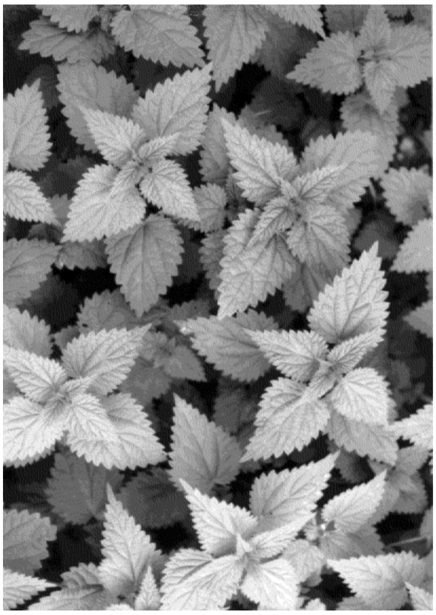
FORMES ET MOUVEMENTS

PERSPECTIVES POUR L'ENSEIGNEMENT
DE LA GÉOMÉTRIE



CREM a.s.b.l.

FORMES ET MOUVEMENTS

Perspectives pour l'enseignement de la géométrie

Cette étude a été
réalisée
dans le cadre des conventions de recherche 81, 95 à 98 passées avec le
Ministère de l'Éducation, de la Recherche et de la Formation
de la Communauté française de Belgique.
Deux postes de chargé de mission ont été affectés à temps partiel à cette recherche par le
Comité de Concertation de la Formation Continue
du Caractère non confessionnel.
Un poste de chargé de mission a été affecté à temps
partiel à cette recherche par le
Comité de Concertation de la Formation Continue
du Caractère confessionnel.

Avertissement. – Cette étude devait au départ s'étaler sur trois ans. À la suite d'une décision administrative, elle a duré trois ans et huit mois. Le présent volume correspond au projet initial. Un second volume, intitulé *Construire et représenter, un aspect de la géométrie de la maternelle jusqu'à dix-huit ans*, rend compte pour l'essentiel du supplément de recherche que noua avons pu faire grâce à la prolongation de la période de recherche.

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
5 rue Émile Vandervelde B-1400-Nivelles
Tél. : 32 67 212527 Fax : 32 67 212202
Juin 1999

FORMES ET MOUVEMENTS

PERSPECTIVES POUR L'ENSEIGNEMENT
DE LA GÉOMÉTRIE

CREM a.s.b.l.

Préliminaire

La présente étude n'aurait pas été possible sans la collaboration active et attentive de toute une équipe constituée par Sylvie Denis, institutrice maternelle, Bernard Honclaire, régent, Luc Lismont, docteur en mathématiques, Nicolas Rouche, agrégé de l'enseignement supérieur, Serge Sabbatini, licencié en mathématiques, Thaïs Sander, institutrice primaire, Françoise Van Dieren, régente, Jacques Van Santvoort, régent et docteur en mathématiques et Marie-Françoise Van Troeye, régente. Partant de son expérience – considérable pour certains – et de ses propres points de vue, chacun a apporté à l'œuvre commune sa part d'idées et de critiques. Le travail a comporté, en grand nombre, des lectures, des expériences en classe, des exposés, des débats, des brouillons.

L. Lismont et N. Rouche ont assuré la rédaction de l'ensemble, avec les exceptions suivantes : la première partie est due à N. Rouche, dûment critiqué par tous les autres ; la substance du chapitre 11, rédigé par L. Lismont, est due à B. Honclaire et M.-F. Van Troeye : le chapitre 12 est dû à F. Van Dieren.

Dans cette partie de notre recherche, nous avons voulu creuser profond, ce qui explique le caractère dans l'ensemble assez théorique de ce volume. Mais nous n'avons jamais oublié les élèves et les enseignants et nous expliquons, dans un chapitre de conclusions, en quoi nous espérons leur être utile.

Si nous sommes arrivés à un résultat équilibré où se conjuguent sans heurts l'exigence de sens pour les élèves et le bien-fondé de la pensée mathématique – le lecteur en jugera –, nous le devons sans conteste à la composition de notre équipe. L'expérience de notre collaboration, toutes les contradictions fructueuses que nous avons affrontées, nous amèneraient à confirmer ce qu'affirmait déjà le rapport « Danblon », à savoir qu'il ne faut jamais confier une réforme de l'enseignement des mathématiques à des mathématiciens non étroitement critiqués par des enseignants expérimentés. Et réciproquement.

Nos remerciements les plus chaleureux vont à toutes les personnes qui nous ont aidés par leurs idées et leurs critiques tout au long de l'élaboration de ce travail. Mentionnons tout particulièrement Francis Buekenhout, Sylvain Courtois, Michel Demal, Georges Demol, Christine Docq,

Thérèse Gilbert, Louis Habran, Francis Michel, Francis Michel, Guy Noël, ainsi que tous les membres des deux comités d'accompagnement, celui du CREM et celui du Ministère.

L'ensemble du texte a été saisi en LaTeX2$_\varepsilon$ par L. Lismont.
Celui-ci a aussi composé la plupart des figures avec Mathematica.
La plupart des figures du chapitre 12 ont été composées
par F. Van Dieren avec Canvas.

Avant-propos

1 Pourquoi une étude sur la géométrie ?

Montrons brièvement[1] l'opportunité d'une étude générale sur l'enseignement de la géométrie.

Jusque dans les années 60, on enseignait cette discipline en deux phases. À l'école primaire et au début du secondaire, il s'agissait d'une géométrie intuitive comportant principalement des notions sur les figures planes et les solides élémentaires, et particulièrement sur leurs aires et leurs volumes. Vers 13 ou 14 ans, on commençait une géométrie axiomatique, d'inspiration euclidienne sauf exception. Il y avait là une discontinuité dans l'apprentissage, et beaucoup d'élèves en souffraient.

Vers la fin des années 60, la réforme des mathématiques modernes instaure, dans un premier temps au secondaire seulement, une géométrie axiomatique d'inspiration ensembliste, qui déplace l'intérêt des figures vers les fondements, respecte la hiérarchie des géométries issue du programme d'Erlangen[2], et par conséquent fait jouer un rôle majeur aux transformations de l'espace (au départ il s'agit du plan). Suivant la tendance générale des mathématiques, cette géométrie est fortement algébrisée, et elle converge rapidement vers l'algèbre linéaire.

Au cours des années 70, le système d'enseignement réalise que les élèves ne peuvent guère saisir la portée des fondements lorsque ceux-ci leur sont proposés au départ. Il réalise que les figures, objets traditionnels de la géométrie, ne peuvent être oubliées. Mais il retient de l'expérience des mathématiques modernes, qui s'avère cruciale à cet égard, l'intérêt des transformations. Et il considère dorénavant l'algèbre linéaire comme un horizon principal de la géométrie.

Toutefois, la situation actuelle de l'enseignement de la géométrie continue à poser des problèmes importants. L'un d'entre eux est que cette discipline demeure un parent pauvre en primaire. Un second est que la disparition d'une axiomatique au début du secondaire a fait disparaître le fil conducteur qui montrait la voie. Les mathématiques modernes avaient non pas supprimé, mais remplacé et même affermi ce fil conducteur. On se demande maintenant entre autres quelles sont les places respectives des figures et des transformations, et s'il faut une priorité[3]. La disparition de l'axiomatique a entraîné une autre difficulté : en effet elle était la source même de la rigueur, et on se demande maintenant comment travailler sérieusement, rigoureusement. Il y a comme un deuil de la rigueur. Un débat est ouvert sur la preuve, souvent considérée comme obéissant à un modèle unique et devant être enseignée brusquement, à partir d'un âge déterminé. Ce débat fait apparaître des opinions contradictoires.

Ainsi, il y a un malaise du côté de la géométrie. Certains se demandent même s'il faut encore l'enseigner, et beaucoup d'enseignants de la génération formée aux mathématiques modernes se sentent mal préparés pour le faire.

L'objectif principal de la présente étude est d'examiner l'apprentissage de la géométrie, de chercher les conditions de sa pertinence et les modalités possibles de son évolution sans heurt à travers toute la jeunesse. Un concept clef pour examiner cette question est celui d'enseignement en spirale.

---

[1] Pour une discussion plus complète accompagnée de références, voir entre autres l'étude du CREM : *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans*, [1995].

[2] Félix Klein [1872].

[3] Voir par exemple à cet égard l'étude de M. Demal [1998].

2 Un enseignement en spirale

L'organisation d'un enseignement des mathématiques « en spirale » apparaît aujourd'hui comme un objectif approprié, susceptible de contribuer à la cohérence, à la continuité de cet enseignement[4]. Rappelons brièvement, en citant le rapport « Danblon », ce que l'on entend par *enseignement en spirale* : « Dans l'enseignement dit « en spirale », chaque notion, chaque théorie vue une première fois à un niveau élémentaire et dans un contexte peu étendu est reprise et approfondie plus tard dans un contexte élargi, et ainsi plusieurs fois jusqu'à ce que, d'approfondissement en approfondissement et de généralisation en généralisation, elle arrive à maturité en établissant ses connexions naturelles avec les notions et théories voisines[5]. »

Si on admet l'opportunité d'un enseignement en spirale, encore faut-il le concevoir. On a besoin pour cela d'une vue argumentée de l'apprentissage depuis son terrain de départ, celui des intuitions familières, jusqu'aux mathématiques constituées. En effet, des petits bouts de spirale raccordés vaille que vaille ne peuvent convenir. C'est un travail long et difficile, mobilisant des registres de connaissance et des expériences d'enseignement extrêmement variés. Aucune personne isolée ne peut espérer en venir à bout. Heureusement, le présente étude a bénéficié de la collaboration suivie d'une institutrice maternelle, une institutrice, trois régents, un licencié et deux docteurs en mathématiques.

L'étude est divisée en six parties. La première examine *Les origines de la géométrie* dans les perceptions et les mouvements. Elle tente de montrer comment se forment les premiers concepts, comment naissent les premières implications évidentes.

La deuxième partie, intitulée *Une géométrie naturelle*, part des premières implications évidentes issues des actions et perceptions quotidiennes pour arriver à quelques propriétés non évidentes de géométrie plane. L'exposé tente de montrer qu'une géométrie argumentée sérieusement peut s'appuyer sur des moyens de connaissance tels que des expériences, des perceptions de symétries, des mouvements continus. Il est construit à l'écart de tout contexte familier, pour mieux mettre en évidence la logique propre à cette géométrie intuitive et informelle.

La troisième partie, intitulée *La géométrie en classe à douze ans*, expose dans quels contextes et à travers quelles activités des enseignants du début du secondaire proposent d'éveiller la curiosité géométrique de leurs élèves, et comment il les amènent à construire des éléments de théorie satisfaisant cette curiosité. Cette partie comprend deux chapitres, relatant deux conceptions de cet enseignement, deux façons en somme d'interpréter le programme.

Jusque-là l'étude est donc consacrée à l'émergence de la géométrie, depuis les premières perceptions et intuitions jusqu'au développement des premières argumentations, des premiers raisonnements. Toute la suite du travail est consacrée à la présentation de trois fils conducteurs qui nous paraissent susceptibles d'inspirer un enseignement cohérent de la géométrie depuis l'école maternelle jusqu'à la fin du secondaire. Comme on va le voir, chacun de ces trois fils fait l'objet d'une partie de ce rapport.

Les objets, qu'ils soient plans ou à trois dimensions, sont souvent peu accessibles à la perception parce qu'ils sont mal placés, vus incomplètement, trop grands, trop petits,... D'où le nécessaire va-et-vient entre eux et des représentations de toutes sortes. La quatrième partie propose une vue argumentée des représentations, depuis les plus simples jusqu'à la perspective centrale, en passant par les développements de solides et les maquettes. Elle montre pourquoi les représentations font partie intégrante de la géométrie.

---

[4] La continuité de l'enseignement des mathématiques apparaît comme une préoccupation centrale dans plusieurs documents officiels, entre autres le rapport « Danblon » [1990] et la brochure *Mathématiques de 10 à 14 ans, continuité et compétences*, [1996].

[5] L'idée d'enseignement en spirale est développée en détail et rattachée à ses origines dans F. Buekenhout [1982].

La cinquième partie explique le développement de la structure linéaire en partant des opérations élémentaires sur les grandeurs et en passant par la notion de mesure, la proportionnalité, les vecteurs et les transformations linéaires. La linéarité, contrastée à la non-linéarité, peut – oserait-on dire doit ? – jouer un rôle de fil conducteur dans un enseignement en spirale des mathématiques en général, et

particulièrement de la géométrie.

La sixième partie enfin expose le thème de l'orientation depuis l'avant et l'arrière, le dessus et le dessous, la gauche et la droite, en passant par les horloges et les tire-bouchons, jusqu'aux changements de base dans un espace vectoriel.

3 Pour quels lecteurs ?

Pour que cette étude atteigne son objectif, qui est d'aider à la conception d'un enseignement en spirale de la maternelle jusqu'à l'âge adulte, il fallait quelle soit, pour l'essentiel, lisible par les enseignants de tous niveaux. C'est pourquoi les sujets mathématiques y sont introduits doucement et de manière explicite. Seules les matières les plus avancées sont traitées avec moins de ménagements, car il n'était pas possible de tout réexpliquer en détail. L'espoir est que chaque lecteur puisse avancer assez loin dans chaque chapitre, et de plus saisir la portée de l'ensemble.

Indications pour la lecture – Les renvois à la bibliographie, située en fin d'ouvrage, se font par le nom de l'auteur, suivi par la date de la publication placée entre crochets. À de rarissimes exceptions près, tous les ouvrages mentionnés sont disponibles au centre de documentation du CREM.