Pour une culture mathématique accessible à tous

Élaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes

Michel Ballieu et Marie-France Guissard, coordinateurs
Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles

Cet article rend compte de la recherche n° 100/02-03 financée par le Ministère de la Communauté française, Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Service général des Affaires générales, de la Recherche en Éducation et du Pilotage interréseaux. Le texte intégral est téléchargeable sur le site http://www.enseignement.be

Les auteurs de la recherche sont Michel Ballieu, Jean-Michel Delire, Marie-France Guissard, Amélie Jonkers, Philippe Mairesse, Bénédicte Mestag, Jules Miéwis, Laure Mourlon Beernaert, Jacques Vandekerckhove, Françoise Van Dieren.

1. Culture mathématique, mathématiques du citoyen

Cette recherche tente de porter une réflexion sur ce qui pourrait constituer une culture mathématique de base. Compter, situer, mesurer, dessiner, jouer, expliquer sont des activités propres à tous les peuples. Elles permettent de développer, dès le plus jeune âge, des compétences mathématiques. Celles-ci devraient se compléter progressivement et s'enrichir tout au long de la scolarité. Or on constate que la culture mathématique échappe, de nos jours, à de nombreux adultes, même très cultivés dans d'autres domaines et/ou ayant un niveau d'études supérieures ou universitaires.

Combien de fois n'entend-on pas des réflexions du type « Oh, moi les maths, je n'y ai jamais rien compris… », parfois émises avec une certaine fierté ? La répugnance à aborder un texte illustré de graphiques, les erreurs d'interprétation dans les problèmes de pourcentages voire l'ignorance du principe fondamental de la numération de position sont autant d'exemples du rejet et de la méconnaissance des mathématiques de base. L'incompréhension augmente encore s'il est question d'analyser des représentations géométriques ou d'utiliser quelques rudiments de symbolisme algébrique. Parmi les causes probables de cet échec dans l'éducation mathématique, on peut sans doute relever d'une part, le choix inapproprié de certaines matières enseignées, mais surtout la manière de présenter celles-ci aux élèves.

Les mathématiques ont pour vocation de résoudre des problèmes. Elles nécessitent la mise en œuvre de processus d'abstraction et de raisonnements analytiques qui dicteront les opérations à effectuer ; c'est en général l'interprétation des résultats qui fournit alors la solution.

Très souvent, dans l'enseignement, l'accent est mis sur les processus opératoires, alors que ceux-ci constituent la phase la moins « humaine » de la résolution des problèmes. En effet, dans notre société moderne, c'est la partie dévolue aux machines. Presque toujours, on impose l'apprentissage d'algorithmes de calcul, sans dire à quelles occasions ces méthodes ont été mises au point, sans justifier leur pertinence ni exhiber des classes de problèmes qu'elles permettent de résoudre. De plus, sous prétexte d'exercer les élèves à utiliser ces algorithmes, on leur soumet des listes de calculs à effectuer hors de tout contexte. Ces pratiques conduisent inévitablement à faire percevoir les mathématiques comme un ensemble de procédures vides de sens, fournissant des réponses vides de sens à des questions vides de sens.

Pour notre part, nous tentons de donner du sens aux activités mathématiques proposées et de rendre un certain plaisir d'apprendre aux élèves démotivés. Nous avons identifié quatre registres susceptibles de rencontrer ces aspirations : la vie quotidienne, l'histoire, les arts et les récréations (mathématiques). L'enseignement traditionnel exhibe rarement ces aspects culturels des mathématiques.

1.1 Les mathématiques au quotidien

Tout être humain devrait pouvoir maîtriser quelques pratiques mathématiques qui lui permettent de se sentir relativement à l'aise dans sa vie de tous les jours, dans sa vie de citoyen critique face aux *media* de plus en plus envahissants.

En tant que consommateur, chacun est sans cesse sollicité par nombre de publicités, parfois mensongères. Il s'agit non seulement des achats quotidiens, mais encore et surtout du choix d'une formule de compte en banque, d'une police d'assurance, d'un prêt pour l'acquisition d'un immeuble ou d'une automobile, … Une bonne maîtrise des fractions et des pourcentages peut également aider tout citoyen à devenir un contribuable averti et un électeur responsable.

Prenons l'exemple d'une publicité qui affirme « nous vous offrons les 21 % de TVA ». Beaucoup de personnes s'imaginent qu'elles bénéficient d'une remise de 21 % sur le prix plein, alors que ce n'est pas le cas. L'utilisation des graphes fléchés est éclairante pour ce type de problèmes. Le prix, TVA comprise (de 21 %), s'obtient en multipliant le prix hors TVA par le facteur 1,21.

$$\begin{tikzcd}
\text{Prix TVA non comprise} \arrow[r, bend left, "\times 1{,}21"] & \text{Prix TVA comprise} \arrow[l, bend left, dashed, ": 1{,}21 \ \times 0{,}8264"]
\end{tikzcd}$$

Le graphe fléché montre bien que le prix sans TVA représente 82,64 % du prix plein, ce qui correspond à une remise effective de 17,36 %.

Un autre objectif que nous poursuivons est aussi de former le futur adulte à la compréhension et à la critique des données fournies par les *media* et de l'initier à l'utilisation de divers supports de l'information chiffrée (cf. [2]).

C'est dans cette optique de « mathématiques citoyennes » que nous avons traité l'ensemble des chapitres qui concernent la numération et les pourcentages.

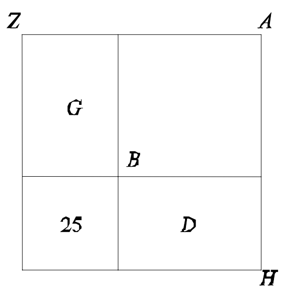
1.2 L'apport de l'histoire

Nombreux sont ceux qui pensent que le rôle de l'histoire dans le cours de mathématiques est multiple. Citons par exemple, le courant représenté par le regretté John FAUVEL [6].

En premier lieu, une approche historique contribue à faire connaître les apports des différentes cultures à l'évolution des mathématiques. Soulignons au passage que l'histoire des sciences est trop souvent négligée dans le cours d'histoire. Or, l'influence des connaissances scientifiques égyptienne, mésopotamienne, indienne, arabe, … et du rationalisme mathématique grec a été prépondérante dans la construction de notre mode de pensée occidental. Loin de nous l'idée d'introduire dans le cursus scolaire un cours d'histoire des mathématiques ou de « tartiner une couche de culture » sur des mathématiques déjà formalisées. Nous ne voulons pas nous en tenir à la simple anecdote historique, mais plutôt confronter les professeurs et leurs élèves à de véritables sources historiques qui renseignent sur le fond de la matière et l'évolution des concepts.

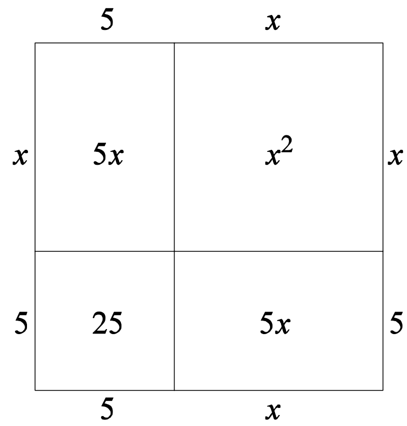
Nous proposons ainsi de découvrir la formule de résolution de l'équation du deuxième degré à partir d'un extrait de l'ouvrage d'AL-KHĀWRIZMĪ, considéré comme le texte fondateur de l'algèbre en tant que science constituée. En voici une traduction.

> Démonstration du cas *un māl et dix de ses racines égalent trente-neuf dirhams*.
>
> Mais il y a aussi une autre figure qui mène à ce résultat, et c'est la surface <carrée> $\overline{AB}$ qui représente le māl. Nous voulons lui ajouter l'équivalent de dix de ses racines. Nous avons pris la moitié de ces dix, c'est-à-dire cinq. Nous avons transformé ceci en deux surfaces $\overline{G}$ et $\overline{D}$ sur les flancs de la première surface. La longueur de chacune de ces deux surfaces devient cinq, qui est la moitié des dix racines, et la largeur est comme le côté de la surface $\overline{AB}$. Il nous reste le carré dans l'angle de la surface $\overline{AB}$, et c'est cinq par cinq, et <ce cinq> est la moitié des racines que nous avons ajoutées sur les flancs de la première surface.
>
> Nous savons donc que la première surface est le māl, et que les deux surfaces qui sont sur ses deux flancs sont les dix racines. Tout cela vaut trente-neuf, et il reste, pour compléter la surface la plus grande, le carré cinq par cinq, soit vingt-cinq.
>
> Nous l'avons ajouté à trente-neuf pour que la surface la plus grande se complète, c'est la surface $\overline{ZH}$, et tout cela vaut soixante-quatre. Nous prenons sa racine, huit, et c'est l'un des côtés de la surface la plus grande. Si on lui retranche l'égal de ce que nous lui avons ajouté, à savoir cinq, il reste trois. C'est le côté de la surface $\overline{AB}$, qui est le māl, et c'est sa racine. Et le māl est neuf. Voici sa figure.



Après une lecture commentée de ce texte[1], les élèves sont amenés à en transposer le contenu en langage algébrique actuel, en s'aidant d'une représentation graphique.

$$x^2 + 10\,x = 39$$
$$x^2 + 10\,x + 25 = 39 + 25$$
$$x^2 + 10\,x + 25 = 64$$
$$(x + 5)^2 = 64$$
$$(x + 5) = 8$$
$$x = 3$$



Ils traitent d'abord l'exemple ci-dessus, puis passent à la généralisation suggérée par le texte pour résoudre l'équation $x^2 + px = q$. La prise en considération des quantités négatives, tant pour les coefficients de l'équation que pour les solutions, et un changement de notation permettent finalement d'arriver à la formule sous sa forme actuelle.

Ce travail change la perception que les élèves ont du symbolisme algébrique : il montre, par contraste avec l'algèbre rhétorique, la commodité du formalisme moderne.

Lorsqu'un élève assiste à la naissance d'un concept au travers des circonstances dans lesquelles celui-ci apparaît et se développe, il perçoit mieux le côté profondément humain des mathématiques ainsi que leur utilité. L'histoire permet ainsi d'observer les mécanismes qui mettent en marche la pensée mathématique.

Par ailleurs, les obstacles épistémologiques que doit franchir l'élève sont souvent ceux-là mêmes qui ont posé problème dans le passé. Contrairement à une idée que défendait la « mathématique moderne », on a compris aujourd'hui qu'on n'enseigne pas directement des notions abstraites dans leur forme définitive, telles qu'elles sont publiées[2]. Elles doivent mûrir, muter, et cela, l'histoire encore le montre fort bien.

Ajoutons encore qu'il y a un certain réconfort pour l'élève à resituer ses propres difficultés dans une continuité historique : d'autres avant lui ont dû faire face à des problèmes, affronter des défis ; ils ont obtenu des résultats…

---

[1] Notons, par exemple, que le māl désigne le carré de l'inconnue et que le nombre de dirhams représente ce que nous appelons aujourd'hui le terme indépendant.

[2] Comme le dit H. FREUDENTHAL [7], « Aucune idée mathématique n'a jamais été publiée telle qu'elle fut découverte ».

Dans le rapport de recherche, la composante historique est présente à travers les chapitres qui s'étendent des débuts de la numération jusqu'aux nombres irrationnels, qui traitent de la résolution des équations et de l'introduction à la trigonométrie.

1.3 Les réalisations artistiques

Les réalisations artistiques de nature géométrique, dont on retrouve des exemples dans toutes les civilisations et à toutes les époques, peuvent servir de support à l'apprentissage de la géométrie. On peut exploiter les peintures murales dans l'art africain, les zelliges de l'art hispano-musulman, mais aussi les pavages qui décorent les cuisines et les salles de bain, les frises qui ornent la vaisselle et le linge de maison…

Ces dernières se prêtent à un travail de classement sur base des isométries qui les laissent invariantes. Ainsi la frise emblématique de l'art hispano-musulman (figure ci-dessous) est invariante par une famille infinie de translations, mais aussi par deux familles de symétries bilatérales dont les axes sont ceux des motifs blancs et noirs. Si on fait abstraction des couleurs de remplissage et qu'on ne regarde que les contours de ces motifs, on voit aussi deux familles de symétries centrales qui laissent invariante cette frise. Elle peut être exploitée pour faire découvrir quelques propriétés de la composition des isométries.

Alcazar de Séville

Quant à la frise de mosaïque photographiée sur le site d'Ampurias (Costa Brava), elle illustre la symétrie glissée, très présente dans les décorations que nous rencontrons dans notre vie quotidienne, mais rarement évoquée dans les manuels de géométrie.

Ampurias (Costa Brava)

Par des activités alliant le côté créatif à l'analyse des structures mathématiques, nous croyons qu'il est possible de stimuler le besoin de comprendre par le désir de créer. Un tel apprentissage développe l'intuition et aiguise le sens de l'observation, tout en procurant à la fois une satisfaction intellectuelle et un plaisir esthétique. La géométrie, qui a souvent été cantonnée à l'enseignement du raisonnement logique et de la méthode hypothético-déductive, retrouve ainsi son attrait visuel et l'un de ses rôles fondamentaux, l'organisation et la structuration de l'espace.

Pour certains élèves de l'enseignement technique ou professionnel, la motivation à la pratique d'activités géométriques peut être directement liée au travail en atelier. L'apprentissage peut encore être enrichi par l'utilisation de logiciels de dessin. C'est l'occasion d'un premier contact avec le DAO[3], un des nombreux domaines où mathématiques, techniques et arts se rencontrent.

Les décors géométriques, tels que peintures murales, pavages, frises, … et les assemblages de polygones constituent le matériel de base des activités géométriques proposées dans cet ouvrage, de l'école primaire à la fin du secondaire.

1.4 Les activités ludiques et récréations mathématiques

Les récréations mathématiques sont également présentes dans les écrits de nombreuses civilisations. Le papyrus *Rhind*, certaines tablettes d'argile cuite sumériennes contiennent des énoncés dont on ne peut nier le rôle ludique. Ces problèmes se sont transmis de génération en génération et cette tradition n'a jamais été abandonnée. On trouve des défis mathématiques chez ARCHIMÈDE, DIOPHANTE, IBN AL-BANNĀ, ALCUIN, FIBONACCI, PACIOLI, BACHET DE MÉZIRIAC, FERMAT, EULER, HAMILTON, … jusqu'à nos *Olympiades mathématiques* actuelles.

Décoder un message ou découvrir quelque chose de caché est un puissant ressort psychologique, particulièrement chez les enfants. Il en est de même de récréations mathématiques présentées sous forme de tours de magie dont il faut rechercher l'explication. Examinons un des *problèmes plaisants et délectables* que l'on trouve chez BACHET DE MÉZIRIAC[4].

> Fais doubler le nombre pensé et à ce double, fais ajouter 5, puis multiplier le tout par 5, puis ajouter 10 et multiplier le tout par 10. Lors t'enquérant quel est ce dernier produit et ôtant d'icelui 350, le nombre des centaines du reste sera le nombre pensé.

Le professeur ne lit bien sûr pas ce texte en classe, mais après avoir deviné plusieurs nombres pensés par des élèves, ceux-ci sont curieux de savoir comment il procède. Quelques essais avec des nombres particuliers ne permettent pas de déceler aisément le « truc ».

7 ——> 14 ——> 19 ——> 95 ——> 105 ——> 1050
13 ——> 26 ——> 31 ——> 155 ——> 165 ——> 1650

Le phénomène s'éclaire un peu mieux si on se contente d'écrire les opérations intermédiaires sans effectuer les calculs. C'est cependant le recours au formalisme algébrique qui montre que le « truc fonctionne pour n'importe quel nombre de départ ». La démonstration est faite.

---

[3] Dessin assisté par ordinateur.
[4] C.-G. BACHET DE MÉZIRIAC, 1612, *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres,* Blanchard, Paris. Réédition 1993.

$a \longrightarrow 2a \longrightarrow 2a+5 \longrightarrow 10a+25 \longrightarrow 10a+35 \longrightarrow 100a+350$

Le jeu est source de motivation dans la construction des savoirs. Comme le dit François BOULE[5], « On n'apprend qu'exceptionnellement malgré soi et sans effort. Peut-être l'effort est-il plus facile à consentir à travers le jeu, mais celui-ci ne dispense pas de l'effort d'apprendre ».

Cette approche ludique a été exploitée tout au long des chapitres sur la numération et l'introduction du formalisme algébrique, de l'école maternelle jusqu'aux premières années du secondaire.

2. Spécificités de la recherche

Nous nous inscrivons dans un courant existant représenté notamment par le groupe Inter IREM d'histoire et d'épistémologie des mathématiques (France), par A. BISHOP [4] à l'Université de Cambridge ou encore par E. WITTMANN [9] à l'Université de Dortmund. Notre recherche vise à améliorer les documents d'enseignement puisant leurs sources dans la vie quotidienne, dans l'histoire, l'esthétique et le jeu, afin de promouvoir ces pratiques pédagogiques encore peu répandues actuellement.

2.1 De la maternelle à 18 ans

Cette étude envisage, comme les précédents travaux du CREM ou comme ceux d'auteurs tels que P. HILTON et J. PEDERSEN (cf., par exemple, [8]), la scolarité dans son ensemble, de la maternelle jusqu'à 18 ans. Il s'agit d'un travail de synthèse, qui dégage, comme nous allons le voir, des fils conducteurs soulignant les étapes successives de l'apprentissage des mathématiques, tant sur le plan de la numération (calcul, formalisation) que sur celui de la manipulation de figures, d'objets géométriques (symétries, structures, …).

L'originalité de la méthodologie sur laquelle s'appuie notre recherche réside dans le débat permanent entre enseignants de tous les niveaux: instituteurs, régents, licenciés, docteurs. Chacun des membres du groupe de recherche présente sa production, ciblée sur la tranche d'âge pour laquelle il est le plus compétent, et l'ensemble du groupe participe à la discussion. Il s'agit ainsi d'un travail qui a une portée longitudinale.

2.2 Le contenu

Cet ouvrage contient des contributions de deux types. D'abord, les trois premières parties présentent des situations-problèmes adaptées à trois tranches d'âges de l'école, dans un esprit de continuité, de la maternelle jusqu'à 18 ans. Ces tranches correspondent plus ou moins à l'enseignement fondamental, à celui du début, puis de la fin du secondaire. Certaines activités peuvent cependant convenir à différents moments de la scolarité, comme apprentissage ou comme remédiation. D'autres sont prévues pour s'étaler sur des périodes plus ou moins longues. C'est le cas notamment dans les chapitres qui traitent des pourcentages et des frises□;

[5] L'apport des jeux à la construction des connaissances mathématiques, Actes de la journée d'étude du 30 novembre 2001, Neuchâtel, IRDP.

ils comprennent des séquences d'apprentissage adaptées à différents stades de la maturité et s'adressent aussi bien aux élèves de l'enseignement général qu'à ceux du technique ou du professionnel. Les documents proposés dans l'ensemble de ces trois parties sont directement utilisables dans les classes. Ils comportent en effet une description méthodologique qui cible les compétences exercées et sont accompagnés de fiches de travail à l'usage des élèves.

Quant à la quatrième partie, on y trouve des chapitres de nature épistémologique et historique. Il va de soi qu'il nous était impossible de remonter à toutes les sources et d'en décoder les manuscrits. Notre démarche ne s'est cependant pas bornée à la seule consultation d'ouvrages généraux d'histoire des mathématiques, fussent-ils excellents… Un aspect de notre recherche a consisté à sélectionner des textes qui permettent réellement de construire les savoirs mathématiques de base. Nous avons eu recours, pour chacune de ces sources, à des textes établis[6] et traduits par des historiens et philologues qui font autorité. Nous savons que l'accès à ces ressources n'est pas aisé pour un enseignant de terrain, pas plus que la possibilité d'assister à des séminaires d'histoire des mathématiques. Nous avons essayé de faire le lien entre les spécialistes et les praticiens et de présenter à ces derniers un discours accessible.

3. Les thèmes abordés

L'ouvrage entier suit, pour l'essentiel, la chronologie des âges. Ci-après, nous décrivons brièvement les contenus des chapitres, en les regroupant par thèmes.

3.1 Des nombres naturels aux irrationnels

Dès leur plus jeune âge, les enfants sont confrontés à l'univers des nombres dans la vie quotidienne. Ils arrivent tous en maternelle avec des acquis différents qu'il va falloir enrichir et structurer. Une bonne connaissance des mécanismes de la numération décimale de position est primordiale pour la maîtrise des nombres. À cet égard, la multiplication des approches constitue un atout supplémentaire.

Le chapitre 1 propose des activités ludiques destinées au maternel et au début du primaire pour compter, comparer et ordonner des nombres. Le concept d'égalité est travaillé en utilisant les réglettes de Brissiaud.

Le chapitre 2 s'adresse à des enfants de huit à dix ans. Il vise à installer une compréhension en profondeur du passage d'un rang à un autre dans la numération décimale de position, par la manipulation de compteurs et de bouliers. Ces derniers permettent de visualiser et d'analyser les états successifs d'une opération.

Les situations-problèmes du chapitre 3 sont destinées à des jeunes de dix à douze ans à qui l'enseignant propose une activité de décodage de nombres écrits dans différents systèmes de numération. Par oppositions et comparaisons (nombre de symboles utilisés, base, présence du

[6] Les manuscrits sont souvent abîmés, entachés d'erreurs de copie et comportent parfois des abréviations. Établir un texte consiste à en donner une version aussi claire que possible, à partir d'un ou plusieurs manuscrits.

zéro, relation entre longueur de l'écriture et valeur du nombre, importance de la position des symboles, limitation dans la représentation des nombres), les élèves découvrent les différentes propriétés de notre système décimal positionnel, afin de mieux le comprendre et l'utiliser.

Dire, lire et écrire des nombres ne constitue pas une fin en soi. Encore faut-il pouvoir utiliser ces nombres dans sa vie de citoyen. Le calcul avec des pourcentages constitue réellement une pierre d'achoppement pour pas mal d'adultes, quel que soit leur niveau d'études, comme nous l'a confirmé une petite enquête préalable. Le chapitre 8, destiné à des élèves du début du secondaire, travaille la notion de pourcentage comme outil de comparaison et met en évidence des procédures de calcul performantes adaptées à toutes les calculatrices.

Le chapitre 9 poursuit l'étude des pourcentages, avec des élèves plus âgés, sur des exemples concrets puisés sur l'Internet ou dans le magazine *Test Achats*. Il s'agit ici de saisir la portée des données que l'on peut ainsi trouver, de comprendre comment on passe d'un relevé de données brutes à des taux ou à des pourcentages et de pouvoir utiliser ces calculs pour comparer des situations ou analyser une évolution.

Le chapitre 7 aborde la notion d'irrationalité□; il propose différentes façons de découvrir la relation de PYTHAGORE au niveau de la troisième année de l'enseignement secondaire. On en rencontre un cas particulier dans le *Ménon* de PLATON. Il est possible d'arriver au cas général par des découpages d'origines chinoise ou indienne. Les élèves sont également confrontés avec le texte de la proposition 47 du livre I des *Éléments* d'EUCLIDE.

Dans le chapitre 14, une activité préalable de pliage débouche sur une valeur approchée de $\sqrt{2}$ et amène à l'intuition que $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire sous forme d'une fraction. Une deuxième activité propose d'utiliser l'outil mis au point dans la première pour montrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$. C'est l'occasion de rencontrer un exemple de la méthode de descente infinie. On poursuit par la découverte et l'expérimentation de l'algorithme de THÉON, puis par le calcul d'une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre positif par l'algorithme de HÉRON. L'ensemble du chapitre s'adresse aux élèves du degré supérieur de l'enseignement général.

Dans la quatrième partie, le chapitre 15 propose un bref historique des origines de la numération. Enfin, le chapitre 20, présente quelques aspects de la lente progression qui a mené les grandeurs irrationnelles vers l'acquisition du statut de nombres.

3.2 La symétrie et les structures

Les rythmes visuels portés par des motifs répétés ou *patterns*, des broderies, des pavements, des éléments architecturaux, … sont une source inépuisable de situations d'apprentissage. Dégager des structures communes à des objets apparemment très différents, élaborer des techniques de production de frises et de pavages sont des activités que l'on peut déployer à tous âges et qui développent des compétences multiples.

Le chapitre 4 propose, pour l'école primaire, des manipulations (papier calque, miroirs) qui visent à mettre en place la notion de symétrie. Par le biais de réalisations de puzzles, de pliages et découpages, de peintures, les enfants analysent les symétries dans l'art africain et produisent des créations personnelles.

L'étude des pavages au début du secondaire est abordée dans le chapitre 10. Elle mène d'une analyse approfondie des pavages réguliers et semi-réguliers à la construction des polyèdres platoniciens, en passant par des considérations sur les mesures des angles intérieurs des polygones.

Le chapitre 11 traite des frises, à différents niveaux de la scolarité. Des activités intuitives débouchent sur la découverte des isométries qui laissent une frise invariante. L'immense diversité de ces bandes décorées que l'on rencontre un peu partout, à toutes les époques, incite à les répertorier, les classer ; mais cela nécessite évidemment la mise au point de critères de classement. La structure de groupe qui émerge tout naturellement dans ce cadre géométrique, à partir des groupes de symétries, peut être dégagée dans les classes plus avancées de l'enseignement général. C'est l'occasion, pour les élèves de ces classes, de rencontrer une idée fondamentale de la géométrie moderne : on n'étudie plus les figures dans l'espace, mais les figures considérées comme des espaces, c'est-à-dire des ensembles organisés, structurés. L'évolution de la pensée géométrique est évoquée dans la quatrième partie, au chapitre 18.

3.3 Le symbolisme algébrique

Les activités du chapitre 5 s'adressent à des élèves du début de l'enseignement secondaire. Selon le bon principe de l'enseignement en spirale, on renforce la compréhension en profondeur de la notion de numération de position. La démarche est ludique : les élèves tentent d'expliquer des phénomènes numériques qui se présentent comme des tours de magie. Ensuite, l'explication du « tour de magie » est rendue plus aisée par le recours au symbolisme et à un début de formalisme algébrique.

Les produits remarquables, envisagés comme relations entre aires de figures planes, s'avèrent très utiles dans l'établissement de démonstrations géométriques dans les domaines de l'arithmétique et de l'algèbre. FIBONACCI faisait déjà remarquer, dans le prologue de son *Liber abaci* (1228), que ces sciences « se venaient mutuellement en aide ». Or on sait que l'apprentissage des produits remarquables constitue un seuil à franchir par les élèves. Le chapitre 6 propose une découverte des produits remarquables sous leurs aspects numériques, géométriques et algébriques.

Le chapitre 13 a pour but de faire découvrir la formule de résolution de l'équation du deuxième degré à partir d'un extrait du texte d'AL-KHWĀRIZMĪ sur le *calcul par le ǧabr et la muqābala*, généralement considéré comme le texte fondateur de l'algèbre. L'idée est de montrer le sens des développements algébriques en les confrontant à une représentation géométrique. L'examen de problèmes extraits d'une tablette babylonienne met en évidence les sources probables de l'ouvrage d'AL-KHWĀRIZMĪ. L'algèbre que nous connaissons est le résultat d'un lent processus de maturation qui trouve ses origines, notamment en Mésopotamie, dans la résolution de problèmes de la vie de tous les jours : arpentage, pratiques commerciales, testaments, creusement de canaux, … L'apport essentiel d'AL-KHWĀRIZMĪ est l'organisation de toutes ces méthodes de praticiens en une discipline « savante ». Ce chapitre est également l'occasion d'amener les élèves à porter un regard algébrique sur une proposition extraite des *Éléments* d'EUCLIDE.

L'enseignant intéressé par le développement de la science dans le monde arabe peut trouver des renseignements complémentaires dans le chapitre 16. Le chapitre 17 décrit l'évolution de la pensée algébrique ; il contient, outre des informations d'ordre historique, une réflexion sur la nature même de l'art de l'algèbre. Qu'est-ce que l'algèbre ? D'où vient-elle ? Depuis quand existe-t-elle ? Que faisait-on en algèbre ? Comment a-t-elle évolué ? Que fait-on de nos jours en algèbre ? …

3.4 La trigonométrie

La trigonométrie n'a pas souvent les faveurs des élèves. Le chapitre 12 propose de l'introduire par la construction d'une table de cordes, comme l'a fait PTOLÉMÉE dans son *Almageste*. Cela permet, non seulement de bien installer la notion de sinus, mais donne également l'occasion d'exploiter les outils géométriques mis en place durant la troisième année du secondaire, au cours d'une activité de justification et de démonstration.

Le chapitre 19 montre comment la trigonométrie, au départ intimement liée à l'astronomie, a petit à petit évolué, pour être finalement absorbée par l'analyse.

4. Présentation type des situations-problèmes

Les situations-problèmes rassemblées dans les trois premières parties de ce rapport ont été conçues chacune pour des élèves déterminés, dans une tranche d'âge donnée et possédant certaines connaissances préalables. Toutefois, elles peuvent être adaptées, dans certaines limites, à d'autres élèves. Chaque professeur en jugera.

Ces situations sont présentées selon un plan uniforme[7] comportant les rubriques suivantes :

De quoi s'agit-il ? – Description, en une ligne ou deux, de l'activité proposée aux élèves.

Enjeux – Matières couvertes et compétences visées. Les compétences indiquées en italique sont celles que l'on retrouve telles que dans les documents appelés « Référentiels » [1] [2] [3].

De quoi a-t-on besoin ? – Description du matériel requis. Relevé des connaissances supposées chez les élèves.

Comment s'y prendre ? – Cette rubrique comporte des questions à proposer aux élèves, des indications pour organiser le travail en classe, des éléments de réponses aux questions, et les éléments de la théorie auxquels la situation aboutit normalement.

Échos d'une ou plusieurs classes – Indications sur le déroulement de l'activité dans l'une ou l'autre classe expérimentale. On relève les réactions les plus communes, mais aussi les plus significatives, même si elles sont isolées.

---

7 Ce plan est inspiré par E. C. WITTMANN et G. MÜLLER [9] . Nous l'avons mis au point à l'occasion d'une recherche précédente (voir [5]).

Prolongements possibles – Nouvelles situations-problèmes, plus ou moins difficiles que celle faisant l'objet principal de la section. Ces situations peuvent jouer le rôle de variantes, d'exercices, de questions d'évaluation, de poursuite du travail pour les élèves mordus.

Vers où cela va-t-il ? – À quelles questions mathématiques plus avancées la situation en question prépare-t-elle de manière directe ou indirecte ? Quels rapports la situation en question entretient-elle avec d'autres disciplines ? Quelle place la situation occupe-t-elle dans la culture mathématique globale ?

Commentaires – Éclaircissements de toutes natures susceptibles d'être utiles aux enseignants et aux élèves, comme par exemple des indications sur l'histoire des mathématiques, des commentaires sur le caractère plus ou moins réaliste de certains modèles mathématiques, etc.

Bibliographie

[1] Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, 1999. *Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques*. *Humanités générales et technologiques*. Ministère de la Communauté française, Bruxelles.

[2] Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, 1999. *Socles de compétences (Enseignement fondamental et premier degré de l'enseignement secondaire)*. Ministère de la Communauté française, Bruxelles.

[3] Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, 2000. *Compétences terminales et savoirs communs*. *Humanités professionnelles et techniques*. Ministère de la Communauté française, Bruxelles.

[4] A. J. Bishop, 1988. *Mathematical Enculturation*. Kluwer, Dordrecht.

[5] CREM, 2001. *Construire et représenter, un aspect de la géométrie de la maternelle jusqu'à 18 ans*. L. Lismont et N. Rouche, coordinateurs, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

[6] J. Fauvel et J. van Maanen, éditeurs, 2000. *History in Mathematics Education, The ICMI Study*. Kluwer, Dordrecht.

[7] H. Freudenthal, 1983. *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel, Dordrecht.

[8] P. Hilton et J. Pedersen, 1983. *Fear no more, An adult Approach to Mathematics*. Addison-Wesley, USA.

[9] E. C. Wittmann et G. Müller, 1990 et 1994. *Handbuch produktiver Rechenübungen*, 2 vol.. Ernst Klett, Stuttgart.