Sixième partie

L'orientation

Introduction

Nous exposons ci-après les questions d'orientation de droites, de plans et de l'espace telles qu'elles se posent d'une part en géométrie, et d'autre part dans la vie pratique. Ces questions sont pour l'essentiel bien connues, même si le fait de *vivre le nez dessus* empêche beaucoup de personnes de les discerner clairement. Il nous a paru nécessaire d'en proposer un exposé systématique, pour pouvoir expliquer ultérieurement comment elles sont rencontrées depuis que le jeune enfant apprend à se tenir debout et à avancer vers sa mère, jusqu'à ce que, ayant grandi, il étudie éventuellement les bases des espaces vectoriels.

L'exposé ci-après étant assez théorique, voici quelques indications sur des situations et problèmes susceptibles de soutenir l'apprentissage de l'orientation aux divers âges. Tout d'abord, les tout petits enfants n'ont guère besoin d'autres sollicitations que celles de leurs environnement immédiat pour découvrir le haut et le bas, ainsi que l'avant et l'arrière de leur propre personne. Les ouvrages de psychomotricité abondent en situations et en jeux les amenant à découvrir les autres problèmes d'orientation solubles à leur âge, au premier rang desquels se trouvent bien entendu la gauche et la droite : voir B. De Lièvre et L. Staes [1993] et L. Lurçat [1982]. Sur la psychomotricité en général, voir surtout J. Le Boulch [1976].

L'étude des transformations et des figures s'accompagne naturellement de l'étude de leur orientation. Le miroir intervient comme l'un des objets les plus communs qui provoquent des changements d'orientation. Nous renvoyons ici aux autres parties de cette étude où ces matières sont exposées (voir surtout les troisième et cinquième parties).

Un ouvrage stimulant sur les problèmes d'orientation en général est M. Gardner [1964].

20

ORIENTER LES DROITES

1 Éléments de théorie

Considérons sur une droite (figure 1) un segment a et l'ensemble de tous les segments de même longueur que a. Sur la figure, nous n'en n'avons dessiné que quelques-uns. Considérons aussi un segment b marqué d'un point à une de ses extrémités. Considérons de plus tous les segments de même longueur que b et aussi marqués à une extrémité[1].

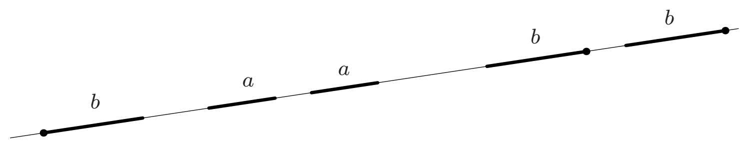

Fig. 1

Tous les segments du type a peuvent être amenés l'un sur l'autre *par glissement le long de la droite*. Tel n'est pas le cas des segments du type b qui sont de deux sortes : ceux marqués d'un côté, et ceux marqués de l'autre. Les segments d'une sorte peuvent être amenés l'un sur l'autre par glissement le long de la droite, et il en va de même des segments de l'autre sorte. Par contre, il est impossible d'amener un segment d'une sorte sur un segment de l'autre par un tel glissement.

Ainsi nous avons découvert sur la droite des objets isométriques (c'est-à-dire de même forme et même mesure) qu'on ne peut pas amener l'un sur l'autre par glissement le long de la droite.

On exprime cela en disant que la droite est *orientable*.

On dit qu'on *oriente* la droite quand on privilégie une des deux classes de segments marqués, ce qui peut se faire en leur donnant un nom. On dira par exemple que cette classe privilégiée définit le *sens positif* sur la droite. L'autre classe définit alors le *sens négatif*. Un tel choix est absolument arbitraire. En dépit de leur acception commune, les termes *positif* et *négatif* ne portent *a priori* en eux aucune connotation de valeur.

[1] Nous considérons des segments « pointés » plutôt que des flèches, de manière à ne pas évoquer un type d'objet qui déborde de la droite.

Pour superposer un segment pointé avec un autre d'orientation opposée, on peut recourir à une symétrie orthogonale autour d'un point (un centre), comme le montre la figure 2. Par contre, le symétrique orthogonal d'un segment non pointé peut être envoyé par glissement sur son original. Et si le centre de la symétrie est le milieu du segment donné, on n'a même pas besoin d'un glissement, car le segment retombe alors sur lui-même. Un segment non pointé est symétrique, un segment pointé à un bout ne l'est pas.

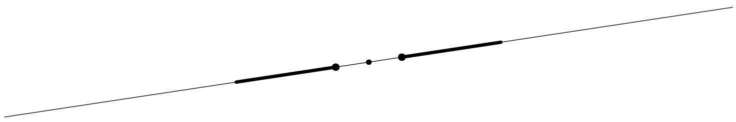

Fig. 2

En dehors des segments pointés à un bout, une infinité d'autres figures asymétriques peuvent servir à orienter la droite. Deux figures isométriques non superposables par glissement, par exemple celles de la figure 3, sont appelées figures *énantiomorphes.*

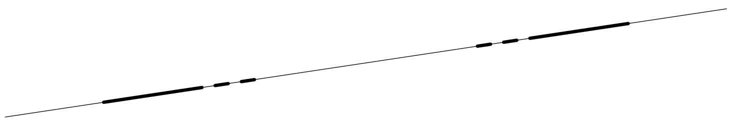

Fig. 3

On peut associer *conventionnellement* les deux classes de segments pointés avec deux classes quelconques de figures énantiomorphes. Il y a deux conventions possibles, et arbitraires.

Dans la pratique ordinaire des mathématiques, lorsqu'on veut représenter une droite orientée, on dessine un segment et on le munit d'une pointe de flèche[2].

2 La droite plongée dans l'espace

Les seules opérations que nous ayons faites jusqu'ici étaient de glisser des figures (rectilignes) le long de la droite, et d'envoyer une figure sur sa symétrique par rapport à un point de la droite. Pour réaliser cette dernière opération, on envoie chaque point de la figure le long de la droite, de l'autre côté du centre de symétrie et à la même distance de celui-ci que le point de départ. Certes, on ne pourrait pas réaliser physiquement une telle opération si le segment était un bâtonnet. Car il faudrait que les molécules du bois voyagent indépendamment les unes des autres, et se dépassent l'une l'autre sur une route de largeur nulle ! Il s'agit donc d'une opération purement mentale, mais dont la description ne

[2] Pour ne pas surcharger l'exposé, nous n'introduisons pas ici le problème de l'ordre pour les points d'une droite.

fait rien intervenir en dehors de la droite. Donc, jusqu'à présent, *nous ne sommes pas sortis de la droite*[3].

Pratiquement toutefois, l'être humain vit dans l'espace, et les droites sont des traits de crayon, des fils tendus ou d'autres objets de ce genre. On peut représenter un segment d'une droite par un bâtonnet tenu le long de la droite, et si on veut passer à son symétrique orthogonal par rapport à un centre, on peut le sortir de la droite, le retourner et le ramener ensuite sur la droite à l'endroit souhaité[4]. C'est ce que le suggère la figure 4.

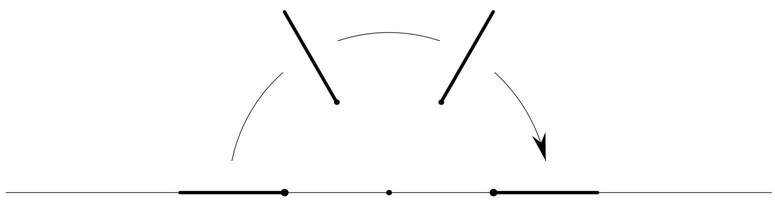

Fig. 4

On appelle *direction de droites*, dans un plan ou dans l'espace l'ensemble de toutes les droites parallèles à une droite donnée. Si une droite d'une direction de droites est orientée, on peut transporter naturellement son orientation à toute autre droite de la direction. Il suffit pour cela de translater la droite orientée pour l'amener sur une autre quelconque. Si on a ainsi organisé de manière concordante l'orientation de toutes les droites de la direction, on dit que celle-ci est *orientée*.

Ces quelques considérations rassemblent l'essentiel de ce que l'on peut dire en général sur l'orientation d'une droite. Venons-en maintenant aux droites et aux directions particulières que nous offrent l'univers physique ainsi que le monde des êtres vivants et celui des objets fabriqués.

3 Le haut et le bas

Les corps lourds abandonnés à eux-mêmes sans vitesse initiale tombent verticalement. L'homme se tient naturellement debout, c'est-à-dire en position verticale, les pieds par terre et la tête en haut. Les bébés doivent apprendre à se tenir debout. En cherchant l'équilibre dans le champ de la pesanteur, ils découvrent la verticale sur leur propre corps, grâce aux organes (l'oreille interne et le cervelet) qui permettent de maintenir l'équilibre[5]. Sans ces réactions automatisées du système sensori-

[3] Pour construire une géométrie de la droite, on se donne la droite et rien d'autre, et en particulier on ne se permet pas des excursions en dehors de la droite. Car si on se donnait une telle permission, on utiliserait des propriétés d'un espace plus grand que la droite, et donc on ne ferait pas une géométrie de la droite pure et simple.

[4] La possibilité d'une telle manœuvre vient de ce que, paradoxalement, le segment orienté n'est pas un objet orienté de l'espace. Nous reviendrons sur ce point au chapitre 22 à la page 295.

[5] Au rebours des mammifères à quatre pattes, qui ont pourtant aussi un haut et un bas, l'homme debout offre une approximation raisonnable de la ligne droite (verticale). On dit d'ailleurs à un enfant « tiens-toi droit ». Et le

moteur, le corps serait naturellement en position instable, comme une baguette que l'on tenterait de déposer verticalement sur le sol.

La direction verticale est naturellement orientée. Cela permet de spécifier le sens d'un objet vertical asymétrique : on tient un crayon pointe en haut, un pendule avec sa masse en bas, un homme debout a la tête en haut, mais s'il fait le poirier, il a la tête en bas, etc.

Une ambiguïté de langage provient du fait que la position naturelle et l'une des plus communes de l'homme est la verticale tête en haut. De ce fait, les mots qui désignent le côté de sa tête et le côté de ses pieds sont souvent empruntés à la verticale physique. Lorsqu'on dit par exemple *bras vers le haut*, on se réfère à la station debout. Il arrive que les professeurs de gymnastique emploient la même expression pour signifier *bras dans le prolongement du corps* (et non *bras effectivement verticaux*, ce qui les mettrait perpendiculaires au corps).

Les verticales que nous avons évoquées – un crayon, un pendule, un homme debout – ne sont pas vraiment des droites géométriques. Ces objets physiques ne s'identifient pas aux objets idéalisés des mathématiques. Cela ne nous a pas empêchés de parler clairement de leur orientation. Nous ne ferons cette remarque qu'une seule fois : elle vaut pour tous les objets réels que nous aurons à évoquer dans la suite.

4 L'avant et l'arrière

Après avoir examiné la direction verticale, qui est unique et imposée par l'univers physique[6], considérons les directions horizontales. Le fait que l'homme avance naturellement droit devant lui a déterminé pour lui un *avant* et un *arrière*. La direction avant-arrière n'est donc nullement une direction de l'univers physique, elle est fixée par rapport au corps lui-même et change lorsque celui-ci tourne. Il y a autant de directions de ce type que de points de l'horizon vers lesquels l'homme peut se diriger. Lorsque des personnes regardent dans la même direction, et qu'on leur commande un pas en avant, leurs mouvements sont cohérents. Si au contraire elles regardent dans des directions variées, et qu'on leur commande le même mouvement d'un pas en avant, elles partent chacune devant soi. Par contraste, si dans un gymnase on dit à quelques personnes de monter à la corde, elles partent en parallèle.

Quasiment tous les être vivants qui se déplacent (mammifères, poissons, reptiles, etc.) ont aussi un avant (du côté où va le mouvement) et un arrière. Par comparaison, les êtres vivants

fait que le corps de l'homme soit ainsi en quelque sorte massé, ou rassemblé autour d'une droite verticale a pour effet de minimiser l'effort qu'il doit fournir pour se maintenir en équilibre. Les animaux à quatre pattes ont un problème d'équilibre moins aigu.

[6] Nous ne considérons pas ici les variations de la verticale selon l'endroit du globe terrestre où l'on se trouve.

qui ne se meuvent pas, comme la plupart des végétaux, ont un dessus et un dessous, mais pas un avant et un arrière : ils se disposent de manière équilibrée et quasi symétrique autour d'un axe vertical. L'homme a transmis la propriété d'avoir un avant et un arrière à beaucoup d'objets fabriqués, non seulement ceux qui se meuvent tels que les autos, les vélos, les traîneaux, les flèches, etc. mais aussi les chaises, les manteaux, les lunettes et les longues-vues, les fusils, etc.

Si un objet est situé *devant* une personne, c'est-à-dire du côté de son avant, celle-ci parlera d'autres objets situés *devant* ou *derrière* l'objet en question. On dit aussi *à l'avant* et *à l'arrière.* Le sens qui va de *derrière* l'objet vers *devant* celui-ci est paradoxalement opposé au sens qui va de l'arrière vers l'avant de la personne.

Lorsqu'un objet placé devant la personne est lui-même naturellement orienté, il hérite d'un avant et d'un arrière imposé par sa position habituelle : on parle de l'avant et de l'arrière d'un poste de télévision en position quelconque. Par contre quelqu'un ne situe des choses devant ou derrière un ballon que si celui-ci se trouve devant lui.

Dans certaines circonstances, on est amené à comparer deux déterminations naturelles du sens sur une droite. Par exemple, quand deux personnes se font face, leurs sens avant-arrière sont opposés. Par exemple encore, un voyageur dans un train peut souhaiter s'asseoir dans le sens de la marche ou à l'opposé. Une personne peut marcher normalement ou à reculons.

5 La gauche et la droite

Fig. 5

Les bras étendus latéralement à l'horizontale définissent, par rapport au corps humain, une direction habituellement orientée par la *droite* et la *gauche.* Imaginons une personne qui, comme le dieu Janus, posséderait un visage d'un côté de sa tête et un autre visage symétrique de l'autre côté (figure 5). Supposons aussi que le reste de son corps soit *le même à l'avant et à l'arrière*, ou qu'en d'autres termes on n'arrive plus à lui attribuer un avant et un arrière. Comment désignerions-nous sa gauche et sa droite ? Tout ce que nous pourrions faire serait de fixer un sens conventionnel sur la direction de ses bras étendus, par exemple en lui peignant une main en rouge.

Ainsi la détermination de la droite et de la gauche dépend de l'avant et de l'arrière. Mais les deux directions avant-arrière et bras étendus latéralement déterminent un plan. C'est pourquoi nous traiterons de l'orientation droite-gauche au chapitre 21 consacrée à l'orientation des plans.

6 Orientation de directions quelconques

Venons-en maintenant aux droites de direction quelconque. Certaines sont parcourues par un mouvement de sens constant. Un cours d'eau possède un *amont* et un *aval*. Si un mobile parcourt une droite, on parlera des points situés à l'avant ou à l'arrière du mobile. Une fourchette possède des dents d'un côté et un manche de l'autre. Les balais, les pelles, etc. sont orientés de manière analogue.

Les directions qui, dans l'univers physique, ne sont ni verticales ni horizontales, sont parfois orientées par référence à la direction verticale. On parle souvent d'un chemin parcouru dans le sens de la montée, ou de la descente. Ainsi, un sens est parfois déterminé sur une droite à partir d'un sens connu sur une autre direction que celle de la droite (autre direction qui ne peut être orthogonale à celle de la droite).

21

Orienter les plans

1 Éléments de théorie

Considérons dans un plan un rectangle particulier, par exemple celui marqué a sur la figure 1, et l'ensemble de tous les rectangles isométriques à a. Sur la figure, nous n'en avons dessiné que quelques-uns. Dans ce même plan, considérons un parallélogramme particulier, par exemple celui marqué b. Considérons de plus tous les parallélogrammes isométriques à b. Nous n'en avons à nouveau dessiné que quelques-uns.

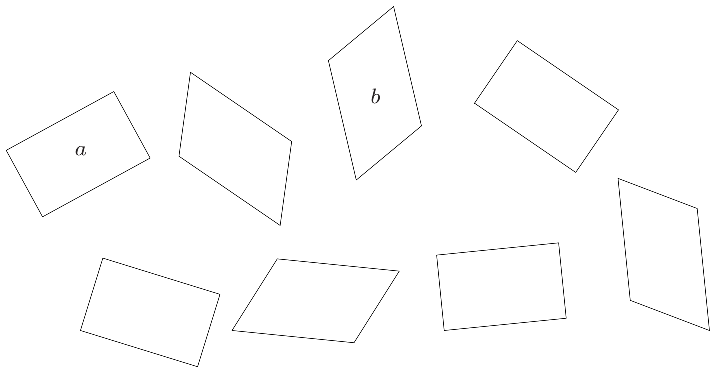

Fig. 1

Tous les rectangles peuvent être amenés l'un sur l'autre par glissement dans le plan. Par contre certains parallélogrammes ne peuvent pas être amenés l'un sur l'autre de cette manière. On peut en fait les répartir en deux classes. On reconnaît ceux d'une même classe au fait précisément qu'on peut les amener l'un sur l'autre. Mais on ne peut pas, par glissement dans le plan, amener un parallélogramme d'une classe sur un parallélogramme de l'autre. De tels parallélogrammes sont dits *énantiomorphes*.

Ainsi il y a des objets qui, quoique isométriques, ne peuvent pas être amenés en coïncidence par glissement dans le plan.

On exprime cela en disant que le plan est *orientable*.

On dit qu'on oriente le plan quand on privilégie une des deux classes de parallélogrammes et on peut, si besoin en est, donner un nom à cette classe. Un tel choix est absolument arbitraire.

Pour superposer un parallélogramme à un autre isométrique mais d'orientation opposée, on peut recourir à une symétrie orthogonale comme le montre la figure 2.

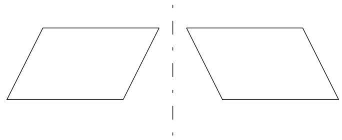

Fig. 2

Par contre, le symétrique orthogonal d'un rectangle est un rectangle qu'on peut faire coïncider par glissement dans le plan avec le premier (voir figure 3). Et si l'axe de symétrie choisi est l'un des deux axes de symétrie du rectangle lui-même, on n'a même pas besoin d'un glissement, car le rectangle retombe alors sur lui-même. On exprime cela en disant que le rectangle possède une *symétrie bilatérale.* Un parallélogramme non rectangle par contre ne possède pas ce genre de symétrie.

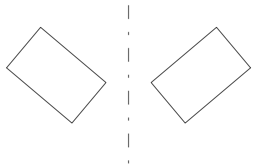

Fig. 3

D'autres figures peuvent servir à orienter le plan. Par exemple tout triangle non isocèle possède un énantiomorphe, ce qu'illustre la figure 4.

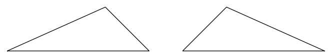

Fig. 4

Pratiquement, on ne se sert quasiment jamais des parallélogrammes ou des triangles pour orienter le plan.

Assez souvent on choisit un cercle marqué d'une flèche (un sens de parcours). La figure 5 montre deux cercles isométriques énantiomorphes. Nous verrons à la section 2 pourquoi, *si on refuse de sortir du plan,* on ne peut pas désigner un de ces deux cercles comme correspondant au sens des aiguilles d'une montre, et l'autre au sens opposé.

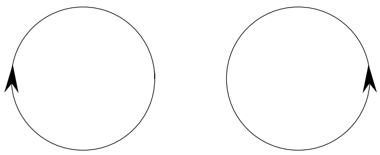

Fig. 5

Une autre façon habituelle d'orienter le plan consiste à se servir d'un système d'axes. La figure 6 montre plusieurs systèmes d'axes qui se répartissent en deux classes énantiomorphes.

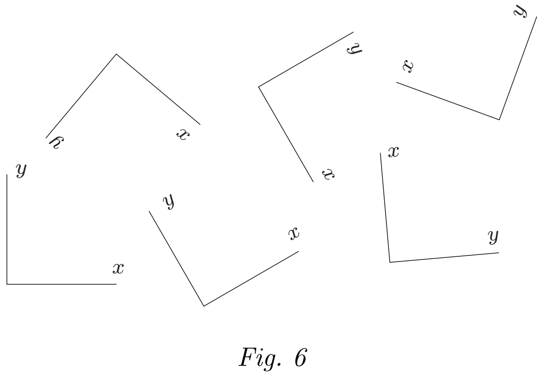

Fig. 6

On peut mettre en correspondance les cercles orientés et les systèmes d'axes. On dira par exemple qu'un système d'axes et un cercle orienté ont *la même orientation* si, lorsqu'on tourne l'axe des x *d'un angle droit* pour l'amener sur l'axe des y, le

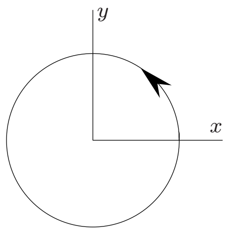

Fig. 7

mouvement se fait dans le même sens que sur le cercle. Cette situation est illustrée à la figure 7.

En dehors des rectangles et des cercles non munis d'une flèche, une infinité d'autres figures planes, parce qu'elles possèdent une symétrie bilatérale, ne peuvent pas servir à orienter le plan. La figure 8 en montre quelques-unes. Et de même, en dehors des parallélogrammes non rectangles, des cercles orientés et des systèmes d'axes, une infinité de figures planes dépourvues de symétrie bilatérale peuvent servir à orienter le plan. La figure 9 en montre quelques-unes.

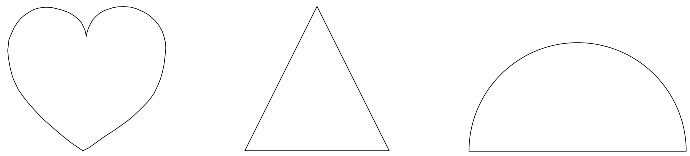

Fig. 8

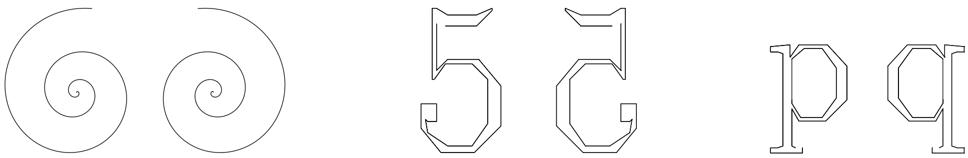

Fig. 9

Parmi ces figures extrêmement variées, celles dont on reconnaît le plus facilement l'appartenance à une classe ou à l'autre sont celles dont le dessin n'est pas trop compliqué et qui, telles que les chiffres, les lettres ou les cadrans d'horloge, ne sont présentes autour de nous que dans une seule de leurs deux variétés.

2 Le plan plongé dans l'espace

Les seules opérations que nous ayons faites jusqu'ici dans ce chapitre étaient de glisser des figures dans le plan, et d'envoyer une figure sur sa symétrique orthogonale par rapport à un axe du plan. Pour réaliser cette dernière opération, on envoie chaque point perpendiculairement au delà de l'axe, à la même distance de celui-ci que le point de départ[1]. Certes, on ne pourrait pas réaliser physiquement une telle opération (toujours sans sortir du plan) si la figure était par exemple découpée dans du carton. Il s'agit donc d'une opération purement mentale, mais dont la description ne fait rien intervenir en dehors du plan. Donc jusqu'à présent, *nous ne sommes pas sortis du plan*[2].

[1] Les points de l'axe demeurent en place.

[2] Pour construire une géométrie du plan, on se donne le plan et rien d'autre, et en particulier on ne se permet pas des excursions en dehors du plan. Car si on se donnait une telle permission, on recourrait à la théorie de l'espace à trois dimensions. Cette remarque concerne la géométrie constituée, et non l'apprentissage de la géométrie plane.

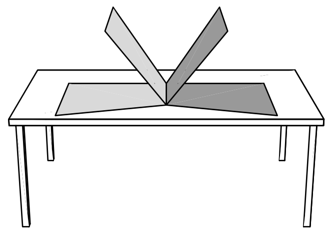

Fig. 10

Pratiquement toutefois, l'être humain vit dans l'espace[3], et les plans sont réalisés concrètement par des tables, tableaux, murs, feuilles de papier, etc. On peut représenter un rectangle, un parallélogramme, un cercle, un système d'axes sur un plan physique en découpant la figure dans du carton et en la déposant sur la plan. Si on veut dans ces conditions passer à son symétrique orthogonal par rapport à un axe du plan, rien n'empêche de le sortir du plan et de le retourner pour le redéposer ensuite sur le plan à l'endroit souhaité[4]. C'est ce que suggère la figure 10 pour un trapèze en carton dont les deux faces sont colorées différemment.

Lorsqu'on veut orienter un plan de l'espace physique, on peut par exemple décider de choisir comme sens privilégié celui qui correspond au sens de rotation des aiguilles d'une montre. Toutefois, c'est là un choix déterminé par quelqu'un qui est extérieur au plan et qui le regarde d'un côté déterminé. Car si l'on va voir les cercles munis d'une flèche à partir d'un point situé de l'autre côté du plan, on s'aperçoit que celui qui tournait au départ dans le sens des aiguilles d'une montre tourne dans le sens opposé dès qu'on est passé de l'autre côté. Cette façon d'orienter le plan n'est donc pas intrinsèque à la géométrie plane. En demeurant dans le plan, tout ce qu'on peut faire est de désigner une des deux classes de cercles comme privilégiée, et puis c'est tout. Des êtres absolument plats qu'on imaginerait vivant dans le plan (sans jamais faire d'excursion dans l'espace extérieur au plan) sont libres de faire tourner leurs montres dans le sens qu'ils veulent.

Dans l'espace, on appelle *direction de plans* l'ensemble des plans parallèles à un plan donné. Si un plan d'une direction de plans est orienté, on peut transporter naturellement son orientation sur tout autre plan de la direction. Il suffit pour cela de translater le plan orienté pour l'amener sur l'autre. Si on a ainsi organisé de manière concordante l'orientation de tous les plans de la direction, on dit que celle-ci est *orientée*.

Ces quelques considérations rassemblent l'essentiel de ce que l'on peut dire en général sur l'orientation d'un plan. Venons-en maintenant aux plans et aux directions de plans particuliers que nous offrent l'univers physique ainsi que le monde des êtres vivants et celui des objets fabriqués[5].

---

[3] Et les élèves qui apprennent la géométrie aussi !

[4] La possibilité d'une telle manœuvre est liée au fait que le parallélogramme non rectangle, le cercle muni d'une flèche, le système d'axes plan ne sont pas des objets orientés *de l'espace*. Nous reviendrons sur ce point au chapitre 22.

[5] Le lecteur aura remarqué que le plan des sections 1 et 2 relatives aux plans est copié des sections 1 et 2 relatives aux droites. Les sections 1 et 2 relatives à l'espace reproduiront ce même schéma. Ceci montre la constance des questions qui se posent quant à l'orientation, quelle que soit la dimension de l'espace considéré.

3 L'avant-arrière et les bras étendus

Considérons une personne debout, tête droite et les bras étendus latéralement. Ses bras appartiennent à une droite horizontale et son regard à une autre droite horizontale, perpendiculaire à la première. Les deux ensemble déterminent un plan horizontal, qui n'est pas *a priori* orienté. On l'oriente en désignant un des deux bras comme le bras gauche, et l'autre comme le bras droit. La demi-droite du regard jointe à la demi-droite du bras gauche donnent l'équivalent d'un système d'axes, dont l'orientation est opposée à celui correspondant à la demi-droite du regard jointe à la demi-droite du bras droit.

À l'image de l'homme, les êtres et les objets pourvus d'un avant et d'un arrière sont aussi munis d'une gauche et d'une droite. Il en va de même pour les mouvements de sens constant qui se passent sur une droite horizontale ou à peu près : par exemple, on parle de la rive gauche et de la rive droite d'un cours d'eau en faisant correspondre le sens de l'écoulement au sens avant-arrière d'une personne qui descend le courant en regardant devant elle. On réalise bien que la gauche et la droite sont liés à la direction avant-arrière

Le plan ainsi orienté est lié au corps de la personne. Ce simple fait provoque des difficultés de communication lorsqu'on s'en sert pour orienter des directions horizontales non liées à son propre corps. Ainsi, deux personnes qui se font face ont leur gauche et leur droite opposées. Et si elles regardent dans des directions orthogonales, la gauche et la droite de l'une n'ont plus rien à voir avec la gauche et la droite de l'autre, mais correspondent respectivement soit à l'avant et l'arrière de l'autre, soit l'inverse. Il est possible pour une personne de désigner la gauche et la droite d'une autre personne, même si celle-ci se trouve par rapport à elle dans une position *discordante*. Pour ce faire, la première personne se transporte *en imagination* dans la position de l'autre, ce qui est une opération mentale difficile pour certaines positions relatives inhabituelles des deux personnes.

Considérons maintenant un objet sans orientation particulière, par exemple un ballon, situé devant une personne. Celle-ci parle de la droite et de la gauche du ballon. Elle dit par exemple : *je vais passer à droite du ballon.* Cette gauche et cette droite sont celles de la personne regardant le ballon ou se dirigeant vers lui.

Si deux personnes se font face, l'une peut dire à l'autre : *je vais passer à ta droite*, l'adjectif possessif *ta* montrant à nouveau que la gauche et la droite *appartiennent* à une personne, ou à un objet. Si la personne fait face à un *objet* orienté, l'usage du possessif semble moins bien fixé. Supposons qu'une voiture soit arrêtée face à une personne, son capot du côté de la personne. Celle-ci peut dire : *je vais passer à droite de la voiture*, ce qui est clair. Si elle dit *je vais passer à* la *droite de la voiture*, l'interlocuteur pourra hésiter sur sa manœuvre. On vit quotidiennement ce type d'ambiguïté lorsqu'on cherche à communiquer la position d'une personne ou d'un objet sur une photographie.

Notons que le choix de la droite et de la gauche pour orienter le plan dont nous parlons est totalement arbitraire. Lorsqu'on s'en sert pour fixer certaines habitudes de civilisation, comme par exemple le côté de la route où roulent les automobiles, on constate des discordances entre les nations. (Heureusement que ce ne sont pas les individus qui décident !) Les Anglais roulent à gauche et nous roulons à droite, ce qui cause certaines difficultés. Par comparaison, la direction des pieds à la tête s'impose naturellement. Heureusement, car sinon, les Anglais auraient sans doute décidé de marcher les pieds en l'air[6]. Mais au moins sur ce point-là la nature est bien faite.

Une remarque enfin. Le plan déterminé par le regard horizontal et les bras étendus est un plan que nous considérons à peu près toujours du même côté. Autrement dit, il est exceptionnel que nous ayons à faire à ce plan relativement à une personne qui a la tête en bas. Et il en va de même du plan du sol. Il est exceptionnel aussi que nous envisagions un sol horizontal situé au dessus de nous, comme par exemple si nous nous trouvons dans une pièce dont le plafond est vitré et que nous voyons des personnes à l'étage au-dessus. Le fait de considérer un plan toujours du même côté facilite les choses. Comme nous le verrons, la situation est plus compliquée pour certains plans verticaux que nous fréquentons naturellement des deux côtés.

4 Le plan de symétrie du corps humain

Nous avons vu que le corps humain, comme celui de beaucoup d'animaux, possède deux directions privilégiées, à savoir la verticale imposée par la pesanteur, et la direction avant-arrière imposée par le fait que l'homme se déplace. Indépendamment du fait que ces deux directions sont naturellement orientées, leur existence même détermine le plan de symétrie du corps humain. Bien entendu, il s'agit d'une symétrie approximative, puisque le cœur est à droite et le foie à gauche, mais cette observation ne nous concerne pas ici. Parmi les activités de l'être humain, on n'en discerne pas qui auraient pu déterminer une asymétrie importante de son corps. Par comparaison, on sait que les crabes n'avancent pas droit devant eux. Comme le montre la figure 11, certains crabes n'ont pas de plan de symétrie.

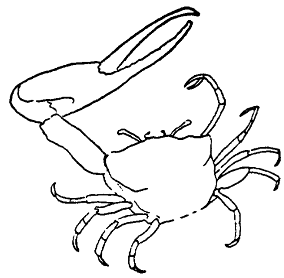

Fig. 11

Les animaux et les objets qui se meuvent, ou ceux qui, tels que les chaises, ont une forme adaptée à leur usage par l'homme, ont eux aussi un plan de symétrie avec un haut et un bas, un avant et un arrière.

À cause de leur orientation naturelle, ces plans de symétrie

[6] En quoi ce trait d'humour est-il absurde ? Réponse : c'est que si la direction haut-bas des personnes n'était pas orientée, c'est que les hommes auraient une tête en haut et une en bas, ou alors des pieds en haut et des pieds en bas.

sont le siège de phénomènes assez simples. Personne n'hésite pour exécuter la consigne de *passer par dessous ou par dessus* un obstacle, puisque le dessus et le dessous relèvent d'une détermination physique constante. Il peut y avoir hésitation lorsqu'il s'agit de grimper sur un tas de sable en y allant par derrière ou par devant, car l'arrière et l'avant dépendent de la situation de la personne qui parle et qui est en position concordante ou discordante avec la personne qui exécute.

5 Les plans frontaux

Un exemple d'un tel plan est un mur regardé de face. Certains plans frontaux sont naturellement abordés des deux côtés. Par exemple, lorsqu'on veut ouvrir une porte, on tourne la clé dans des sens opposés par rapport à soi selon qu'on aborde la porte d'un côté ou de l'autre.

On peut assimiler aux plans frontaux les plans des documents qu'on lit en les tenant perpendiculairement à son regard. Les documents sur papier calque et les négatifs photographiques sont vus lorsqu'on les retourne comme si on allait les voir de l'autre côté. Les cachets, tampons et caractères d'imprimerie nous offrent la vue *de l'autre côté* avant la vue attendue, celle qui a un sens et est immédiatement reconnue dans le quotidien.

L'explication des phénomènes provoqués par ces objets relève de la géométrie de l'espace. Pour s'approcher davantage d'un plan fonctionnant comme celui de la géométrie plane théorique, on peut considérer le dessus d'une table et des figures en carton colorées d'un côté et blanches de l'autre, et posées avec le côté blanc sur la table.

22

Orienter l'espace

1 Éléments de théorie

Le premier chapitre de cette partie s'intitulait *orienter les droites*, et le deuxième *orienter les plans*. C'est que l'espace contient beaucoup de droites et beaucoup de plans. Ici, nous parlons d'orienter l'espace, au singulier. C'est que l'espace *ne contient qu'un espace !* Notre analyse s'en trouvera simplifiée.

Considérons un parallélipipède rectangle particulier, par exemple celui marqué a sur la figure 1, et l'ensemble de tous les parallélépipèdes rectangles isométriques à a. Sur la figure, nous n'en avons dessiné que quelques-uns. Dans ce même plan, considérons un parallélipipède non rectangle particulier. Il doit s'agir d'un parallélipipède qui ne possède pas de plan de symétrie[1]. Sur la figure nous l'avons noté b. Considérons de plus tous les parallélépipèdes isométriques à b. Nous n'en avons non plus dessiné que quelques-uns.

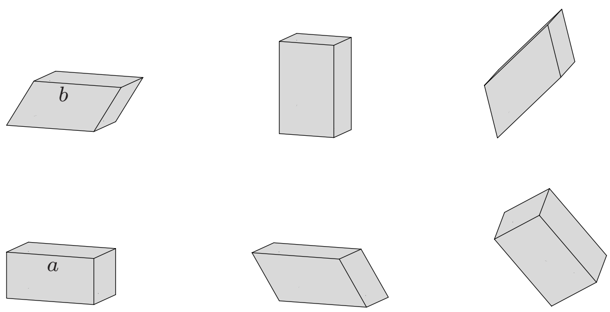

Fig. 1

Tous les parallélépipèdes rectangles peuvent être amenés l'un sur l'autre par déplacement (ce qui implique de ne pas recourir à une symétrie orthogonale). Nous supposons ici que ces objets peuvent se pénétrer l'un l'autre jusqu'à coïncidence. Par contre certains des parallélépipèdes non rectangles ne peuvent pas être amenés l'un sur l'autre de cette manière. On peut en fait les

[1] Un parallélipipède à quatre faces rectangulaires et deux faces non rectangulaires possède un plan de symétrie. Nous l'excluons donc en l'occurrence.

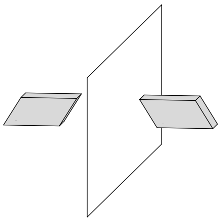

Fig. 2

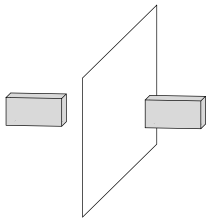

Fig. 3

Fig. 4

répartir en deux classes. On reconnaît ceux d'une même classe au fait précisément qu'on peut les amener l'un sur l'autre. Mais on ne peut pas, par déplacement, amener un parallélipipède non rectangle d'une classe sur un parallélogramme de l'autre. De tels parallélépipèdes sont dits *énantiomorphes.*

Ainsi il y a des objets qui, quoique isométriques, ne peuvent pas être amenés en coïncidence par déplacement.

On exprime cela en disant que l'espace est *orientable.*

On dit qu'on oriente l'espace quand on privilégie une des deux classes de parallélépipèdes non rectangles, et on peut, si besoin en est, donner un nom à cette classe. Un tel choix est absolument arbitraire.

Pour superposer un parallélipipède non rectangle à un autre isométrique mais d'orientation opposée, on peut recourir à une symétrie orthogonale comme le montre la figure 2.

Par contre, le symétrique orthogonal d'un parallélipipède rectangle est un parallélipipède rectangle qu'on peut faire coïncider par déplacement avec le premier (voir figure 3). Et si le plan de symétrie choisi est l'un des trois plans de symétrie du parallélipipède lui-même, on n'a même pas besoin d'un déplacement, car le parallélipipède retombe alors sur lui-même. On exprime cela en disant que le parallélipipède rectangle possède une *symétrie bilatérale.*

D'autres figures ou objets peuvent servir à orienter l'espace, à savoir tous ceux qui existent sous deux variétés énantiomorphes. Par exemple, les vis, les tire-bouchons, les cercles orientés marqués d'une flèche selon leur axe se symétrie orthogonale, les montres (qui ont un sens de rotation ainsi qu'un dessus et un dessous), les mains, le corps humain tout entier avec ses trois directions avant-arrière, dessus-dessous et gauche-droite, etc.

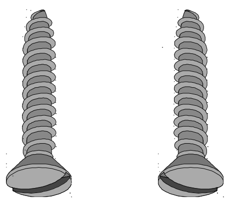

Fig. 5

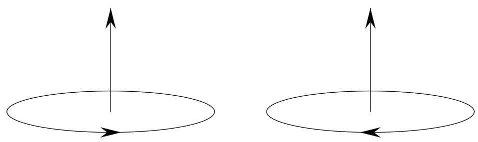

Fig. 6

Bien entendu, on se sert souvent aussi souvent pour orienter l'espace d'un système d'axes orthogonaux. La figure 7 à la page suivante montre plusieurs systèmes d'axes qui se répartissent en deux classes énantiomorphes.

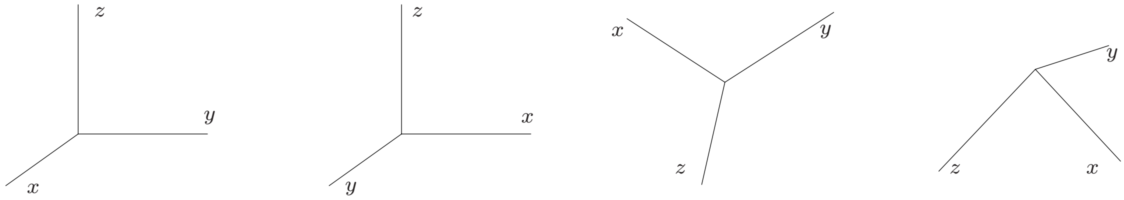

Fig. 7

Il existe une foule de règles pratiques pour mettre en correspondance l'orientation obtenue à partir d'un type d'objets énantiomorphes avec l'orientation obtenue à partir d'autres objets. En voici l'une ou l'autre.

On dit qu'un système d'axes est *orienté à droite* (voir figure 8) si on peut mettre le pouce, l'index et le majeur de la main droite respectivement dans le sens de l'axe des x, de l'axe des y et de l'axe des z.

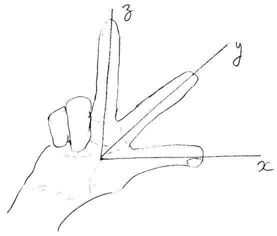

Fig. 8

Soit maintenant (figure 9) un trièdre sur les axes duquel on a marqué trois points de coordonnées positives. Ces trois points déterminent un triangle. Si une personne ayant la tête du côté positif des axes et qui suit ce triangle dans le sens x, y, z, le voit constamment sur sa gauche, alors le système d'axes est de même orienté à droite.

Si on adosse un bonhomme à l'axe des z, et que son regard est dirigé du côté positif des axes des x et des y, et s'il voit l'axe des x sur sa droite et donc l'axe des y sur sa gauche, alors le systèmes d'axes est à nouveau orienté à droite (figure 10). La personne en question s'appelle *le bonhomme d'Ampère*, du nom de son inventeur.

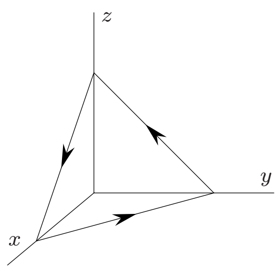

Fig. 9

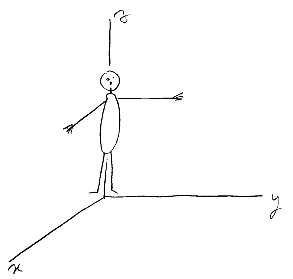

Fig. 10

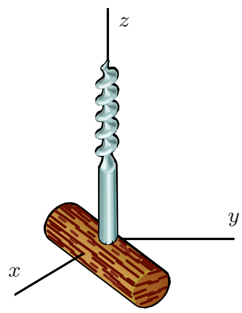

Fig. 11

Une des conventions les plus commodes est celle-ci. Soit (figure 11) un tire-bouchon du type ordinaire, pointé dans la direction positive des z et qu'on fait tourner dans le sens qui amène l'axe des x sur l'axe des y par une rotation d'un angle droit. Si ce tire-bouchon s'enfonce dans la direction positive de l'axe des z, alors le système d'axes est à nouveau orienté à droite.

2 L'espace ordinaire plongé dans un espace à quatre dimensions

Nous avons noté au chapitre 20 que deux objets énantiomorphes sur une droite ne sont pas énantiomorphes dans l'espace. On peut les amener à coïncider par déplacement, à condition de les sortir de la droite. De même au chapitre 21, nous avons noté que deux objets énantiomorphes du plan ne sont pas énantiomorphes dans l'espace. On peut aussi les amener à coïncider par déplacement, à condition de recourir à un déplacement qui les sorte du plan.

La situation n'est plus la même dans l'espace, puisque nous l'avons dit, l'espace dans lequel nous vivons n'est pas plongé dans un espace possédant davantage de dimensions. Par conséquent nous sommes incapables de faire coïncider par déplacement deux objets énantiomorphes de l'espace. Cette observation appelle trois remarques.

D'abord il n'est pas interdit de rêver : on peut imaginer, comme on peut, un espace à quatre dimensions qui rendrait la manœuvre possible.

Ensuite, si on regarde du côté des versions algébrisées de la géométrie, on s'aperçoit qu'il est formellement possible de définir un tel espace à quatre dimensions, et d'y déplacer isométriquement des objets à trois dimensions.

Enfin, si on accepte des transformations autres que des déplacements, on peut très bien parfois passer dans l'espace à trois dimensions d'un objet à son énantiomorphe : c'est par exemple ce que l'on fait quand on retourne un gant.

3 D'autres problèmes d'orientation

Nous venons d'évoquer un espace à quatre dimensions. Mais pourquoi s'arrêter là? Tout espace vectoriel à n dimensions possède des bases constituées de n vecteurs linéairement indépendants. Ces bases se divisent en deux classes de la manière suivante. On passe d'une base à l'autre par une matrice de changement de base. On dit que deux bases sont dans la même classe si le déterminant de la matrice qui fait passer de l'une à l'autre est positif. Elles sont dans des classes opposées au cas contraire. On oriente un espace vectoriel à n dimensions en privilégiant une des deux classes de base (par exemple en disant qu'elle regroupe les bases *orientées à droite*). À ce stade évidemment, il n'y a plus ni tire-bouchon, ni bonhomme d'Ampère. La définition est abstraite.

Pour en finir avec les problèmes d'orientation, mentionnons enfin qu'on peut essayer d'orienter d'autres objets que des droites, plans et espaces vectoriels. Par exemple, on peut chercher à orienter des surfaces dans l'espace à trois dimensions.

Considérons d'abord la sphère, sur laquelle on dessine sans peine des cercles munis d'une flèche, avec deux sens de rotation possibles. Ceci permet de dire que sur la sphère terrestre, les cyclones et les courants marins tournent dans un sens dans l'hémisphère nord, et dans l'autre dans l'hémisphère sud.

Par contre on n'arrive pas à orienter un ruban de Möbius, cette surface que l'on obtient en collant les deux petits bords d'une bande après avoir retourné l'un des deux. On a l'impression qu'on peut dessiner, l'une à côté de l'autre sur ce ruban, deux petites boucles munies de flèches qui les font tourner dans des sens opposés. Mais si on fait glisser l'une de ces boucles de manière qu'elle fasse le tour du ruban, elle revient à sa position initiale avec le sens opposé. Le ruban de Möbius est un exemple de surface non orientable.