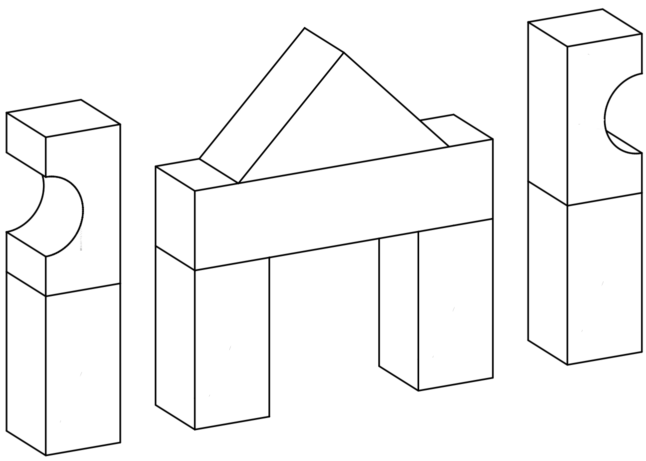
CONSTRUIRE ET REPRÉSENTER

UN ASPECT DE LA GÉOMÉTRIE

DE LA MATERNELLE JUSQU'À DIX-HUIT ANS



CREM a.s.b.l.

CONSTRUIRE ET REPRÉSENTER

Un aspect de la géométrie
de la maternelle jusqu'à dix-huit ans

Cette étude a été réalisée
dans le cadre des conventions de recherche 81, 95 à 98 passées avec le
Ministère de l'Éducation, de la Recherche et de la Formation
de la Communauté française de Belgique.
Deux postes de chargé de mission ont été affectés à temps partiel à cette recherche par le
Comité de Concertation de la Formation Continue
du Caractère non confessionnel.
Un poste de chargé de mission a été affecté à temps partiel à cette recherche par le
Comité de Concertation de la Formation Continue
du Caractère confessionnel.

Avertissement. – Cette étude devait au départ s'étaler sur trois ans. À la suite d'une décision administrative, elle a duré trois ans et huit mois. Le présent volume présente la partie de la recherche que nous avons pu faire en plus du projet initial, grâce à la prolongation de la période de recherche. Un autre volume, intitulé *Formes et mouvements, perspectives pour l'enseignement de la géométrie*, rend compte de la partie de la recherche correspondant au projet initial.

Le présent volume, consacré essentiellement à des situations-problèmes conçues pour les élèves et commentées pour les enseignants, est divisé en trois parties correspondant aux tranches d'âge de deux et demi à dix ans, de dix à quinze et de quinze à dix-huit. Des feuillets intercalaires de couleur séparent les trois parties.

Ce document est bien entendu destiné à être diffusé auprès du public enseignant. Il le sera sous forme d'imprimé et aussi sur Internet. Avant diffusion, il sera complété par quelques situations-problèmes que nous n'avons pas eu le temps d'y inclure au cours des huit mois de sa composition. *Ces additions serons assurées par le CREM en dehors de tout contrat de recherche.*

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
5 rue Émile Vandervelde B-1400-Nivelles
Tél. : 32 67 212527 Fax : 32 67 212202
Juin 1999

CONSTRUIRE ET REPRÉSENTER

UN ASPECT DE LA GÉOMÉTRIE

DE LA MATERNELLE JUSQU'À DIX-HUIT ANS

CREM a.s.b.l.

Préliminaire

La présente étude n'aurait pas été possible sans la collaboration active et attentive de toute une équipe constituée par Michel Ballieu, licencié en mathématiques, Bernard Honclaire, régent, Marie-France Guissard, licenciée en mathématiques, Luc Lismont, docteur en mathématiques, Nicolas Rouche, agrégé de l'enseignement supérieur, Thaïs Sander, institutrice primaire, Françoise Van Dieren, régente, Jacques Van Santvoort, régent et docteur en mathématiques et Marie-Françoise Van Troeye, régente. Partant de son expérience – considérable pour certains – et de ses propres points de vue, chacun a apporté à l'œuvre commune sa part d'idées et de critiques. Le travail a comporté, en grand nombre, des lectures, des expériences en classe, des exposés, des débats, des brouillons.

La responsabilité des chapitres se répartit comme suit. Les chapitres 1 à 4 sont dus principalement à Thaïs Sander, le chapitre 5 à Nicolas Rouche, le chapitre 6 à Thaïs Sander et Luc Lismont. Le chapitre 7 est dû à Françoise Van Dieren avec la collaboration de Luc Lismont, sauf la première section due à Thaïs Sander. Les chapitres 8 à 10 sont dus à Michel Ballieu et Marie-France Guissard. Les parties de l'étude relatives aux logiciels Cabri et Sections sont dues à Bernard Honclaire. Pour l'ensemble de l'étude, la surveillance critique de Bernard Honclaire, Françoise Van Dieren, Marie-Françoise Van Troeye et Jacques Van Santvoort a été particulièrement vigilante.

Luc Lismont et Nicolas Rouche ont coordonné l'ensemble du travail.

Nos remerciements les plus chaleureux vont à toutes les personnes qui nous ont aidés par leurs idées et leurs critiques tout au long de l'élaboration de ce travail. Mentionnons tout particulièrement Francis Buekenhout, Sylvain Courtois, Michel Demal, Thérèse Gilbert, Louis Habran, Christiane Hauchart, Marisa Krysinska, Francis Michel, Guy Noël, Maggy Schneider ainsi que tous les membres des deux comités d'accompagnement, celui du CREM et celui du Ministère.

L'ensemble du texte a été saisi en LaTeX2$_\epsilon$ et les dessins ont été réalisés avec les logiciels Mathematica, Canvas, Corel Draw et Cabri.

Avant-Propos

Construire

Au fil des mois et des années, l'enfant manipule des objets avec une précision croissante : il porte son biberon à ses lèvres, pose un cube sur un autre et puis encore un, dépose une assiette sur la table, dispose parallèlement un couteau et une cuiller, lace ses souliers, construit une maison en briques Lego, reconstruit un puzzle, fait une cocotte en papier, monte une tente, dessine un rectangle, fait passer un cercle par deux points, puis par trois, construit une boîte en carton, un cône en papier, démonte et remonte son vélo, etc. C'est en assemblant ainsi des objets, en les ajustant les uns aux autres, en les emboîtant, ... que l'enfant se familiarise avec les formes et les grandeurs.

Assembler et construire sont des modalités d'une pensée géométrique qui se manifeste d'abord dans l'action. Il s'agit bien d'une pensée, car ces actions comportent des enchaînements que l'enfant maîtrise, adapte, garde en mémoire et peut répéter. Lorsque le langage apparaît, il fait plus qu'accompagner l'action : par son pouvoir d'évocation, il aide à la concevoir et à la corriger en cours de route. Quand les situations se compliquent, il étend son rôle jusqu'à devenir l'instrument du raisonnement. Cette évolution aboutit aux théorèmes qui fondent les constructions géométriques.

On le voit, le verbe *construire* désigne un thème important dans l'apprentissage de la géométrie de la prime enfance à l'âge adulte.

Représenter

On n'a pas de vue d'ensemble d'une montagne, d'un quartier de ville, d'un bâtiment, d'un navire. Mais on peut recourir à une maquette ou un modèle réduit pour mieux appréhender l'ensemble. On ne voit pas du tout une maille cristalline, une molécule. C'est pourquoi on crée de ces objets minuscules des modèles fortement agrandis.

On voit directement un objet plan de dimensions modérées tenu devant les yeux en position frontale. Bien entendu, s'il est opaque, on n'en voit qu'une face. On ne saisit jamais qu'en partie la forme d'un solide non plan opaque. Pour l'imaginer mieux, on le projette en plan dans diverses positions. Chaque projection est partielle et ambiguë, plusieurs projections se complètent. On fait des plans d'un objet existant pour le voir mieux, et d'un objet en projet pour montrer comment le construire.

Beaucoup d'objets et d'événements sont éphémères. On en conserve le souvenir sous forme de photographies ou autres représentations planes. Beaucoup d'objets sont intransportables, mais on en transmet des représentations planes sur du papier ou des écrans.

Ainsi les hommes se donnent, de beaucoup de choses qu'ils perçoivent malaisément, des modèles mieux à portée de leurs organes sensoriels. En particulier l'activité humaine s'appuie sur un va-et-vient fréquent entre les objets et leurs représentations, entre l'espace et le plan.

La théorie de la similitude fonde la conception des modèles réduits ou agrandis. La théorie des projections parallèles ou centrales donne la clef des représentations planes les plus communes.

On le voit, le verbe *représenter* désigne lui aussi un thème important de l'apprentissage de la géométrie.

Un parcours dans la géométrie

Nous proposons, sur le double thème de construire et représenter, des situations-problèmes pouvant servir à apprendre la géométrie, depuis ses racines perceptives et motrices jusqu'à son accomplissement théorique.

Dans le système scolaire, les situations-problèmes sont dorénavant présentées comme un moyen privilégié d'apprentissage. Elles consistent en questions auxquelles les élèves ne sauraient répondre complètement en s'appuyant seulement sur ce qu'ils savent. Des questions par conséquent qui les obligent à élaborer – avec l'aide indispensable du professeur – des éléments de théorie nouveaux pour eux. La pratique des situations-problèmes, qui n'est pas une panacée et ne devrait pas exclure d'autres formes d'enseignement, répond à une exigence de sens. En effet, tout savoir répond à des questions, aide à comprendre, et donc il ne faut pas occulter les questions.

Les situations que nous avons choisies traitent de nombreuses matières de géométrie, mais ne couvrent pas tout le programme. Elles n'épuisent pas non plus tout ce qu'on pourrait regrouper sous les deux thèmes de construire et représenter. Il ne s'agit donc ici ni d'un cours, ni d'un manuel, mais plutôt de matériaux proposés aux enseignants qui sont à la recherche de questions significatives pour leurs élèves... mais aussi et d'abord pour eux-mêmes. Chaque situation-problème est accompagnée de multiples commentaires.

Les trois volumes couvrent des tranches d'âges allant approximativement de deux ans et demi jusqu'à 10 ans, puis de 10 à 15 ans, et enfin de 15 à 18 ans. Bien que chaque volume puisse être lu indépendamment des deux autres, ils forment un tout et l'on s'est efforcé de montrer la continuité des matières traitées d'un bout à l'autre. Dans l'enseignement mathématique, on construit toujours sur des acquis antérieurs. Or une foule d'acquis de base sont fondamentaux. Mais ils sont tellement élémentaires et évidents pour les adultes que ceux-ci auraient tendance à oublier ce qu'ils sont pour les enfants : des étapes essentielles et parfois difficiles. Notre espoir est que d'assez nombreux enseignants, à quelque niveau qu'ils se trouvent, parcourent les trois volumes : ils réaliseront mieux ainsi d'où viennent et vers où vont leurs élèves. Ils comprendront mieux le cheminement passionnant qui va des balbutiements de l'enfance à la science constituée.

Esquissons maintenant le contenu des trois volumes.

De deux ans et demi à 10 ans. – Nous avons choisi de partir d'emblée « dans l'espace », en proposant de construire des solides. On peut en former dans la masse, par exemple en pâte à modeler. On peut aussi en construire en assemblant des faces polygonales, ce qui provoque le va-et-vient entre les développements et les solides. On peut enfin assembler seulement des tiges pour construire des squelettes de solides. Ces trois modalités requièrent des manœuvres distinctes et attirent l'attention sur des propriétés variées des solides.

Dans cette tranche d'âge, on peut dessiner des objets « de face et de profil », ce qui s'approche des projections orthogonales. On peut aussi dessiner des cubes et des assemblages de cubes sur du papier couvert d'un réseau régulier de points. On peut aussi jouer avec des ombres et enfin reconnaître, sans les analyser techniquement, des représentations diverses d'objets divers telles que des perspectives cavalières, des photographies, etc.

De 10 à 15 ans. – Le modelage d'objets géométriques simples ainsi que la fabrication de solides en papier, en carton et en tiges sont approfondis dans la tranche d'âge de 10 à 15 ans. Les constructions deviennent plus précises, elles entraînent des mises au point sur les grandeurs (problèmes d'échelles, de poids, d'aires et de volumes).

Les projections orthogonales d'objets simples nous ont paru possibles dès la fin de l'école primaire. Nous proposons au passage quelques représentations d'assemblages de cubes.

D'autre part, vers 14 ans, nous introduisons les développements comparés de pyramides et de cônes.

Les règles de la perspective parallèle – relatives à la conservation du parallélisme et des rapports – sont d'abord observées (conjecturées) sur des dessins, puis mises en œuvre pour produire des représentations. Leur étude s'imbrique avec celle de la géométrie plane. Le niveau des problèmes envisagés demande d'enrichir et préciser le langage utilisé jusque-là. D'autre part, apprendre ces règles de perspective ainsi que le va-et-vient entre les objets et leurs représentations, reconnaître et maîtriser les inévitables ambiguïtés de celles-ci, nous a paru déjà assez difficile. Nous avons remis à une étape ultérieure, vers quinze ans, l'interprétation des perspectives parallèles comme projections parallèles et la possibilité de les engendrer par des ombres au soleil.

De 15 à 18 ans. – L'étude des ombres au soleil fournit l'interprétation de la perspective parallèle comme projection parallèle. Cette étude, qui conduit aux propriétés d'incidence et de parallélisme dans l'espace, recouvre une partie substantielle du programme de géométrie de l'espace de quatrième année.

Les ombres à la lampe donnent l'occasion d'étudier les projections centrales. Celles-ci s'approfondissent dans une étude élémentaire de la perspective à point de fuite. Dans ce cadre, on aborde les sections coniques, y compris dans leur présentation analytique. Ces derniers développements sont destinés aux cours à beaucoup d'heures de mathématiques.

Quelques principes qui nous ont inspirés

Le présent ouvrage est inspiré sur le plan épistémologique par l'étude du CREM intitulée *Formes et mouvements*[1], dans laquelle nous avons tenté de dégager les matériaux et les moyens de l'apprentissage géométrique de la maternelle à l'âge adulte.

Une première observation est que le savoir géométrique s'enracine dans des perceptions et des activités de la première enfance, qui ne s'expriment sur le moment dans aucune théorie. La chose est évidente pour les enfants qui ne savent pas encore ou savent à peine parler. L'erreur serait de croire que dès la première primaire l'enseignement de la géométrie débouche nécessairement sur des éléments théoriques explicités. Une foule de gestes et de mouvements imprimés à des objets, une foule de manipulations, de constructions et de dessins, accompagnés, commandés, décrits dans un langage non théorique constituent progressivement l'*expérience spatiale* qui sera théorisée un jour.

L'intervention du langage – au début dans un registre non théorique, on vient de le voir –, est cruciale. C'est par le langage, venant compléter les représentations, les symboles et les signes, que les notions s'installent dans la pensée, et que se prépare la construction ultérieure d'une théorie. Il importe donc de favoriser les fonctions naturelles du langage dans l'action[2].

En ce qui concerne la construction de la théorie, nous nous sommes efforcés d'une part de proposer des situations-problèmes appropriées à chaque âge, ni trop faciles, ni trop difficiles, mais aussi de borner chaque fois la théorie à ce que la situation traitée requiert. En d'autres termes, nous pensons que pour passer à un niveau théorique plus difficile, il faut proposer aux élèves des questions plus difficiles, dont les solutions requièrent ce supplément de théorie.

Nous pensons avoir clairement montré dans *Formes et mouvements* que les régularités qui constituent l'objet d'étude de la géométrie sont la source d'un sentiment esthétique élémentaire mais vrai. Nous avons fait de notre mieux pour que la beauté des figures, des symétries, des patterns traverse notre texte, comme une source de motivation et d'inspiration.

[1] CREM [1999].

[2] Sur le passage de l'acte à la pensée et au langage, voir surtout, outre *Formes et mouvements*, H. Wallon [1970], et L. Vygotski [1997].

Présentation type des situations-problèmes

Les situations-problèmes proposées dans ce recueil ont été conçues chacune pour des élèves déterminés, dans une tranche d'âge donnée et possédant certaines connaissances préalables. Toutefois, elles peuvent être adaptées, dans certaines limites, à d'autres élèves. Chaque professeur en jugera.

Chaque situation est conçue le plus souvent pour une ou deux heures de cours, souvent moins d'une heure pour les classes maternelles et primaires.

Ces situations sont présentées selon un plan uniforme[3] comportant les rubriques suivantes :

De quoi s'agit-il ? – Description en une ligne ou deux de l'activité proposée aux élèves.

Enjeux. – Matières couvertes et compétences visées. Références aux Programmes, aux Socles de compétences et aux Compétences terminales.

De quoi a-t-on besoin ? – Description du matériel requis. Relevé des connaissances supposées chez les élèves.

Comment s'y prendre ? – Cette rubrique comporte des questions à proposer aux élèves, des indications pour organiser le travail en classe, des éléments de réponses aux questions, et les éléments de théorie auxquels la situation aboutit normalement.

Écho d'une ou plusieurs classes. – Indications sur le déroulement de l'activité dans l'une autre classe expérimentale. On relève les réactions les plus communes, mais aussi les plus significatives, même si elles sont isolées.

Prolongements possibles. – Nouvelles situations-problèmes plus ou moins difficiles que celle faisant l'objet principal de la section. Ces situations peuvent jouer le rôle de variantes, d'exercices, de questions d'évaluation, de poursuite du travail pour élèves mordus.

Vers où cela va-t-il ? – À quelles questions mathématiques plus avancées la situation en question prépare-t-elle de manière directe ou indirecte ? Quels rapports la situation en question entretient-elle avec d'autres disciplines ? Quelle place l'activité occupe-t-elle dans la culture mathématique globale ?

Commentaires. – Éclaircissements de toutes natures susceptibles d'être utiles aux enseignants et aux élèves, comme par exemple des indications sur l'histoire des mathématiques, des commentaires sur le caractère plus ou moins réaliste de certains modèles mathématiques, etc.

[3] Ce plan est inspiré par E. C. Wittmann et G. Müller [1990 et 1994].