Cinquième partie

Grandeurs, repérages, linéarité

Introduction

Pour saisir l'espace, s'y déplacer et agir sur les objets, il faut bien s'intéresser à la grandeur et à la position de ceux-ci. Comment, à travers quelles actions et observations l'homme accède-t-il aux grandeurs et aux positions ? Comme nous allons le voir, il y accède à travers une opération de base qui est l'addition et en utilisant des fonctions « qui respectent l'addition ». Ces fonctions sont celles qu'on qualifie de *linéaires*. En fait, l'étude ci-après des grandeurs et des repérages a pour fil conducteur l'idée de *linéarité*. Nous allons construire cette idée par étapes bien progressives.

1	paquet	15 F
2	paquets	30 F
3	paquets	45 F
4	paquets	60 F
5	paquets	75 F
6	paquets	90 F
7	paquets	105 F
8	paquets	120 F
9	paquets	135 F
10	paquets	150 F
11	paquets	165 F
12	paquets	180 F

Tabl. 1

1 Un premier exemple de fonction linéaire

Pour donner une première idée de ce qu'est une fonction linéaire, considérons un exemple des plus familiers. Le tableau 1 donne les prix pour des achats de farine dans un magasin. Observons quelques propriétés de ce tableau.

La conservation de la somme. – On va au magasin acheter 2 kg de farine, puis on y retourne pour acheter encore 3 kg. On a payé en tout

$$30 \text{ F} + 45 \text{ F} = 75 \text{ F}.$$

Il aurait été plus simple d'acheter d'un coup 5 kg, et on aurait payé d'un coup 75 F. Le tableau 2 montre cela.

1	paquet	15 F
2	paquets	30 F
3	paquets	45 F
4	paquets	60 F
5	paquets	75 F
6	paquets	90 F
7	paquets	105 F
8	paquets	120 F
9	paquets	135 F
10	paquets	150 F
11	paquets	165 F
12	paquets	180 F

Tabl. 2

En général, si on rassemble deux quantités de farine, le prix total est la somme des prix de ces deux quantités prises séparément. À toute somme de deux termes pris dans la première colonne du tableau correspond la somme des deux termes correspondants de la colonne de droite.

La conservation des rapports internes. – La propriété la plus apparente du tableau 1 est sans doute celle qui concerne les rapports dans les deux colonnes. Si on achète 2 fois plus, on paie 2 fois plus. Si on achète seulement les 2/3 de ce qu'on pensait acheter d'abord, on paie les 2/3 de ce qu'on pensait payer. Le tableau 3 à la page suivante illustre cela.

En général, s'il existe un rapport entre deux quantités de farine, on trouve le même rapport entre les prix correspondants.

Nous appellerons *rapport interne* tout rapport entre deux quantités prises dans une même colonne (à l'intérieur d'une co-

1	paquet	15 F
2	paquets	30 F
3	paquets	45 F
4	paquets	60 F
5	paquets	75 F
6	paquets	90 F
7	paquets	105 F
8	paquets	120 F
9	paquets	135 F
10	paquets	150 F
11	paquets	165 F
12	paquets	180 F

$\times 2$ $\quad \times 2$

$\times \frac{2}{3}$ $\quad \times \frac{2}{3}$

Tabl. 3

1	paquet	15 F
2	paquets	30 F
3	paquets	45 F
4	paquets	60 F
5	paquets	75 F
6	paquets	90 F
7	paquets	105 F
8	paquets	120 F
9	paquets	135 F
10	paquets	150 F
11	paquets	165 F
12	paquets	180 F

$\times(15\ \text{F/kg})$

Tabl. 4

lonne). La propriété que nous venons d'observer est la *conservation des rapports internes*.

L'existence d'un rapport externe. – Si on regarde n'importe quelle ligne du tableau, on s'aperçoit qu'en divisant le nombre de droite par celui de gauche, on obtient toujours 15. Ou ce qui revient au même : en multipliant le nombre de gauche par 15, on obtient toujours le nombre de droite. On dit que 15 est le *rapport externe* associé à ce tableau. L'adjectif *externe* rappelle que l'on *sort* d'une colonne pour aller vers l'autre.

Dans notre exemple, le rapport externe n'est autre que le *prix à l'unité*, tel qu'il apparaît lorsqu'on écrit par exemple

$$\text{prix de 3 paquets} = (3 \text{ paquets}) \times (15 \text{ F/paquet}) = 45 \text{ F}.$$

Cette expression rend compte en détail de ce qui se passe. Dans la pratique, on calcule simplement 3×15. Le tableau 4 met en évidence le rapport externe.

Un graphique en ligne droite. – Choisissons un petit segment pour représenter 1 paquet de farine (une unité), et portons sur un axe horizontal les nombres de paquets (figure 1). Choisissons encore un petit segment, cette fois pour représenter 15 F, et portons perpendiculairement les prix des achats de farine. Les extrémités des segments représentant les prix sont alignées. Cette disposition est assez naturelle, puisque chaque fois qu'on ajoute 1 paquet, on augmente le prix de 15 F : c'est comme un escalier *qui monte régulièrement.*

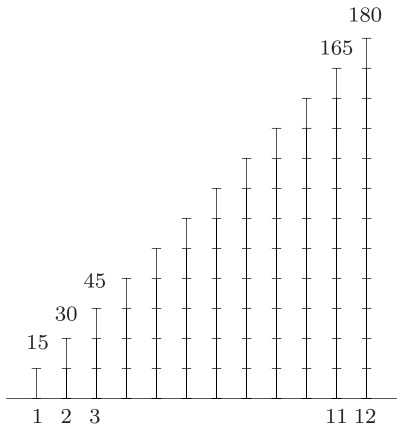

Fig. 1

2 Qu'est-ce qu'une fonction linéaire ?

Notre exemple des achats de farine était destiné à montrer ce qu'est une *fonction linéaire.* Passons maintenant de cet exemple particulier à une expression générale de la notion de fonction linéaire. Pour cela nous nous appuierons sur certains symboles réutilisables dans tous les exemples ultérieurs.

Tout d'abord, à un nombre de paquets de farine correspond un prix, et réciproquement. Nous pouvons noter cette correspondance par une double flèche, comme ceci :

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ paquet} & \longleftrightarrow & 15 \text{ F} \\ 2 \text{ paquets} & \longleftrightarrow & 30 \text{ F} \\ 3 \text{ paquets} & \longleftrightarrow & 45 \text{ F} \end{array}$$

En général, nous écrirons

$$x \longleftrightarrow x',$$

formule dans laquelle x désigne un nombre de paquets (n'importe lequel) et x' le prix correspondant. Nous écrirons aussi $x' = f(x)$, pour rappeler que x' est fonction de x. Par conséquent nous pouvons écrire

$$x \longleftrightarrow x' = f(x). \tag{1}$$

Bien entendu, nous aurions pu regarder les choses dans l'autre sens, et considérer que x est fonction de x' (dans notre exemple, que le nombre de paquets que nous pouvons acheter est fonction de l'argent dont nous disposons).

Voyons comment s'expriment, dans ces notations, les trois propriétés relevées ci-dessus.

La conservation de la somme. – Pour notre exemple :

$$\begin{array}{rcl} \text{du fait que 5 paquets} & = & \text{2 paquets} \ + \ \text{3 paquets,} \\ \text{le prix de 5 paquets} & = & \text{le prix de 2 paquets} \\ & & \qquad + \ \text{le prix de 3 paquets.} \end{array}$$

De manière générale, x_1, x_2 et x_3 étant des valeurs prises dans la première colonne,

$$\textit{si} \quad x_3 = x_1 + x_2, \quad \textit{alors} \quad x'_3 = x'_1 + x'_2. \tag{2}$$

On peut dire aussi : quels que soient x_1 et x_2,

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2). \tag{3}$$

La conservation des rapports internes. – Pour notre exemple :

$$\begin{array}{rcl} \text{du fait que 6 paquets} & = & \dfrac{2}{3} \text{ de 9 paquets,} \\ \text{le prix de 6 paquets} & = & \dfrac{2}{3} \text{ du prix de 9 paquets.} \end{array}$$

De manière générale, x_1 et x_2 étant des valeurs prises dans la première colonne,

$$\textit{si} \quad x_2 = \alpha x_1, \quad \textit{alors} \quad x'_2 = \alpha x'_1, \tag{4}$$

ou encore

$$\textit{si} \quad x_2 = \alpha x_1, \quad \textit{alors} \quad f(x_2) = \alpha f(x_1). \tag{5}$$

Dans un langage plus ancien, mais qui garde son sens et son utilité, on dit

$$x_1 \textit{ est } \textit{ à } x_2 \textit{ comme } x'_1 \textit{ est } \textit{ à } x'_2. \tag{6}$$

Dans le langage des fractions, on peut écrire aussi

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x'_1}{x'_2} \; (= \alpha). \tag{7}$$

On dit également que x_1, x_2, x'_1 et x'_2 forment une *proportion.* On peut dire aussi : quels que soient x et un nombre α,

$$f(\alpha x) = \alpha f(x). \tag{8}$$

L'EXISTENCE DU RAPPORT EXTERNE. – Dans notre exemple de prix pour des paquets de farine, nous avons vu qu'il existait un rapport (le prix à l'unité) qui permet de passer de la première à la seconde colonne. Nous pouvons ainsi écrire que pour tout nombre x de paquets de farine, le prix est donné par

$$x' = (15 \text{ F/kg})x.$$

Ce prix à l'unité n'est pas un « simple nombre », puisqu'il comprend la mention d'une unité complexe, à savoir F/kg. Sans l'analyser davantage pour l'instant, ni préjuger de ce qu'il deviendra dans d'autres exemples, nous continuons à l'appeler le *rapport externe.*

Nous verrons dans la suite qu'il existe des fonctions linéaires dépourvues de rapport externe.

Observons simplement que dans notre problème de paquets de farine, si x est une valeur prise dans la première colonne, il existe un rapport externe, que nous noterons k, tel que

$$f(x) = kx. \tag{9}$$

3 Encore deux exemples.

Montrons maintenant comment on résout des problèmes dans des situations de linéarité. Une première méthode bien connue est celle de la *règle de trois*. Soit par exemple la question suivante :

Si 3 kg *de farine coûtent* 45 F, *combien coûteront* 7 kg ?

Souvent on passe par 1 kg – et c'est parfois une manœuvre trop compliquée – en disant

- puisque 3 kg coûtent 45 F,
- 1 kg coûte 3 fois moins (conservation du rapport interne), soit $\frac{45}{3} = 15$ F ;
- donc, 7 kg coûteront 7 fois plus (conservation du rapport interne), soit 15 F $\times 7 = 105$ F.

La règle de trois s'appuie donc essentiellement sur les rapports internes.

Voici maintenant une autre question, posée et résolue par Manuel, un paysan chilien de 59 ans n'ayant jamais fréquenté l'école (cf. I. Soto Cornejo [1993]).

Calculer la valeur de la récolte de 6 300 *carottes si la valeur de* 1 000 *carottes est de* $ 150.

Le symbole $ désigne ici l'unité monétaire chilienne, le *peso.* Manuel, qui ne sait pas écrire, a donc résolu le problème oralement. Sa démarche est représentée schématiquement à la figure 2 à la page suivante (schéma établi après coup par I. Soto).

Partant de 1 000 carottes, il reconstruit $ 6 300 pas à pas, en s'appuyant sur des produits simples (choisis parmi ceux qu'il maîtrise dans la table de multiplication) et sur une somme. En parallèle, il applique aux $ 150 de départ exactement les mêmes opérations pour arriver au prix demandé. La conservation des rapports internes et celle de la somme aboutit à ce que la colonne de droite reproduise exactement la structure de celle de gauche. Lorsqu'une application d'un domaine de grandeurs sur un autre est linéaire, tout enchaînement d'opérations dans le domaine de départ se reproduit fidèlement dans celui d'arrivée. Cette caractéristique suffirait à elle seule à faire comprendre l'importance des fonctions linéaires : on passe sans difficulté d'un côté à l'autre[1].

On remarque d'ailleurs sur la figure que le sens demeure présent à chaque étape : tout nombre et toute opération *avec des carottes* dans la colonne de gauche est immédiatement interprété par un nombre de *pesos* et une opération sur les *pesos* dans la colonne de droite. Le sens ne disparaît à aucun moment derrière un formalisme.

[1] Bien entendu, la justification première de la linéarité dans un problème de commerce comme celui-ci, c'est un principe d'équité : je te donne deux fois plus, tu me dois deux fois plus.

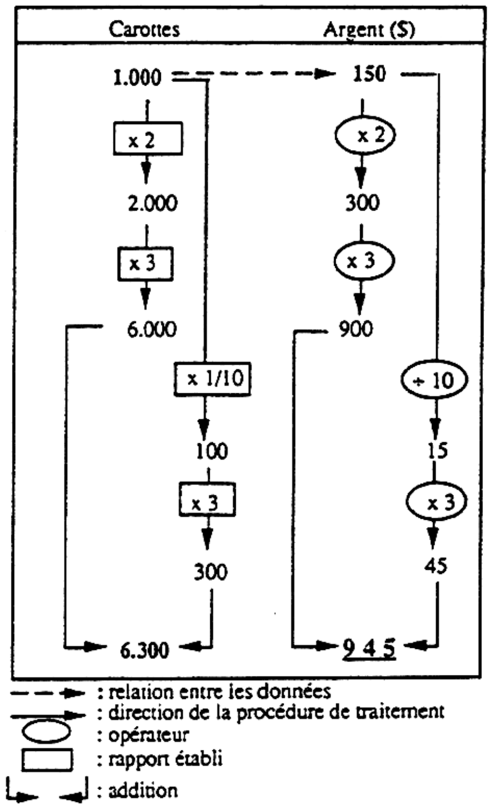

Fig. 2

Manuel ne s'est pas servi du rapport externe, qui est ici $\frac{150}{1000} = 0,15$ peso/carotte. Ce rapport s'écarte du sens concret, ne serait-ce que parce qu'on ne vend jamais une carotte à la fois, et qu'en outre le peso, monnaie de peu de valeur, ne comporte pas de subdivision décimale. Qui plus est, le rapport externe est fractionnaire et son maniement plus difficile que celui des rapports entiers utilisés par Manuel. Ainsi le rapport externe apparaît comme une construction assez abstraite. Toutefois, bien que d'usage facile quand les nombres en cause s'y prêtent, *le fond originaire de la linéarité, c'est la conservation des sommes et des rapports internes.*

4 Des problèmes pour enseigner

Comme le reste de notre étude, cette cinquième partie est de nature surtout théorique. Elle n'évoque de situations concrètes que pour illustrer le fil conducteur de la linéarité, tel qu'il existe, apparent ou caché, à travers toute la scolarité. Mais pour enseigner ces matières, on a besoin de contextes et de problèmes. Voici donc quelques références où le lecteur pourra en puiser.

Sur les rapports, la proportionnalité et les mesures, mentionnons surtout H. Freudenthal [1983], ainsi que les deux très riches séries des ERMEL ([1977] et [1991]). Voir aussi M.-N. Coméliau

[1988].

Sur l'introduction des vecteurs, voir la contribution récente de G. Noël, F. Pourbaix et Ph. Tilleuil [1997]. Voir aussi A. Chevalier et H. Masy [1981], ainsi que A. Goossens et A. Stragier [1983].

À propos des transformations du plan à l'école fondamentale, on se reportera aux travaux de M. Demal, et aussi qu'au mémoire de N. Étienne [1995]. Les transformations dans la première moitié du secondaire sont étudiées entre autres par B. Honclaire, F. Van Dieren et M.-F. Van Troeye (trois brochures éditées par le CREM [1998]). Voir aussi GEM [1982] ; pour la fin du secondaire, voir C. Cordaro [1978], M.-N. Minet [1984] ainsi que G. Noël, F. Pourbaix et Ph. Tilleuil [1997].

Un excellent exposé sur les transformations étudiées par voie analytique est E.A. Maxwell [1975]. Enfin, pour des applications plus poussées, voir le classique T.J. Fletcher [1972]. Et pour avoir une idée des applications de l'algèbre linéaire en économie, voir J. Bair [1990].

Notons enfin que les IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, France) ont publié depuis plus de vingt ans beaucoup d'études[2] sur les sujets ci-dessus.

[2] Bon nombres d'entre elles sont disponibles au CREM.

16

Grandeurs, mesures et nombres positifs

Dans l'introduction, nous nous sommes familiarisés avec la notion de fonction linéaire en examinant des exemples pris dans l'environnement familier. Regardons maintenant comment naît et se développe cette notion. Et pour cela, pour retrouver les *défis primitifs,* supposons dans un premier temps que nous ne savons plus ce qu'est mesurer. Ensuite nous verrons que les mesures elles-mêmes sont des fonctions linéaires. Nous traiterons ensuite des grandeurs mesurées.

1 Grandeurs de même nature

1.1 Deux figures géométriques semblables

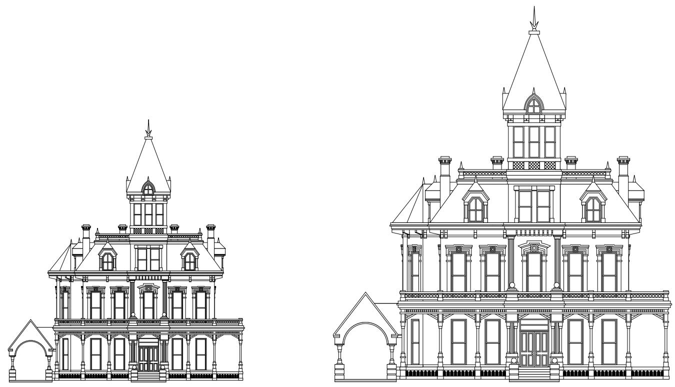

Fig. 1 (a,b)

Nous allons définir une fonction en nous servant de deux figures semblables. Les figures 1(a) et 1(b) sont un exemple de figures semblables : la deuxième est un agrandissement de la première. C'est aussi le cas des figures 2(a) et 2(b) à la page suivante. Ce que nous allons dire s'applique à tout couple de figures semblables. Choisissons le cas le plus simple, celui de la figure 2.

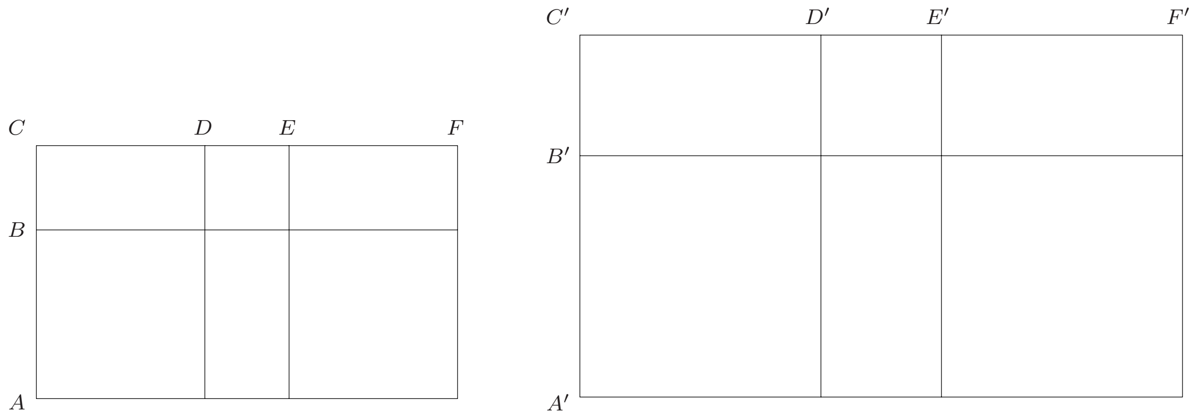

Fig. 2 (a,b)

La fonction que nous allons définir ne fera plus correspondre des prix à des marchandises, mais bien des segments à des segments : simplement, à tout segment pris sur la figure 2(a), nous faisons correspondre le segment situé de manière analogue sur la figure 2(b). Le tableau 1 donne, à l'aide de quelques couples de segments, une idée de notre fonction. *Rappelons que nous travaillons avec des segments, et non avec des mesures de segments, puisque nous avons décidé d'ignorer les mesures.*

$[AB]$	$[A'B']$
$[BC]$	$[B'C']$
$[AC]$	$[A'C']$
$[CD]$	$[C'D']$
$[DE]$	$[D'E']$
$[EF]$	$[E'F']$
$[CE]$	$[C'E']$
$[DF]$	$[D'F']$
$[CF]$	$[C'F']$

Tabl. 1

Bien entendu, pour pouvoir examiner si cette fonction conserve les sommes et les rapports internes, nous devons d'abord définir ce que nous entendrons par somme de deux segments et dire à quoi nous reconnaîtrons que deux rapports de segments sont égaux. Précisons que, dans tout ce que nous allons faire, nous pourrons toujours remplacer un segment par n'importe quel autre qui lui est exactement superposable[1].

Somme et rapport de deux segments. – Nous appellerons *somme* de deux segments le troisième segment obtenu en les mettant bout à bout, dans le prolongement l'un de l'autre. Par exemple, sur la figure 3, c est la somme de a et b. Notons au passage que rien ne nous empêche de faire la somme de deux segments initialement non alignés.

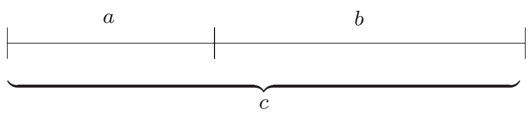

Fig. 3

Nous écrivons

$$a \oplus b = c,$$

en utilisant pour la somme des segments le symbole $\oplus$ et non $+$, pour éviter la confusion avec la somme des nombres.

[1] Pour une théorie plus complète des grandeurs, voir entre autres N. Rouche [1992].

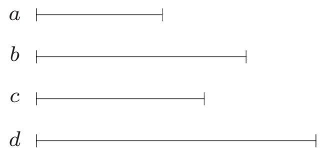

Fig. 4

Soient a, b, c et d quatre segments (figure 4). Formons un rectangle avec a et b, et un autre rectangle avec c et d. Traçons une diagonale dans chacun des deux (figure 5). Nous dirons que *le rapport de a à b est égal au rapport de c à d* si on peut porter les deux rectangles l'un sur l'autre de telle sorte que les deux diagonales se trouvent sur la même droite, comme le montre la figure 6. On pourrait dire aussi ceci : les deux rapports sont égaux si on peut poser les deux rectangles sur une même horizontale de sorte que les deux diagonales aient la même pente (ou soient parallèles, et on voit déjà le parallélisme sur la figure 5). Pour exprimer l'égalité des deux rapports, nous dirons aussi, comme ci-dessus, *a est à b comme c est d.*

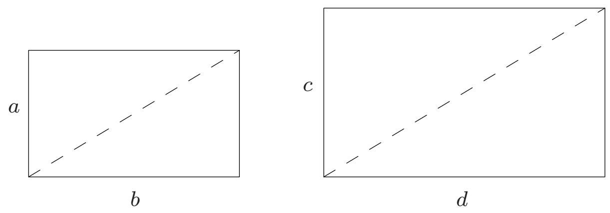

Fig. 5

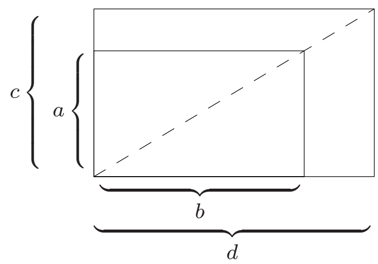

Fig. 6

Conservation de la somme. – La fonction donnée par le tableau 1 à la page précédente conserve les sommes. On peut le vérifier pour n'importe quel couple de segments. Par exemple $[AC]$ est la somme de $[AB]$ et $[BC]$; et $[A'C']$, correspondant à $[AC]$, est la somme de $[A'B']$ et $[B'C']$. Ceci se lit sur le tableau suivant.

$[AB]$ $[BC]$	$[A'B']$ $[B'C']$
$[AB] \oplus [BC]$	$[A'B'] \oplus [B'C']$

Un bel exemple de somme est le demi-périmètre. Pour les deux rectangles de la figure 2 à la page précédente, on a que

$$[A'C'] \oplus [C'F'] \quad \text{correspond à} \quad [AC] \oplus [CF].$$

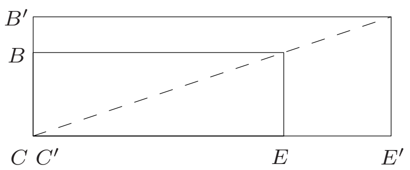

Fig. 7

Conservation des rapports internes. – Prenons deux segments quelconques dans la colonne de gauche, disons $[BC]$ et $[CE]$. Formons un rectangle avec ces deux segments et dessinons-en une diagonale. En superposant à ce rectangle celui formé avec $[B'C']$ et $[C'E']$ (figure 7), nous constatons que $[B'C']$ est à $[C'E']$ comme $[BC]$ est à $[CE]$. Ces deux rapports internes sont donc égaux. On peut vérifier la conservation des rapports internes partout ailleurs dans le tableau. C'est d'ailleurs cette conservation qui assure que les deux figures ont exactement *la même forme* : les rapports entre parties sont les mêmes partout.

Le rapport externe. – Chaque segment de gauche repris dans le tableau 1 à la page 247 a avec son correspondant de droite le même rapport que n'importe quel autre segment de gauche avec son correspondant. On le vérifie pour quelques couples de segments, par une superposition de rectangles comme le montre la figure 8. Celle-ci, comme la figure 1 à la page 240, montre un alignement de points caractéristique d'une fonction linéaire.

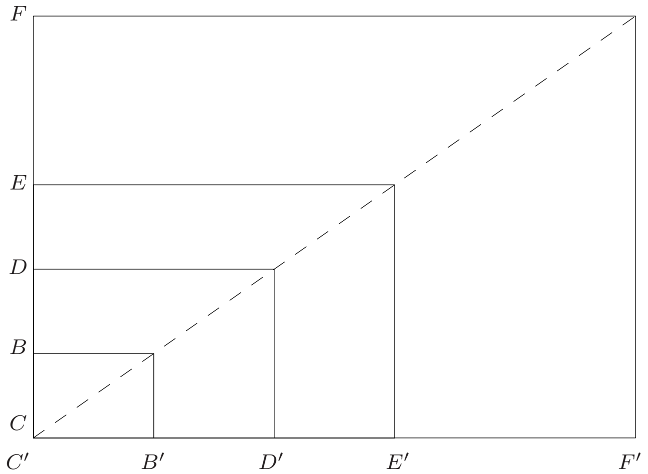

Fig. 8

En conclusion, la correspondance entre segments définie par deux figures semblables a bien les caractéristiques que nous attendons d'une fonction linéaire.

1.2 Fonction définie sur un ensemble de corps pesants

Donnons maintenant un deuxième exemple pour bien faire voir ce qu'est une fonction linéaire entre deux ensembles de grandeurs de même nature. Considérons l'ensemble des corps pesants, matérialisé par exemple par des boules de plasticine. Nous admettons que, dans tout le développement ci-après, nous pouvons à tout moment remplacer une boule de plasticine par une autre de même poids[2].

Somme et rapport de deux boules de plasticine. – Nous dirons que nous *additionnons* deux boules lorsque nous les mettons ensemble pour n'en faire qu'une. Comme ci-dessus, nous notons cette addition $\oplus$.

Nous dirons que deux boules A et B *sont dans le même rapport* que deux boules C et D si, les deux premières étant en équilibre sur une balance à bras éventuellement inégaux, les

[2] Explication plus technique, quoique non essentielle ici : ce que nous envisageons ce sont des grandeurs-poids, la grandeur (le poids) d'une boule de plasticine étant la classe des boules équivalentes à celle-là. Deux boules sont équivalentes si elles équilibrent une balance (cf. N. Rouche [1992]). Nous prenons la liberté de parler d'une *boule*, plutôt que de sa grandeur poids. Quant à la distinction entre poids et masse, elle n'est guère pertinente ici.

deux dernières sont aussi en équilibre sur cette balance. Cette situation est illustrée par la figure 9.

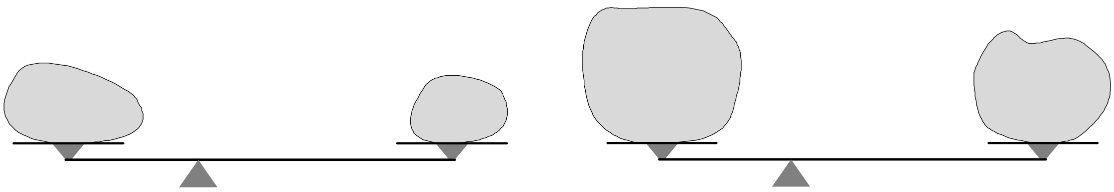

Fig. 9

Définition d'une fonction. – Ceci dit, choisissons une balance (à bras non nécessairement égaux) comme sur la figure 10. Définissons ensuite une fonction f en disant qu'elle envoie toute boule de plasticine A sur la boule A' qui l'équilibre sur cette balance. Notons cette fonction

$$A \longleftrightarrow A' = f(A).$$

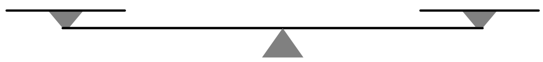

Fig. 10

En expérimentant avec la balance de la figure 10, on vérifie que la fonction conserve les sommes : si A équilibre A' et si B équilibre B', alors la somme de A et B équilibre la somme de A' et B'. Autrement dit, quels que soient les boules A et B, si A' et B' sont les boules qui leur correspondent par la fonction, on a

$$A \oplus B \longleftrightarrow A' \oplus B'.$$

On vérifie aussi que si A équilibre A', alors $2A$ équilibre $2A'$, $3A$ équilibre $3A'$, etc. Plus généralement, quelles que soient A et B prises dans le premier ensemble de boules, le rapport de A à B est égal à celui de A' à B', ce que l'on vérifie chaque fois avec une balance appropriée. Nous retrouvons là la *conservation des rapports internes.*

La manière même dont nous avons construit notre fonction montre qu'il existe le même rapport entre chaque boule A du premier ensemble et la boule correspondante A'. Ce rapport est celui qui est défini à l'aide de la balance de la figure 10, et c'est le *rapport externe* pour notre fonction.

2 Grandeurs de natures différentes

Dans cette section, nous allons examiner des fonctions qui envoient un ensemble de grandeurs d'un certain type sur un ensemble de grandeurs d'un autre type. Au départ, nous ne mesurons pas nos grandeurs. En cours de route, on le verra, nous recourrons quand même à l'idée de mesure.

Soit par exemple un marcheur qui avance tout le temps à la même allure. Ceci veut dire qu'il parcourt des distances égales en des temps égaux. Mais, objectera-t-on sans doute, comment juger de l'égalité des temps et des distances sans les mesurer ? La réponse est simple, quoiqu'un peu artificielle[3] : deux distances sont égales si, en faisant correspondre à chacune d'elles un fil tendu, on peut superposer exactement les deux fils ; deux temps sont égaux s'ils correspondent au même niveau de sable écoulé dans un sablier. Ci-après, nous nous donnerons la liberté de confondre *fil tendu* avec *segment*, ce qui nous permettra de recourir à ce que nous avons dit des segments à la section 1.

Le marcheur nous étant donné, faisons correspondre à chaque intervalle de temps la distance qu'il parcourt pendant ce temps. Nous définissons ainsi une fonction qui envoie les intervalles de temps sur les distances. Nous noterons cette fonction comme d'habitude : si T est un intervalle de temps et D la distance qui lui correspond, nous écrirons

$$T \longleftrightarrow D = f(T).$$

Pour étudier les propriétés de cette fonction, nous devrons savoir ce que nous entendons par la somme de deux intervalles de temps et par la somme de deux distances. Nous définissons la *somme de deux distances*, comme ci-dessus la somme de deux segments, en les mettant bout à bout. Et nous définissons la *somme de deux intervalles de temps* comme l'intervalle obtenu en faisant s'écouler dans le sablier la somme des deux quantités de sable.

Nous devrons aussi recourir à l'égalité de deux rapports dont l'un sera un rapport d'intervalles de temps, et l'autre un rapport de distances. Les choses se compliquent un peu ici et nous obligent à faire intervenir des opérations de mesure[4].

Soient T_1 et T_2 deux intervalles de temps. Nous définissons le rapport de T_2 à T_1 comme la mesure de T_2 lorsqu'on prend T_1 pour unité de mesure. Cette mesure est un nombre. Il n'est pas nécessaire que nous entrions ici dans le détail des opérations de mesure.

[3] Certains lecteurs trouveront peut-être ce caractère artificiel peu acceptable. Mais d'une part ce que nous proposons ici n'est pas une expérience à faire réellement, mais une *expérience de pensée*, comme on doit en faire de nombreuses si on veut comprendre un peu le monde réel. Galilée et Einstein nous ont montré la voie dans ce domaine. Qui plus est, en nous situant en imagination dans un univers sans mesures, nous nous mettons à la place des enfants qui ont encore à reconstruire l'idée de mesure, et pour lesquels l'égalité de deux grandeurs se vit un peu de la manière que nous proposons ici. Autrement dit, à bien y réfléchir, les procédés proposés ci-dessus pour vérifier des égalités pourraient suggérer des activités intéressantes pour les élèves de maternelle. Lorsqu'on part à la recherche des *défis primitifs*, on est bien obligé de se défaire provisoirement de ses connaissances acquises, ce qui ne va pas sans quelque artifice. Après tout, et même si la référence est un peu glorieuse, Descartes a montré dans le *Discours de la méthode* l'utilité de la table rase.

[4] Ce que nous ferons c'est, étant donné deux grandeurs, mesurer l'une en prenant l'autre pour unité. Nous ne mesurons donc pas les deux grandeurs en utilisant une unité conventionnelle (telle que la seconde ou le mètre).

Nous définissons de même le rapport d'une distance D_2 à une distance D_1 comme la mesure de D_2 obtenue en utilisant D_1 comme unité. C'est aussi un nombre.

Ainsi, puisque nous savons reconnaître si deux nombres sont égaux ou non, nous sommes capables de dire si un rapport d'intervalles de temps est ou non égal à un rapport de distances.

Conservation de la somme. – Si le marcheur avance pendant un certain intervalle de temps, puis pendant un autre, la distance parcourue pendant la somme de ces intervalles est la somme des distances parcourues pendant chacun des deux intervalles pris séparément. En d'autres termes, il y a *conservation de la somme* :

$$\textit{si} \quad T_1 \longleftrightarrow D_1 \quad \textit{et} \quad T_2 \longleftrightarrow D_2,$$

$$\textit{alors} \quad T_1 \oplus T_2 \longleftrightarrow D_1 \oplus D_2.$$

Ou encore, quels que soient T_1 et T_2,

$$f(T_1 \oplus T_2) = f(T_1) \oplus f(T_2).$$

Conservation des rapports internes. – Si le marcheur avance pendant un temps deux fois plus grand qu'un autre, il avance d'une distance double. Plus généralement, T_1 et T_2 étant dans un rapport donné, les distances parcourues sont dans ce même rapport : il y a *conservation des rapports internes.*

« Il n'y a pas de rapport externe ». – Dans le problème qui nous occupe, le rapport externe – s'il devait exister – serait un rapport entre une distance et un temps. Or un tel rapport n'existe pas. On n'imagine pas une expérience ou un mécanisme qui permettrait de dire qu'une distance est égale à un temps, ou qu'elle est plus grande ou plus petite, et encore moins de combien. Force est donc de constater que pour notre fonction définie à partir d'un mouvement, *il n'y a pas de rapport externe.* Cette observation s'étend à toutes les fonctions qui relient deux ensembles de grandeurs de natures différentes.

Par exemple, le lecteur pourrait, à titre d'exercice, construire une fonction qui, en s'appuyant sur un corps homogène, ferait correspondre des masses à des volumes. Un corps est dit homogène si chaque fois qu'on y prélève deux parties de même volume, on trouve que ces deux parties ont même masse. Il n'est pas difficile d'imaginer comment additionner des volumes et des masses, ni comment définir l'égalité de deux rapports de volumes et l'égalité de deux rapports de masses. Ceci fait, on découvre que la fonction ainsi construite conserve les sommes et les rapports internes. Mais on relève aussi qu'elle ne comporte pas de rapport externe, car on ne peut imaginer un rapport entre une masse et un volume[5].

Dans l'introduction à cette partie, nous avons déjà examiné une fonction qui envoyait un ensemble de grandeurs (des quantités de farine) sur un autre d'une autre nature (des prix). Or là nous avons parlé d'un rapport externe, qui s'exprimait en francs par paquet. Comment est-ce possible ? La raison est simple : c'est que, alors qu'il n'existe pas de rapport entre deux grandeurs de natures différentes, dès qu'on mesure ces grandeurs, on obtient pour mesures des nombres, or il existe toujours un rapport entre deux nombres. Nous reviendrons à la section 4 sur les rapports de mesures de grandeurs d'espèces différentes.

3 La mesure comme fonction linéaire

À la section précédente, nous avons recouru à des mesures pour définir l'égalité d'un rapport d'intervalles de temps et d'un rapport de distances. Examinons maintenant la notion de mesure elle-même, et pour fixer les idées, prenons comme premier exemple la mesure des segments.

On choisit un segment comme unité *pour mesurer tous les segments.* En reportant cette unité un nombre approprié de fois le long d'un segment quelconque, on obtient la mesure de celui-ci, qui est un nombre (la *longueur* du segment dans cette unité)[6]. Il arrive que l'unité ne soit pas contenue un nombre entier de fois dans un segment, et alors on recourt à des sous-unités pour découvrir sa longueur. Notre propos n'est pas ici d'expliquer ces opérations techniques. Ce que nous souhaitons retenir, c'est que la technique de la mesure permet, une fois l'unité choisie, d'associer une longueur à chaque segment. *On définit ainsi une fonction qui envoie l'ensemble des segments sur l'ensemble des nombres.*

Pour étudier les propriétés de cette fonction, nous devons recourir à la somme de deux segments, que nous connaissons, et à la somme de deux nombres, qui nous est familière aussi.

Nous devrons également pouvoir dire si un rapport de deux segments est égal à un rapport de deux nombres. Soient donc S_1 et S_2 deux segments. Soit

$$x_1 = \text{ mesure de } S_1$$

et

$$x_2 = \text{ mesure de } S_2,$$

[5] Il faut toutefois nuancer l'affirmation qu'il n'y a pas de rapport externe entre deux grandeurs de natures différentes. En effet, il y a par exemple tout de même, avant toute mesure, une appréhension de la vitesse d'un mobile, ou de la densité d'un corps. On pourrait dire qu'on saisit ainsi le rapport externe *qualitativement.* Comme nous allons le voir ci-après, pour le construire *quantitativement*, il faut mesurer les deux grandeurs, et l'expression du rapport ainsi construit variera avec les unités choisies. L'idée du rapport externe saisi qualitativement est due à B. Honclaire.

[6] Rappelons que nous nous occupons ici de grandeurs et non d'objets : dans tout ce qui suit, tout segment peut être remplacé par un segment équivalent (c'est-à-dire de même longueur).

où les mesures sont faites avec l'unité choisie pour mesurer tous les segments.

Mesurons S_2 avec cette fois S_1 pour unité. Cela nous donne un nombre que nous pouvons noter

$$S_2/S_1. \tag{1}$$

« Mesurons » ensuite x_2 avec x_1 pour unité, ce qui (en pensant à la division-contenance) revient à calculer

$$x_2/x_1. \tag{2}$$

Nous dirons que le rapport de S_2 à S_1 est égal au rapport de x_2 à x_1 si les deux nombres obtenus en (1) et (2) sont égaux.

Quelles sont alors les propriétés de notre fonction « mesure des segments » ?

D'abord elle conserve la somme : la mesure de la somme de deux segments est la somme des mesures de chacun d'eux.

Elle conserve aussi les rapports internes. Par exemple, si un segment est double d'un segment donné, sa mesure est aussi double de la mesure de celui-ci. Plus généralement, si deux segments sont dans un rapport quelconque, leurs mesures sont dans le même rapport.

Ce que nous venons de dire pour la mesure des segments se transpose à la mesure d'un domaine quelconque de grandeurs, qu'il s'agisse de masses, de surfaces, de solides, d'intervalles de temps, etc. Seule la technique des mesures varie d'un domaine de grandeurs à l'autre, mais les caractéristiques de la « fonction mesure », telles que nous les avons relevées ci-dessus, demeurent.

Le fait que les mesures soient des fonctions linéaires est une conclusion d'une portée considérable. On ne saurait en effet sous-estimer l'importance des mesures dans la vie quotidienne, les sciences de la nature et les techniques. On pourrait résumer la conservation de la somme et des rapports internes par les mesures en disant que celles-ci représentent fidèlement la réalité des grandeurs. C'est ce qui permet, dans la plupart de problèmes relatifs aux grandeurs, de remplacer celles-ci par leurs mesures. L'avantage est considérable, car il implique un transfert du monde matériel au monde mental, au monde des représentations symboliques. En particulier les grandeurs trop grandes ou trop petites pour être manipulées peuvent être étudiées par le biais des mesures, qui les représentent dans l'esprit.

4 Grandeurs mesurées

Revenons à notre fonction de la section 2, celle qui était définie par un mouvement uniforme et qui faisait correspondre des distances à des intervalles de temps. Nous avions constaté qu'une telle fonction, qui fait le pont entre des grandeurs d'espèces différentes, ne pouvait pas être représentée à l'aide d'un rapport externe.

Mais supposons maintenant qu'ayant choisi deux unités appropriées, nous mesurions les temps et les distances. Représentons la fonction « mesure des temps » (celle qui fait correspondre à chaque intervalle de temps T sa mesure t dans l'unité choisie) par

$$T \longleftrightarrow t,$$

Et de même pour la fonction « mesure des distances », nous écrirons

$$D \longleftrightarrow d.$$

Les trois fonctions en jeu dans cette situation peuvent se mettre en chaîne comme ceci :

$$t \longleftrightarrow T \longleftrightarrow D \longleftrightarrow d.$$

Au centre de la chaîne se trouvent les grandeurs, et aux extrémités leurs mesures respectives. Comme nous l'avons vu, il n'y de rapport externe ni entre t et T, ni entre T et D, ni entre D et d. Par contre, aux deux bouts de la chaîne se trouvent des mesures, et donc des nombres. Or nous savons bien ce que veut dire un rapport de deux nombres.

Décidons d'ignorer les deux maillons internes, et passons directement d'une mesure à l'autre comme ceci

$$t \longleftrightarrow d. \tag{3}$$

Cette fonction est donc représentable par un rapport externe. Ce rapport dépend des unités choisies. Pour s'en souvenir, il est utile de l'exprimer en rappelant celles-ci. Il s'exprimera par exemple en m/s ou en km/h. Ainsi, par le truchement des mesures, une fonction linéaire reliant des grandeurs de natures différentes et qui ne possédait pas de rapport externe, en retrouve un. L'inconvénient est qu'il change selon les unités de mesure choisies.

Il se fait que la fonction (3), en plus d'être représentable par un rapport externe comme on vient de le voir, conserve aussi les sommes et les rapports internes. Elle est une fonction linéaire.

Nous ne nous appesantirons pas ici sur les changements d'unités, qui en fait définissent de nouvelles fonctions linéaires, appliquant cette fois des mesures sur des mesures. Par exemple, si t représente une mesure du temps dans une certaine unité et t' dans une autre, on a une fonction linéaire du type

$$t \longleftrightarrow t'.$$

Et si on change aussi d'unité dans la mesure des distances, on est amené à considérer une chaîne de fonctions linéaires du type

$$t' \longleftrightarrow t \longleftrightarrow T \longleftrightarrow D \longleftrightarrow d \longleftrightarrow d'.$$

On trouve une chaîne analogue lorsque, au lieu de compléter la chaîne

$$t \longleftrightarrow T \longleftrightarrow D \longleftrightarrow d$$

en envisageant des changements d'unités, on songe à représenter graphiquement le mouvement, ce qui nécessite le choix d'une unité de longueur pour représenter l'unité de temps, et le choix aussi d'une unité de longueur pour représenter l'unité de longueur (sur le terrain).

5 Fonctions numériques

Si maintenant nous nous plaçons dans l'univers des nombres, sans plus regarder du côté des grandeurs, nous pouvons sans peine définir des fonctions qui appliquent des nombres sur des nombres. Ces fonctions seront linéaires si elles conservent la somme et les rapports internes, notions qui ne nous causent aucun problème lorsqu'il s'agit de nombres. Ces fonctions sont toutes représentables à l'aide d'un rapport externe et sont de la forme

$$x \longleftrightarrow ax,$$

où a est le rapport externe[7].

Pour conclure ce chapitre, récapitulons les types de fonctions que nous y avons étudiées. Dans les premiers exemples, nous avons appliqué un ensemble de grandeurs sur lui-même : c'étaient d'abord des segments, puis des corps pesants. Ensuite nous avons appliqué un ensemble de grandeurs sur un autre : des intervalles de temps sur des distances. Après, nous avons envisagé la mesure : elle applique un ensemble de grandeurs sur l'ensemble des nombres positifs. En arrivant aux grandeurs mesurées, nous avons appliqué des mesures sur des mesures, c'est-à-dire des nombres (positifs) sur des nombres (positifs), mais chaque nombre renvoyait à une grandeur. Enfin nous avons appliqué abstraitement des nombres sur des nombres, en oubliant les grandeurs.

[7] Si dans un enseignement de mathématiques on situe l'étude des fonctions dans le seul univers numérique, on passe sous silence toute la problématique des fonctions de grandeurs et des mesures. On laisse ainsi échapper tout un pan de la genèse des mathématiques et des relations de cette discipline avec le monde réel. On enferme l'esprit des élèves dans un univers clos, ce qui a pour effet d'éteindre leur curiosité et de brider leur imagination.

17

Repérages

Être à l'aise dans l'espace, c'est entre autres savoir reconnaître et communiquer où est un point. Par exemple dans une maison, un jardin, dans une pièce, une armoire, sur une étagère. Aussi dans une ville ou un pays, et alors en se servant d'un plan, d'une carte. Quand on n'a pas besoin d'une grande précision, on utilise un quadrillage avec quelques chiffres et lettres. Ceci est déjà vrai pour le combat naval, les mots croisés, le jeu d'échec,... et l'est encore pour les plans de villes.

Se repérer dans la vie quotidienne, c'est pouvoir retrouver et exprimer la position d'un endroit connu. C'est aussi pouvoir trouver la position d'un endroit qui n'est pas encore connu. Pour cela, on se sert d'un itinéraire qui indique comment l'atteindre à partir d'un endroit connu.

Les problèmes de repérage sont variés, selon qu'ils font intervenir des points, des distances, des angles, des itinéraires. Dans les sections 1 et 2, nous donnons une idée de cette variété, qu'un enseignement de géométrie doit prendre en compte. Dans le reste du chapitre, nous fixerons notre attention sur les problèmes de repérage d'un point sur une droite, puis dans le plan et l'espace, problèmes qui nous rapprocherons de la notion d'espace vectoriel.

1 Exprimer une position

Sur un plan ou une carte géographique, qui sont toujours bornés, on peut se tirer d'affaire avec deux demi-axes positifs. Ou alors on utilise des coordonnées polaires (r, θ) avec $r \geq 0$ et $0° \leq \theta \leq 90°$. On repère un point sur une carte d'une manière ou d'une autre selon le problème posé. Dans l'artillerie anglaise, on repère l'objectif sur une carte munie d'une grille carrée dont chaque carré a un km de côté (et qui n'est qu'approximativement raccordée aux méridiens et parallèles), et on repère l'angle et la distance du tir en coordonnées polaires. Les deux systèmes font bon ménage.

Dans certains cas, il y a un zéro naturel qui fait apparaître des nombres négatifs. Par exemple, le zéro des températures, le niveau du sol, celui de la mer... Il y aussi des zéros d'origine culturelle : la naissance du Christ. Personne n'imaginerait reculer l'origine des temps avant la formation de la terre pour n'avoir que des dates positives. De plus, si l'axe des temps historiques est borné, il est infini en puissance. L'éternité a toujours hanté l'imagination des hommes. Comme on le voit, les notions de repérage et de position dépassent le cadre purement géométrique !

On est aussi amené à repérer un point sur une sphère : par exemple sur la sphère terrestre à l'aide des coordonnées géographiques. Et revoici les *relatifs* désignés cette fois selon le cas par O et E pour les longitudes, et par N et S pour les latitudes.

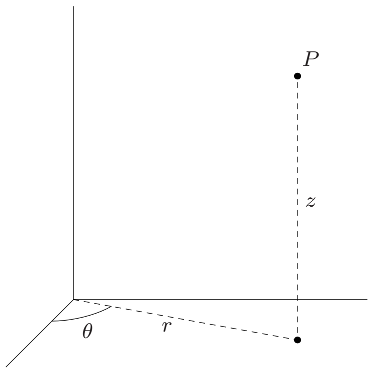

Fig. 1

Par rapport à la sphère terrestre ou à un globe qui la représente, on est *à l'extérieur.* Mais on est *à l'intérieur* de la sphère céleste, et à l'extérieur d'un globe qui la représente (sauf si on va au Planétarium). Repérer un astre sur la demi-sphère céleste que l'on voit à un moment donné se fait par l'*azimut* (de 0° à 360° en partant du nord vers l'est), et par la *hauteur* (de 0° à 90° en partant de l'horizon). Sur un globe qui représente le ciel tout entier, les coordonnées sont comptées plus naturellement en se basant sur l'équateur céleste (qui est déterminé par celui de la terre) ou sur l'écliptique (qui est déterminée par le mouvement de la terre autour du soleil).

On peut aussi repérer un point sur un tore (un anneau), sur un ruban de Möbius, sur d'autres surfaces,...

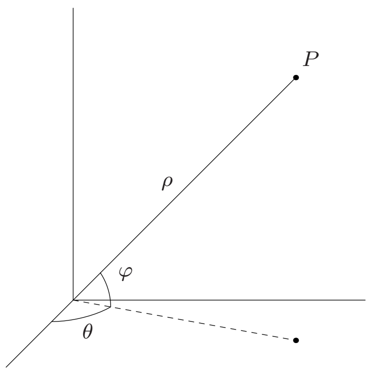

Fig. 2

Quand on passe du plan de la ville, de la carte géographique au plan de la géométrie, on passe du fini à l'infini. Alors on ne peut plus se passer de discerner les positifs et les négatifs, ou si on veut les rouges et les noirs. Déjà sur une droite, si on veut localiser *tous* les points, on doit mettre une origine quelque part. Et comme la droite n'a pas de bouts, on ne peut pas dire qu'on va mettre l'origine à un bout ! C'est une expérience frappante. Dans le plan, on aura le choix entre les deux coordonnées cartésiennes et les deux coordonnées polaires. Dans l'espace, on peut repérer avec trois coordonnées cartésiennes, mais aussi avec trois coordonnées cylindriques (figure 1) ou avec trois coordonnées sphériques (figure 2). Dans les coordonnées cylindriques, on projette le point sur un plan (dit horizontal) et sur un axe (vertical). La projection dans le plan est repérée par des coordonnées polaires. Pour repérer le point en coordonnées sphériques, on fait se succéder deux « changements de cap » : le premier part d'un axe horizontal et se fait dans un plan horizontal (angle θ), le second se fait dans un plan vertical (angle φ). En un point de la terre, on compte l'azimut à partir du nord et en allant vers l'est dans le plan horizontal, et la hauteur en montant à partir de l'horizontale.

Maintenant pourquoi repérer *tous* les points d'une droite, d'un plan, de l'espace ? *Pratiquement,* il n'y a aucune raison. Théoriquement, dès que l'on veut écrire l'équation d'une droite ou d'une parabole, il faut passer par là. La géométrie analytique se pointe…

Il n'y a pas non plus de raison *immédiate* pour calculer avec les nombres qui repèrent un point. Par contre calculer sera nécessaire quand on s'intéressera aux changements de position. Vouloir changer de repère est une autre raison majeure de calculer. Mais cela également s'apparente aux changements de position.

2 Dicter un itinéraire

Les itinéraires comportent deux types de mouvements : suivre une direction et changer de direction. Une première observation s'impose. En effet on peut suivre ou communiquer un itinéraire en le rapportant soit à la personne , soit à l'environnement. Dans le premier cas, on dira « avance de tant, puis tourne à gauche d'un quart de tour, etc. », et dans le second « dirige-toi vers ce clocher, et quand tu arrives à telle maison, prends le sentier qui va vers le bois, etc. » Souvent d'ailleurs, on mélange les deux types de description. Mais la distinction entre les deux est significative, et selon le destinataire, un message sera mieux compris que l'autre. Certaines personnes circulant carte en main, éprouvent le besoin d'orienter la carte comme le terrain qu'elles parcourent, tandis que d'autres rétablissent mentalement l'orientation.

La technique pour dicter un itinéraire varie selon les circonstances. En navigation (ou quand on marche à la boussole) il y le *cap* (de 0 à 360 degrés à partir du nord dans le sens horlogique), et le *changement de cap.* Dicter un itinéraire dans une ville américaine revient à dire : tant de blocs à gauche, à droite. Tous les changements de cap sont de 90 degrés.

Par ailleurs, dicter un itinéraire en ne donnant que des distances alternant avec des changements de cap de 90° – ce qui revient à donner des composantes (de vecteur) dans un repère orthogonal – n'est en général pas naturel : cela détourne l'attention du chemin le plus court (la droite, quoique pas dans un ville !) et fait intervenir un élément arbitraire : le repère. C'est pourtant cette manière de faire qui est à la base du calcul sur les coordonnées cartésiennes.

On peut encore dicter un itinéraire dans le ciel, pour trouver une étoile en partant d'une constellation connue ; ou sur la terre (on découvre alors le problème du plus court chemin sur la sphère) . On peut dicter un itinéraire sur un anneau ; aussi sur un cube, un autre polyèdre. Communiquer un itinéraire commence très tôt dans la vie. Et cela va au moins, pour ceux qui étudient la géométrie différentielle, jusqu'à trouver l'équation d'une géodésique sur une surface.

En passant de la géographie à la géométrie, on laissera tomber beaucoup d'éléments utiles à la description concrète d'un itinéraire. Les éléments du paysage géographique ou historique (« rappelle-toi... nous sommes passés par là l'an dernier ») cèdent la place aux modifications des coordonnées.

Changer de position fait donc apparaître le calcul. Les coordonnées de la nouvelle position peuvent être calculées à partir de celles de l'ancienne et de l'itinéraire. On peut aussi enchaîner deux ou plusieurs itinéraires. Dans le premier cas, on combine deux choses différentes : une position et un changement de position. Dans le deuxième cas, on combine deux changements de position. On peut ramener – de manière plus ou moins naturelle – le premier cas au deuxième en remarquant que la position peut toujours être spécifiée par un itinéraire : celui qui amène de l'origine à cette position.

Les manières de repérer une position et de décrire un itinéraire conduisent à des calculs plus ou moins faciles pour repérer la nouvelle position. Un bateau se trouve à 20° de longitude ouest et 30° de latitude nord. Il suit un cap de 35° est durant 200 milles. Trouver sa nouvelle position n'est pas si facile... Par contre si quelqu'un est au coin de la 17e rue et de la 8e avenue à New-York et qu'il se déplace de 3 blocs vers le nord et de 5 blocs vers l'est, il est facile de déterminer sa destination, pour peu que l'on connaisse le sens des numérotations. Il s'agit ici d'additions (ou de soustractions).

3 Repérer sur une droite

Passons maintenant à la question du repérage sur cet objet infini qu'est la droite de la géométrie.

Pour repérer un point P sur une droite, trois éléments sont nécessaires :

1. Il faut d'abord se choisir sur la droite un point O, qu'on appelle *l'origine*, à partir duquel on indique la position du point.
2. L'origine sépare la droite en deux demi-droites qu'il faut distinguer pour pouvoir indiquer dans laquelle se trouve le point P. C'est ce qu'on appelle *orienter la droite* (cf. le chapitre 20 à la page 282). Dans le cas particulier où la droite est horizontale et située dans un plan frontal devant l'observateur, on distingue la partie gauche de la partie droite. Si elle est verticale, on parle de la partie du dessus et de celle du dessous. Dans la cas général, on peut choisir un point dans une des deux parties. Il y a alors la partie où se trouve ce point, et l'autre.
3. On choisit ensuite une unité de mesure des longueurs et on indique l'éloignement du point P par rapport à l'origine O au moyen de la mesure du segment $[OP]$. On peut combiner ceci avec le point précédent en choisissant un point U qui

détermine à la fois l'orientation de la droite et l'unité de mesure. L'*abscisse* du point P est alors la mesure, munie d'un signe, de $[OP]$ avec $[OU]$ comme unité. On met le signe + si P et U sont sur la même demi-droite, et le signe − dans le cas contraire. On parle alors des parties *positive* et *négative* de la droite.

Caractériser le passage d'un point de la droite à un autre revient alors à caractériser la modification d'abscisse. Le changement de position est donné par la *différence entre l'abscisse du point d'arrivée et celle du point de départ.* Pour faciliter l'expression, supposons la droite horizontale et appelons positif le côté droit. Si l'on se déplace vers la droite, l'abscisse augmente ; la différence des abscisses est positive. Dans le cas contraire l'abscisse diminue ; la différence des abscisses est négative.

Le repérage des positions a déjà fait apparaître les relatifs ; les changements de position les font apparaître à nouveau, mais sans origine (on reconnaît des vecteurs libres à une dimension[1]*).*

L'arrivée du signe a donc deux origines bien distinctes : la première est l'impossibilité de situer un point sur une droite sans avoir choisi une origine, qui détermine *deux* demi-droites ; la seconde est le fait qu'on peut faire se mouvoir un point donné (éventuellement à vue, sans usage d'une abscisse) dans un sens ou dans l'autre. Même si ces deux choses sont liées, elles sont différentes . Pour nous en rendre compte, revenons pour un moment aux grandeurs et aux variations de grandeurs, analogues aux positions et aux variations de position. On y trouve la seconde modalité du signe en l'absence de la première : les grandeurs sont toutes positives par nature, mais les variations de grandeur, elles, ont un signe. Nous y reviendrons dans la suite.

On ne voit pas de motif pour combiner deux positions, mais par contre combiner deux changements de position est naturel : si combiner deux abscisses n'a pas de sens, enchaîner deux changements de position en a un. On reconnaît déjà le doublet *vecteur libre, vecteur lié,* qu'on va retrouver dans le plan et dans l'espace. On découvre une nouvelle somme, celle des changements de position. Mais pourquoi parler de *somme* lorsqu'il s'agit d'enchaîner des changements de position ? Parce que, lorsque les deux changements se font dans le même sens, il s'agit d'une somme au sens ordinaire (au sens habituel dans les grandeurs et les nombres positifs).

L'abscisse apparaît comme un objet ; le nombre qui dicte le changement de position apparaît comme un opérateur additif sur cet objet : il ajoute un relatif à une abscisse. La locution changement de position renvoie elle-même à cette situation mixte : il y a position, puis changement.

On peut aussi envoyer un point tant de fois plus loin ou plus

[1] Les allusions aux vecteurs, ici et plus loin dans cette section, ne sont certainement pas faciles à saisir. Cette difficulté est commentée à la fin de la section.

près de l'origine, dans un sens ou l'autre. Pour cela, on multiplie son abscisse par un nombre (relatif). Voilà un nouveau type d'opérateur, multiplicatif, sur cet objet qu'est l'abscisse. En fait il opère des homothéties dont le centre est à l'origine.

On peut aussi multiplier un changement de position par un relatif pour l'amplifier, le diminuer, en le retournant ou non. Et si on continue à voir le changement de position comme un opérateur, voici donc un opérateur qui opère sur un opérateur. C'est un opérateur multiplicatif qui opère sur un opérateur additif.

Cet opérateur multiplicatif respecte les additions de changements de position. Soient a et b deux changements de position et α un nombre . On a :

$$\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b.$$

La fonction qui, à un changement de position a, fait correspondre le changement de position αa est donc une fonction linéaire.

En résumé, en repérant des points sur la droite et en effectuant des changements de position, nous avons rencontré des nombres positifs et négatifs. Ces nombres ont des rôles divers :

– ce sont des objets (abscisses) ;
– ce sont des opérateurs additifs (changements de position) qui opèrent sur des objets (ils changent les abscisses de tant ou tant) ;
– ce sont des opérateurs multiplicatifs (homothéties) qui agissent sur des objets (ils multiplient les abscisses par tant ou tant) ;
– ce sont des opérateurs multiplicatifs qui agissent sur des opérateurs additifs (ils multiplient les changements de position par tant ou tant).

Pour faire un espace vectoriel, il faudra mettre bon ordre à tout cela. Il faudra, d'une manière ou l'autre, identifier les objets et les opérateurs additifs : ce seront les vecteurs. Les opérateurs multiplicatifs s'identifieront alors automatiquement aux scalaires. Ceci ne signifie pas que pour voir la droite comme un espace vectoriel, il faudrait supprimer toutes les facettes de ces objets et opérateurs, et n'en garder qu'une au mépris des autres. Ce n'est que la *théorie* de la droite comme espace vectoriel qui aurait une fâcheuse tendance à tuer ces nuances.

Il faut relever une réelle difficulté à concevoir la droite des nombres comme un espace vectoriel sur le corps des réels : en effet, par opposition à ce qui se passe dans le plan ou l'espace (voir section 4), les scalaires et les vecteurs se ressemblent ici beaucoup : tous sont des nombres. D'où la difficulté de les discerner. La seule différence entre eux est que les premiers sont des opérateurs qui agissent sur les seconds[2].

[2] Cette discussion sur la droite comme espace vectoriel éclaire les embarras bien connus que rencontrent les élèves

4 Repérer dans le plan et l'espace

Passons maintenant de la droite au plan et à l'espace, en nous concentrant sur les repérages cartésiens (par opposition à ceux de type polaire). Pour repérer la position d'un point, on projette celui-ci sur deux ou trois axes de directions distinctes. Les coordonnées sont alors données par un couple ou un triple de nombres. Ce sont les abscisses des projections du point sur les axes. L'origine est à l'intersection des axes, qui doivent bien entendu être orientés. On adopte souvent des axes perpendiculaires, orientés horizontalement et verticalement, avec les positifs vers la droite sur l'axe horizontal et vers le haut sur l'axe vertical.

Les changements de position se codent de la même manière que les positions. Il leur correspond donc également deux ou trois nombres. Chacun d'eux mesure la variation de position des projections sur un des axes.

Comme dans le cas de la droite, combiner des positions n'a pas de sens. Par contre appliquer des changements de position à des positions ou enchaîner des changements de position sont des actions qui ont du sens.

L'opération qui consiste à enchaîner plusieurs changements de position s'appelle ici aussi *addition*. On peut justifier (rendre plausible) cette utilisation du signe + de deux manières. D'abord, si les changements de position sont alignés, on retrouve l'addition telle qu'elle a été définie sur la droite. Ensuite, on peut travailler composante par composante. Les composantes sont des projections sur une droite. Si on enchaîne deux changements de position, les projections s'enchaînent ; la projection de l'enchaînement des deux changements de position, c'est la somme de leurs projections. Par exemple, pour deux changements de positions $a = (a_1, a_2, a_3)$ et $b = (b_1, b_1, b_3)$ dans l'espace, on a

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_1, a_3 + b_3).$$

Autrement dit, les projections conservent la somme (c'est-à-dire les enchaînements) : ce sont des fonctions linéaires. D'ailleurs, la conservation de la somme s'applique aussi à la projection d'une somme non pas sur une droite mais sur un plan.

On peut aussi appliquer un opérateur multiplicatif aux coordonnées ou aux changements de position. Comme dans le cas de la droite, ils opèrent des homothéties sur les points, et amplifient ou diminuent en les retournant éventuellement les changements de position. Ici la distinction entre opérateurs (scalaires) et changements de position (vecteurs) est claire. Les premiers sont des nombres, les deuxièmes sont des couples ou des triples de nombres.

---

lorsqu'ils doivent s'habituer aux divers statuts des nombres. Ceux-ci sont en effet, selon les circonstances où on les rencontre, des mesures ou des opérateurs additifs ou multiplicatifs. On se souviendra ici des controverses sur le statut des deux facteurs d'un produit : le multiplicande et le multiplicateur, et l'ordre dans lequel on les énonce.

Les projections préservent ces opérateurs : la projection sur un axe de α fois a est α fois la projection de a. Par conséquent, on peut faire agir les opérateurs multiplicatifs composante par composante :

$$\alpha(a_1, a_2, a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3).$$

Ici aussi les opérateurs multiplicatifs préservent la somme (enchaînement) des changements de position :

$$\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b.$$

5 Généraliser les rapports

Au chapitre 16, nous avons parlé des grandeurs et des fonctions linéaires définies sur un domaine de grandeurs. Ces fonctions étaient celles qui conservaient les rapports internes et étaient caractérisées par un rapports externe. Dans ce chapitre, nous avons examiné les repérages de points et les changements de position, mais nous n'avons pas encore introduit les fonctions linéaires appliquées à ces nouveaux objets. Nous nous occuperons de cela un peu plus tard (voir chapitre 18). Mais pour y arriver, un préalable est nécessaire : que devient la notion de rapport lorsqu'on passe des grandeurs aux positions et changements de position, sur une droite d'abord, et ensuite dans le plan et l'espace ?

Regardons d'abord la droite. Le rapport entre deux abscisses sur une droite n'a guère de sens. Par contre, il est raisonnable de se poser la question du rapport entre deux changements de position. On dira assez naturellement que ce changement-ci est le double de celui-là, que tel autre est l'opposé du premier... Le rapport entre deux changements de position peut donc s'exprimer au moyen d'un nombre positif ou négatif ; positif si les deux changements de position ont même sens, négatif sinon. Comme dans le cas des grandeurs, les rapports sont intiment liés aux opérateurs multiplicatifs : dire que le rapport entre a et b vaut -2, c'est dire que a vaut -2 fois b, c'est-à-dire que a est opposé à b et a une « amplitude » double de celle de b. De manière générale,

$$\text{dire que } \frac{a}{b} = \alpha \text{ revient à dire que } a = \alpha b.$$

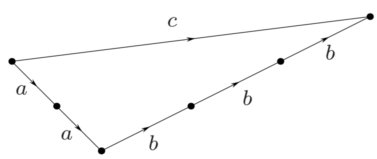

Fig. 3

Lorsque l'on se trouve dans le plan ou l'espace, il se peut que deux variations de position soient parallèles. Elles ont alors un rapport comme dans le cas de la droite. On peut dire que l'une est multiple de l'autre, ou encore que l'une peut s'exprimer en fonction de l'autre. Lorsque les deux variations ne sont pas parallèles, rien ne permet d'exprimer l'une en fonction de l'autre, de trouver un rapport entre les deux. Par contre, lorsque l'on en a trois, il est éventuellement possible d'en exprimer une en fonction des deux autres. La figure 3 montre par exemple une façon naturelle de représenter c en fonction de a et de b : on a $c = 2a + 3b$. On dit alors que c est *combinaison linéaire* de a et de b. *Ainsi la notion de rapport ne se généralise pas telle qu'elle à tous les changements de position dans le plan ou l'espace, mais celle de multiple se généralise par les combinaisons linéaires.*

Revenons aux grandeurs. Dans chaque domaine de grandeurs, le choix d'une unité U, c'est-à-dire d'une grandeur particulière, suffit pour exprimer toutes les autres. La mesure α d'une grandeur A avec l'unité U est le rapport entre A et U. On écrit alors $A = \alpha U$. Pour les changements de position sur une droite, le choix d'une unité est à nouveau suffisant pour exprimer toutes les variations de position (comme multiples de l'unité). Dans le plan, il faut – et c'est d'ailleurs suffisant – avoir au moins deux changements de position a et b non parallèles pour pouvoir retrouver n'importe quel changement de position comme combinaison linéaire de a et b. Choisir une « unité » dans le plan, c'est donc choisir deux changements de position non parallèles. C'est ce qu'on appelle une *base*. Dans l'espace, pour avoir une base, il en faut trois qui ne se trouvent pas dans le même plan et dont deux ne sont pas parallèles.

Nous avons vu que les fonctions linéaires entre domaines de grandeurs sont des fonctions qui préservent la somme des grandeurs et les rapports internes. Poursuivant la généralisation qui vient d'être faite, nous verrons dans le chapitre 19 à la page 274 que les fonctions linéaires sont celles qui préservent les combinaisons linéaires (et en particulier les sommes puisque celles-ci sont des combinaisons linéaires particulières).

18

Vecteurs

D'assez nombreuses entités géométriques ou physiques ont une grandeur, une direction et un sens sur cette direction. Tel est le cas des déplacements rectilignes d'un point, des translations, des forces, des vitesses. La notion mathématique de vecteur sert communément à représenter ces entités.

Mais les vecteurs[1] ne sont pas seulement des objets mathématiques ayant eux aussi une grandeur, une direction et un sens. Ils obéissent en plus à des règles précises concernant la façon de les additionner et de les multiplier par un nombre. Nous ne rappellerons pas ces règles ici.

Par ailleurs, les déplacements rectilignes d'un point, les translations, les forces et les vitesses peuvent aussi être combinées pour former des « sommes » et être multipliées par un nombre. Le tout est de savoir si ces opérations sont fidèlement représentées par les opérations conventionnelles sur les vecteurs.

Nous consacrons ce chapitre à montrer que les vecteurs représentent fidèlement certaines notions géométriques et physiques, et moins fidèlement certaines autres.

Nous partirons en considérant des *flèches* (ou segments orientés) parce qu'une flèche est la représentation familière la plus banale de toute entité qui possède grandeur, direction et sens. Au cours de l'exposé, nos flèches n'auront pas un statut mathématique stable. Dans certains cas, une flèche sera attachée à un point fixe (son origine). Dans d'autres, elle sera attachée à un point mobile (par exemple lorsqu'elle représentera une vitesse). Dans d'autres cas encore, la flèche sera considérée comme un objet librement transportable d'un lieu à un autre, à la seule condition de ne changer dans le transport ni sa grandeur, ni sa direction, ni son sens. Nous préciserons chaque fois l'acception que nous donnerons au mot flèche. Étant donné qu'il s'agit d'un mot à acception variable, nous ne proposons nullement d'en faire, entre autres pour l'enseignement, un terme consacré.

[1] Nous parlons ici des vecteurs géométriques élémentaires, et non des éléments d'espaces vectoriels plus généraux (les espaces de fonctions par exemple).

1 Variations de position ou translations

Considérons une flèche (un segment orienté) sur une droite. Nous pouvons l'utiliser pour commander une variation de position d'un point. Montrons la manœuvre. Soit un point ; nous faisons glisser la flèche sur la droite de sorte que son origine coïncide avec le point, puis nous envoyons celui-ci à l'extrémité de la flèche. Dans cette perspective, une flèche est considérée comme capable de commander un changement de position d'un point quelconque[2].

Voyons maintenant ce qui arrive si on passe de la droite au plan. Dans le plan aussi, une flèche peut représenter la commande d'une variation de position applicable à un point quelconque. Quel que soit le point de départ choisi, on glisse la flèche de sorte que son origine vienne sur le point, puis on envoie le point sur son extrémité. Bien entendu, lorsqu'on déplace la flèche, on ne change ni sa direction, ni son sens, ni sa longueur.

Un variation de position dans un plan a pour effet une translation de celui-ci : dans une translation, *tous les points* avancent dans telle direction, de telle longueur, dans tel sens.

On compose deux variations de position (ou deux translations) en les enchaînant et on dit que la variation de position résultante est *la somme* des deux autres. Soient $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ deux variations de position (figure 1(a)). La somme $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ s'obtient en mettant les deux flèches bout à bout et en considérant la flèche qui va de l'origine de $\overrightarrow{a}$ à l'extrémité de $\overrightarrow{b}$ (figure 1(b)).

Fig. 1 (a,b)

On définit aussi la multiplication d'une variation de position (d'une translation) par un nombre réel : on multiplie la longueur de la flèche par la valeur absolue de ce nombre et, si le nombre est négatif, on inverse le sens de la flèche. Si $\overrightarrow{a}$ est la variation de position et si α est le nombre, le résultat de cette opération se note $\alpha\overrightarrow{a}$.

Ces deux opérations munissent l'ensemble des variations de position dans un plan d'une structure d'espace vectoriel. Nous ne rappelons pas ici la démonstration de ce fait.

Notons toutefois qu'une des propriétés de l'espace vectoriel est que, pour toutes les variations de position $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ et tout

[2] Au lieu de considérer une flèche capable d'agir sur un point quelconque de la droite, on pourrait évidemment *attacher une flèche à un point déterminé* et considérer qu'elle commande un changement de position de ce seul point. Nous examinerons cette possibilité à la section 3.

nombre α, on a

$$\alpha(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \alpha\,\overrightarrow{a} + \alpha\,\overrightarrow{b}. \tag{1}$$

La multiplication par α de toutes les variations de position envoie l'ensemble de ces variations sur lui-même ou si on veut l'ensemble des translations sur lui-même. L'équation (1) montre que cette application est linéaire, puisque l'image d'une somme est la somme des images. Nous verrons à la section 5 qu'il existe des applications linéaires de l'ensemble des variations de position sur lui-même, bien différentes de celle-là.

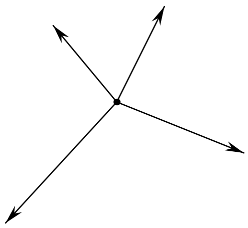

Fig. 2

2 Forces appliquées en un point

Considérons un point soumis à diverses forces : par exemple, on noue des ficelles en un point, et on tire plus ou moins fort sur chacune. La figure 2 représente cette situation par des flèches : chaque flèche a la direction d'une ficelle, et sa longueur est proportionnelle à l'intensité de la force mesurée dans une unité donnée (par exemple le newton ou le kilo-force).

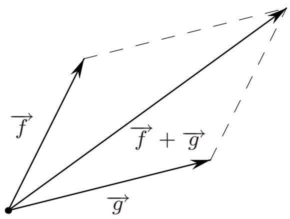

Fig. 3

On dit d'un point qui demeure immobile qu'il est *en équilibre*[3]. Une question qui vient naturellement à l'esprit à propos de notre nœud, est de savoir à quelles conditions, s'il est en équilibre avant l'application des forces, il demeure en équilibre après.

Pour exprimer la condition d'équilibre, il faut définir la somme des forces. La somme $\overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$ de deux forces correspond à la flèche diagonale du parallélogramme défini par $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$ (figure 3). C'est la loi dite *du parallélogramme des forces*[4].

L'expérience montre que le nœud demeure en équilibre si la somme de toutes les forces appliquées est nulle.

Une variation de position, au sens où nous l'avons entendu, pouvait être représentée par une flèche située n'importe où dans le plan. Nous n'accordons pas une telle liberté à la flèche représentant une force : dans le problème d'équilibre que nous considérons, la force n'a de sens qu'attachée au point. Et heureusement la somme de deux forces, telle que nous l'avons définie, est encore attachée au point.

Nous pouvons bien entendu définir la produit d'une force par un nombre réel α : cela revient à multiplier l'intensité de la force par la valeur absolue de α et, si α est négatif, à tirer avec le fil dans la même direction, mais dans le sens opposé.

L'ensemble des forces que l'on peut appliquer sur un point, avec la somme et le produit par un nombre que nous venons de définir, constitue aussi un espace vectoriel. À nouveau, nous ne donnons pas ici la démonstration de ce fait.

[3] Dans un exposé élémentaire comme celui-ci, nous ne jugeons pas utile de préciser qu'un équilibre ne peut se définir que par rapport à un repère.

[4] Nous passons sous silence ici les cas particuliers où certaines des forces sont soit nulles, soit de même direction.

Les deux espaces vectoriels présentés jusqu'ici, celui des variations de position et celui des forces appliquées en un point, peuvent être mis en correspondance fidèle l'un avec l'autre. Ils sont des modèles de la même structure.

Comme nous allons le voir maintenant, tout ce qui est représentable par des flèches, c'est-à-dire tout ce qui possède direction, sens et grandeur, n'est pas *naturellement* (c'est-à-dire en respectant la nature des choses) doté d'une addition et d'un produit par un nombre conduisant à une structure d'espace vectoriel. Donnons-en maintenant quelques exemples.

3 Déplacement d'un point

Ci-dessus, nous avons défini la variation de position comme applicable à *un point quelconque du plan*, ce qui nous donnait la liberté de le représenter par une flèche dessinée n'importe où.

Supposons maintenant que nous considérions le déplacement d'*un* point. Pour caractériser ce déplacement, nous faisons partir une flèche du point en question, et faisons aboutir l'extrémité de la flèche à l'endroit où il doit arriver. Nous refusons cette fois de déplacer la flèche, car *elle concerne ce seul point.*

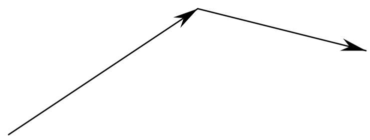

Fig. 4

Dans l'idée de créer une somme de deux changements de position (d'un seul point), enchaînons maintenant deux mouvements de ce type. Il faut que l'origine de la deuxième flèche coïncide avec l'extrémité de la première, comme le montre la figure 4. Il serait en effet absurde d'enchaîner deux déplacements comme ceux que montre la figure 5, car quel que soit l'ordre dans lequel on les considère, le point de départ du second ne coïncide pas avec le point d'arrivée du premier.

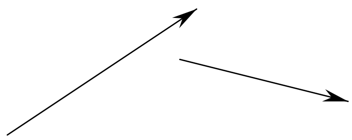

Fig. 5

Donc si nous cherchons à faire correspondre une somme à l'enchaînement de deux déplacements de ce type, nous devons bien reconnaître que cette somme ne sera pas définie pour deux flèches quelconques. Qui plus est, lorsque la somme est définie, comme sur la figure 4, elle ne commute pas. Pour ces raisons et pour quelques autres[5], les flèches liées à leur origine sont impropres à la constitution d'un espace vectoriel.

4 Équilibre d'un corps solide

Considérons maintenant un corps solide sur lequel on tire avec des ficelles. La figure 6 à la page suivante en montre deux exemples : le premier a la forme d'une tige, et le second est de forme quelconque. Chaque ficelle est attachée en un point et la longueur de la flèche correspondante est proportionnelle à l'intensité de la force appliquée. Il serait assez difficile d'imaginer

[5] Le lecteur est invité à identifier les autres propriétés de base d'un espace vectoriel qui ne sont pas satisfaites par des déplacements liés à un point.

que l'on déplace la flèche, car la ficelle tire sur un point déterminé du solide.

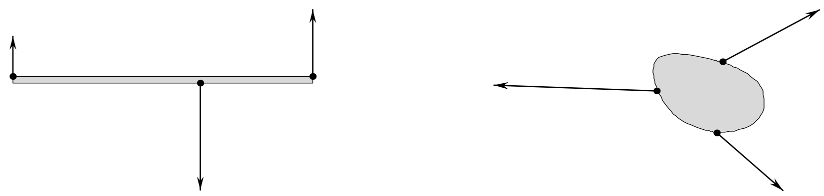

Fig. 6

Supposons le solide initialement au repos, ou comme on dit encore, en équilibre. À quelles conditions doivent satisfaire les forces pour qu'il demeure en équilibre ?

Première condition d'équilibre. – La première condition est que la « somme des forces » soit nulle. Mais qu'entendons-nous ici par la somme des forces ? Nous savons additionner des forces lorsque celles-ci sont toutes appliquées en un point. Tel n'est pas le cas ici. Pourtant, comme le prouve l'expérience, la première condition d'équilibre fait bien intervenir la somme au sens où nous l'avons définie : nous déplaçons *mentalement* toutes les flèches pour rassembler leurs origines en un seul point, et nous faisons la somme *comme si* toutes les forces étaient appliquées en ce point. Pour que le solide soit en équilibre, il faut (mais il ne suffit pas) que nous trouvions une somme nulle. Bien que la position des forces pose problème, on écrit cependant la première condition d'équilibre sous la forme[6]

$$\overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2} + \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{0}.$$

Deuxième condition d'équilibre. – La deuxième condition d'équilibre s'énonce comme ceci : la somme des moments, calculée en un point quelconque, des forces appliquées, est nulle. Que le lecteur qui n'a pas étudié la mécanique nous pardonne le caractère un peu technique de l'explication qui suit[7].

Le *moment* par rapport à un point 0 d'une force $\overrightarrow{f}$ appliquée en un point P est le produit vectoriel[8]

$$\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{f}.$$

La deuxième condition d'équilibre des solides de la figure 6 est donc

$$\overrightarrow{OP_1} \wedge \overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{OP_2} \wedge \overrightarrow{f_2} + \overrightarrow{OP_3} \wedge \overrightarrow{f_3} = 0.$$

[6] Nous n'insistons pas sur le fait que l'associativité de la somme des forces appliquées en un point est requise ici.

[7] Rappelons que dans cette partie de notre étude, nous cherchons à cerner les avatars de la structure linéaire à travers l'apprentissage des mathématiques. Pour situer et orienter cet apprentissage vers la fin du secondaire, il faut bien regarder vers quoi il tend, ne serait-ce que pour certains étudiants, dans l'enseignement supérieur.

[8] On trouve des éclaircissements sur la notion de moment d'une force dans tous les cours de mécanique.

On le voit, les moments dépendent des points d'application des forces, ce qui renforce notre idée que celles-ci sont indéplaçables (sauf mentalement...) Si on change les points d'application des forces, on rompt en général l'équilibre du solide.

Notons toutefois que certains déplacements des forces ne rompent pas l'équilibre. Pour expliquer cela, supposons dans un premier temps que nous tirions directement sur certains points du solide (figure 7(a)). L'équilibre n'est pas rompu si nous tirons avec les mêmes forces, sur les mêmes points, mais en utilisant des ficelles de longueurs quelconques (figure 7(b)).

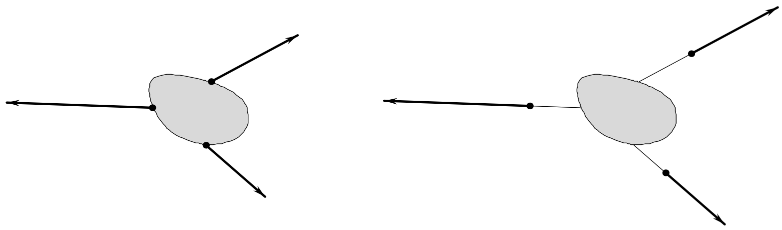

Fig. 7 (a,b)

La ficelle matérialise ce que l'on appelle la *ligne d'action* de la force. L'équilibre d'un solide n'est pas rompu si, comme on dit, on déplace les forces le long de leur ligne d'action.

Des flèches qui peuvent ainsi glisser le long d'une droite définissent ce que l'on appelle des *vecteurs glissants*. Un système de vecteurs glissants est appelé *torseur.*

Nous voici donc en présence de grandeurs orientées, représentées par des flèches, mais qui ne sont ni déplaçables en un point quelconque du plan, ni non plus toutes attachées en un point. L'ensemble de tous les vecteurs glissants possibles ne constitue pas un espace vectoriel. En effet, premier obstacle, on peut parfois, *mais non toujours*, définir la somme de deux vecteurs glissants. On peut les combiner selon la loi du parallélogramme, à condition que leurs lignes d'action se croisent. Pour ce faire, on tire les flèches jusqu'au point de croisement, et on fait la somme. Lorsqu'on fait cela, on ne rompt pas l'équilibre du solide. Mais si les lignes d'action ne se croisent pas, on ne sait même pas comment combiner les deux flèches, ni sur quelle ligne d'action on mettrait la somme.

Nous voilà donc une fois de plus avec des grandeurs orientées rebelles : elles refusent de se constituer en espace vectoriel.

Pourtant, nous l'avons vu, pour appliquer la première condition d'équilibre, *on fait comme si* les forces étaient des ... vecteurs libres. La structure d'espace vectoriel ressemble ici à un outil universel à tête multiple : il ne convient pas globalement aux systèmes de forces. Mais on peut se servir de la tête « addition » pour exprimer les conditions d'équilibre d'un solide. C'est une expérience de pensée, mais elle exprime aussi une loi physique.

5 Vitesses

Considérons un fleuve qui coule uniformément en ligne droite. Toutes les molécules d'eau sont animées de la même[9] vitesse $\overrightarrow{v_e}$. Le figure 8 représente le fleuve à un instant donné. Chaque flèche parallèle aux rives part d'une molécule et représente sa vitesse.

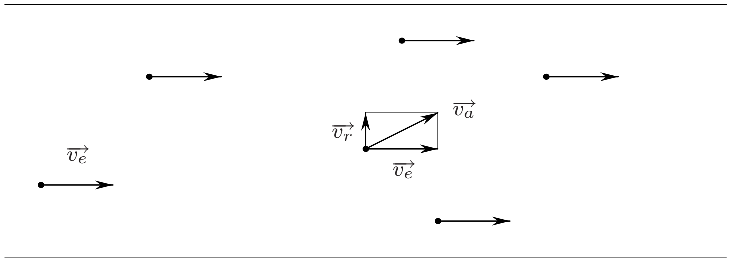

Fig. 8

Considérons un nageur N traversant le fleuve, et supposons qu'il maintienne, *par rapport à l'eau qui s'écoule*, une vitesse $\overrightarrow{v_r}$ constante et perpendiculaire au courant. Insistons sur le fait qu'il s'agit bien de la vitesse par rapport à la masse d'eau en mouvement. La flèche qui représente cette vitesse du nageur est donc aussi perpendiculaire aux rives du fleuve. Mais ce n'est pas la vitesse telle qu'un observateur à l'arrêt sur la rive peut la voir. En effet, le nageur est entraîné par le mouvement de l'eau. Sa vitesse par rapport à la rive est donnée par la loi du parallélogramme appliquée à $\overrightarrow{v_r}$ et $\overrightarrow{v_e}$. Désignons-la par $\overrightarrow{v_a}$. Nous avons donc

$$\overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{v_a}.$$

La vitesse $\overrightarrow{v_r}$ s'appelle *vitesse relative* du nageur (il faut entendre : relative au fleuve en mouvement), tandis que $\overrightarrow{v_e}$ est la *vitesse d'entraînement,* qui porte bien son nom. Quant à la vitesse $\overrightarrow{v_a}$, on l'appelle la *vitesse absolue.*

Quel est le statut des différentes flèches que nous venons de considérer ? Les flèches représentant $\overrightarrow{v_e}$ sont les mêmes partout : elles sont donc comparables aux flèches d'une translation. Toutefois, ceci cesserait d'être vrai si on considérait le fleuve non plus en ligne droite, mais en courbe.

La flèche représentant la vitesse du nageur est accrochée à un point, tout comme la force sur un point en équilibre. Mais ici le point est mobile !

Ainsi, les flèches représentant les vitesses ne renvoient fidèlement à aucun de nos deux modèles d'espace vectoriel, à savoir l'espace des translations et celui des forces appliquées en un point. Qui plus est la vitesse relative et la vitesse d'entraînement ne sont pas deux grandeurs homogènes : on ne peut donc pas définir une addition sur un ensemble qui contiendrait toutes les

[9] Nous négligeons ce qui se passe à proximité immédiate des rives.

vitesses que nous avons identifiées. Par exemple, cela n'a pas de sens d'additionner deux vitesses relatives, ou encore une vitesse relative et une vitesse absolue. Néanmoins, la loi du parallélogramme s'applique. À nouveau, la notion d'espace vectoriel apparaît comme cet outil à têtes multiples dont on utilise ici « la tête addition ».

19

Transformations linéaires

1 Des équations

Tant que l'on s'occupe de grandeurs ou de nombres, la notion de fonction linéaire est associée à celle de proportionnalité, et elle est assez simple. Lorsqu'on passe aux fonctions linéaires définies sur un espace à deux dimensions ou plus, la situation se complique et l'on assiste, en quelque sorte, à une explosion de phénomènes nouveaux. Essayons de voir d'où sortent ceux-ci, en comparant pas à pas ce qui se passe à une dimension avec ce qui se passe à deux[1].

D'abord, dans un espace à une dimension, il y a un vecteur de base $\overrightarrow{e}$. Soit $\overrightarrow{x}$ un vecteur quelconque de l'espace. On aura

$$\overrightarrow{x} = x\overrightarrow{e}, \tag{1}$$

où x est l'abscisse de $\overrightarrow{x}$. Soit $\overrightarrow{f}$ une fonction

$$\overrightarrow{f} \ : \overrightarrow{x} \mapsto \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}). \tag{2}$$

Supposons que cette fonction soit linéaire. Cela signifie que quel que soit le nombre α et le vecteur $\overrightarrow{x}$,

$$\overrightarrow{f}(\alpha\overrightarrow{x}) = \alpha f(\overrightarrow{x}). \tag{3}$$

Ceci nous permet d'écrire en particulier que

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{f}(x\overrightarrow{e}) = xf(\overrightarrow{e}). \tag{4}$$

Les égalités (1) et (4) expriment la propriété familière : entre $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{e}$, il y a le même rapport qu'entre $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ et $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e})$.

Pour caractériser la fonction, écrivons

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}) = a\overrightarrow{e}, \tag{5}$$

où a est l'abscisse de $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e})$ dans la base $\overrightarrow{e}$. En nous servant de (5) pour transformer (4), nous obtenons

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = xa\overrightarrow{e}. \tag{6}$$

[1] Ce qui suit suppose une certaine familiarité dans le maniement des vecteurs et des fonctions.

Posons
$$\overrightarrow{y} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) \tag{7}$$
et
$$\overrightarrow{y} = y\,\overrightarrow{e}. \tag{8}$$
L'égalité (6) devient
$$y\,\overrightarrow{e} = xa\,\overrightarrow{e}, \tag{9}$$
d'où nous tirons
$$y = ax. \tag{10}$$
Ainsi, dans la base $\overrightarrow{e}$, l'abscisse de $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ vaut a fois l'abscisse de x.

Ce développement un peu long – pour ce qu'il prouve – nous permet une comparaison point par point avec ce qui se passe à deux dimensions. Soit donc un espace à deux dimensions muni d'une base $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$. Soit $\overrightarrow{x}$ un vecteur quelconque de cet espace. On aura
$$\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}, \tag{1'}$$
où x_1 et x_2 sont les coordonnées de $\overrightarrow{x}$.

Soit $\overrightarrow{f}$ une fonction
$$\overrightarrow{f} \ : \overrightarrow{x} \mapsto \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}). \tag{2'}$$
Supposons que cette fonction soit linéaire. Cela veut dire que, quel que soit les nombre α et β et les vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$,
$$\overrightarrow{f}(\alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{y}) = \alpha\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) + \beta\overrightarrow{f}(\overrightarrow{y}). \tag{3'}$$
Ceci nous permet d'écrire en particulier que
$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{f}(x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}) = x_1\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e_1}) + x_2\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e_2}). \tag{4'}$$
Pour caractériser la fonction, écrivons
$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{f}(\overrightarrow{e_1}) & = & a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{21}\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{e_2}) & = & a_{12}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2}. \end{array} \tag{5'}$$
En nous servant de (5′) pour transformer (4′), nous obtenons
$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = x_1(a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{21}\overrightarrow{e_2}) + x_2(a_{12}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2}). \tag{6'}$$
Posons
$$\overrightarrow{y} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) \tag{7'}$$
et
$$\overrightarrow{y} = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2}. \tag{8'}$$
L'égalité (6′) devient
$$y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\overrightarrow{e_1} + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\overrightarrow{e_2}, \tag{9'}$$

d'où nous tirons

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned} \qquad (10')$$

Cette équation peut encore s'écrire sous forme matricielle de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \qquad (11')$$

Ainsi, dans la base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$, la fonction (ou l'application, ou la transformation) linéaire $\overrightarrow{f}$ est représentée par la matrice carrée ci-dessus. En passant de l'égalité (10) aux égalités (10′) et (11′), on commence à voir – quoique seulement au niveau de l'expression symbolique – la différence entre une fonction linéaire dans un espace à une dimension et une fonction linéaire dans un espace à deux dimensions.

2 Des phénomènes nouveaux

Essayons maintenant de cerner géométriquement la différence que nous venons de découvrir entre une et deux dimensions. Nous savons représenter la fonction donnée par (10), celle qui envoie x sur y, dans un système de deux axes orthogonaux. Le graphe de cette fonction est dans tous les cas une droite.

Comment représenter la fonction donnée par (11′) ? Elle envoie un point quelconque d'un espace à deux dimensions sur un point d'un espace à deux dimensions. Ainsi son graphe se situe dans un espace à quatre dimensions. L'infirmité de la nature humaine nous empêche de représenter quoi que ce soit à quatre dimensions. Il faut pourtant faire quelque chose pour ouvrir la forteresse (11′) et voir ce qu'il y a dedans.

Nous pouvons pour commencer dessiner un plan des x_1, x_2 et à côté un plan des y_1, y_2 (figure 1). Mais il se fait que *dans la plupart des cas*[2], chaque point du premier plan est envoyé sur un point du second, et que tout point du second est l'image d'un point du premier. Nous ne pouvons tout de même pas noircir complètement le premier plan et aussi le second, dans l'idée de montrer chaque point au départ et à l'arrivée.

Fig. 1

[2] Il s'agit des cas où la transformation n'est pas dégénérée, c'est-à-dire ne se ramène pas à une projection.

Puisqu'il est difficile de montrer ce que deviennent tous les points du plan, intéressons-nous à quelques-uns seulement. Plus précisément, dessinons d'abord un motif simple dans le plan. Et puisque la fonction $\overrightarrow{f}$ envoie le plan sur lui-même, dessinons sur la même figure le motif et son image. Bien entendu, nous obtiendrons un résultat différent selon les valeurs que nous choisirons pour les coefficients a_{ij}. La figure 2 à la page suivante illustre ainsi divers cas particuliers de la fonction $\overrightarrow{f}$. Le motif simple de départ est celui qui est dessiné en trait épais.

Cette figure suffit à montrer ce que nous avons annoncé : le passage de une à deux dimensions s'accompagne d'une explosion de phénomènes nouveaux.

Ce n'est pas ici le lieu d'en faire la théorie détaillée[3]. Cette théorie comporte la recherche des sous-espaces à une dimension qui, pour une transformation déterminée, sont appliqués sur eux-mêmes. On y définit les notions de vecteur propre et de valeur propre de la transformation.

Il s'agit-là de la partie centrale de l'algèbre linéaire à un nombre fini de dimensions. Par delà son intérêt intrinsèque, cette théorie débouche sur des applications nombreuses et variées. Elle sert de base dans l'étude des équations différentielles ordinaires (voir N. Rouche, J. Mawhin [1973]). On la retrouve dans la théorie des petites oscillations d'un système mécanique ainsi que dans la théorie des circuits électriques. On la retrouve aussi dans de multiples applications aux sciences économiques et sociales (la théorie des graphes, les chaînes de Markov, la programmation linéaire, la théorie des jeux,...). Voir à cet égard l'un ou l'autre manuel de mathématiques pour les sciences humaines, comme par exemple J. Bair [1990].

[3] On trouve cette théorie dans de nombreux ouvrages. Voir par exemple T.J. Fletcher [1972] ou E.A. Maxwell [1975]. La théorie générale pour des espaces vectoriels à n dimensions se trouve aussi dans N. Rouche et J. Mawhin [1973].

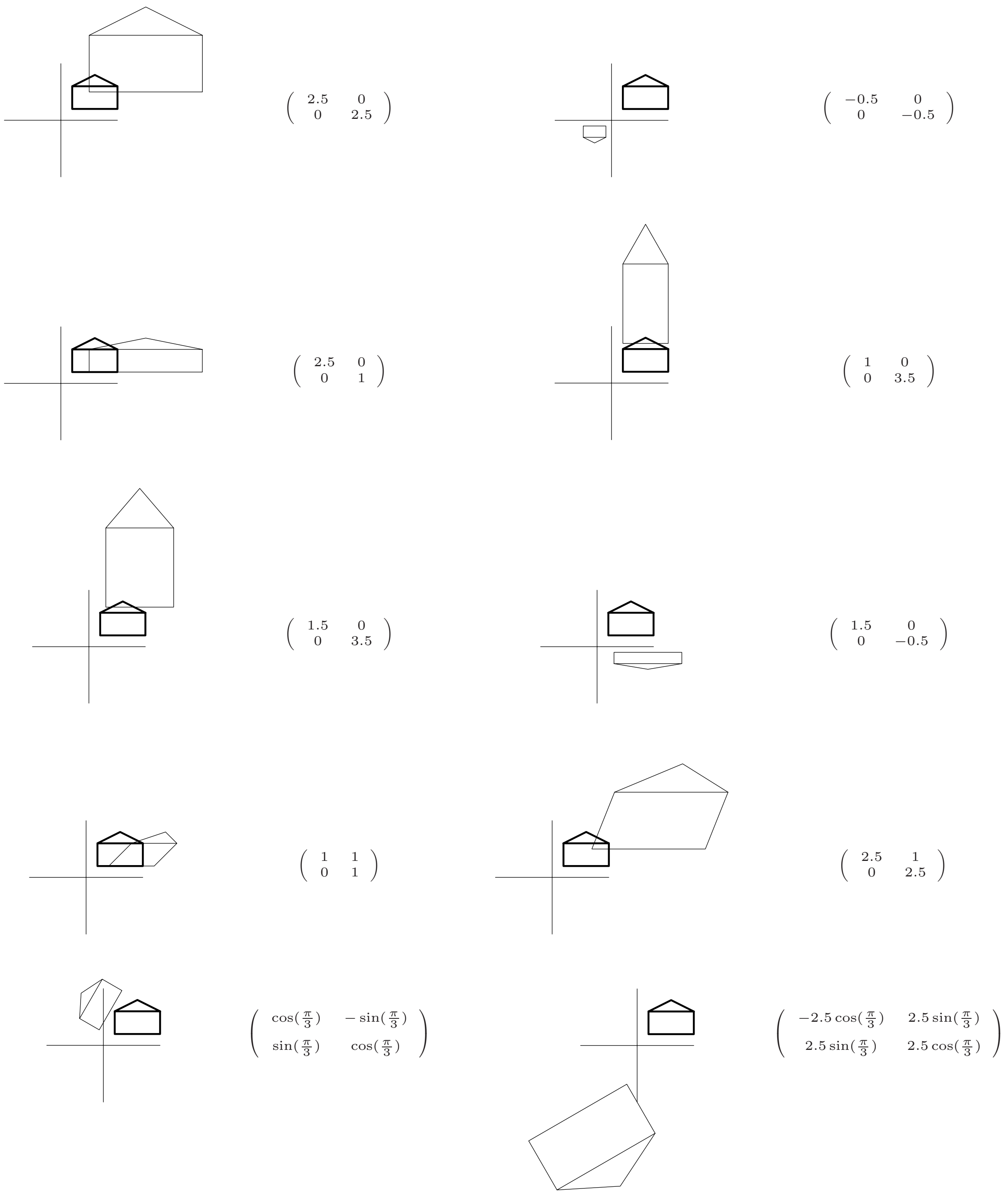
$\begin{pmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3.5 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 3.5 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2.5 & 1 \\ 0 & 2.5 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & -\sin(\frac{\pi}{3}) \\ \sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -2.5\cos(\frac{\pi}{3}) & 2.5\sin(\frac{\pi}{3}) \\ 2.5\sin(\frac{\pi}{3}) & 2.5\cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}$

Fig. 2