pas de soleil, des fils parallèles représentant les rayons du soleil peuvent matérialiser la situation.

Dans un premier temps, observons et analysons ces deux situations à partir de nos modèles dans l'espace. Puis demandons aux élèves de les représenter sur une feuille de papier et d'expliquer en détail chacun des deux cas. Ce premier travail a pour but de préparer les élèves à aborder un raisonnement par l'absurde.

1. Si le segment $[AB]$ est sur une droite oblique qui perce le plan $\Delta$ en $P$(figure 39), la droite $A'B'$ de l'ombre coupe la droite $AB$ en $P$.

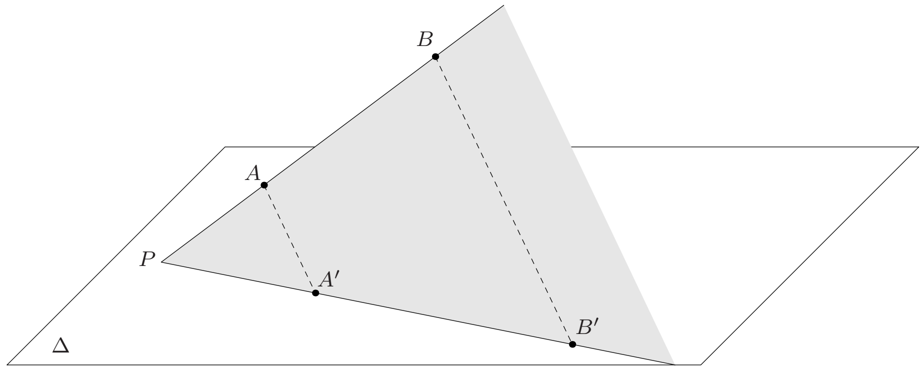



*Fig. 39*

En effet, le plan Π déterminé par la droite $AB$ et la direction des rayons du soleil ($AA'$ ou $BB'$) coupe le plan Δ suivant la droite de l'ombre $A'B'$.

Le point $P$ appartient au plan Π et au plan Δ, donc $P$ appartient à leur intersection $A'B'$.

2. Si le segment $[AB]$ est sur une droite parallèle au plan Δ (figure 40), les droites $AB$ et $A'B'$ ne peuvent se couper : leur point d'intersection serait commun à la droite $AB$ et au plan Δ, ce qui contredit le parallélisme de la droite $AB$ et du plan Δ. Donc, le segment et son ombre sont sur des droites parallèles.

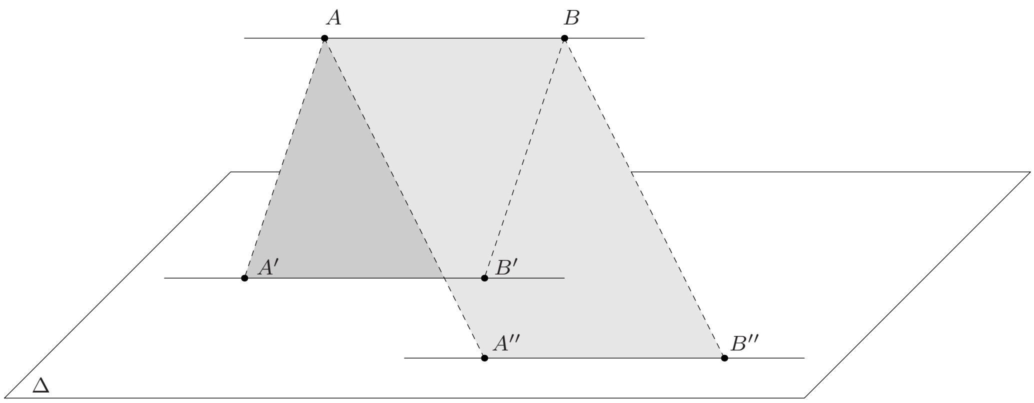



*Fig. 40*

Le quadrilatère $ABB'A'$ de la figure 40 est un parallélogramme, puisque $AB$ est parallèle à son ombre $A'B'$ et que les rayons du soleil $AA'$ et $BB'$ sont parallèles. La longueur de $AB$ est donc égale à celle de $A'B'$. Ainsi, nous avons démontré deux des conjectures énoncées dans l'activité 1 :

- Les droites parallèles au plan de projection se projettent parallèlement à elles-mêmes.
- Les segments parallèles au plan de projection se projettent en vraie grandeur.

À mesure que le soleil parcourt le ciel, l'ombre de $AB$ se déplace sur le plan $\Delta$, tout en restant parallèle à $AB$.

De cette observation, il résulte que si une droite $d$ extérieure à un plan $\Delta$ est parallèle à ce plan, celui-ci contient une infinité de droites parallèles à $d$, chacune est l'intersection de $\Delta$ avec un plan contenant $d$.

Énonçons cette propriété sous la forme suivante.

***1.*** *Si une droite extérieure à un plan est parallèle à ce plan, tout plan contenant la droite et sécant avec le premier plan, coupe celui-ci suivant une parallèle à la droite.*

Démontrons cela. Si l'élève a compris que deux situations seulement sont possibles et qu'elles s'excluent mutuellement, il a déjà franchi un cap important dans la compréhension de la *démonstration par l'absurde.*

Soit $d$ une droite parallèle à un plan $\Delta$, et $d'$ l'intersection de $\Delta$ avec un plan $\Pi$ contenant $d$. Comme on ne voit pas clairement comment démontrer que les droites $d$ et $d'$ sont parallèles, on en vient à se demander si elles ne pourraient pas être sécantes ; mais si on imagine $d$ et $d'$ sécantes, on se trouve forcément dans l'autre situation, celle où la droite $d$ perce le plan $\Delta$. Ce qui contredit évidemment le fait que la droite $d$ est parallèle au plan $\Delta$. Donc, puisqu'il n'est pas possible que $d$ et $d'$ soient sécantes, c'est qu'elles sont forcément parallèles (comme elles sont coplanaires, il est exclu qu'elles soient gauches).

Il est important de conserver dans la classe les modèles à trois dimensions mis en place dès le début de cette activité. Les élèves peuvent les regarder chaque fois qu'ils en éprouvent le besoin. Le va-et-vient permanent entre l'observation des modèles et la formulation des idées soutient efficacement le raisonnement des élèves tout au long de leur démarche intellectuelle et amène de manière aussi naturelle que possible le principe de la démonstration par l'absurde.

Si la démonstration de la propriété semble maintenant évidente aux élèves, il nous reste cependant une dernière étape importante à franchir : rédiger cette démonstration sous une forme plus théorique. Certains élèves seront sans doute déconcertés, ou même rebutés, par cette dernière forme de la démonstration. Nous pensons néanmoins qu'il convient de les y amener à ce moment, en la présentant comme une synthèse précise de toute la discussion qui a précédé. Bien sûr, nous sommes conscients de ce qu'il s'agit là d'une première approche d'une démonstration de ce type. Celle-ci pourrait être présentée comme suit :
Soit un plan $\Pi$ contenant une droite $d$ et sécant avec un plan $\Delta$. La droite $d'$ d'intersection de $\Pi$ avec $\Delta$ est parallèle à $d$.


*Fig. 41*

En effet, si $d$ et $d'$ n'étaient pas parallèles, elles seraient sécantes dans $\Pi$ et leur point d'intersection $I$ serait commun à $d$ et $\Delta$. Ceci est impossible dans l'hypothèse où $d$ est parallèle à $\Delta$ ; donc $d'$ est parallèle à $d$.

On peut alors songer à la proposition réciproque : si une droite $d$ (extérieure à un plan $\Delta$) est parallèle à une infinité de droites parallèles de $\Delta$, alors $d$ est parallèle à $\Delta$.

Cette proposition semble bien vraie. Mais la condition paraît très exigeante. À la réflexion, on aboutit à la question suivante :

| |
|---|
| À combien de droites du plan faut-il vérifier qu'une droite est parallèle pour pouvoir conclure qu'elle est parallèle au plan ? |

Lorsque la majorité des élèves pense qu'il *suffit* de vérifier que la droite est parallèle à une *seule* droite du plan, on propose d'en établir la preuve. Cette *condition suffisante* est encore appelée « critère de parallélisme d'une droite et d'un plan »[1].

***2.*** CRITÈRE DE PARALLÉLISME D'UNE DROITE ET D'UN PLAN : *Si une droite est parallèle à une droite d'un plan, alors elle est parallèle à ce plan.*

Si la droite est dans le plan, elle est parallèle au plan (par définition). Considérons donc le cas où la droite est disjointe du plan.

Il nous faut donc montrer que :
Si le plan $\Delta$ contient une droite $d'$ parallèle à $d$, alors $d$ est parallèle à $\Delta$.

En effet, $d$ et $d'$ déterminent un plan $\Pi$. La droite d'intersection de $\Delta$ et de $\Pi$ est $d'$, puisqu'elle est contenue dans ces deux plans (figure 42).

[1] Le mot *critère* désigne le plus souvent une règle pratique de vérification d'une propriété, c'est-à-dire une *condition suffisante*. Cependant, dans certains ouvrages de géométrie, ce terme est employé pour désigner une *condition nécessaire et suffisante*.


*Fig. 42*

Si $d$ perçait $\Delta$ en un point $I$ (figure 43),

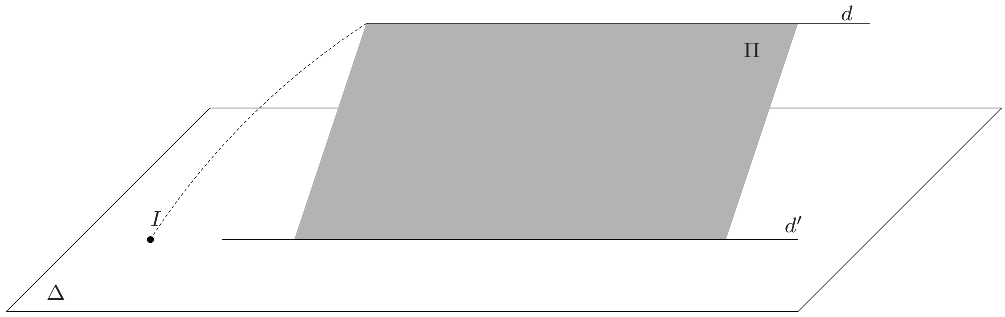



*Fig. 43*

- $I$ serait sur $d$ ;
- $I$ serait dans $\Delta$ et dans $\Pi$, donc sur $d'$ ;
- $I$ serait le point d'intersection de $d$ et $d'$, ce qui est impossible puisque $d$ est parallèle à $d'$.

La droite $d$ est donc parallèle à $\Delta$. Ceci démontre le critère annoncé.

La propriété a pu être établie par ce même type de raisonnement où, après avoir supposé le contraire de la thèse, on arrive à rejeter cette supposition car elle implique une contradiction. C'est ce type de raisonnement qu'on appelle habituellement *démonstration par l'absurde*. Nous allons voir qu'on peut l'utiliser pour démontrer de nombreuses propriétés du parallélisme.

Ce critère peut encore s'énoncer en termes de projections parallèles :

***3.*** *Si une droite est parallèle à son image par une projection parallèle sur un plan, alors elle est parallèle à ce plan.*

Le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan est non seulement une *condition suffisante*, mais aussi une *condition nécessaire*.

***4.*** *Une droite est parallèle à un plan si et seulement si il existe dans le plan une droite qui lui est parallèle.*

En l'énonçant de cette manière, on fait apparaître en même temps la condition nécessaire (C.N.) et la condition suffisante (C.S.).

C.N. : Si une droite est parallèle à un plan, alors il existe dans le plan une droite qui lui est parallèle

C.S. : Si une droite est parallèle à une droite d'un plan, alors elle est parallèle à ce plan.

La *condition nécessaire* est une conséquence immédiate de la propriété 1 à la page 293, et la *condition suffisante* vient d'être démontrée.

Pour aider les élèves à mieux percevoir la différence entre *condition nécessaire* et *condition suffisante*, on peut l'illustrer par un exemple simple. Si deux droites sont parallèles, elles sont *nécessairement* disjointes ; mais si les droites sont disjointes, cela ne *suffit* pas pour en déduire qu'elles sont parallèles, puisqu'elles pourraient aussi bien être gauches. Par contre, si deux droites sont disjointes et coplanaires, on peut en déduire qu'elles sont parallèles.
D'autre part, si deux droites sont disjointes, elles ne sont pas *nécessairement* gauches ; mais si des droites sont gauches, cela *suffit* pour déduire qu'elles sont disjointes.

***Exercices.*** – Voici un ensemble d'énoncés de propriétés. Les uns sont corrects, les autres ne le sont pas.

1. Il existe un seul plan parallèle à un plan donné et comprenant un point donné extérieur à ce premier plan.
2. Si deux plans sont parallèles, toute droite qui perce l'un perce l'autre.
3. Si deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.
4. Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre.
5. Si deux droites sont parallèles, toute droite qui coupe l'une coupe l'autre.
6. Si deux plans sont parallèles, toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre.
7. Si une droite est parallèle à un plan, tout plan qui coupe la droite coupe aussi le plan.
8. Si deux plans sont parallèles à une même droite, ils sont parallèles.
9. Si deux droites sont parallèles, tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre.
10. Si deux droites sont parallèles à un même plan, elles sont parallèles.
11. Si deux droites sont parallèles, tout plan qui contient l'une est parallèle à l'autre.
12. Si deux plans sont parallèles, toute droite de l'un est parallèle à l'autre.

Dans un premier temps, les élèves relèvent les propriétés vraies et les fausses. Pour justifier qu'un énoncé est faux, ils sont invités à fournir un contre-exemple. La première propriété est connue comme l'axiome d'Euclide dans l'espace. Dans une théorie axiomatique minimale[10], on peut

[10] Le but poursuivi n'est pas d'arriver à une théorie axiomatique mais de fournir aux élèves l'occasion de s'exercer au raisonnement déductif, notamment au raisonnement par l'absurde.

l'établir à partir de l'axiome d'unicité de la droite parallèle à une droite donnée par un point extérieur à celle-ci. En faire la preuve est difficile pour des élèves qui abordent les démonstrations de géométrie dans l'espace. Il vaut mieux leur proposer en premier lieu des activités à leur portée. C'est pourquoi nous admettrons la propriété 1 en la prenant comme axiome. Dès lors, les propriétés qui sont vraies peuvent être démontrées soit en utilisant le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan, soit par une démonstration par l'absurde, soit par une combinaison des deux. Cette activité de démonstration est demandée aux élèves. Rien n'empêche le professeur de revenir sur la propriété 1 en fonction de l'intérêt manifesté dans sa classe.

*Échos d'une classe*

Grâce au dispositif des figures 39 et 40 à la page 292, les élèves ont rapidement compris le raisonnement par l'absurde qui sous-tend la démonstration de la propriété 1 à la page 293. Ils ont pu l'expliquer dans un langage proche du langage courant. Par contre, la mise en place de la démonstration formalisée a suscité quelques réactions négatives. À ce stade du travail, les élèves ne perçoivent pas bien l'utilité de disposer d'un critère de parallélisme d'une droite et d'un plan, de connaître des propriétés et de les établir par des démonstrations.

Les exercices de la page 296 provoquent beaucoup de discussions et d'étonnements. Après une première phase de réflexion personnelle, les élèves confrontent leurs résultats et s'aperçoivent de la diversité de leurs réponses. Presque tous ont tenu pour vraie l'une ou l'autre propriété qui s'est révélée fausse après une analyse plus poussée. Cette prise de conscience en amène certains à revoir leur position sur l'utilité des démonstrations. Les problèmes de sections planes vont les convaincre de la nécessité de connaître des propriétés.

## 3.2 Sections planes dans un cube

*Comment s'y prendre ?*

On masque le faisceau de lumière d'un rétroprojecteur par la feuille opaque percée d'une fente de 0.1 mm. La fente et la direction des rayons lumineux déterminent un plan dont la trace est visible sur un écran : cette trace est la droite d'intersection de ce plan lumineux avec l'écran.

Si on place un cube translucide dans ce plan lumineux, sa trace sur le cube permet de visualiser la section du cube par ce plan. Le fait que le cube soit translucide permet de voir la trace lumineuse aussi bien à l'intérieur du cube qu'à l'extérieur ; par contre, si le cube est transparent, la trace n'est pas visible. L'effet souhaité peut être obtenu en recouvrant de papier calque un cube en plexiglas. La face dirigée vers la fente doit être absente pour éviter la réflexion de la lumière sur cette face. À partir des observations effectuées avec ce matériel, les élèves tentent de répondre aux questions suivantes :

1. Combien de côtés peuvent avoir les polygones obtenus comme section ?
2. Comment le plan lumineux coupe-t-il deux faces parallèles ?
3. La section peut-elle être un polygone régulier ?
4. La section peut-elle être un rectangle ? un parallélogramme ? un losange ?

Des éléments de réponse sont obtenus en faisant varier la position du cube par rapport au plan lumineux. La section du cube peut-elle être un heptagone comme le suggère la figure 44 (voir annexe page 389) ?

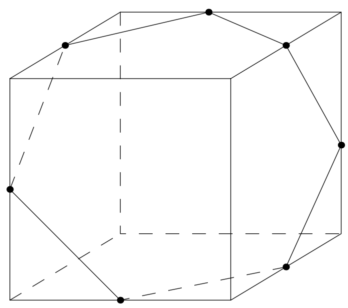


*Fig. 44 : Heptagone*

Une réponse à la question 2 peut être apportée par la propriété :

***5.*** *Tout plan sécant à deux plans parallèles les coupe suivant des droites parallèles.*

La preuve (par l'absurde) en est demandée en activité de démonstration.

Pour répondre aux questions 3 et 4, les élèves peuvent chercher à produire un exemple pour chaque cas, éventuellement d'abord, au moyen du plan lumineux sur le cube en plexiglas, puis en le construisant sur un cube en perspective cavalière.

Voici quelques sections particulières en forme de polygone régulier (figures 45 à 47) :

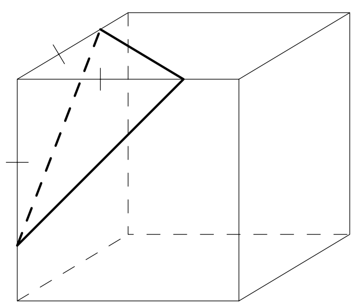


*Fig. 45 : Triangle équilatéral*

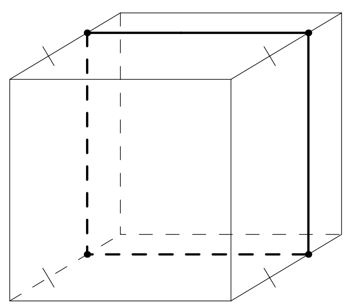


*Fig. 46 : Carré*

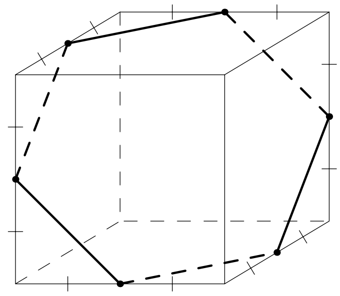


*Fig. 47 : Hexagone régulier*

Est-il possible de trouver un pentagone régulier comme le suggère la figure 48 (voir annexe page 389) ?

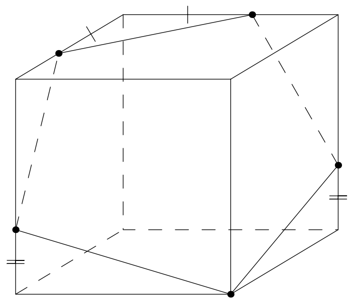


*Fig. 48 : Pentagone régulier ?*

Le théorème 5 devrait mettre les élèves sur la voie d'une argumentation correcte pour rejeter la figure 48 en tant que section plane. S'il est possible de trouver un pentagone comme section plane dans un cube, celui-ci ne pourra jamais être régulier.

Voici un rectangle, un parallélogramme et un losange :

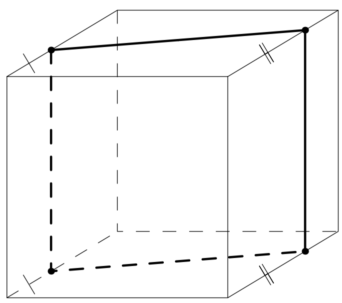


*Fig. 49 : Rectangle*

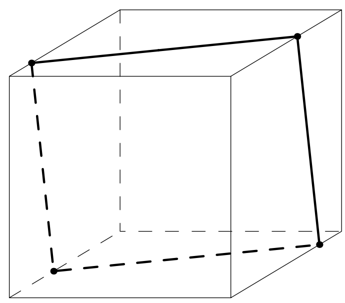


*Fig. 50 : Parallélogramme*

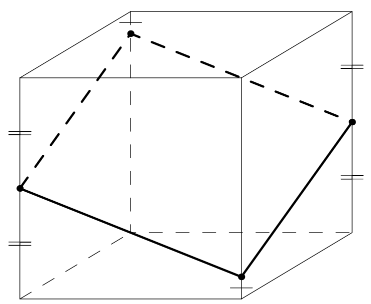


*Fig. 51 : Losange*

***Exercices.*** – Des exercices de construction de sections planes dans des cubes sont proposés. Les énoncés sont repris en annexe aux pages 390 à 395 sous forme de fiches photocopiables pour les élèves. Le plan de section est donné soit par trois de ses points, soit par un point et une droite. Certaines de ces constructions peuvent être réalisées au moyen des seules propriétés d'incidence. Cependant la propriété 5 permet de les construire plus facilement, ou de vérifier la validité d'une section. Ces observations peuvent inciter les élèves à découvrir de nouvelles propriétés et à les démontrer pour pouvoir les utiliser ensuite.

**1.** Construire la section du cube de la figure 52 par le plan $XYZ$ où $X \in BB'$, $Y \in BC$ et $Z \in A'D'$.

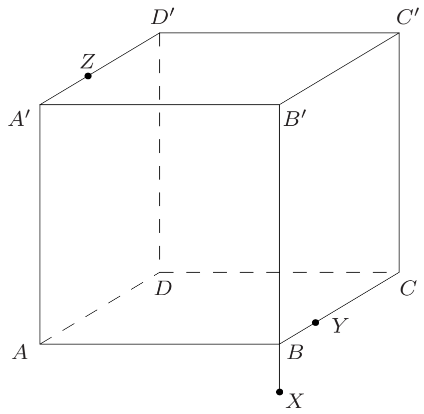



*Fig. 52*

**2.** Dans une seulement des deux figures 53 et54, le quadrilatère $XYTR$ est la section du cube par le plan $XYZ$, où $X \in A'B'$, $Y \in C'D'$ et $Z \in CD$. Laquelle et pourquoi ?

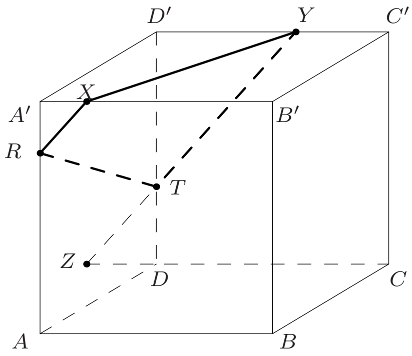



*Fig. 53*

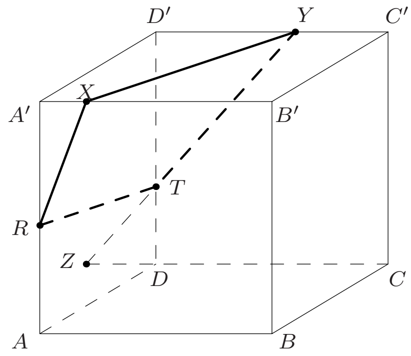



*Fig. 54*

**3.** Construire la section du cube de la figure 55 par le plan $XYZ$ où $X \in AB$, $Y \in B'C'$ et $Z \in A'B'$.

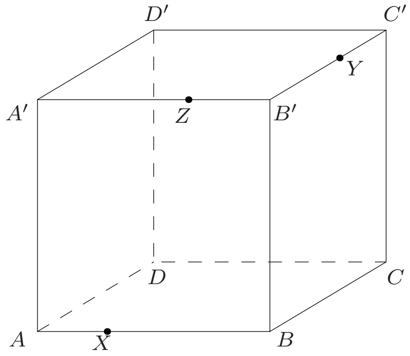



*Fig. 55*

**4.** Construire la section du cube de la figure 56 par le plan $XYZ$ où $X \in BC$, $Y \in AB$ et $Z \in A'B'C'D'$.

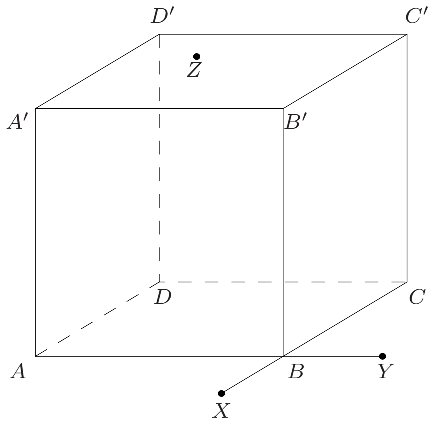



*Fig. 56*

**5.** Construire la section du cube de la figure 57 par le plan $XYZ$ où $X$, $Y$ et $Z$ sont respectivement les milieux des arêtes $[A'D']$, $[D'C']$ et $[AB]$. Démontrer ensuite que la section obtenue est un hexagone régulier.

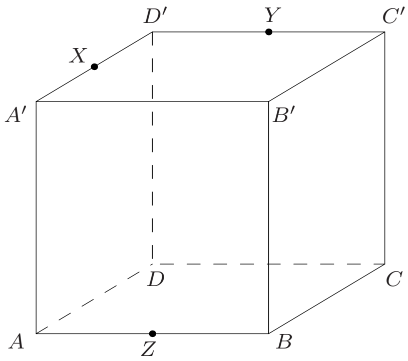



*Fig. 57*

**6.** Construire la section de la pyramide à base carrée de la figure 58 par le plan $MNR$, dans le cas où $RN$ est parallèle à $BC$.

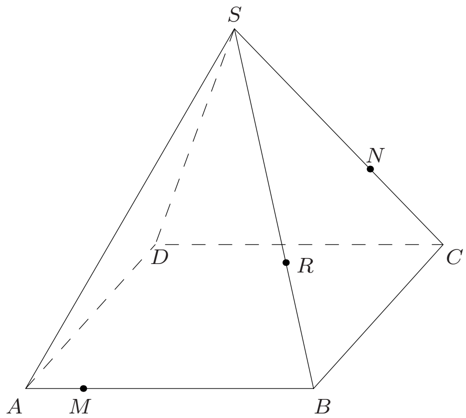



*Fig. 58*

Un nouveau théorème sur le parallélisme peut émerger de cette situation.

***6.*** *Si deux plans sécants sont coupés par un troisième parallèle à leur intersection, alors ce troisième plan coupe les deux premiers suivant des droites parallèles à leur intersection.*

*Échos d'une classe*

Les élèves ont été invités à construire la section de l'exercice 1 sans connaître au préalable le théorème 5 qui affirme que tout plan sécant à deux plans parallèles les coupe suivant deux droites parallèles. Ils ont réalisé leur construction en se basant sur les propriétés d'incidence uniquement. Une observation attentive, axée sur le parallélisme des côtés de l'hexagone de la section, leur a permis de dégager la propriété. L'énoncer correctement a posé problème à certains tandis que d'autres en ont proposé spontanément une justification par l'absurde. Les élèves constatent que ce théorème 5, très utile à la résolution des exercices 2 et 3, est nécessaire pour aborder l'exercice 4.

La construction demandée à l'exercice 6 exploite de manière très claire le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan, ainsi que le théorème préliminaire 1 à la page 293 : *Si une droite extérieure à un plan est parallèle à ce plan, tout plan contenant la droite et sécant avec le premier plan, coupe celui-ci suivant une parallèle à la droite.*

C'est donc par le biais de leur utilisation dans les exercices que les élèves découvrent peu à peu l'intérêt des critères et propriétés qui trouvent ainsi leur justification.

### 3.3 Critère de parallélisme de deux plans

*Comment s'y prendre ?*

Le professeur répartit les élèves en groupes et fournit à chaque groupe une plaque de plexiglas et deux transparents. Sur le premier de ceux-ci, on a dessiné deux droites parallèles, et sur le second, deux droites sécantes. Les élèves donnent au plan de plexiglas quelques positions différentes au-dessus d'une table ensoleillée et vérifient, dans chaque cas, s'il est possible d'y déposer les transparents de telle manière que chacune des deux droites qui y sont dessinées soit parallèle à son ombre.

L'opération est assez aisée pour le transparent qui porte les deux droites parallèles : il suffit d'avoir placé l'une des droites parallèlement à son ombre pour que l'autre droite soit aussi dans la position adéquate. La justification de ce fait (et de ceux qui vont suivre) procure notamment l'occasion d'utiliser le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan et les propriétés qui en découlent.

Le problème posé par les deux droites sécantes semble plus compliqué. La seule situation claire d'emblée est celle où l'on place le transparent sur un plan horizontal, c'est-à-dire parallèle au plan de projection. Dans ce cas, on observe que, quelle que soit la position des deux droites sur le plan, leurs ombres leur sont constamment parallèles. Cette observation peut également être justifiée. C'est à nouveau un va-et-vient permanent entre l'observation et la justification des faits observés qui soutient le raisonnement et guide la démarche.

Les questions suivantes sont alors abordées :

- Peut-on trouver dans n'importe quel plan deux droites sécantes telles que chacune soit parallèle à son ombre ?
- Si une droite est parallèle à son ombre, quelle est sa position par rapport au plan de projection ?

Si l'on applique le transparent sur la plaque de plexiglas maintenue en position oblique, on constate qu'il est toujours possible de placer une des deux droites sécantes de telle manière qu'elle soit parallèle à son ombre, mais que ce résultat ne pourra jamais être obtenu pour les deux droites en même temps. La droite qui est parallèle à son ombre est évidemment parallèle au plan horizontal sur lequel les ombres sont observées, en vertu du critère de parallélisme d'une droite et d'un plan. La seule manière d'amener les deux droites sécantes à être parallèles à leur ombre est donc de les placer toutes les deux en position horizontale, et dans ce cas , nous constatons que le plan qui les contient est horizontal lui aussi.
Nous avions déjà observé que toutes les droites d'un plan horizontal sont parallèles à leur ombre. Suite à ces nouvelles observations, la question qui se pose est :

| |
|---|
| Combien de droites du plan devraient être parallèles à leur ombre pour qu'on puisse conclure que le plan est parallèle au plan de projection ? |

La réponse qui ressort des dernières observations est qu'il en faut deux, dans deux directions différentes, c'est-à-dire sécantes (puisque nous avons pu placer deux droites parallèles qui soient parallèles à leur ombre dans un plan oblique). À ce stade du raisonnement, il semble naturel de conjecturer que cette condition nécessaire est aussi une condition suffisante. Nous allons montrer que, pour qu'un plan soit parallèle à un autre, il suffit que *deux droites sécantes* du premier soient respectivement parallèles à leur ombre sur le deuxième, ou encore que le premier contienne deux droites sécantes parallèles au deuxième. Nous dégageons ainsi deux formes équivalentes du *critère de parallélisme de deux plans* et nous proposons aux élèves de le démontrer.

Critère de parallélisme de deux plans

***7.*** *Première forme :*
*Si un plan contient deux droites sécantes parallèles à un autre plan, ces deux plans sont parallèles.*

Démontrons ce critère par l'absurde.

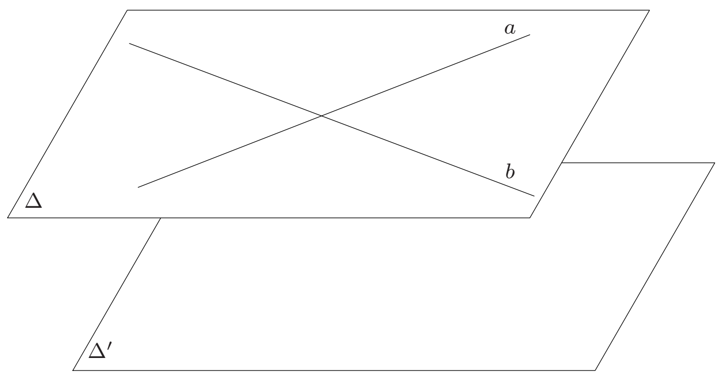



*Fig. 59*

Supposons que $\Delta$ et $\Delta'$ ne sont pas parallèles. Ces deux plans sont donc sécants. Comme $\Delta$ contient la droite $a$ parallèle à $\Delta'$, il coupe le plan $\Delta'$ suivant une droite $i$ parallèle à $a$ (propriété 1 à la page 293). Pour la même raison, la droite $i$ doit aussi être parallèle à $b$. Comme $i$ ne peut être parallèle à la fois aux deux droites sécantes $a$ et $b$ (axiome d'Euclide dans le plan), l'hypothèse que $\Delta$ et $\Delta'$ ne sont pas parallèles nous conduit à une contradiction. Nous pouvons donc conclure que les deux plans $\Delta$ et $\Delta'$ sont bien parallèles.

***8.*** *Deuxième forme :*
*Si un plan contient deux droites sécantes respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un autre plan, ces deux plans sont parallèles.*

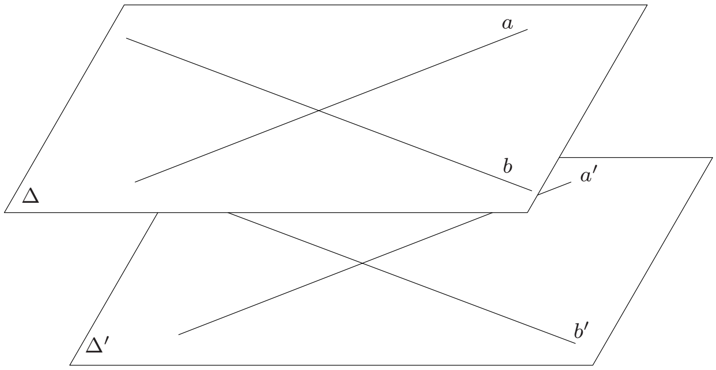



*Fig. 60*

Si $a$ est parallèle à une droite $a'$ de $\Delta'$, elle est parallèle au plan $\Delta'$. De même, la droite $b$ est parallèle à $\Delta'$, ce qui nous ramène à l'énoncé précédent.

Ce critère peut encore s'énoncer en termes de projections parallèles.

***9.*** *Si un plan contient deux droites sécantes respectivement parallèles à leurs images par une projection parallèle sur un autre plan, ces deux plans sont parallèles.*

*Prolongements possibles*

Construire un plan passant par un point donné et parallèle à deux droites gauches données.

Un tétraèdre est coupé par un plan parallèle à deux arêtes gauches. Quelle est la nature de la section ?

***Théorème de Thalès dans l'espace.*** – Ce théorème va nous permettre de mettre en évidence un processus de généralisation, tout en utilisant de manière naturelle les sections planes dans les tétraèdres. Un nouveau type de projection va s'en dégager : la projection d'une droite sur une droite parallèlement à un plan.

Les configurations de Thalès dans le plan sont associées dans tous les esprits à un ensemble de droites parallèles coupées par des sécantes. On demande aux élèves d'imaginer une configuration analogue dans l'espace. La première idée qui émerge naturellement est la transposition du théorème de Thalès aux droites de l'espace. Or ici, un ensemble de droites parallèles ne coupe pas forcément une droite quelconque. Par contre, un ensemble de plans parallèles coupe nécessairement toutes les droites de l'espace qui ne leur sont pas parallèles. Ces plans déterminent des segments sur les droites. La question posée est la suivante.

| |
|---|
| Les rapports entre les segments déterminés sur les droites de l'espace par des plans parallèles sont-ils les mêmes sur n'importe quelle droite ? |

Des droites de l'espace peuvent être sécantes, parallèles ou gauches. Dans les deux premiers cas, les droites sont coplanaires et ceci nous ramène à une situation connue. Dans un premier temps, les élèves sont invités à observer et analyser ces deux situations. Le moment est venu d'exploiter notre travail sur les sections planes dans un tétraèdre (arêtes concourantes) et dans un prisme (arêtes parallèles) pour éclairer ce nouveau problème sous un jour familier. Les plans parallèles sont introduits en considérant un plan de section parallèle à la base (ou aux bases s'il s'agit d'un prisme).

***Droites concourantes coupées par des plans parallèles*** – Considérons la section du tétraèdre $ABCD$ par un plan parallèle à sa base $BCD$.

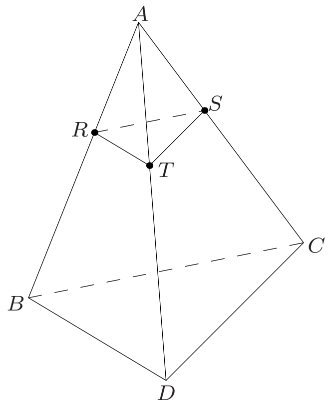



*Fig. 61*

Les élèves construisent la section à titre d'exercice et en justifient les étapes. Le plan de section $\Pi$, parallèle au plan $\Delta$ de la base $BCD$, coupe les faces $ABC$, $ACD$ et $ABD$ respectivement suivant les droites $RS$ parallèle à $BC$, $ST$ parallèle à $CD$ et $RT$ parallèle à $DB$. Les deux plans $\Delta$ et $\Pi$, et un troisième plan $\Delta'$ passant par le sommet $A$ et parallèle aux deux premiers, déterminent sur les droites qui portent les arêtes, les segments $[AR]$ et $[AB]$, $[AS]$ et $[AC]$, $[AT]$ et $[AD]$. Peut-on observer et justifier l'égalité des rapports des longueurs de ces segments ?

On y parvient facilement. En effet, on voit apparaître une configuration de Thalès dans le plan $ABC$, une autre dans le plan $ACD$ et la dernière dans le plan $ABD$, ce qui nous donne successivement :

$$\frac{|AR|}{|AB|} = \frac{|AS|}{|AC|}, \quad \frac{|AS|}{|AC|} = \frac{|AT|}{|AD|} \quad \text{et} \quad \frac{|AR|}{|AB|} = \frac{|AT|}{|AD|}.$$

En rassemblant ces trois égalités, on obtient :

$$\frac{|AR|}{|AB|} = \frac{|AS|}{|AC|} = \frac{|AT|}{|AD|}.$$

Si un autre plan parallèle à la base coupe le tétraèdre suivant $R'S'T'$, on obtient par un raisonnement analogue :

$$\frac{|RR'|}{|RB|} = \frac{|SS'|}{|SC|} = \frac{|TT'|}{|TD|}.$$

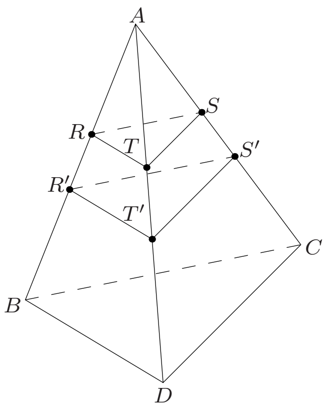



*Fig. 62*

Les longueurs des segments déterminés sur les arêtes par les trois plans parallèles sont donc bien proportionnelles.

Remarquons au passage que le fait d'avoir travaillé sur les arêtes d'un tétraèdre ne nuit en rien à la généralité de la démonstration, puisqu'un tétraèdre peut toujours être construit sur trois droites concourantes.

Nous pouvons donc conclure.
Des plans parallèles déterminent sur des droites concourantes des segments proportionnels.

***Droites parallèles coupées par des plans parallèles*** – Recommençons le même raisonnement sur un prisme à base triangulaire, coupé par un plan de section parallèle à ses bases.

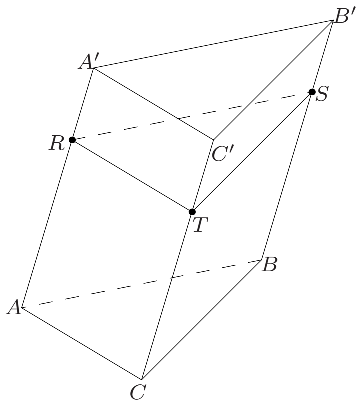



*Fig. 63*

Le plan de section $\Pi$, parallèle aux plans $\Delta$ de la base $ABC$ et $\Delta'$ de la base $A'B'C'$, coupe les faces $AA'B'B$, $BB'C'C$ et $AA'C'C$ respectivement suivant les droites $RS$ parallèle à $AB$, $ST$ parallèle à $BC$ et $RT$ parallèle à $AC$ (à justifier). Les trois plans $\Delta$, $\Delta'$ et $\Pi$ déterminent, sur les droites qui portent les arêtes $AA'$, $BB'$ et $CC'$, les segments $[AR]$ et $[AA']$, $[BS]$ et $[BB']$, $[CT]$ et $[CC']$. Les parallélogrammes qui apparaissent sur les faces nous donnent les égalités

$$|AA'| = |BB'| = |CC'| \quad \text{et} \quad |AR| = |BS| = |CT|,$$

et par conséquent

$$\frac{|AR|}{|AA'|} = \frac{|BS|}{|BB'|} = \frac{|CT|}{|CC'|}.$$

Comme un prisme peut toujours être construit sur des droites parallèles, on peut conclure en toute généralité :
Des plans parallèles déterminent sur des droites parallèles des segments proportionnels.

***Droites gauches coupées par des plans parallèles*** – C'est évidemment ce cas qui va nous permettre d'étendre réellement le domaine d'application du théorème de Thalès. Comme les droites ne sont plus coplanaires, nous ne pourrons plus nous référer d'emblée à une configuration de Thalès dans un plan. Nous proposons aux élèves d'établir la propriété en se référant au problème de la section plane d'un tétraèdre par un plan parallèle à deux arêtes gauches.

Ils construisent en justifiant les étapes (si ce n'est déjà fait) la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan $\Pi$ parallèle aux arêtes $AC$ et $BD$, passant par le point $P$ de l'arête $AB$ (figure 64).

Le plan $\Pi$ coupe les faces $ABD$, $ACD$, $BCD$ et $ABC$ respectivement suivant les droites $PR$ parallèle à $BD$, $RS$ parallèle à $AC$, $ST$ parallèle à $BD$ et $TP$ parallèle à $AC$. Appelons $\Delta$ le plan contenant $BD$ et parallèle à $AC$ et $\Delta'$ le plan contenant $AC$ et parallèle à $BD$. Les élèves justifient que les trois plans $\Delta$, $\Delta'$ et $\Pi$ sont parallèles. La question est de démontrer que ces trois plans déterminent sur les droites gauches $AB$ et $CD$ des segments proportionnels, c'est-à-dire que

$$\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|CS|}{|CD|}.$$

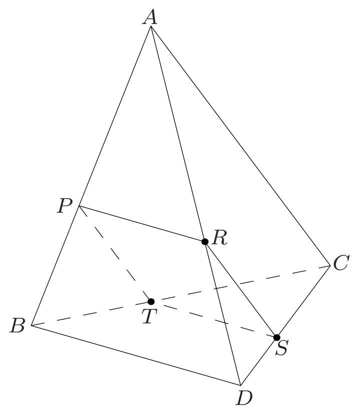



*Fig. 64*

Les élèves seront probablement tentés de retrouver des configurations de Thalès dans les plans des faces, cette démarche ayant donné précédemment les résultats escomptés ; et en effet, on trouve

dans la face $ABD$ :

$$\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|AR|}{|AD|},$$

dans la face $ACD$ :

$$\frac{|AR|}{|AD|} = \frac{|CS|}{|CD|},$$

ce qui nous donne finalement :

$$\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|CS|}{|CD|}.$$

Dans ce cas-ci également, on peut conclure que la propriété a été démontrée dans le cas général. En effet, considérons deux droites gauches $d$ et $d'$ et trois plans $\Delta$, $\Pi$ et $\Delta'$ qui les coupent. La droite $d$ coupe les plans extérieurs $\Delta$ et $\Delta'$ en $A$ et $B$, et $d'$ coupe ces mêmes plans en $C$ et $D$. On retrouve ainsi le tétraèdre $ABCD$ et sa section $PRST$ par le plan $\Pi$, comme dans la figure 64.

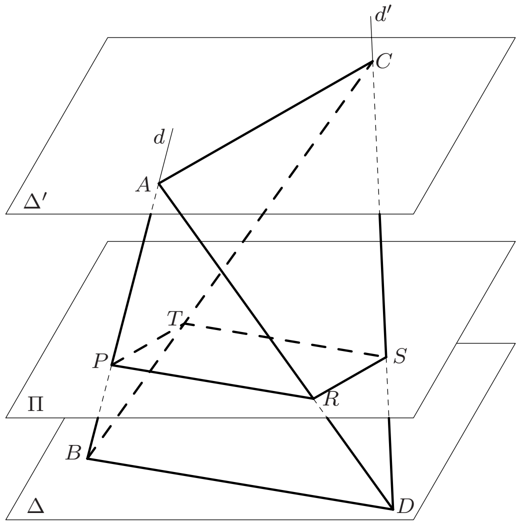



*Fig. 65*

En conclusion, nous pouvons énoncer le *Théorème de Thalès dans l'espace* :

***10.*** *Si des plans parallèles coupent deux droites quelconques de l'espace, les segments déterminés sur l'une sont proportionnels aux segments correspondants déterminés sur l'autre.*

On peut également interpréter les points $C$, $S$ et $D$ de la droite $CD$ comme les images des points $A$, $P$ et $B$ de la droite $AB$ par une projection de la droite $AB$ sur la droite $CD$ parallèlement au plan $\Pi$, ce qui permet d'énoncer le théorème sous la forme :

***11.*** *Toute projection d'une droite sur une droite parallèlement à un plan conserve le rapport des longueurs de deux segments.*

## Commentaires

Dans la plupart des ouvrages qui traitent du parallélisme, les définitions choisies sont telles que « deux droites confondues sont parallèles » ou « deux plans confondus sont parallèles ». Pour notre part, nous avons délibérément évité de parler de droites ou de plans confondus. Si deux droites désignées par des noms différents au cours d'un raisonnement s'avéraient être confondues, nous dirions tout simplement qu'il s'agit d'une seule et même droite (à laquelle on avait attribué des noms différents), mettant ainsi l'accent sur l'unicité de la droite parallèle à une direction donnée, passant par un point donné.

Dans le cadre de la théorie des ensembles, lorsque le parallélisme est vu comme une relation d'équivalence, la réflexivité de la relation s'exprime sous la forme : « Une droite est parallèle à elle-même » ou « Un plan est parallèle à lui-même ». Nous n'avons pas éprouvé la nécessité de recourir à des énoncés de ce type dans cette première approche du parallélisme dans l'espace. C'est pourquoi ces énoncés n'apparaissent pas à ce stade de notre travail.

En ce qui concerne le parallélisme d'une droite et d'un plan, la situation nous a semblé différente. En effet, une droite et un plan, n'étant pas des objets de même nature, ne seront jamais confondus ; mais la droite peut être contenue dans le plan. On constate que beaucoup des propriétés qu'on peut énoncer pour une droite disjointe d'un plan restent vraies si la droite est contenue dans le plan. Il n'y a donc pas lieu de discriminer ces deux cas, mais au contraire, il semble naturel de les regrouper sous un même vocable, en l'occurence : « parallèle ». Les propriétés peuvent ainsi être énoncées sous une forme générale, simple et concise ; et les énoncés correspondant au cas où la droite est dans le plan sont retrouvés comme cas particuliers.