Résumé et conclusions

1 Percevoir les formes et les grandeurs

L'être humain acquiert par le toucher et la vue une première idée de la forme et de la grandeur des objets. Ceux-ci sont des choses qui bougent, ou qu'on peut bouger, ou par rapport auxquelles on peut bouger : ils ne sont pas d'abord des sous-ensembles immobiles d'un espace de points. On les perçoit, on les tourne pour les voir sous toutes leurs faces, on les amène par rapport à soi dans des positions privilégiées. On saisit leur symétrie orthogonale éventuelle par la concordance de cette symétrie avec celle des organes du toucher et de la vue, on saisit leurs autres symétries par des mouvements réguliers du regard. Ces observations s'appliquent aussi aux objets plans, parce qu'ils nous apparaissent dans toutes les positions possibles et que nous les amenons en position privilégiée. La géométrie plane est d'abord une géométrie de l'espace.

Par ailleurs, les connaissances sur les formes et les grandeurs acquises en position privilégiée s'exportent vers des situations quelconques, c'est-à-dire hors de l'emprise des perceptions claires, grâce au sentiment de conservation des objets rigides.

Ce premier registre de la connaissance géométrique n'est pas propre à l'enfance. Tous les êtres humains l'exercent sans cesse. Mais c'est sur lui que s'appuient les activités géométriques des tout petits enfants, lorsqu'ils manient des objets divers et les ajustent les uns aux autres. C'est aussi sur lui que s'appuient les élèves plus âgés (et même les adultes), lorsqu'ils cherchent à construire, à comprendre ou à représenter des situations planes ou spatiales qui posent question. C'est assez dire que la manipulation, l'observation et la construction d'objets sont des modalités normales et bien souvent incontournables de la pensée géométrique. Il serait malsain d'imaginer que la géométrie, à partir d'un certain stade, soit nécessairement une activité purement théorique. Quel dommage si un enseignant ou un élève n'arrive pas à tirer profit d'un modèle de polyèdre ou de surface !

Sur ces questions de perception, de positions privilégiées des objets par rapport à l'observateur, d'intervention des isométries simples dans la perception, voir le chapitre 1.

2 Deux raisons d'être de la géométrie élémentaire

Certains se demandent si la géométrie a bien sa place dans l'enseignement des mathématiques élémentaires. Il n'est même pas rare de voir des enseignants bâcler la partie géométrique du programme.

Or la géométrie, comme l'a dit Hans Freudenthal, c'est d'abord *saisir l'espace*. Mais que cela veut dire ?

Comme nous venons de le rappeler, le toucher et la vue apportent une première connaissance des formes et des grandeurs. Mais le pouvoir des sens est limité. Par exemple, personne n'a jamais saisi par la vue la forme et la grandeur objectives d'un lac, ou de la pyramide de Khéops. Par la force de son esprit, Thalès a ramené la mesure de cette dernière à des opérations accessibles : mesurer un chemin sur le sol horizontal, mesurer un bâton et son ombre. Qu'elle soit historique ou légendaire, cette découverte symbolise la fonction première de la géométrie : saisir l'espace par des opérations de pensée. La géométrie donne une maîtrise de l'espace, un pouvoir sur l'espace, qui dépasse les capacités des sens.

Mais par delà les choses qui échappent à notre perception claire, il y a les phénomènes qui échappent, dans un premier temps tout au moins, à notre entendement. Comment se fait-il par exemple que par trois points passe un cercle et un seul ? Que faut-il pour qu'un cercle passe par quatre points ? Que faut-il pour qu'un angle droit se projette orthogonalement sur un angle droit ? Pourquoi y a-t-il trois pavages réguliers ? Et cinq polyèdres réguliers ? Il ne servirait à rien d'allonger cette liste. Les objets qui peuplent l'espace provoquent une multitude d'étonnements, de curiosités. Arriver à comprendre ces phénomènes, c'est aussi saisir l'espace, appendre comment il fonctionne.

Ces deux observations ont des conséquences pour l'enseignement. Tout d'abord, chaque enfant doit recevoir une formation qui lui permette de dominer des situations géométriques élémentaires : on voit trop d'adultes incapables de penser au delà des données de leurs perceptions immédiates. Ceci est un véritable *must*. Ensuite, la profusion des situations qui posent problème offre aux enseignants des possibilités multiples de stimuler leurs élèves et de jalonner les matières du programme par des défis intéressants. La deuxième partie de cette étude développe explicitement des exemples de situations-problèmes pour les classes. Les parties 4, 5 et 6 évoquent brièvement les situations relatives aux représentations planes, à la linéarité et à l'orientation, et fournissent des références à leur sujet.

3 Des objets mentaux

S'il est vrai que la géométrie sert à dépasser par la pensée les limitations des sens, il est vrai aussi qu'elle se constitue dans la pensée par l'exercice même des sens, dans les perceptions et l'action. Les objets mentaux, proches des notions quotidiennes et qui n'ont donc pas la forme technique précise des concepts mathématiques axiomatisés, se forment par l'observation, les manipulations, les déplacements et déformations continus d'objets, les constructions de maquettes et de figures. Les objets mentaux trouvent leur identité en se contrastant les uns par rapport aux autres. Ceci implique qu'on les étudie habituellement non pas de manière monographique – un chapitre sur les rectangles, suivi d'un autre sur les triangles isocèles, d'un autre sur les parallélogrammes, etc. – mais bien par familles qui en font voir de plusieurs sortes apparentées.

La deuxième partie montre des exemples d'activités conduisant à des familles d'objets, figures et mouvements. Sur ces familles, on consultera aussi *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans* (CREM [1995]).

4 Des inférences évidentes et d'autres moins évidentes

Les premières évidences, celles qui permettent de démarrer la géométrie raisonnée, trouvent leur origine dans la causalité physique : certaines manipulations, déformations, constructions donnent toujours le même résultat. Ces évidences portent sur des implications, souvent du type : si je fais ceci, j'obtiens cela. Elles varient quelque peu d'une personne à l'autre, mais des discussions permettent d'aboutir à un certain fond commun d'évidences, sur lequel on peut bâtir une première théorie.

Ces évidences sont assez nombreuses. Mais elles présentent des parentés, elles se regroupent autour de ce que nous avons appelé des structures de base. Par exemple, la médiatrice, le triangle isocèle, le losange, un cercle muni d'une corde, relèvent de la même structure. On peut donc regrouper la foule des évidences de départ et des phénomènes voisins en quelques chapitres cohérents.

Les implications de départ les plus utiles portent sur des figures à un ou deux degrés de liberté : chaque famille est assez nombreuse pour qu'on retrouve souvent certains de ses membres dans les situations géométriques que l'on veut étudier, elle est assez peu nombreuse pour pouvoir être sans peine parcourue en imagination, tous ses membres ayant l'air de la famille.

Dans la deuxième partie, nous essayons, en développant quelques chapitres de géométrie plane, de montrer comment on peut construire « une géométrie naturelle », s'appuyant sur les instruments de pensée spontanés des élèves. Ces instruments prennent en compte, outre les déductions de type ordinaire, certains mouvements des objets, des déformations continues, des perceptions de symétries, etc. S'il est vrai que l'enseignement mathématique se doit de partir sur le terrain des élèves, il faut s'appuyer sur ces moyens initiaux de la pensée et rejoindre ultérieurement, quand on en ressent le besoin ou qu'on en a le projet, les modalités plus classiques du raisonnement mathématique. En expliquant les principaux phénomènes de la géométrie plane élémentaire, y compris certains théorèmes non évidents, à partir d'intuitions familières, nous espérons donner aux enseignants des clefs d'interprétation des difficultés qu'éprouvent leurs élèves à construire une première pensée géométrique structurée.

5 Objets et mouvements, figures ou transformations ?

On peut se demander si dans l'apprentissage de la géométrie il faut donner la priorité aux objets par rapport aux mouvements, aux transformations, ou bien l'inverse. Mais les isométries et similitudes sont constitutives de la notion d'objet, les objets sont structurés par des symétries (voir chapitre 2). Ces symétries sont perçues grâce aux mouvements correspondants des mains et des yeux. Le parallélisme et l'orthogonalité, les médianes, médiatrices et bissectrices sont des éléments de symétrie ; les représentations planes sont des transformations d'objets ; les frises, les pavages et les réseaux sont des objets symétriques interprétés dans le cadre des groupes de transformations. Au total, les figures et les transformations nous semblent être, d'un bout à l'autre de l'enseignement, et dans le fond de la géométrie elle-même, les deux faces indissociables de la géométrie. La pensée saisit et interprète les unes en s'appuyant sur les autres et réciproquement. La géométrie est un dialogue ininterrompu entre les figures et les transformations.

6 Représenter les objets

Les maquettes et diverses sortes de projections amènent dans le champ des perceptions claires des représentations des objets qui nous échappent parce qu'ils sont trop grands, trop petits, mal situés, indéplaçables.

La plupart des représentations ressemblent aux originaux du fait qu'elles sont linéaires. Mais lorsque, telles les projections, elles enlèvent une dimension aux objets, elles provoquent des ambiguïtés, des pertes d'information. Il faut donc apprendre à les interpréter.

L'apprentissage de la géométrie de l'espace provoque un paradoxe : d'une part on ne peut apprendre cette géométrie sans s'appuyer sur des représentations, et d'autre part il faut connaître assez de géométrie pour interpréter ces représentations, et davantage pour en produire. Apprendre à les interpréter, c'est aussi apprendre à « voir dans l'espace ».

Les représentations ressemblent aux images visuelles, mais s'en distinguent du fait qu'elles obéissent à des règles précises. Il faut apprendre à les discerner.

D'autre part, les diverses projections sont des clefs d'interprétation de phénomènes réels tels que les ombres au soleil et à la lampe, et la photographie.

La perspective, outre son importance culturelle dans l'histoire de la peinture, conduit par extension aux projections centrales de tout l'espace et à la géométrie projective. Sur le terrain de cette dernière, on peut apprendre ce que sont les mathématiques formalisées : il suffit de penser à la banalisation des points et droites à l'infini et à la théorie de la dualité.

Les projections cartographiques, outre leur utilité pratique, sont des exemples bienvenus de transformations non linéaires.

Ces considérations suffisent à montrer que les représentations sont d'une importance pratique, théorique et culturelle considérable. Non seulement, comme nous l'avons dit, elles sont indispensables pour apprendre la géométrie de l'espace, mais même on exagérerait peu en les proposant comme thème unique de cet apprentissage. Elles sont porteuses de tous les éléments essentiels de cette géométrie.

Elles peuvent être pratiquées à tous les âges, depuis les dessins représentatifs des tout petits enfants, en passant par les projections orthogonales et parallèles, jusqu'à la perspective centrale. Nous espérons que la description succincte que nous en donnons à la quatrième partie aidera les commissions de programme et les enseignants à dépasser la difficulté chronique que beaucoup de personnes éprouvent à cet égard.

7 La linéarité comme fil conducteur

Un enseignement « en spirale » s'étend par nature à l'ensemble de la scolarité. Mais pour le concevoir, il faut saisir l'enchaînement des matières d'un bout à l'autre. Nous avons essayé de montrer que la linéarité, sans cesse contrastée à la non-linéarité, est un fil conducteur fort, sinon très apparent. La linéarité, c'est avant tout la conservation de la somme, qui est la première et la plus naturelle des opérations.

On trouve la linéarité dans les grandeurs, avant toute mesure, ne serait-ce que lorsqu'on reproduit un dessin en plus petit ou en plus grand. La mesure des grandeurs est linéaire : la mesure de la somme de deux grandeurs est la somme des mesures. La proportionnalité est l'expression de la linéarité à une dimension. En tant que fonction, elle se représente par un graphique en ligne droite.

Les transformations usuelles du plan font voir la linéarité à deux dimensions, avec une explosion de phénomènes nouveaux. Le calcul vectoriel et matriciel exprime cette forme plus riche de la linéarité, dans laquelle la conservation des rapports (qui, en gros, découle de celle de la somme) est remplacée par la conservation des combinaisons linéaires.

La recherche des sous-espaces invariants et des valeurs propres des transformations linéaires sous-tend un grand nombre d'applications de l'algèbre linéaire en mécanique, électricité, statistique, programmation, théorie des jeux. Ainsi, en apprenant les transformations linéaires du plan vers 13 ou 14 ans, les élèves se forgent des intuitions qui peuvent leur venir à point dans la majorité des filières de l'enseignement supérieur.

Dans notre cinquième partie, nous avons tenté d'expliquer, en le clarifiant, l'engendrement de la structure linéaire d'un bout à l'autre de la scolarité. Nous avons cherché à montrer des parentés significatives.

Il ne faudrait pas tirer de notre exposé la conclusion que toute cette matière devrait être enseignée dans l'ordre que nous avons adopté, qui est en gros l'ordre de son engendrement épistémologique. Une progression convenable de l'apprentissage se doit de respecter l'environnement et la démarche des enfants, plutôt qu'une théorie écrite pour des adultes. Voici deux exemples de cela. D'abord il faut laisser les enfants s'intéresser à toutes les mesures de grandeurs que la vie quotidienne leur offre, même avant qu'ils aient appris systématiquement à mesurer. Ensuite, il ne faut pas, parce que le non-linéaire est plus difficile que le linéaire, en reporter la rencontre. Le linéaire se comprend d'emblée par confrontation au non-linéaire. Lorsqu'on rencontre un phénomène modélisable par une fonction, il faut se demander tout de suite s'il est ou non linéaire.

8 L'orientation

L'orientation est un domaine qui nous a semblé mériter un traitement à part. Dans le plus jeune âge, elle est liée à la psychomotricité. Les premières découvertes sont celles du dessus et du dessous, puis de l'avant et de l'arrière, par rapport à soi, puis par rapport à des « objets » déjà orientés, tels qu'une autre personne, un vélo,... La gauche et la droite sont plus difficiles, vu la symétrie du corps humain.

Le plan conduit à l'orientation des triangles et polygones, des cercles, des horloges, des systèmes de deux axes. Un plan plongé dans l'espace pose le problème des changements liés au passage de l'observateur d'un côté à l'autre du plan.

Dans l'espace, on découvre l'orientation des parallélipipèdes, des tire-bouchons, des systèmes de trois axes, et les diverses règles d'orientation qu'utilisent les physiciens. On découvre aussi les surfaces non orientables comme le ruban de Möbius. Et enfin vient l'orientation d'un espace à n dimensions.

Il est significatif de trouver ainsi une chaîne quasi ininterrompue de phénomènes depuis le moment où un enfant se met debout – avec la tête en haut – jusqu'aux changements de base dans un espace vectoriel.

Ajoutons enfin à ces conclusions une remarque sur la portée du travail. Quel peut être le rôle d'une étude de synthèse sur un problème aussi vaste ? Certainement pas de creuser aussi profondément que possible aucun sujet particulier. Mais peut-être de poser ou de préciser des questions à la lumière de la vue d'ensemble. Nous pensons qu'un regard global sur l'enseignement – en l'occurrence de la géométrie – est indispensable : il faut bien tâcher de savoir, en dépassant toutes les divisions horizontales du système d'enseignement, d'où on vient, où on va et comment on y va.