9

À propos des coniques

1 Cercles, ellipses, affinités

De quoi s'agit-il ?

Présenter l'ellipse comme ombre au soleil d'un cercle.

Enjeux

Montrer qu'une ellipse est l'image d'un cercle par une affinité.

Donner du sens au calcul matriciel.

Matières couvertes. – Bijection. Existence de la réciproque d'une transformation du plan.

Notion de *composition de transformations de l'espace.*

Forme analytique et matricielle d'une affinité. Rotation, cisaillement, *étirement, compression dans le plan.*

Image d'un cercle par une affinité.

Section plane d'un cylindre.

Compétences. – Résoudre des *problèmes de construction.*

Reconnaître une conique à son équation cartésienne réduite.

Identifier l'ellipse comme transformée d'un cercle par une affinité.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – Les plaques transparentes rigides et leurs supports décrits dans l'activité 1.

Des photocopies sur transparent de la figure 1 fournie en vraie grandeur en annexe à la page 396.

Prérequis. – Éléments de calcul matriciel, y compris le calcul de la matrice inverse. Géométrie analytique de l'espace. Équation d'une ellipse rapportée à ses axes.

Local. – Il est souhaitable de disposer d'un local ensoleillé.

1.1 Ombre au soleil d'un cercle

Comment s'y prendre ?

Quelle est l'ombre au soleil d'une roue de vélo ?

Après une phase de discussion, un dispositif expérimental similaire à ceux déjà utilisés est soumis à l'observation des élèves.

Chaque groupe reçoit le matériel décrit plus haut. Les élèves collent sur la vitre le transparent réalisé au moyen de la figure 1.

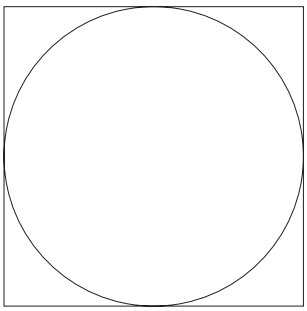

Fig. 1 : Cercle inscrit dans un carré

Le cercle inscrit dans un carré de la figure 1 (fourni à la bonne échelle en annexe à la page 396) est photocopié sur une feuille A3. Cette feuille est collée sur une table, la vitre y est déposée de manière qu'un côté du carré du transparent coïncide avec un côté du carré photocopié. Cette disposition permet de voir sur un même plan (celui de la feuille A3) une représentation des carré et cercle initiaux ainsi que leur ombre (figure 2).

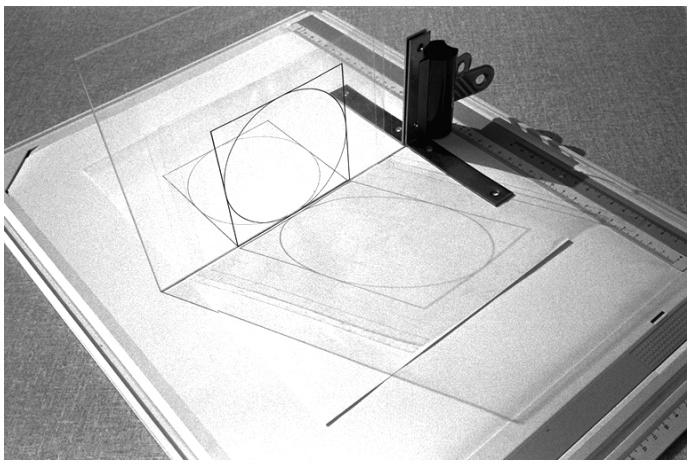

Fig. 2

Après avoir marqué sur la feuille bien tendue la trace de l'ombre du cercle et du carré, les élèves obtiennent un dessin comme celui de la figure 3 à la page suivante.

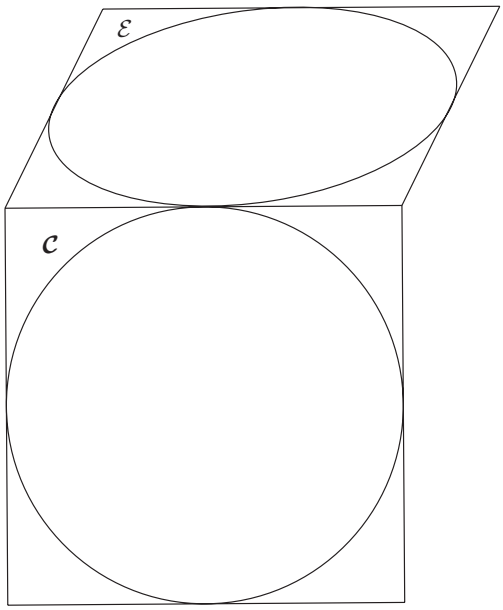

Fig. 3 : Cercle inscrit dans un carré et ombres produites

Ils sont amenés à constater que la courbe obtenue est l'image d'un cercle par une projection parallèle (activité 1).

Le logiciel de dessin Cabri-Géomètre complète utilement les dispositifs expérimentaux décrits ici. Ainsi dans la figure 4, les déplacements du point M engendrent la déformation du parallélogramme image du carré et montrent les différentes formes prises par l'image du cercle[1].

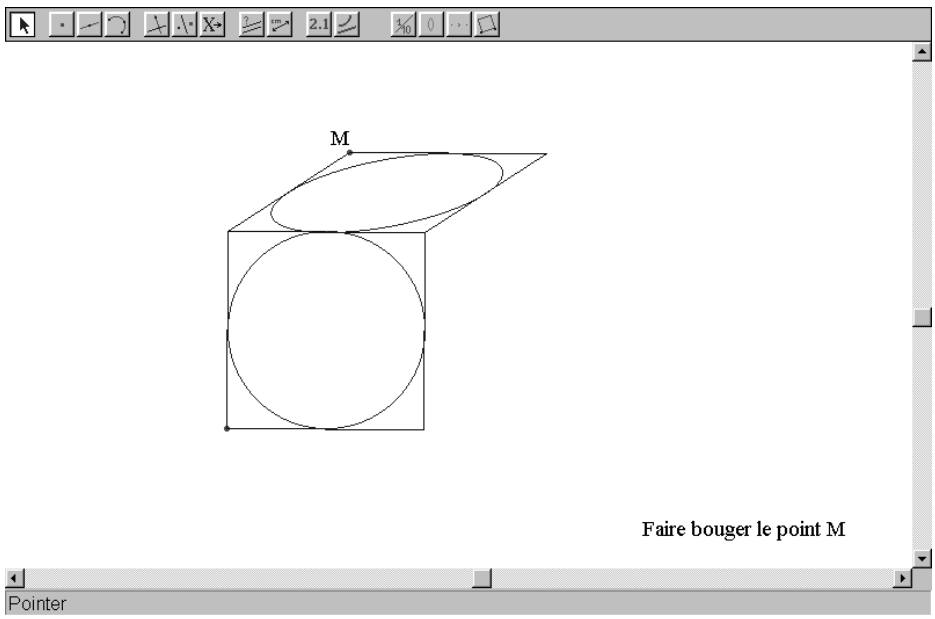

Fig. 4 : Fenêtre Cabri

[1] Des fichiers Cabri sont disponibles sur le site INTERNET du CREM à l'adresse www.profor.be/crem.

Lorsqu'on place la vitre face aux rayons du soleil (figure 7 à la page suivante), l'ombre du carré est un rectangle dont un côté coïncide avec un côté du carré initial (voir aussi photo à la figure 5).

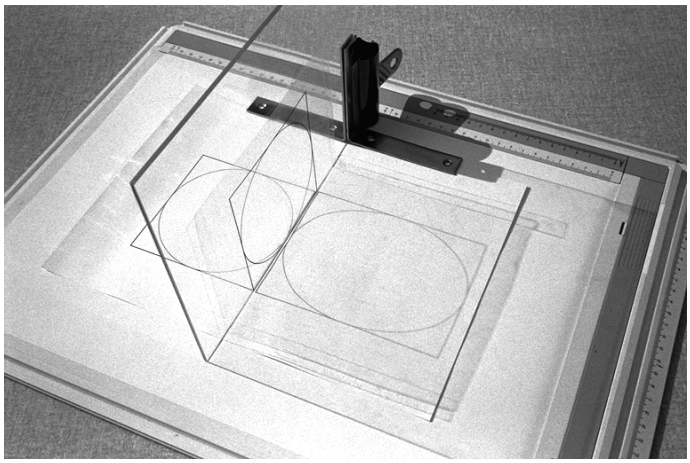

Fig. 5

C'est la figure 7 qui sera exploitée comme première approche.

Un autre cas particulier intéressant à observer (figure 6) est celui où le plan de la vitre contient les projetantes (rayons du soleil).

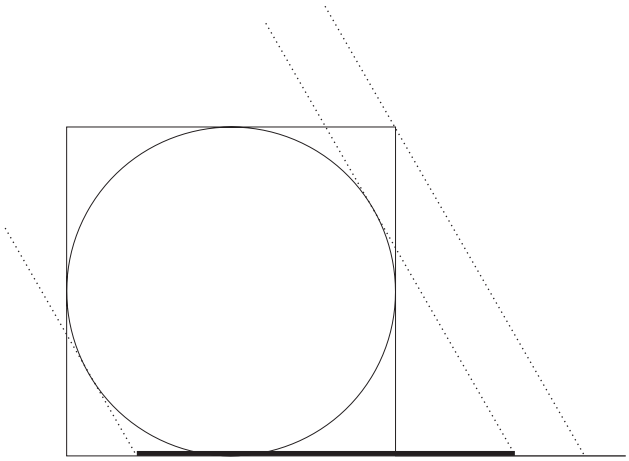

Fig. 6 : Une autre position particulière de la vitre

Dans ce cas, l'ombre du carré est un segment, celle du cercle, un autre segment.

Ce cas diffère de tous les autres : chaque point de chacun des segments est l'ombre d'un ou deux points. Plus précisément, chaque point d'un des deux segments est l'image d'un ou deux points du carré ; et chaque point de l'autre segment est l'image d'un ou deux points du cercle. En ce qui concerne les autres positions de la vitre, les élèves peuvent constater que, à chaque point du carré correspond un seul point de son ombre et réciproquement, et qu'il en va de même pour les points du cercle et ceux de son

ombre. On parle alors de *bijection* entre l'ensemble des points du carré et l'ensemble des points de son ombre, entre l'ensemble des points du cercle et l'ensemble des points de son ombre.

Reprenons le cas particulier de la figure 5 à la page précédente et traitons cette situation comme un problème de géométrie plane dans le plan de la feuille de papier (figure 7). La figure du transparent est pour cela amenée à coïncider avec la photocopie sur la feuille A3 par une isométrie de l'espace : une rotation de 90 degrés autour de l'axe passant par le côté commun aux deux carrés (transparent et photocopie).

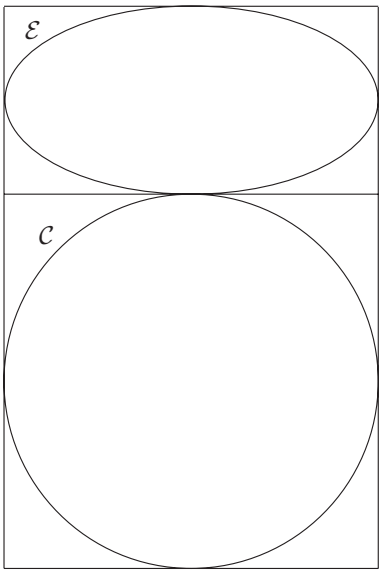

Fig. 7 : Vue de la feuille A3 pour une position particulière de la vitre

Les élèves sont invités à imaginer la construction de la courbe $\mathcal{E}$ à partir du cercle $\mathcal{C}$. Une indication peut leur être fournie en posant la question suivante.

Quelles sont les propriétés qui sont conservées par les rotations et les projections parallèles ?

Ils constatent en cours de route que les propriétés qui leur viennent en aide sont

- la conservation de l'alignement,
- la conservation de l'incidence,
- la conservation du parallélisme,
- la conservation des rapports de longueurs,

et ils arrivent à une construction du type de la figure 8 à la page suivante.

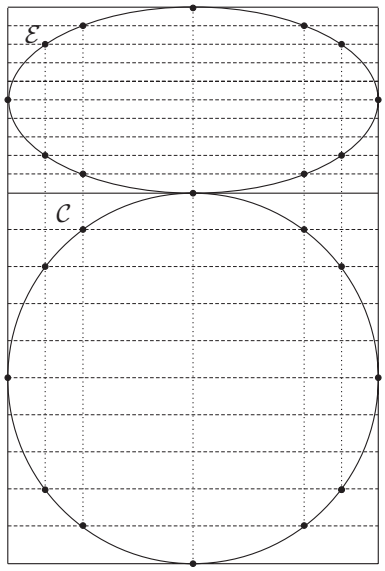

Fig. 8 : Transformation du plan qui envoie le cercle $\mathcal{C}$ sur la courbe $\mathcal{E}$

C'est le moment d'aborder le problème de la transformation réciproque :

> Si l'on sait que la courbe $\mathcal{E}$ est l'image d'une courbe inscrite dans un carré, peut-on construire celle-ci à partir de $\mathcal{E}$?

Les élèves verront sans doute immédiatement que toute la construction qui leur a permis de passer de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{E}$ peut être reproduite dans l'autre sens.

Cette transformation du plan qui permet de trouver $\mathcal{C}$ comme image de $\mathcal{E}$ est appelée *transformation réciproque (ou inverse)* de celle qui donne $\mathcal{E}$ comme image de $\mathcal{C}$.

> Et dans le cas particulier évoqué à la figure 6 à la page 314, peut-on aussi retrouver la courbe dont l'image est un segment, sachant que cette courbe est inscrite dans un carré ?

Les élèves peuvent imaginer des courbes autres que le cercle, dont l'ombre soit le même segment que l'ombre du cercle. Ils devraient prendre conscience de l'ambiguïté liée au caractère non bijectif de cette transformation[2].

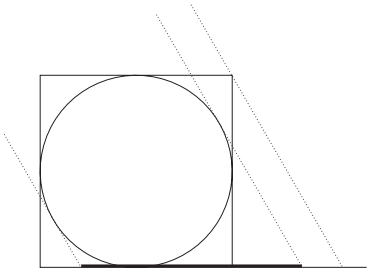

Fig. 9

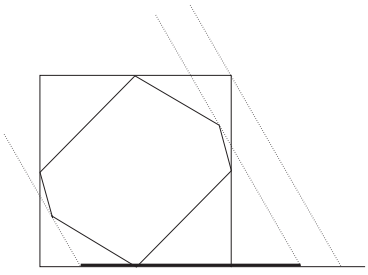

Fig. 10

[2] Le mot *transformation* est pris au sens large, c'est-à-dire application non nécessairement bijective du plan dans lui-même.

La suite de l'activité sera consacrée à répondre à la question qui suit :

Quelle est l'équation de la courbe $\mathcal{E}$ obtenue ?

Pour cela, nous introduisons les affinités.

1.2 Affinités

Comment s'y prendre ?

Toute transformation bijective du plan qui conserve les droites et le parallélisme est appelée *affinité du plan.*

Ceci signifie que

- l'image d'une droite est une droite ;
- deux droites parallèles ont pour images des droites parallèles.

Les constructions que les élèves ont effectuées doivent les convaincre de la propriété suivante :

1. *La transformation bijective du plan qui envoie le cercle $\mathcal{C}$ sur la courbe $\mathcal{E}$ est une affinité.*

Une discussion entre les différents groupes d'élèves devrait les amener à concevoir que toute transformation bijective du plan muni d'un repère a des équations de la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & f_1(x,y) \\ y' & = & f_2(x,y)\,, \end{array} \right.$$

où les fonctions f_1 et f_2 sont telles qu'il est possible d'exprimer (x, y) en fonction de (x', y'), puisque toute transformation bijective du plan possède une transformation réciproque. On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & g_1(x',y') \\ y & = & g_2(x',y')\,. \end{array} \right.$$

À partir de la définition de l'affinité donnée plus haut, quelles sont les équations générales d'une affinité du plan ?

Une nouvelle phase de discussion doit aboutir à la conclusion que, puisque l'équation d'une droite est du premier degré et que toute affinité envoie une droite sur une droite, les fonctions f_1 et f_2 dont il est question ci-dessus doivent être du premier degré.

Pour étayer cette intuition, le professeur peut demander à ses élèves de regarder ce que deviendrait l'équation de la droite $\lambda x + \mu y = \nu$ par une transformation du type

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x^3 \\ y' & = & y \end{array} \right.$$

et leur faire constater que l'équation obtenue

$$\lambda \sqrt[3]{x'} + \mu y' = \nu$$

n'est plus celle d'une droite.

D'une manière générale, l'équation d'une droite $\lambda x + \mu y = \nu$ devient, par la transformation

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & g_1(x', y') \\ y & = & g_2(x', y') \end{array} \right.$$

ci-dessus, $\lambda g_1(x', y') + \mu g_2(x', y') = \nu$. Cette équation doit être l'équation d'une droite pour toute valeur de λ et de μ. En particulier, si $\lambda = 0$, on a $\mu g_2(x', y') = \nu$, ce qui implique que g_2 doit être du premier degré. Si $\mu = 0$, on a $\lambda g_1(x', y') = \nu$, ce qui implique que g_1 doir être du premier degré. Ainsi, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \alpha x' + \beta y' + \varepsilon \\ y & = & \gamma x' + \delta y' + \eta \,, \end{array} \right.$$

et en inversant, nous en arrivons alors à proposer les expressions analytiques suivantes comme équations d'une affinité :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & ax + by + k \\ y' & = & cx + dy + \ell \,, \end{array} \right.$$

ou encore, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix}.$$

Quelle(s) condition(s) doit-on imposer aux coefficients a, b, c, d, k, ℓ pour que (x, y) puisse s'exprimer en fonction de (x', y') ?

L'écriture

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

permet d'arriver à la conclusion qu'il suffit d'avoir

$$a \cdot d - b \cdot c \neq 0.$$

Dans ce cas, la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est inversible, ce qui permet d'écrire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \left[\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b\ell - kd \\ kc - a\ell \end{pmatrix} \right].$$

Les élèves vérifieront ensuite qu'en appliquant la transformation décrite ci-dessus aux droites

$$\begin{array}{rcl} d_1 & \equiv & y = mx + p_1 \,, \\ d_2 & \equiv & y = mx + p_2 \,, \end{array}$$

ils obtiennent, pour les droites images, des coefficients de direction tous deux égaux à $\dfrac{md + c}{mb + a}$.

Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant :

2. *Toute affinité du plan muni d'un repère a pour équations*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix}$$

où

$$ad - bc \neq 0.$$

Lorsque $k = \ell = 0$, il reste

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{où } ad - bc \neq 0.$$

Une telle affinité « sans translation » s'appelle *transformation linéaire*. Ce sont surtout des transformations linéaires qui interviennent dans la suite de l'activité.

Les transformations linéaires constituent un puissant outil mathématique dans différentes disciplines scientifiques et notamment en économie. Elles généralisent le concept de *fonction linéaire* d'une variable.

Quelles sont les équations d'une affinité qui envoie le cercle $\mathcal{C}$ sur la courbe $\mathcal{E}$?

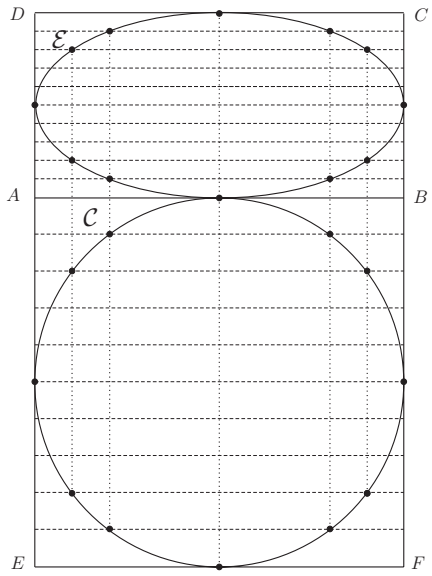

Fig. 11 : Cas particulier de transformation du plan qui envoie le cercle $\mathcal{C}$ sur la courbe $\mathcal{E}$

Cette affinité envoie le carré $AEFB$ sur le rectangle $ADCB$. À cause de la conservation du parallélisme, il suffit d'exprimer que trois sommets du carré sont envoyés sur trois sommets du rectangle.

Considérons le repère suivant : l'origine est en A, l'axe des abscisses le long de AB, celui des ordonnées, le long de AD. Choisissons la même unité sur

chacun des axes, de telle manière que les coordonnées de B soient $(2,0)$. Les coordonnées des différents points sont alors

$A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2\alpha)$, $D(0,2\alpha)$, $E(0,-2)$ et $F(2,-2)$, où $\alpha > 0$.

Le cercle a son centre en $(1,-1)$ et son rayon vaut 1. Son équation est

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1.$$

Un retour à la situation spatiale et l'observation du mouvement de rotation de la vitre pour l'amener dans le plan permettra sans doute aux élèves d'écrire directement

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x \\ y' & = & -\alpha y\,, \end{array} \right.$$

ou encore, sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Une telle affinité est appelée *compression*.[3]

La même formule peut être obtenue en partant de l'équation générale d'une affinité et en exprimant que A va sur A, B sur B et E sur D.

Pour pouvoir trouver l'image du cercle $\mathcal{C}$, il faut exprimer x et y en fonction de x' et y', ce qui nous impose d'inverser la dernière matrice. Il vient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Sous l'effet de cette transformation, l'équation du cercle devient

$$(x'-1)^2 + \frac{(y'-\alpha)^2}{\alpha^2} = 1.$$

En posant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X & = & x'-1 \\ Y & = & y'-\alpha\,, \end{array} \right.$$

ce qui correspond à translater l'origine du repère au centre de symétrie du rectangle $ABCD$, on obtient l'équation

$$\frac{X^2}{1^2} + \frac{Y^2}{\alpha^2} = 1\,,$$

qui est bien l'équation d'une ellipse rapportée à ses axes, dont les longueurs sont 2 et 2α. L'ellipse $\mathcal{E}$ apparaît ainsi comme transformée du cercle $\mathcal{C}$ par une affinité.

[3] Il va de soi que l'équation de la courbe image de $\mathcal{C}$ pourrait être écrite sans peine à partir de ces seules équations, sans parler de la forme générale d'une affinité et sans introduire le calcul matriciel. Cependant, il nous a paru intéressant de traiter matriciellement un problème où l'inversion et le produit matriciel (voir ci-après le cas plus général) ont un sens géométrique. De plus, les élèves percevront sans doute que cette forme générale permettra de traiter des transformations du plan beaucoup plus complexes que celle qui se présente dans ce problème.

Un calcul analogue peut être fait dans le cas plus général où le carré est envoyé non plus sur un rectangle mais sur un parallélogramme (figure 12). Cela correspond à une position tout à fait quelconque de la vitre par rapport aux rayons du soleil.

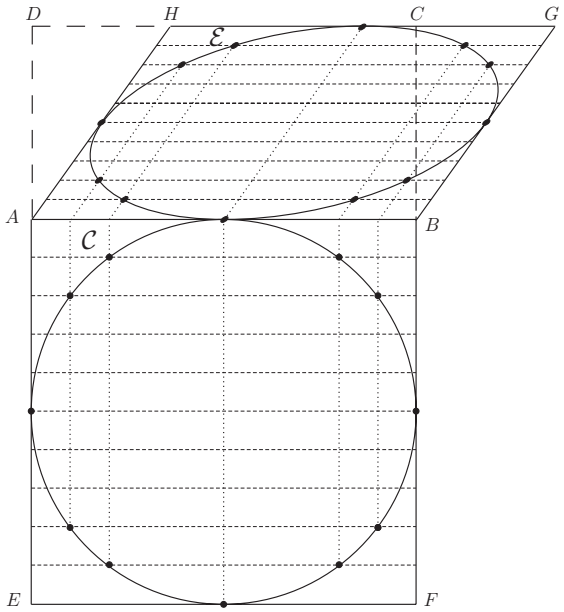

Fig. 12 : Cas général

Dans le même repère, il suffit de composer l'affinité précédente avec celle qui envoie A sur A, B sur B et $D(0, 2\alpha)$ sur $H(2\beta, 2\alpha)$. Partant de l'équation générale d'une affinité, en imposant ces trois conditions, les élèves arriveront aisément à

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

C'est l'occasion de rencontrer et de souligner le fait que, à une composée de transformations correspond un produit matriciel. En effet,

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right].$$

L'associativité du produit matriciel permet d'écrire

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

et ainsi,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

est la matrice de l'affinité pour laquelle A et B sont leur propre image et H est l'image de E.

Après inversion de cette dernière matrice, il vient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-\beta}{\alpha} \\ 0 & -\dfrac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}.$$

Il reste alors à vérifier que, sous l'effet de cette affinité, l'équation du cercle devient

$$\left(x'' - \frac{\beta}{\alpha}y'' - 1\right)^2 + \frac{(y'' - \alpha)^2}{\alpha^2} = 1.$$

En effectuant le changement de repère

$$\begin{cases} X &= x'' - \beta - 1 \\ Y &= y'' - \alpha\,, \end{cases}$$

ce qui revient à translater l'origine O du repère au point O', point de concours des diagonales du parallélogramme, il vient

$$\left(X - \frac{\beta}{\alpha}Y\right)^2 + \frac{Y^2}{\alpha^2} = 1.$$

Il reste alors à réduire cette expression. Cela peut sembler difficile, car les élèves ne disposent pas nécessairement des outils adéquats. En effet, il leur a sans doute été rarement demandé d'éliminer un terme en XY.

Il est cependant possible de traiter un cas particulier qui leur permettra de se rendre compte de ce qui se passe effectivement.

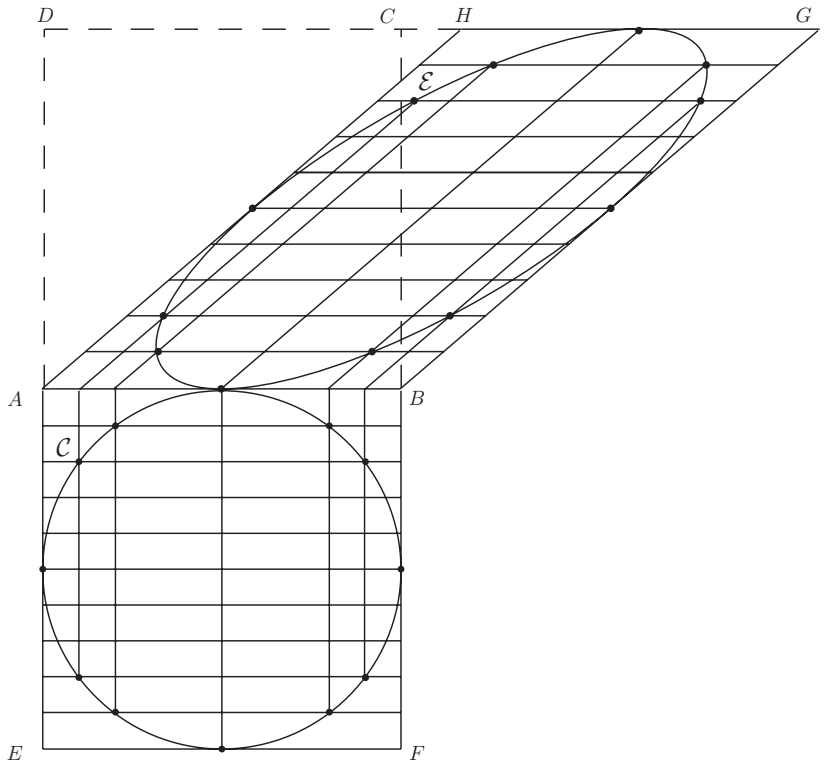

Fig. 13 : Cas particulier (cisaillement)

La figure ci-dessus représente le cas particulier où $\alpha = 1$ et $\beta = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Dans ce cas précis, il n'y a pas de compression. L'affinité est un *cisaillement*. Le choix de β peut sembler arbitraire. Notre but vise simplement à ce que les élèves puissent reconnaître au travers de calculs parfois arides, des objets mathématiques plus familiers (la tangente d'un angle « remarquable » par exemple).

L'observation de la figure fait apparaître clairement que la courbe $\mathcal{E}$ image du cercle $\mathcal{C}$ « ressemble » à une ellipse qui aurait subi une rotation autour de l'origine O'. Sachant que dans l'équation d'une l'ellipse rapportée à ses axes, il n'y a pas de terme en XY, on amène les élèves à l'idée que, si la courbe $\mathcal{E}$ est effectivement une ellipse, une rotation convenable du repère devrait faire « disparaître » ce terme.

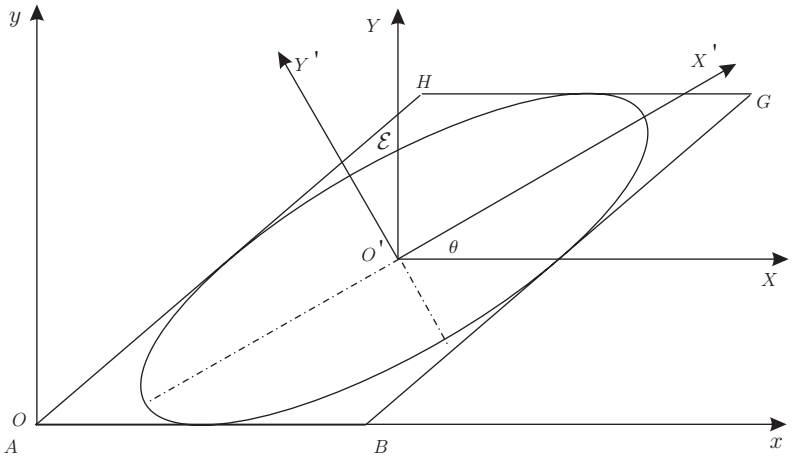

Fig. 14

Pour trouver l'équation de la courbe rapportée à ses axes, on peut la faire tourner d'un angle $-\theta$ autour de l'origine O' ou encore, ce qui revient au même, faire tourner le repère d'un angle θ autour de O'.

En effet, la coordonnée d'un point P de la courbe $\mathcal{E}$ dans le repère $O'X'Y'$, image du repère $O'XY$ par une rotation d'angle θ autour de O', est la même que la coordonnée du point image de P par une rotation d'angle $-\theta$ autour du même point.

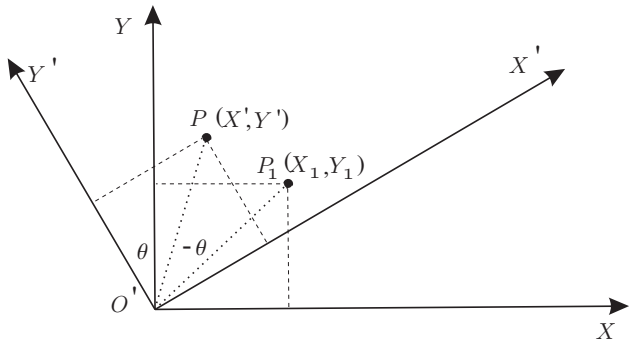

Fig. 15 : $X' = X_1$ et $Y' = Y_1$

Toute rotation conserve l'alignement et le parallélisme. C'est donc une affinité ou plus précisément une transformation linéaire (puisqu'il n'y a pas de translation). Ainsi, une rotation s'exprime sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Les coefficients a, b, c, d sont déterminés comme précédemment en exprimant que la rotation d'angle $-\theta$ envoie le point $I(1,0)$ sur le point $I'(\cos\theta, -\sin\theta)$ et le point $J(0,1)$ sur le point $J'(\sin\theta, \cos\theta)$.

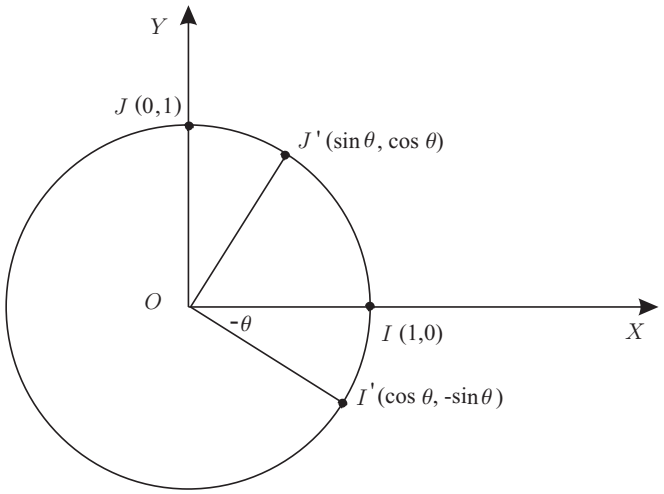

Fig. 16 : Rotation d'angle $-\theta$ des points I et J

Ceci permet de trouver l'écriture matricielle de ladite rotation :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

En inversant cette matrice (dont le déterminant vaut 1), nous obtenons

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}.$$

Revenons au cas particulier du cisaillement envisagé plus haut. L'équation de la courbe

$$\left(X - \frac{2\sqrt{3}}{3}Y\right)^2 + Y^2 = 1$$

devient donc, dans le repère $O'X'Y'$, après une rotation d'angle θ autour de O',

$$\left[\left(\cos\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)X' - \left(\sin\theta + \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right)Y'\right]^2 + \left(\sin\theta X' + \cos\theta Y'\right)^2 = 1.$$

L'angle θ qui annule le terme en $X'Y'$ vérifie la relation

$$-\left(\cos\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)\left(\sin\theta + \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right) + \sin\theta\cos\theta = 0\,,$$

ou encore

$$2\frac{\sqrt{3}}{3}\sin^2\theta - 2\frac{\sqrt{3}}{3}\cos^2\theta + \frac{4}{3}\sin\theta\cos\theta = 0\,,$$

$$2\frac{\sqrt{3}}{3}\cos 2\theta = \frac{2}{3}\sin 2\theta\,,$$

ce qui implique que

$$\operatorname{tg} 2\theta = \sqrt{3}.$$

L'angle

$$2\theta = \frac{\pi}{3}$$

vérifie cette relation. Il vient donc

$$\theta = \frac{\pi}{6}.$$

La matrice de rotation est alors

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

et ainsi

$$\begin{cases} X &= \frac{\sqrt{3}}{2}X' - \frac{1}{2}Y' \\ Y &= \frac{1}{2}X' + \frac{\sqrt{3}}{2}Y'. \end{cases}$$

L'équation de la courbe devient

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}X' - \frac{1}{2}Y' - 2\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2}X' + \frac{\sqrt{3}}{2}Y'\right)\right]^2 + \left(\frac{1}{2}X' + \frac{\sqrt{3}}{2}Y'\right)^2 = 1,$$

$$\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)X' - \left(\frac{1}{2} + 1\right)Y'\right]^2 + \left(\frac{1}{2}X' + \frac{\sqrt{3}}{2}Y'\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{6}X' - \frac{3}{2}Y'\right)^2 + \left(\frac{1}{2}X' + \frac{\sqrt{3}}{2}Y'\right)^2 = 1,$$

qui donne finalement

$$\frac{X'^2}{3} + \frac{Y'^2}{\frac{1}{3}} = 1,$$

ce qui est bien l'équation réduite d'une ellipse dont les axes mesurent $2\sqrt{3}$ et $2\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Il est évident que chacune des étapes de ce calcul peut se faire avec α et β quelconques.

On a construit à l'aide du logiciel Cabri-Géomètre le cas particulier de la figure 13 à la page 322.

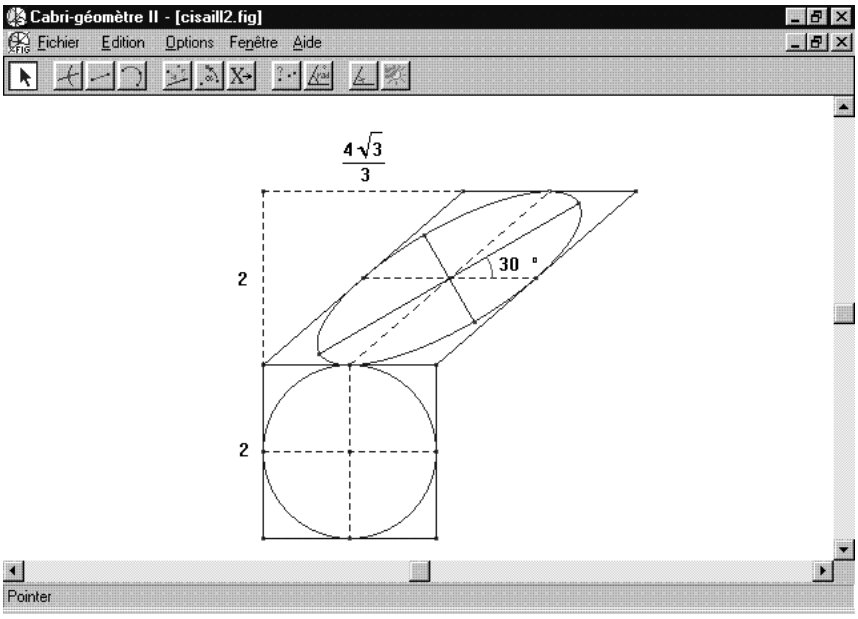

Fig. 17 : Fenêtre Cabri

Connaissant le centre d'une ellipse, il est assez simple de déterminer ses axes principaux. Il suffit de tracer le cercle dont le centre est celui de l'ellipse et qui coupe cette ellipse en quatre points. Les médianes du quadrilatère dont les sommets sont les points d'intersection du cercle et de l'ellipse sont les axes principaux de l'ellipse. Il a alors été demandé au logiciel Cabri de mesurer, par exemple, l'angle entre l'horizontale et le grand axe passant par le centre de l'ellipse. Cette confirmation du calcul par le dessin devrait achever de convaincre les élèves les plus sceptiques.

1.3 Section plane d'un cylindre

Après ce qui vient d'être fait, l'activité que nous proposons maintenant peut sembler très simple. Elle constitue cependant un bon moyen pour introduire l'activité 2, plus complexe.

Comment s'y prendre ?

Qu'entend-on par cylindre ?

Considérons un cercle $\mathcal{C}$ de centre A. On appelle *surface cylindrique de révolution* l'ensemble des droites perpendiculaires au plan du cercle $\mathcal{C}$ et s'appuyant sur le cercle[4].

Chacune des droites dont il est question dans la définition ci-dessus est appelée *génératrice* de la surface cylindrique. La droite perpendiculaire au plan du cercle par A est l'*axe* de cette surface.

Un *cylindre de révolution* est le solide limité par une surface cylindrique de révolution et deux plans perpendiculaires à son axe. Cependant, le terme

[4] Il existe d'autres types de surfaces cylindriques qui ne sont pas de révolution. Elles sont obtenues par le procédé que nous venons de décrire, mais en prenant au départ toute autre courbe qu'un cercle. Nous en rencontrerons quelque-unes dans l'activité 2.

cylindre sera souvent employé pour désigner la surface cylindrique de révolution.

Un *plan tangent* au cylindre est un plan contenant une génératrice et perpendiculaire au plan déterminé par cette génératrice et l'axe de ce cylindre.

Choisissons un repère qui permette d'écrire aisément l'équation du cylindre : l'origine est placée sur l'axe du cylindre et l'axe Oz coïncide avec l'axe du cylindre. Dans un plan perpendiculaire à Oz, Oxy est un quelconque repère orthonormé. Les unités sont évidemment les mêmes sur chaque axe.

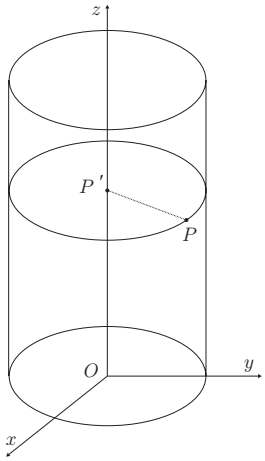

Fig. 18

Si P représente un point quelconque du cylindre et P' sa projection sur l'axe de ce cylindre, la longueur $|PP'|$ est le rayon du cylindre, quelle que soit la hauteur (coordonnée z) du point (figure 18). Ainsi, tout point du cylindre vérifie l'équation

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

où R est le rayon du cylindre.

Remarquons — et cela revêt une certaine importance dans ce qui va suivre — que, en raison de la symétrie que possède tout cercle, cette équation est indépendante de la position des axes x et y dans tout plan perpendiculaire à l'axe Oz.

Les génératrices étant parallèles à l'axe des z, cette dernière inconnue n'apparaît pas dans l'équation ; ce phénomène a déjà pu être observé pour l'équation d'un plan parallèle à l'un des axes.

Quelles sont les sections planes d'un cylindre de révolution ?

En maintenant la vitre qui a servi à l'expérience précédente perpendiculaire aux rayons du soleil, on obtient un cylindre d'ombre. L'ombre qui se dessine sur tout « plan quelconque » par rapport à la vitre est une section plane du cylindre.

Une autre façon de procéder est d'inviter les élèves à disposer un cylindre dans différentes positions dans un plan lumineux. La trace du plan lumineux sur le cylindre permet de visualiser la ligne d'intersection (cette manipulation est décrite dans l'activité 2 de ce chapitre). Ils verront apparaître sur la surface cylindrique :

- un cercle lorsque le plan lumineux est perpendiculaire à l'axe du cylindre ;
- une ellipse ou une partie d'ellipse dans tous les autres cas, à part le cas suivant ;
- deux droites parallèles lorsque le plan lumineux est parallèle à l'axe du cylindre.

Établissons analytiquement ces observations.

Recherche de l'intersection du cylindre avec différents plans.

Cercle. – Le plan de section est perpendiculaire à l'axe du cylindre.

Son équation est $z = k$, où k est une constante et la courbe d'intersection est donnée par le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = k. \end{cases}$$

La première de ces équations est celle d'un cylindre dont la base est un cercle de rayon R. C'est aussi l'équation de la projection orthogonale dans le plan Oxy de la courbe d'intersection. Celle-ci est donc un cercle de rayon R dans le plan $z = h$. Pour écrire l'équation de cette courbe dans le plan Π, plaçons dans celui-ci un repère orthonormé $O'XY$, de même unité que le repère initial, où O' est le point de percée de l'axe Oz dans Π et $O'X$, $O'Y$ sont respectivement parallèles à Ox et Oy. L'équation de la courbe d'intersection est alors

$$X^2 + Y^2 = R^2$$

dans ce repère.

Ellipse. – Le plan de section est oblique.

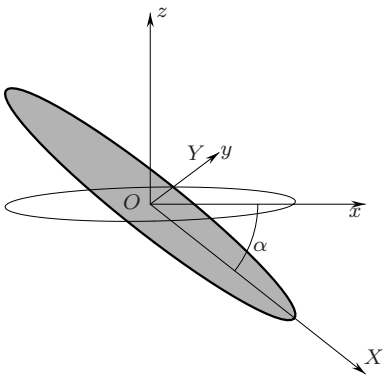

Fig. 19

En vertu de la remarque faite précédemment à propos de la position des axes Ox et Oy, nous choisissons pour origine le point de percée de l'axe du cylindre dans Π. Par O, considérons le plan Δ perpendiculaire à Oz, et dans ce plan, l'axe Oy à l'intersection de Π et Δ de manière que l'équation du plan Π devienne $z = mx$. L'équation de la courbe d'intersection est alors

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = mx. \end{cases}$$

L'équation $x^2 + y^2 = R^2$, qui est celle du cylindre dans l'espace, est aussi celle de la projection orthogonale dans le plan Oxy de la courbe d'intersection.

Pour écrire l'équation de cette courbe dans le plan Π, munissons celui-ci d'un repère OXY (de même unité que le repère Oxy), où OY coïncide avec Oy et OX est sur la droite d'intersection du plan Π avec le plan Oxz.

Si α désigne l'angle formé par les plans Π et Oxy, la coordonnée d'un point $P(x, y)$ est liée à celle du point $Q(X, Y)$ dont il est la projection orthogonale sur le plan Oxy par la relation

$$\begin{cases} x &= X \cos\alpha \\ y &= Y. \end{cases}$$

L'équation de la courbe dans ce repère est

$$X^2 \cos^2\alpha + Y^2 = R^2 \quad \text{ou encore} \quad \frac{X^2}{\left(\frac{R}{\cos\alpha}\right)^2} + \frac{Y^2}{R^2} = 1,$$

qui est l'équation d'une ellipse rapportée à ses axes dont les longueurs valent $\dfrac{2R}{\cos\alpha}$ et $2R$.

Deux droites parallèles. – Le plan de section est parallèle à l'axe du cylindre.

Si l'axe Oy est placé parallèlement au plan de section, l'équation de celui-ci est $x = k$ où k est une constante et l'intersection est donnée par

$$\begin{cases} y^2 = R^2 - k^2 \\ x = k. \end{cases}$$

Dans le plan Π d'équation $x = k$ muni du repère $O'XY$ (O' point de percée de Ox dans Π, $O'X /\!\!/ Ox$, $O'Y /\!\!/ Oy$), on obtient les deux droites parallèles d'équations

$$Y = \sqrt{R^2 - k^2} \quad \text{et} \quad Y = -\sqrt{R^2 - k^2}.$$

2 Sections coniques

De quoi s'agit-il ?

En utilisant un plan lumineux, rechercher et étudier toutes les sections planes d'un cône, appelées *sections coniques*.

Enjeux

Montrer que toute section plane dans un cône est une *conique*, c'est-à-dire une ellipse, une parabole ou une hyperbole, éventuellement dégénérée. À partir des équations du cône de révolution et du plan, démontrer que l'équation de la courbe d'intersection est bien l'équation d'une conique. Discuter du genre de la conique obtenue, en fonction des positions relatives du cône et du plan.

Matières couvertes. – L'ellipse, la parabole et l'hyperbole vues comme *sections planes d'un cône.*
Exemples de réduction d'une équation du deuxième degré à deux variables.

Compétences. – *Reconnaître une conique à son équation cartésienne réduite.*

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – Un cône de plexiglas transparent, ou un cône de papier calque.

Un masque percé d'une fente rectiligne de 0,1 mm de large (ce matériel peut être réalisé par photocopie sur transparent du modèle fourni en annexe à la page 387).

Du papier calque et des transparents.

Un rétroprojecteur.

Prérequis. – Géométrie analytique de l'espace : équation cartésienne d'un plan parallèle à une direction donnée.

Équation d'une conique rapportée à ses axes.

Local. – Il est souhaitable de disposer d'un local que l'on peut au moins partiellement occulter.

2.1 Sections planes d'un cône

Comment s'y prendre ?

La feuille opaque percée d'une fente est déposée sur le rétroprojecteur de sorte que le faisceau de rayons lumineux qui passe par la fente forme un plan lumineux. La trace de celui-ci sera visible sur tout objet placé dans le plan lumineux et cette trace permet de visualiser la ligne d'intersection de l'objet considéré par le plan lumineux.

Le cône de plexiglas est déposé sur la fente dans différentes positions. La description précise des situations observées nécessite la mise en place du vocabulaire approprié.

Considérons un cercle $\mathcal{C}$ de centre A, et S un point de la perpendiculaire en A au plan du cercle $\mathcal{C}$.

On appelle *surface conique de révolution* la surface engendrée par une droite passant par S et s'appuyant sur le cercle. La surface ainsi obtenue est formée de deux parties symétriques, appelées *nappes*, situées de part et d'autre du point S.

La droite SA est *l'axe* de cette surface, et les droites passant par S et s'appuyant sur le cercle en sont les *génératrices*. Le point S en est le *sommet*.

Un *cône de révolution* est un solide limité par une surface conique de révolution, son sommet et un plan perpendiculaire à l'axe de cette surface.

Nous utiliserons le terme *cône* indifféremment pour désigner la surface conique de révolution ou le cône de révolution.

Un *plan tangent* au cône est un plan contenant une génératrice et perpendiculaire au plan déterminé par cette génératrice et l'axe du cône.

L'angle formé par l'axe du cône et une de ses génératrices est appelé *l'angle du cône*.

Angle d'une droite et d'un plan : c'est l'angle aigu formé par la droite et sa projection orthogonale sur ce plan (sauf si la droite est perpendiculaire au plan ; dans ce cas, c'est l'angle droit).

Angle de deux plans sécants : c'est l'angle aigu ou droit formé par les droites d'intersection des deux plans avec un troisième plan perpendiculaire à leur intersection. Il est égal à l'angle aigu ou droit formé par les normales aux deux plans issues d'un point.

Les élèves sont invités à placer le cône dans différentes positions où il est coupé par le plan lumineux, à décrire chacune de ces situations et à reconnaître les coniques, dégénérées ou non, qu'ils pourront ainsi observer. L'hyperbole et la parabole seront plus visibles si le cône est recouvert de papier calque (on peut aussi utiliser un cône de papier calque dont la base est transparente, construit selon la méthode expliquée dans l'activité 5 du chapitre 6). L'ellipse et le cercle se voient mieux sur un cône transparent.

Pour faire apparaître les coniques dégénérées, il convient de placer le sommet du cône sur la fente lumineuse ; la section formée de deux droites sécantes est ainsi obtenue facilement, et il est possible d'observer que ces droites tendent l'une vers l'autre si le cône est incliné progressivement vers la position où il est tangent au plan lumineux.

Les élèves verront apparaître :

- un cercle lorsque le plan lumineux est perpendiculaire à l'axe du cône ;
- une ellipse lorsque le plan lumineux forme avec l'axe du cône un angle supérieur à l'angle du cône ;
- une parabole lorsque le plan lumineux est parallèle à une génératrice du cône ;
- une branche d'hyperbole lorsque le plan lumineux forme avec l'axe du cône un angle inférieur à l'angle du cône, par exemple si le cône est posé sur sa base ;
- deux droites sécantes lorsque le plan lumineux passe par le sommet du cône ;

– une droite lorsque le plan lumineux est tangent au cône.

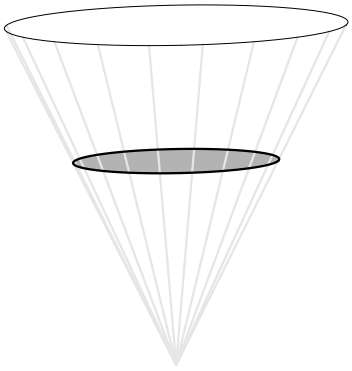

Fig. 20 : Cercle

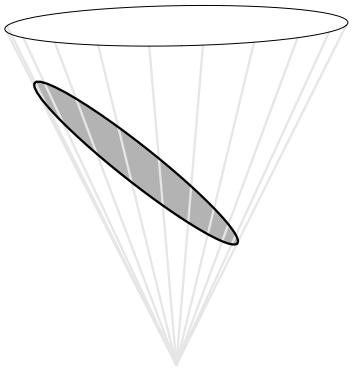

Fig. 21 : Ellipse

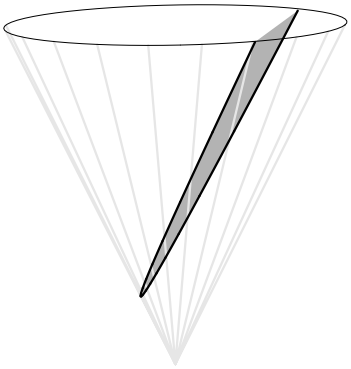

Fig. 22 : Parabole

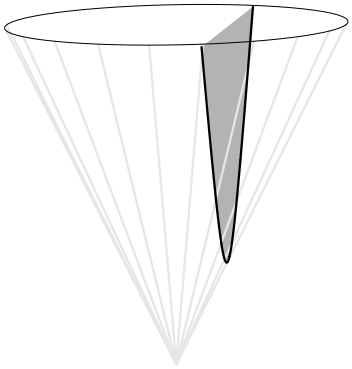

Fig. 23 : Hyperbole

2.2 Équations des sections coniques

Comment s'y prendre ?

Pour identifier les courbes observées, il serait opportun d'en connaître les équations. Celles-ci s'obtiennent en résolvant le système formé par l'équation du cône et celle du plan sécant. Encore faut-il connaître l'équation du cône.

Quelle est l'équation d'une surface conique de révolution ?

Choisissons tout d'abord un repère orthonormé qui permette d'écrire facilement l'équation du cône : l'origine du repère est placée au sommet du cône et l'axe Oz coïncide avec l'axe de celui-ci.

Si P représente un point quelconque de la surface conique et P' la projection de ce point P sur l'axe du cône, les élèves peuvent observer que le rapport entre les longueurs $|OP'|$ et $|PP'|$ est constant. Or, dans le repère choisi, ces longueurs se calculent facilement :

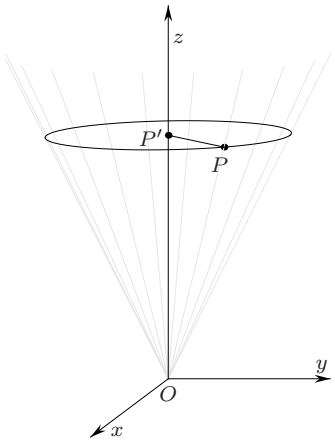

Fig. 24

$$|OP'| = |z| \quad \text{et} \quad |PP'| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Tout point du cône vérifie donc la relation

$$|z| = k\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{où} \quad k > 0.$$

En élevant les deux membres au carré, nous obtenons

$$z^2 = k^2(x^2 + y^2),$$

ce qui est l'équation du cône dans ce repère orthonormé (quelles que soient les positions des axes Ox et Oy dans le plan perpendiculaire en O à l'axe du cône).

Les élèves découvriront le lien qui existe entre la valeur de k et la mesure de l'angle du cône. La valeur de k est le coefficient de direction d'une génératrice du cône dans un plan contenant l'axe Oz et vaut la cotangente de l'angle du cône.

Quelles sont les équations des sections coniques ?

Un plan quelconque Π de l'espace a pour équation

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Il coupe le plan Oxy d'équation $z = 0$ suivant la droite i dont l'équation dans le plan Oxy est $ax + by + d = 0$. Comme il nous est loisible de choisir la position des axes Ox et Oy dans le plan perpendiculaire à Oz, nous les plaçons de telle manière que la droite i soit parallèle à l'un d'entre eux, à l'axe Oy par exemple. Dans ce cas, l'équation de i dans le plan Oxy sera du type $x =$ constante et ne contiendra pas de terme en y. Dans le repère ainsi placé, on aura donc $b = 0$ et l'équation du plan Π sera

$$ax + cz + d = 0.$$

Ce choix du repère, qui a pour but d'éviter de compliquer inutilement les calculs, ne nuit en rien à la généralité de la discussion qui va suivre, car on peut toujours placer le repère dans une telle position par rapport à l'axe du cône et au plan de section.

Les élèves sont invités à déterminer l'équation de la courbe d'intersection du cône et du plan Π et à retrouver tous les cas observés, en faisant varier la position du plan. Il faudra sans doute leur préciser que, dans l'espace, toute équation en x, y, z est l'équation d'une surface ; une courbe est donnée par les équations de deux surfaces dont elle est l'intersection (tout comme une droite est donnée par les équations de deux plans).

Observons tout d'abord que a et c ne peuvent être simultanément nuls, si l'on veut que $ax + cz + d = 0$ soit l'équation d'un plan.

- Si $c \neq 0$, cette équation peut s'écrire sous la forme $z = mx + p$ où $m = \frac{-a}{c}$ et $p = \frac{-d}{c}$. La valeur de m indique l'inclinaison du plan Π par rapport au plan Oxy, et c'est la comparaison des valeurs de k et de m qui permettra de distinguer les positions relatives de ce plan par rapport aux génératrices du cône. Pour interpréter correctement les différents cas, observons la trace du cône et du plan de section dans le plan Oxz d'équation $y = 0$. Dans ce plan, le cône se réduit à ses deux génératrices d'équation $z = kx$ et $z = -kx$, obtenues en factorisant $z^2 - k^2x^2 = 0$. Le plan se réduit à la droite d'équation $z = mx + p$. Les coefficients angulaires de ces droites sont respectivement k, $-k$ et m.

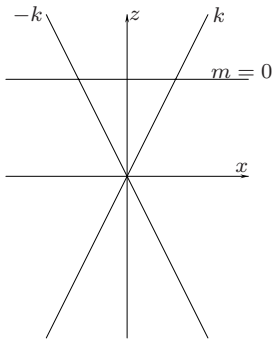

Fig. 25

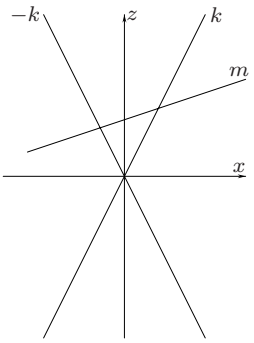

Fig. 26

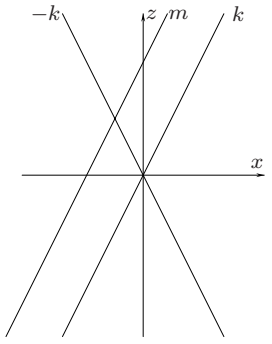

Fig. 27

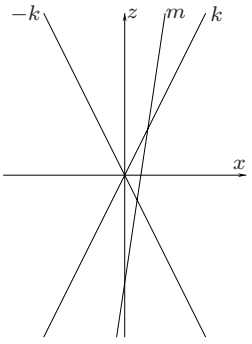

Fig. 28

- si $m = 0$ (figure 25) : le plan de section est parallèle au plan Oxy et donc perpendiculaire à l'axe Oz;
- si $|m| < |k|$ (figure 26) : l'angle formé par le plan de section et le plan horizontal est inférieur à l'angle formé par une génératrice du cône et ce même plan horizontal. L'angle formé par le plan de section et l'axe du cône est alors supérieur à l'angle du cône.
- si $|m| = |k|$ (figure 27) : le plan de section est parallèle à une génératrice du cône. L'angle formé par le plan de section et l'axe du cône est alors égal à l'angle du cône.
- si $|m| > |k|$ (figure 28) : l'angle formé par le plan de section et le plan horizontal est supérieur à l'angle formé par une génératrice du cône et ce même plan horizontal. L'angle formé par le plan de section et l'axe du cône est alors inférieur à l'angle du cône.

• Si $c = 0$, $(a \neq 0)$, l'équation devient $x = q$ où $q = \frac{-d}{a}$. Dans ce cas, le plan de section est parallèle à l'axe Oz.

Considérons tout d'abord les sections du cône lorsque le plan Π ne passe pas par le sommet du cône $(p \neq 0)$. Voici les différents cas qui peuvent se présenter :

Cercle. – Le plan est perpendiculaire à l'axe du cône.

Dans ce cas, $m = 0$ et l'équation du plan Π se réduit à $z = p$. On obtient l'équation de la section du cône par Π en remplaçant z par p dans l'équation du cône. On obtient ainsi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{p^2}{k^2} \\ z = p. \end{cases}$$

.

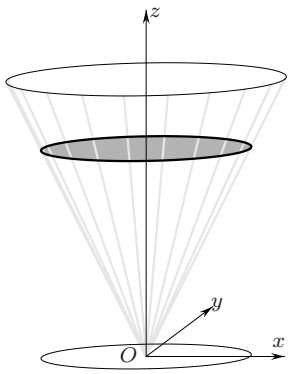

Fig. 29 : La section est un cercle

La première de ces équations est celle d'un cylindre dont la base est un cercle de rayon $\frac{|p|}{k}$. C'est aussi l'équation de la projection orthogonale dans le plan Oxy de la courbe d'intersection. Celle-ci est donc un cercle de rayon $\frac{|p|}{k}$ dans le plan $z = p$. Pour écrire l'équation de la section dans le plan Π, plaçons dans celui-ci un repère orthonormé de même unité que le repère initial, dont l'origine O' est le point de percée de l'axe Oz dans Π tel que

les axes $O'X$ et $O'Y$ soient respectivement parallèles aux axes Ox et Oy. L'équation de la courbe d'intersection dans ce repère est alors

$$X^2 + Y^2 = \frac{p^2}{k^2},$$

et c'est bien l'équation d'un cercle de rayon $\frac{|p|}{k}$.

Remarquons au passage qu'on obtient la même équation pour la courbe d'intersection avec le plan d'équation $z = -p$ qui coupe l'autre nappe du cône.

Ellipse. – Le plan de section est oblique et $|m| < |k|$.

En remplaçant z par $mx + p$ dans l'équation du cône, on obtient pour la courbe d'intersection :

$$\begin{cases} (k^2 - m^2)x^2 + k^2y^2 - 2mpx - p^2 = 0 \\ z = mx + p. \end{cases}$$

La première équation ne comporte pas de terme en z, c'est l'équation d'une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oz. C'est aussi l'équation de la courbe d'intersection de cette surface cylindrique avec le plan d'équation $z = 0$, c'est-à-dire celle de la courbe C, projection de la courbe d'intersection sur le plan Oxy.

Le coefficient $(k^2 - m^2)$ du terme en x^2 est positif puisque $|k| > |m|$. Posons $s^2 = k^2 - m^2$; l'équation de C

$$s^2x^2 + k^2y^2 - 2mpx - p^2 = 0$$

peut être transformée comme suit :

$$s^2(x^2 - \frac{2mp}{s^2}x) + k^2y^2 - p^2 = 0.$$

Ensuite, en ajoutant et en retranchant $\frac{m^2p^2}{s^2}$ pour faire apparaître un carré parfait, nous obtenons

$$s^2(x^2 - \frac{2mp}{s^2}x + \frac{m^2p^2}{s^4}) + k^2y^2 - \frac{m^2p^2}{s^2} - p^2 = 0,$$

$$s^2(x - \frac{mp}{s^2})^2 + k^2y^2 = \frac{p^2(m^2 + s^2)}{s^2}.$$

En posant

$$\begin{cases} x' = x - \frac{mp}{s^2} \\ y' = y, \end{cases}$$

et puisque $m^2 + s^2 = k^2$, nous obtenons

$$s^2x'^2 + k^2y'^2 = \frac{p^2k^2}{s^2},$$

ou encore

$$\frac{x'^2}{\frac{p^2k^2}{s^4}} + \frac{y'^2}{\frac{p^2}{s^2}} = 1,$$

qui est l'équation d'une ellipse rapportée à ses axes. La translation

$$\begin{cases} x' = x - \frac{mp}{s^2} \\ y' = y \end{cases}$$

a donc amené l'origine du repère au centre O' de l'ellipse C.

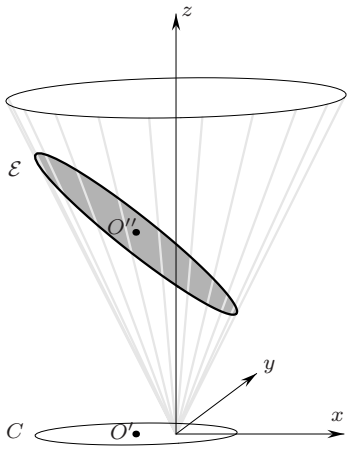

Fig. 30 : La section est une ellipse

Pour écrire l'équation de la section conique $\mathcal{E}$ dans le plan Π, munissons celui-ci d'un repère orthonormé de même unité que le repère initial, dont l'origine O'' est le point de percée dans Π de la parallèle à Oz passant par O', tel que $O''Y$ soit parallèle à $O'y'$ et que $O''X$ soit perpendiculaire à $O''Y$ dans Π.

Si α désigne l'angle formé par les plans Π et Oxy, qui est aussi égal à l'angle formé par les axes $O''X$ et $O'x'$, la coordonnée d'un point $P'(x', y')$ est liée à celle du point $P(X, Y)$ dont il est la projection orthogonale sur le plan $O'x'y'$ par la relation

$$\begin{cases} x' = X \cos\alpha \\ y' = Y. \end{cases}$$

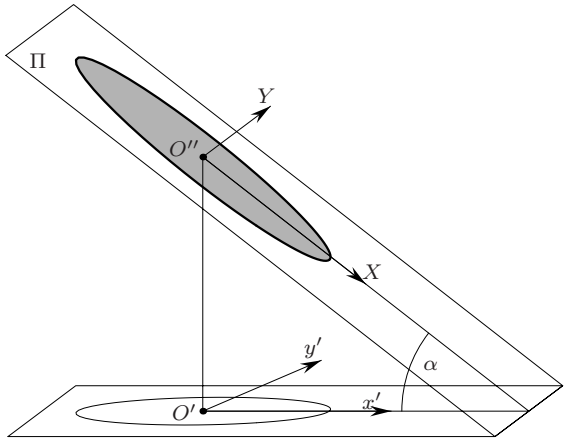

Fig. 31 : Nouveau repère

L'équation de la section conique $\mathcal{E}$ dans ce repère est alors

$$\frac{X^2}{\frac{p^2k^2}{s^4\cos^2\alpha}} + \frac{Y^2}{\frac{p^2}{s^2}} = 1,$$

ce qui est bien l'équation réduite d'une ellipse dont les axes mesurent $\dfrac{2|p|k}{s^2\cos\alpha}$ et $\dfrac{2|p|}{|s|}$.

Parabole. – Le plan de section est oblique et $|m| = |k|$.

Dans l'équation de la courbe d'intersection

$$\begin{cases} (k^2 - m^2)x^2 + k^2y^2 - 2mpx - p^2 = 0 \\ z = mx + p, \end{cases}$$

le coefficient $(k^2 - m^2)$ du terme en x^2 est nul et l'équation de C se réduit à

$$y^2 = \frac{2mp}{k^2}x + \frac{p^2}{k^2},$$

ou encore à

$$y^2 = \frac{2mp}{k^2}(x + \frac{p}{2m}).$$

C'est l'équation d'une parabole P. En posant

$$\begin{cases} x' = x + \frac{p}{2m} \\ y' = y, \end{cases}$$

ce qui revient à translater l'origine du repère au sommet O' de la parabole P, on obtient l'équation réduite

$$y'^2 = \frac{2mp}{k^2}x'.$$

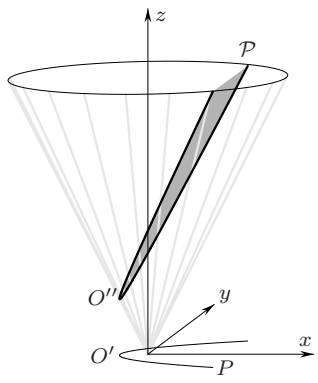

Fig. 32 : La section est une parabole

Pour écrire l'équation de la section conique $\mathcal{P}$ dans le plan Π, munissons celui-ci d'un repère orthonormé de même unité que le repère initial, dont l'origine O'' est le point de percée dans Π de la parallèle à Oz passant par O', tel que $O''Y$ soit parallèle à $O'y'$ et que $O''X$ soit perpendiculaire à $O''Y$ dans Π.

Si α désigne l'angle formé par les plans Π et Oxy, qui est aussi égal à l'angle formé par les axes $O''X$ et $O'x'$, la coordonnée d'un point $P'(x', y')$ est liée à celle du point $P(X, Y)$ dont il est la projection orthogonale sur le plan $O'x'y'$ par la relation

$$\begin{cases} x' = X\cos\alpha \\ y' = Y. \end{cases}$$

L'équation de la section conique $\mathcal{P}$ dans ce repère est alors

$$Y^2 = \frac{2mp\cos\alpha}{k^2}X,$$

qui est bien celle d'une parabole.

Hyperbole, premier cas. – Le plan de section est oblique et $|m| > |k|$. Dans l'équation de la courbe d'intersection

$$\begin{cases} (k^2 - m^2)x^2 + k^2y^2 - 2mpx - p^2 = 0 \\ z = mx + p, \end{cases}$$

le coefficient $(k^2 - m^2)$ du terme en x^2 est négatif, puisque $|k| < |m|$. Posons $-s^2 = k^2 - m^2$; l'équation de la courbe C

$$s^2x^2 - k^2y^2 + 2mpx + p^2 = 0$$

peut être transformée de la manière suivante :

$$s^2(x^2 + \frac{2mp}{s^2}x) - k^2y^2 + p^2 = 0.$$

Ensuite, en ajoutant et en retranchant $\frac{m^2p^2}{s^2}$ pour faire apparaître un carré parfait, nous obtenons

$$s^2(x^2 + \frac{2mp}{s^2}x + \frac{m^2p^2}{s^4}) - k^2y^2 - \frac{m^2p^2}{s^2} + p^2 = 0,$$

$$s^2(x + \frac{mp}{s^2})^2 - k^2y^2 = \frac{p^2(m^2 - s^2)}{s^2}.$$

En posant

$$\begin{cases} x' = x + \frac{mp}{s^2} \\ y' = y, \end{cases}$$

ce qui revient à translater l'origine du repère au centre O' de la courbe C, et puisque $m^2 - s^2 = k^2$, nous obtenons

$$s^2x'^2 - k^2y'^2 = \frac{p^2k^2}{s^2},$$

ou encore

$$\frac{x'^2}{\frac{p^2k^2}{s^4}} - \frac{y'^2}{\frac{p^2}{s^2}} = 1.$$

C'est l'équation d'une hyperbole rapportée à ses axes. La translation

$$\begin{cases} x' = x + \frac{mp}{s^2} \\ y' = y \end{cases}$$

a donc amené l'origine du repère au centre O' de l'hyperbole C.

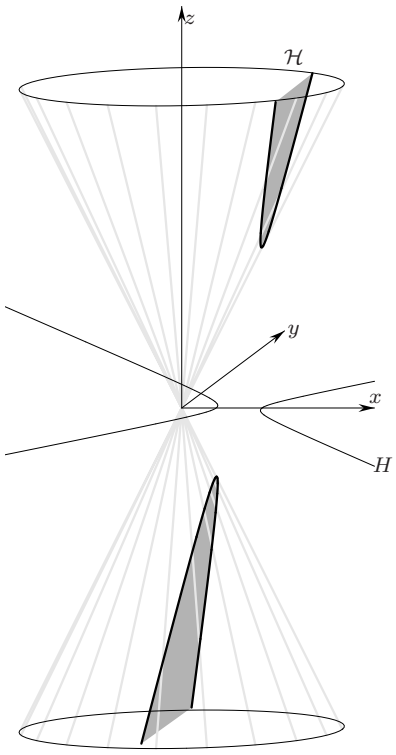

Fig. 33 : La section est une hyperbole

Pour écrire l'équation de la section conique $\mathcal{H}$ dans le plan Π, munissons celui-ci d'un repère orthonormé de même unité que le repère initial, dont l'origine O'' est le point de percée dans Π de la parallèle à Oz passant par O', tel que $O''Y$ soit parallèle à $O'y'$ et $O''X$ est perpendiculaire à $O''Y$ dans Π.

Si α désigne l'angle formé par les plans Π et Oxy, qui est aussi égal à l'angle formé par les axes $O''X$ et $O'x'$, la coordonnée d'un point $P'(x', y')$ est liée à celle du point $P(X, Y)$, dont il est la projection orthogonale sur le plan $O'x'y'$, par la relation

$$\begin{cases} x' = X\cos\alpha \\ y' = Y. \end{cases}$$

L'équation de la section conique $\mathcal{H}$ dans ce repère est alors

$$\frac{X^2}{\frac{p^2k^2}{s^4\cos^2\alpha}} - \frac{Y^2}{\frac{p^2}{s^2}} = 1,$$

ce qui est bien l'équation réduite d'une hyperbole dont les axes mesurent $\dfrac{2|p|k}{s^2\cos\alpha}$ et $\dfrac{2|p|}{|s|}$.

Hyperbole, deuxième cas. – Le plan de section est parallèle à l'axe du cône.

Dans ce cas, l'équation du plan Π devient $x = p$. Le plan Π est alors parallèle au plan Oyz et on obtient l'équation de la section du cône par Π

en remplaçant x par p dans l'équation du cône. On obtient ainsi

$$\begin{cases} \frac{z^2}{k^2p^2} - \frac{y^2}{p^2} = 1 \\ x = p. \end{cases}$$

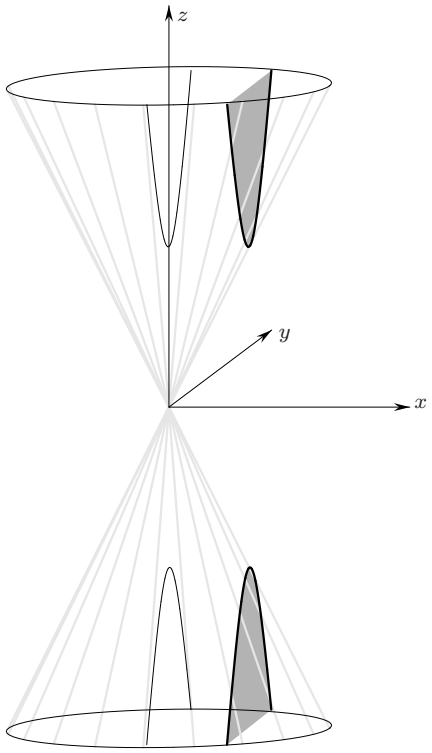

Fig. 34 : La section est une hyperbole

La première équation est celle de la projection orthogonale dans le plan Oyz de la courbe d'intersection. Pour écrire l'équation de cette courbe dans le plan Π, munissons celui-ci d'un repère $O'YZ$ de même unité que le repère initial, où O' est le point de percée de Ox dans Π et tel que $O'Y$ et $O'Z$ soient respectivement parallèles à Oy et Oz. L'équation de la courbe d'intersection est alors

$$\frac{Z^2}{k^2p^2} - \frac{Y^2}{p^2} = 1$$

dans ce repère. C'est l'équation d'une hyperbole dont les axes mesurent $2k|p|$ et $2|p|$.

Coniques dégénérées. – Le plan de section passe par le sommet du cône.

- Le plan Π est perpendiculaire à l'axe du cône.
  L'équation du plan Π est alors $z = 0$ et la section du cône par Π a pour équation
  $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$
  Le seul point d'intersection est donc le sommet du cône.

- Le plan de section est oblique et $|m| < |k|$.
  L'équation du plan Π est $z = mx$ et la section du cône par Π a pour équation
  $$\begin{cases} k^2y^2 + (k^2 - m^2)x^2 = 0 \\ z = mx. \end{cases}$$
  Comme $k^2 - m^2 > 0$, le seul point d'intersection est le sommet du cône.
- Le plan de section est oblique et $|m| = |k|$.
  En remplaçant $k^2 - m^2 = 0$ dans l'équation de la section, on voit que celle-ci est la droite d'équation
  $$\begin{cases} y = 0 \\ z = mx. \end{cases}$$
- Le plan de section est oblique et $|m| > |k|$.
  Comme $k^2 < m^2$, on pose $t^2 = m^2 - k^2$ et l'équation de la section devient
  $$\begin{cases} k^2y^2 - t^2x^2 = 0 \\ z = mx. \end{cases}$$
  En factorisant, on obtient comme section du cône les deux droites d'équations
  $$\begin{cases} y = \frac{t}{k}x \\ z = mx \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y = -\frac{t}{k}x \\ z = mx. \end{cases}$$
- Le plan de section est parallèle à l'axe du cône.
  L'équation du plan Π est alors $x = 0$ et la section du cône par Π a pour équation
  $$\begin{cases} z^2 - k^2y^2 = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$
  La section est donc formée des deux génératrices d'équations
  $$\begin{cases} z = ky \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z = -ky \\ x = 0. \end{cases}$$

Ces sections planes du cône, qui se réduisent à un point, une droite ou deux droites sont appelées *coniques dégénérées*. Elles ont été observées précédemment, en plaçant le sommet du cône dans le plan lumineux.

Prolongements possibles

1. L'ellipse, la parabole et l'hyperbole peuvent être observées également comme ombres à la lampe d'un cercle. Un cercle sur transparent est collé sur la vitre maintenue verticalement par son support. Le plan de projection est le plan horizontal. L'ombre du cercle qui apparaît sur ce plan est la section du cône d'ombre dont le sommet est la lampe et dont les génératrices sont les rayons lumineux interrompus par le cercle. En faisant varier la position de la lampe, on montre facilement le passage continu de l'ellipse à la parabole, puis à une branche d'hyperbole. Des dessins montrant le passage de l'ellipse à la parabole et réalisés au moyen du logiciel Cabri-Géomètre sont présentés ci-dessous. Remarquons que le cône d'ombre n'est pas un

cône de révolution, puisque la lampe n'est plus sur la perpendiculaire au plan du cercle passant par son centre.

Cette expérience ne permet pas de montrer les coniques dégénérées, la position où le plan de projection passe par le sommet du cône (la lampe) est peu compatible avec le dispositif employé et fournit des ombres très médiocres.

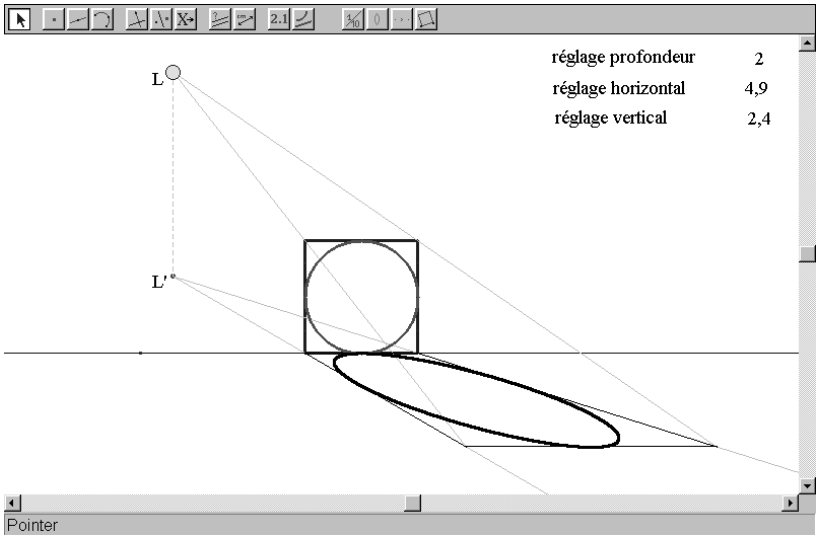

Fig. 35

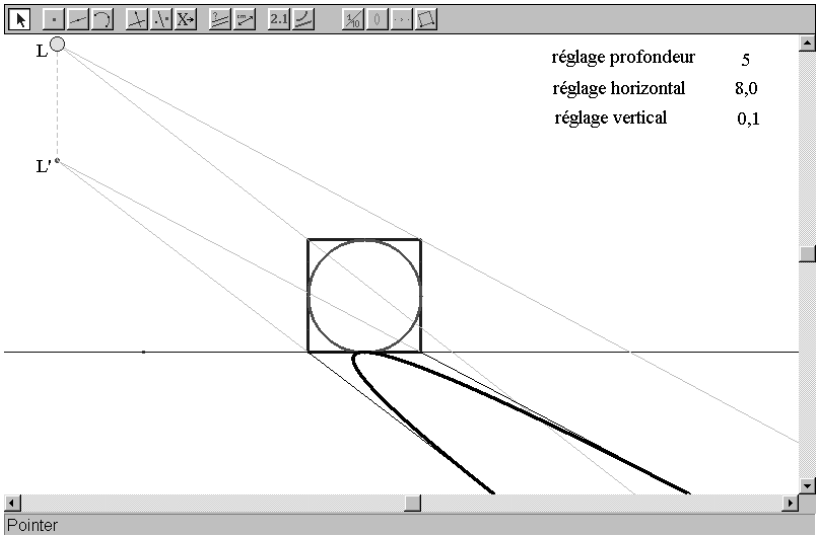

Fig. 36

2. Les théorèmes de Dandelin et Quételet (connus à l'étranger sous le nom de *théorèmes belges*) établissent le lien entre les sections planes dans les cônes et les coniques définies comme lieux géométriques. Cette méthode est abordée dans CREM [1995].