Chapitre 7

Découpages géométriques

1 La relation de Pythagore

De quoi s'agit-il ?

Découvrir la relation de Pythagore, d'abord dans le cas du triangle rectangle isocèle à l'aide d'extraits du *Ménon* de Platon, puis dans le cas général à l'aide d'un découpage d'origine chinoise (et indienne) et de la proposition 47 du livre I des *Éléments* d'Euclide.

Grâce à ce théorème, résoudre des problèmes faisant intervenir des carrés, des sommes de carrés et des racines carrées simples.

Enjeux

Approcher géométriquement, pour leur donner du sens, les notions de carré, de somme de carrés et de racine carrée, indispensables en algèbre.

Amener les élèves à établir un dessin à partir d'un texte le décrivant, puis à raisonner rigoureusement sur un dessin similaire.

Compétences

Intégrer le savoir dans une culture scientifique et humaniste.

Traduire une information d'un langage dans un autre.

Rassembler des arguments et les organiser dans une chaîne déductive.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

L'introduction historique et philosophique.

Le texte extrait du *Ménon* de Platon (en annexe à la page 319).

Le texte de la proposition 47 du livre I des *Éléments* d'Euclide.

Prérequis

Le vocabulaire lié aux figures du carré, du rectangle et du triangle rectangle.

1.1 Introduction historique

L'origine de la relation de PYTHAGORE se perd dans la nuit des temps et son énoncé prend des formes différentes selon la civilisation envisagée. L'Inde du V^{e} siècle av. J.-C., par exemple, exprime dans un rectangle la relation quadratique existant entre sa diagonale d'une part et ses longueur et largeur d'autre part. Elle ne donne aucune démonstration de cette relation, mais distingue le cas particulier où le rectangle est un carré. Cette distinction trahit probablement l'origine différente des deux propriétés. Celle du carré pourrait avoir été découverte à l'aide d'un pavage de carrés découpés en triangles isocèles de deux couleurs, comme dans la décoration de vases provenant de la civilisation de l'Indus (figure 1).

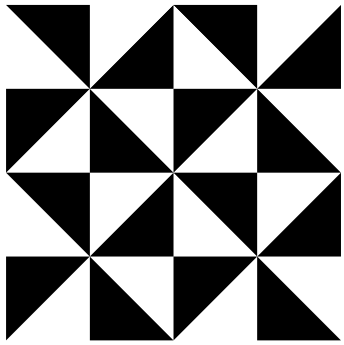


Fig. 1

Celle du rectangle proviendrait de la découverte fortuite de l'utilité des nombres 3, 4 et 5 pour construire un angle droit. Depuis fort longtemps, les artisans savent que tout rectangle a ses diagonales d'égales longueurs et se servent de cette propriété pour construire des objets rectangulaires. Ainsi, les ébénistes, au moment de coller les quatre parois d'un tiroir, vérifient l'égalité des deux diagonales pour s'assurer que le tiroir aura bien la forme voulue pour coulisser dans le meuble. Les Mésopotamiens faisaient vraisemblablement de même pour construire un moule à briques rectangulaires et, c'est sans doute à l'occasion de la vérification de l'égalité des diagonales d'un moule pour des briques de proportion 4/3 qu'ils ont pu découvrir le triangle rectangle de côtés 3, 4 et 5 unités. Il y a peu, ce triangle était encore utilisé dans les métiers de la construction pour obtenir un angle droit.

Historiquement, la relation quadratique dont jouissent 3, 4 et 5 ne serait venue qu'ensuite, par comparaison avec la propriété du carré. Au contraire des Indiens, les Grecs exprimaient cette relation dans un triangle rectangle, qui est la moitié d'un rectangle coupé par sa diagonale. Ils ne font plus aucune distinction entre les deux cas et donnent, à l'époque d'EUCLIDE (III^{e} siècle avant J.-C.), une démonstration de la propriété. Les Chinois en donnent une démonstration par découpage, assez tôt semble-t-il, mais qui n'a été explicitée qu'au III^{e} siècle après J.-C. par LIU HUI dans son commentaire au *Jiuzhang suanshu*, souvent traduit par *Les neuf chapitres sur l'art du calcul*. Ce dernier ouvrage date de la dynastie des Han, vers le début de notre ère[1]. Un découpage similaire apparaît dans la *Yukti Bhāṣā*, ouvrage indien du XV^{e} siècle après J.-C. Enfin, les Mésopotamiens n'en donnent pas d'énoncé, mais nous sommes certains qu'ils le connaissaient au début du II^{e} millénaire avant J.-C. puisqu'ils l'utilisaient dans la résolution de certains problèmes de « canne contre le mur » (voir les prolongements possibles).

1.2 La duplication du carré

Nous allons, à l'aide de la traduction d'un texte grec fourni aux élèves, les amener à découvrir une propriété de la diagonale du carré. Ce texte est un extrait du *Ménon* de PLATON, philosophe grec célèbre du IV^{e} siècle avant J.-C. Comme beaucoup de dialogues de PLATON, il met en scène SOCRATE, qui fut le maître de PLATON, mais ce dernier prête souvent à SOCRATE ses propres conceptions. Le concept nouveau ici, qui sera développé dans plusieurs dialogues ultérieurs, est celui de la réminiscence, ou anamnèse des idées. L'anamnèse est basée sur la croyance, que

[1]Voir [108], p. 8-13, pour plus de détails.

PLATON partage avec PYTHAGORE, en la transmigration des âmes : l'âme quitte le corps après la mort et se réincarne dans un autre corps après une période d'attente. La légende rapporte que PYTHAGORE pouvait se souvenir de ses vies antérieures. Pour PLATON, l'âme a l'occasion, durant son passage entre deux corps, de contempler le monde des Idées. Ce monde est, selon PLATON, le monde vrai tandis que notre monde terrestre n'en est qu'un reflet – on nomme ≪ idéalisme ≫ une telle conception philosophique. Quand elle se réincarne, l'âme garderait un vague souvenir du monde des Idées et l'acquisition de la connaissance par l'intellect ne serait que la réactivation de ce souvenir. Pour démontrer que cela est vrai, SOCRATE utilise une méthode qu'il nomme maïeutique – littéralement, ≪ méthode d'accouchement ≫ – et interroge un esclave pour l'amener à résoudre un problème de géométrie. Il faut encore noter que la préoccupation principale de PLATON dans le *Ménon* n'est pas la notion d'anamnèse, mais bien la question de savoir si l'ἀρετή – ≪ la vertu, l'excellence ≫ – peut être enseignée ou même définie. Dans ce contexte, l'épisode de l'esclave est une leçon d'ouverture d'esprit à la recherche sincère, donnée par SOCRATE à l'aristocratique MÉNON, qui pense qu'il est inutile de chercher à enseigner une ≪ vertu ≫ qu'on ne peut définir. Remarquons aussi que le choix par SOCRATE du carré comme thème du problème de géométrie n'est pas innocent : PYTHAGORE avait déjà classé le carré dans la même liste que la ≪ vertu ≫, au contraire du rectangle qu'il plaçait dans la liste des contraires. Pour les Grecs, dire d'un homme qu'il est carré ne signifie pas qu'il est borné, mais bien qu'il est vertueux[2].

Comment s'y prendre ?

L'activité consiste en une lecture commentée du *Ménon*[3], avec la consigne suivante.

Représenter chaque étape importante du dialogue par un dessin.

MÉNON : Soit, SOCRATE. Mais qu'est-ce qui te fait dire que nous n'apprenons pas, mais que ce que nous appelons le savoir est une réminiscence ? Peux-tu me montrer qu'il en est ainsi ?

SOCRATE : Je t'ai dit tout à l'heure, MÉNON, que tu étais adroit et maintenant tu demandes si je peux t'instruire, moi qui affirme qu'il n'y a pas d'enseignement, mais seulement réminiscence, pour que tout de suite je me contredise moi-même.

MÉNON : Nullement, SOCRATE, par Zeus ! Ce n'était pas mon intention, c'est seulement l'habitude qui m'a fait parler ainsi. Mais s'il t'est possible de me prouver qu'il en est comme tu dis, prouve-le.

SOCRATE : Cela n'est pas facile, cependant j'y mettrai beaucoup d'ardeur, par amitié pour toi. Mais appelle pour moi un membre de ta nombreuse suite, celui que tu voudras, pour que je te le prouve par lui.

MÉNON : Certes. (S'adressant à un esclave) Viens ici.

SOCRATE : Est-il Grec ? Sait-il le grec ?

MÉNON : À coup sûr. Il est né chez moi.

SOCRATE : Veille à déterminer s'il semble, soit se souvenir, soit apprendre de moi.

MÉNON : J'y veillerai.

SOCRATE : (à l'esclave) Dis-moi, mon enfant, sais-tu que ceci est une surface carrée ?

---

[2]Selon [29], p. 157-158.

[3]Il s'agit de courts extraits de [117]. Un texte plus complet de *Ménon*, 81e-86a, est donné en annexe. Les mots entre < > ont été ajoutés dans la traduction pour clarifier le sens.

L'emploi par Socrate du démonstratif « ceci » nous assure qu'il montre ou trace une figure tout en parlant. Ici, il s'agit d'un simple carré.

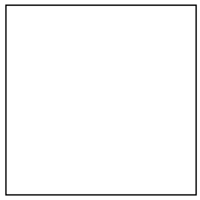


Fig. 2

Socrate trace ensuite les médianes du carré en vue de calculer son aire. Bien que cette partie du texte ne soit pas indispensable à la compréhension, nous l'avons gardée parce qu'elle introduit les mesures grecques de longueur et d'aire. Il s'agit dans les deux cas du « pied », mais nous les distinguerons en nommant « pied carré » la mesure d'aire.

L'esclave : Oui.
Socrate : Et que la surface carrée a toutes ces lignes égales, au nombre de quatre[4] ?
L'esclave : Certainement.
Socrate : N'a-t-elle pas aussi ces lignes par le centre égales[5] ?
L'esclave : Si.
Socrate : Eh bien, une telle surface ne pourrait-elle être rendue plus grande ou plus petite ?
L'esclave : Certainement.
Socrate : Si donc ce côté était de deux pieds et celui-ci aussi, de combien de pieds serait le tout ? Envisage les choses de la manière suivante : s'il y avait deux pieds pour ce côté et un pied seulement pour ce côté, la surface ne serait-elle pas d'une fois deux pieds carrés ?
L'esclave : Si.
Socrate : Et quand ce côté aussi est de deux pieds, ne produit-on pas une surface de deux fois deux ?
L'esclave : On la produit.
Socrate : On produit donc une surface de deux fois deux pieds <carrés> ?
L'esclave : Oui.
Socrate : Combien de pieds font donc deux fois deux ? Dis-le moi après avoir fait le calcul.
L'esclave : Quatre, Socrate.

À l'aide des médianes, Socrate a donc découpé le carré de côté deux pieds en quatre petits carrés unités. Il aurait suffi de compter ces carrés pour donner l'aire du grand carré : quatre pieds carrés. Mais Socrate préfère passer par un détour qui n'est pas inutile, puisqu'il justifie qu'on remplace le simple comptage des carrés unités par le produit de deux nombres. Le premier est le nombre de carrés unités que l'on doit accoler pour former un rectangle de largeur unité dans le grand carré. Le second est le nombre de tels rectangles qu'on peut placer côte à côte dans le grand carré.

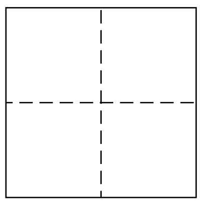


Fig. 3

Cette justification géométrique de l'utilisation du produit des dimensions – et du « carré numérique » de la longueur du côté dans le cas du carré géométrique – apparaît dans d'autres traditions que la grecque.

[4]Il s'agit des côtés.
[5]Il s'agit des médianes.

Maintenant vient la question fondamentale : comment construire un carré d'aire double du carré donné ? On pourrait nommer ce problème « duplication du carré » par analogie avec le problème historique de la « duplication du cube », qui est l'un des trois classiques des mathématiques grecques.

Socrate : Ne pourrait-on produire une autre surface, double de cette surface mais semblable, ayant toutes ses lignes égales comme celle-ci.
L'esclave : Oui.
Socrate : De combien de pieds sera-t-elle ?
L'esclave : Huit.
Socrate : Eh bien, essaie de me dire de quelle grandeur sera chaque côté de cette surface-là. Le côté de celle-ci est de deux pieds. Qu'est le côté du double ?
L'esclave : Il est clair, Socrate, qu'il est double.
Socrate : Tu vois, Ménon, que je ne lui enseigne rien, mais lui demande tout. Et maintenant, il croit savoir quel est le côté à partir duquel la surface de huit pieds est produite. Ne te semble-t-il pas ?
Ménon : Si.
Socrate : Le sait-il donc ?
Ménon : Certes non.
Socrate : Il pense en vérité que la surface est produite à partir d'un côté double.
Ménon : Oui.
Socrate : Mais observe maintenant qu'il se souvient progressivement, comme on doit se souvenir.

[...]

Socrate : (à l'esclave) N'est-ce pas que ce côté-ci deviendra double de celui-là, si nous lui ajoutons un autre aussi grand ici ?
L'esclave : Certainement.
Socrate : La surface de huit pieds sera donc, dis-tu, produite à partir de ce côté si quatre côtés de même longueur sont produits ?
L'esclave : Oui.
Socrate : Nous tirerons donc quatre côtés identiques sur le modèle de celui-ci. La surface que tu dis être de huit pieds ne serait-elle pas celle-ci ?
L'esclave : Si.
Socrate : N'est-il pas que dans cette nouvelle surface, il y en a quatre dont chacune est égale à quatre pieds ?
L'esclave : Si.
Socrate : Quelle aire est donc produite ? N'est-elle pas quatre fois aussi grande ?
L'esclave : Sans doute.

[...]

Socrate : Donc, mon enfant, sur un côté double est produit non pas une surface double, mais une surface quadruple.
L'esclave : Tu dis vrai.
Socrate : Et en effet quatre fois quatre font seize, n'est-ce pas ?
L'esclave : Oui.

Comme Socrate le fait dire à Ménon, l'esclave s'est trompé en croyant pouvoir doubler l'aire du carré de départ en doublant son côté. C'est une erreur très commune qu'on retrouve aussi dans le problème de la « duplication du cube ». Beaucoup d'élèves s'y laissent prendre et, comme Socrate, ils doivent construire le carré de côté double pour comprendre qu'il engendre une aire quadruple. Mais, ainsi que le fait remarquer l'éditeur[6] du *Ménon*, c'est l'apparition de cette erreur qui témoigne de la sincérité avec laquelle l'épreuve est conduite par Socrate. Les figures successivement indiquées par Socrate sont les suivantes :

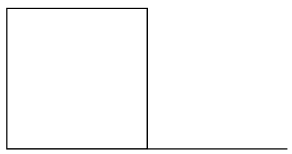


Fig. 4

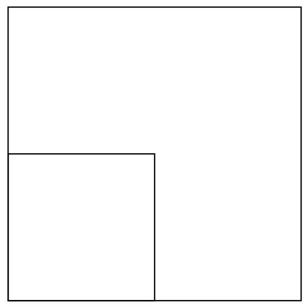


Fig. 5

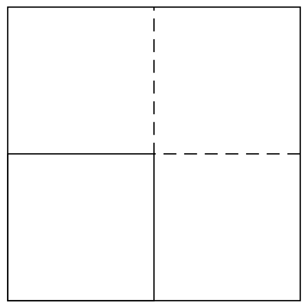


Fig. 6

Dans la partie du dialogue qui n'est pas reproduite ici[7], Socrate rappelle à l'esclave que l'aire du carré cherché est intermédiaire entre celle du carré de côté 2 pieds et celle du carré de côté 4 pieds, ce qui incite l'esclave à choisir 3 pieds. Nouvelle erreur que Socrate corrige en faisant construire par l'esclave le carré de côté 3 pieds, afin qu'il réalise que son aire vaut 9 pieds carrés et non les 8 cherchés.

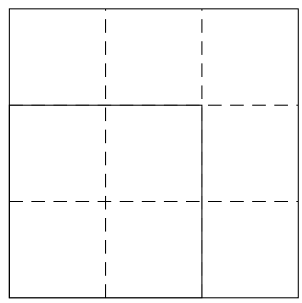


Fig. 7

[...]

Socrate : Donc, ce n'est pas encore sur le côté de trois pieds qu'est construite la surface de huit pieds ?

L'esclave : Certes non.

Socrate : Mais sur laquelle ? Essaie de nous le dire exactement et, si tu ne peux le calculer, montre-nous sur laquelle.

L'esclave : Mais, par Zeus, Socrate, je ne sais pas, moi.

[...]

Socrate : Ces quatre espaces ne sont-ils donc pas identiques ?

L'esclave : Oui.

Socrate : Et le tout, combien de fois est-il multiple de celui-ci ?

[6] [117], p. 252.

[7] Pour ne pas allonger démesurément le texte, mais il peut être éclairant pour les élèves de l'aborder en classe.

L'ESCLAVE : Quatre fois.

SOCRATE : Mais il nous fallait produire un espace double, tu ne t'en souviens pas ?

L'ESCLAVE : Certainement.

SOCRATE : N'est-il pas vrai que cette ligne tracée d'un angle à l'autre coupe chacune des surfaces carrées en deux ?

L'ESCLAVE : Si.

SOCRATE : N'est-il pas vrai que ces quatre lignes égales produisent cette surface carrée en l'entourant ?

L'ESCLAVE : Elles le font.

SOCRATE : Regarde maintenant : de quelle taille est cette surface carrée ?

L'ESCLAVE : Je ne sais pas.

SOCRATE : Chaque ligne n'a-t-elle pas délimité à l'intérieur de la surface carrée la moitié de chacune des quatre surfaces carrées présentes ?

L'ESCLAVE : Oui.

SOCRATE : Combien y a-t-il donc de telles moitiés dans cette surface carrée ?

L'ESCLAVE : Quatre.

SOCRATE : Et combien dans celle-ci ?

L'ESCLAVE : Deux.

SOCRATE : Et que sont quatre par rapport à deux ?

L'ESCLAVE : Le double.

SOCRATE : Et combien de pieds contient cette surface ?

L'ESCLAVE : Huit.

SOCRATE : À partir de quel côté est-il construit ?

L'ESCLAVE : À partir de celui-ci.

SOCRATE : À partir de la ligne tendue d'un angle à l'autre du carré de quatre pieds ?

L'ESCLAVE : Oui.

SOCRATE : Les sophistes nomment précisément cette ligne diamètre. Si diamètre est son nom, tu dirais, enfant de MÉNON, que la surface double est produite à partir du diamètre.

L'ESCLAVE : C'est bien cela, SOCRATE.

Après le dernier essai tenté par l'esclave pour exprimer le côté du carré cherché par un nombre entier de pieds, SOCRATE lui suggère de prendre plutôt une ligne géométrique qu'il construit dans la figure 6. Il s'agit de l'une des diagonales[8] du carré de base. En traçant une diagonale dans chacun des trois autres carrés, on obtient ainsi un carré « sur pointe ». La figure 8 montre clairement que son aire est double de celle du carré situé dans le coin inférieur gauche, par exemple.

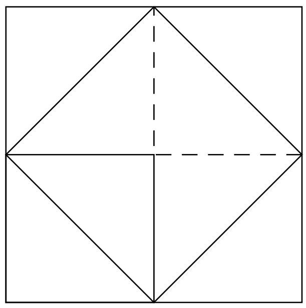


Fig. 8

Nous pouvons maintenant laisser SOCRATE conclure.

[8]Les sophistes, nous dit SOCRATE, utilisent le terme « diamètre ».

Socrate : Que t'en semble-t-il, Ménon ? Y a-t-il une seule conjecture à laquelle il n'a pas répondu de lui-même ?
Ménon : Non, tout vient de lui.
Socrate : Et cependant il ne savait pas, nous l'avons dit il y a peu.
Ménon : Tu dis vrai.
Socrate : Ces opinions étaient assurément en lui, n'est-ce pas ?
Ménon : Oui.

[. . .]

Socrate : Le fait que l'on rappelle la science dans sa propre mémoire n'est-ce pas se ressouvenir ?
Ménon : Certainement.
Socrate : Et cette science, qu'il a maintenant, ne l'a-t-il pas, soit apprise un jour, soit eue depuis toujours ?

[. . .]

Ménon : Je sais que personne ne lui a jamais enseigné.
Socrate : A-t-il ces opinions, oui ou non ?
Ménon : Cela semble incontestable, Socrate.
Socrate : S'il ne les a pas acquises dans la vie actuelle, n'est-il pas dès lors évident qu'il les avait eues et apprises à quelque autre époque.
Ménon : Il me semble.
Socrate : Ce temps n'est-il pas justement celui où il n'était pas un homme ?
Ménon : Oui.

Conclusion : On peut ne pas être d'accord avec la conclusion philosophique de ce dialogue, mais, du point de vue mathématique, Socrate a incontestablement prouvé que la diagonale d'un carré donné est le côté sur lequel il faut construire le carré d'aire double.

1.3 La somme de deux carrés

Comment s'y prendre ?

On peut encore considérer que ce qui précède permet de construire un carré dont l'aire vaut la somme des aires de deux carrés égaux. Pourrait-on généraliser cela ?

> Comment construire un carré dont l'aire est égale à la somme des aires de deux carrés quelconques ?

Cette interrogation, assez générale, est sans doute trop difficile pour les élèves et il faudra poser des sous-questions. En fait, si on regarde la figure 8, on y voit quatre carrés ! Non pas deux. Si l'on veut avoir une chance de généraliser la construction, il est peut-être souhaitable d'isoler deux carrés (parmi les quatre). On se trouve ainsi face à une « configuration de départ ». On l'analyse alors, afin de déterminer les « lignes à construire » pour arriver à la solution. Une discussion au sein de la classe devrait mettre en évidence deux configurations distinctes, illustrées par les figures 9 et 10.

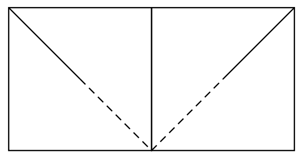


Fig. 9

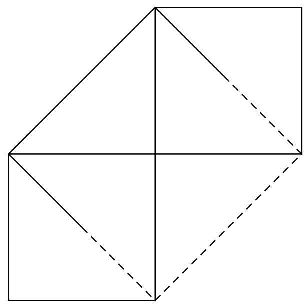


Fig. 10

Esquisser le cas plus général, où les deux carrés ne sont pas égaux et analyser la situation en vue de faire un pas vers la solution.

Un groupe d'élèves devrait arriver à une configuration du type de la figure 11, et un autre groupe, à une configuration du type de celle de la figure 13.

Les deux approches mènent à la solution ; explorons la première en observant la figure 11. À gauche et à droite du « point d'interrogation », on voit apparaître deux triangles rectangles qui « semblent » être égaux. Et en fait, s'ils le sont, leurs deux hypoténuses sont évidemment égales et l'angle qu'elles déterminent vaut un droit (à justifier).

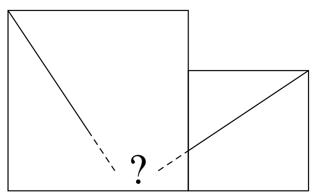


Fig. 11

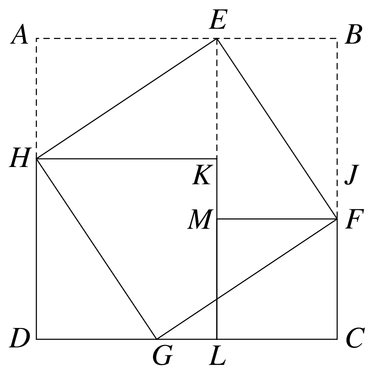


Fig. 12

On construit alors un carré et on complète le dessin, en prolongeant des verticales et en traçant une horizontale, comme dans la figure 12. Il y a toute une série de justifications à demander aux élèves...

Comment sont les quatre triangles rectangles dans les coins ? Que valent les mesures des côtés de l'angle droit de ces triangles ?

Ces quatre triangles rectangles sont évidemment égaux et ont pour côtés de l'angle droit, des côtés égaux à ceux des deux carrés de départ.

Comparer, par un découpage du grand carré $ABCD$, l'aire du carré $EFGH$ à la somme des aires des carrés $HKLD$ et $MFCL$.

On voit que l'aire du carré $EFGH$ est égale à l'aire du carré $ABCD$ diminuée de quatre fois l'aire d'un triangle rectangle tel que FCG, par exemple. Il en va de même de la somme des aires des deux carrés $HKLD$ et $MFCL$.

Dans la figure 13, la discussion entre les élèves devrait mettre en évidence que la solution ne peut être de construire un carré sur une diagonale du grand carré, car on aurait une aire double de celle de ce grand carré, ce qui est trop. Si on essaie de le faire sur une diagonale du petit carré, alors ce n'est pas assez.

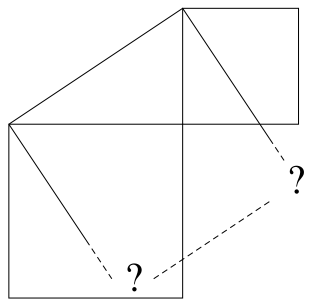


Fig. 13

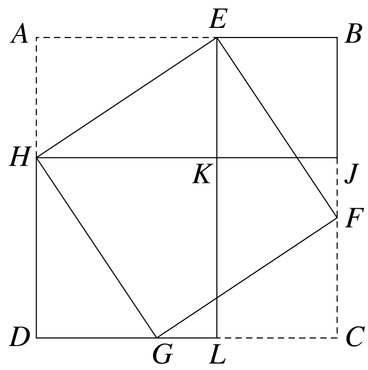


Fig. 14

Le segment oblique, en haut à gauche, est peut-être un bon candidat pour le côté du carré que l'on désire construire, puisque sa mesure est comprise entre les mesures des diagonales du grand et du petit carré. On va donc mener les perpendiculaires passant par les extrémités de ce segment oblique, puis observer la figure obtenue, en la « complétant quelque peu », par prolongement des horizontales et verticales et par fermeture du quadrilatère central, comme dans la figure 14.

Il y a de nouveau toute une série de justifications à fournir, sur l'égalité des quatre triangles rectangles dans les coins, sur le fait que le quadrilatère $EFGH$ est un carré, ... L'activité se conclut en posant la même question que pour la configuration précédente.

On voit que l'aire du carré $EFGH$ est celle du carré $ABCD$ diminuée de quatre fois l'aire d'un triangle rectangle. Et la somme des aires des carrés $EBJK$ et $HKLD$ est l'aire du carré $ABCD$ diminuée de deux fois l'aire d'un rectangle formé de deux triangles rectangles.

1.4 Énoncé général du théorème dit de Pythagore

Les élèves observent la figure 14. On leur demande de focaliser leur attention sur le triangle rectangle EKH et sur les carrés dessinés sur ses côtés.

Énoncer la propriété qui vient d'être montrée...

On comparera ensuite leurs réponses à ce qui suit.

Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit.

Ce texte est la proposition 47 du livre I des *Éléments* d'EUCLIDE, dans la traduction de Bernard VITRAC[9].

Très souvent, on présente ce résultat, essentiellement géométrique, au moyen de la figure ci-contre.

On peut encore énoncer : si a est la mesure du côté BC, b, la mesure du côté AC et c la mesure de l'hypoténuse du triangle rectangle ABC, alors

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

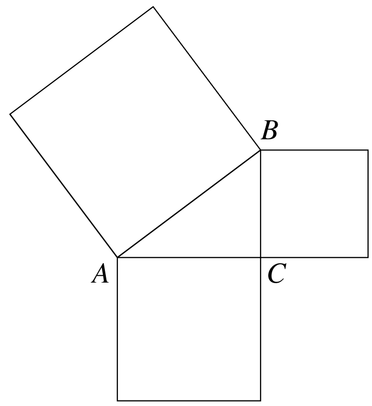


Fig. 15

Prolongements possibles Nous donnons ci-dessous quatre problèmes – puisés dans des textes anciens – qui utilisent le théorème de PYTHAGORE.

1. Le *Baudhāyana Śulbasūtra*, un texte indien d'avant l'ère chrétienne, donne l'énoncé suivant de la « relation de PYTHAGORE ».

   La corde diagonale du rectangle produit ce que produisent séparément la longueur et la largeur. <Il y a> compréhension <de ces diagonales> lorsque ces <longueurs et largeurs sont> quatre et trois, douze et cinq, quinze et huit, vingt-quatre et sept, trente-cinq et douze, trente-six et quinze.

Interpréter les nombres énumérés.

   Il s'agit d'une énumération de valeurs entières pour a et b dans la relation de PYTHAGORE, pour lesquelles c (qui doit être calculé) est aussi un entier. Un triple de nombres entiers (a, b, c) satisfaisant la relation de PYTHAGORE est nommé triplet pythagoricien. Les premiers triplets pythagoriciens sont donc (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25), (12, 35, 37) et (15, 36, 39). Mais ce dernier est un multiple de (5, 12, 13).

2. En utilisant la « relation de PYTHAGORE », résoudre le problème de la « canne contre le mur » (problème 9 de la tablette mésopotamienne BM 85196, XVIIIe siècle av. J.-C.)[10].

   Un palû (une poutre, une canne ?) de longueur $30'$ <est appuyé contre un mur>. En haut, il est descendu de $6'$. En b[as, de combien s'est-il éloigné ?][11]

   ---

[9] [67], p. 282.

[10] Cette tablette est conservée au British Museum, comme l'indique le préfixe BM.

[11] Traduction de THUREAU-DANGIN, d'après VAN DER WAERDEN, [137], p. 76. Les symboles « < » et « > » encadrent un texte ajouté par THUREAU-DANGIN pour rendre la traduction plus lisible. Les crochets encadrent une partie du texte original abîmée sur la tablette et restituée par THUREAU-DANGIN. Les Mésopotamiens exprimaient les nombres dans un système positionnel de base 60. Donc, $30'$ exprime 30 sous-unités d'une unité qui en compte 60, comme notre heure ou nos angles de 60 minutes. Cette analogie, qui n'est pas fortuite, explique l'utilisation du symbole $'$ par Thureau-Dangin.

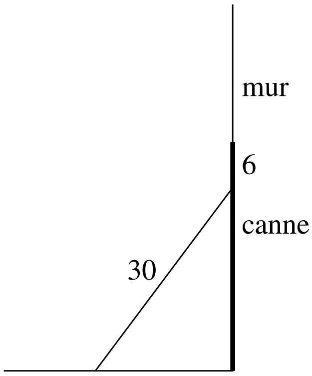


Fig. 16

La canne, d'une longueur de 30 unités, était initialement appuyée contre le mur. Puis, elle a glissé vers le bas de 6 unités, déterminant ainsi un triangle rectangle d'hypoténuse 30. En plus de l'hypoténuse, nous connaissons le côté vertical de ce triangle, il mesure $30 - 6 = 24$ unités. Pour calculer ce qui est demandé, à savoir la distance d du bas de la canne au pied du mur, il nous suffit maintenant d'utiliser la relation de PYTHAGORE : $d^2 = 30^2 - 24^2 = 900 - 576 = 324$. Donc, d vaut $\sqrt{324} = 18$ unités. Notons que $(18, 24, 30)$ est un multiple du triplet $(3, 4, 5)$.

3. Le texte I des *Textes Mathématiques de Suse*[12] contient la figure d'un triangle isocèle et son cercle circonscrit (voir figure 17). La figure 18 en donne une traduction avec nos chiffres, mais en base 60.

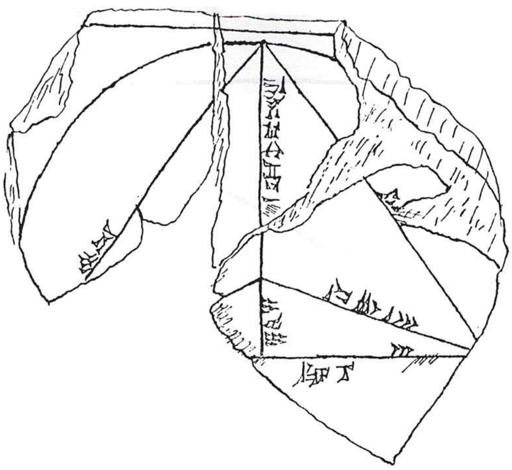


Fig. 17

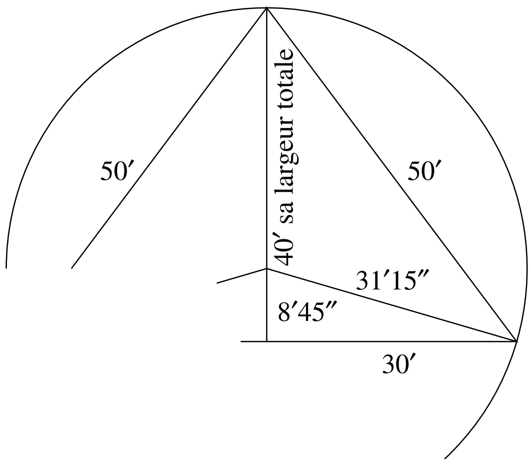


Fig. 18

Vérifier la cohérence de l'ensemble des nombres indiqués dans la figure 18.

Il est bon de signaler que l'expression « 40′ sa largeur totale » signifie que la hauteur du triangle isocèle vaut 40′.

Comme le montre les figures[13] 17 et 18, il y a deux triangles rectangles en jeu. Le plus grand a pour hypoténuse 50 unités et pour côtés de l'angle droit 30 et 40. C'est donc un triangle semblable au triangle rectangle de côtés 3, 4, 5. On obtient le rayon du cercle en soustrayant $8'45''$ ou $8\,\frac{3}{4}$ de 40, ce qui donne $31'15''$ ou $31\,\frac{1}{4}$. On peut aussi utiliser la relation de PYTHAGORE dans le petit triangle rectangle, qui a pour côtés de l'angle droit

[12] [31], p. 23 et pl. 1 pour le dessin de la tablette. Ces textes, originaires de la Perse et datant de la fin de la première dynastie de Babylone (XVIIIe siècle av. J.-C.), sont comparables aux textes mathématiques mésopotamiens de la même époque.

[13] La tablette est abîmée, ce qui explique que nous n'ayons qu'une partie du cercle et du triangle isocèle. Mais cela suffit pour en comprendre le contenu.

30 et $8\,\frac{3}{4}$ unités. Son hypoténuse mesure donc $\sqrt{30^2 + \left(8\,\frac{3}{4}\right)^2} = 31\,\frac{1}{4}$ unités. C'est bien le rayon trouvé plus haut.

4. On peut généraliser le problème de trouver un carré d'aire double de celle d'un carré donné en la construction d'un carré d'aire triple de celle d'un carré donné.

   Le mathématicien arabe ABŪ-L-WAFĀ' (X$^{\text{e}}$ siècle) propose le découpage décrit par le texte qui suit[14].

> Que les trois carrés soient a, b, c. En menant dans b et c la diagonale, on obtient 4 triangles rectangles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, qu'on place autour du carré a, de telle façon que le sommet de l'un des deux angles de 45° de chaque triangle tombe sur un sommet du carré a et l'hypoténuse le long d'un côté de ce carré ; puis, en joignant les sommets des angles droits des 4 triangles, on obtient le carré cherché $ABCD$. En effet, on démontre très facilement que $ABCD$ est un carré [...], et que l'on aura donné une solution du problème qui est exacte, et qui satisfait en même temps aux besoins des praticiens.

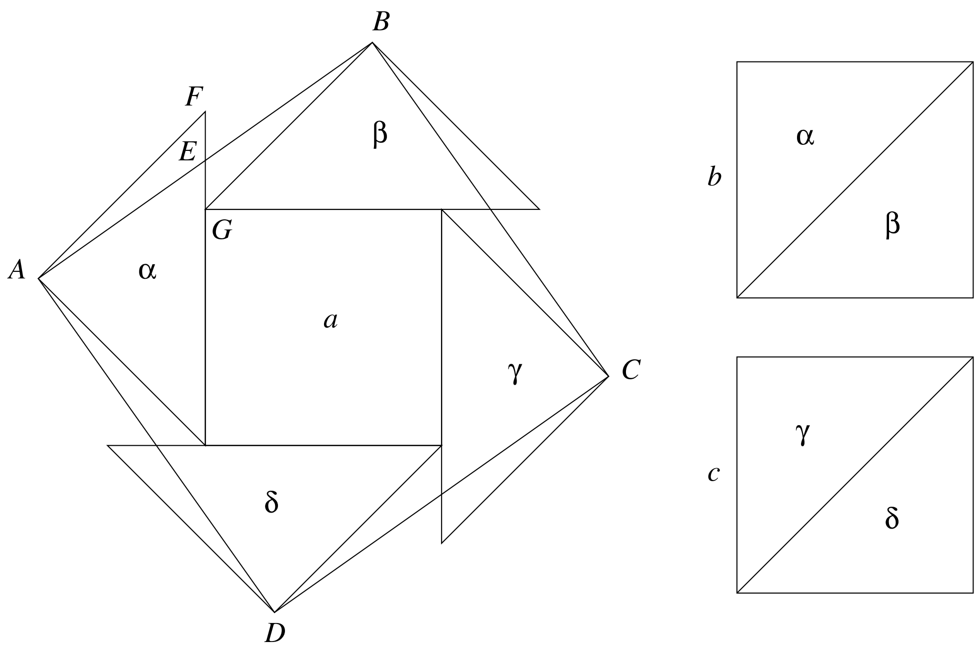


Fig. 19

Justifier la construction d'ABŪ-L-WAFĀ'.

Dans la figure 19, montrons que chacun des quatre morceaux dépassant du carré $ABCD$ est congruent à un triangle manquant à l'intérieur de ce même carré $ABCD$, par exemple l'un de ceux avec lesquels il a un sommet commun. Montrons-le pour les triangles AFE et BGE. On sait que AF est parallèle à BG. Les deux triangles ont donc leurs trois angles égaux (opposés par le sommet ou alternes-internes). Ils sont donc semblables. Mais, puisque le segment $[AF]$ a la même mesure que le segment $[BG]$, les deux triangles sont égaux.

---

[14]Traduction de Woepcke, [141], p. 350.

2 La différence de deux carrés

De quoi s'agit-il ? Utiliser le théorème de PYTHAGORE pour résoudre un problème de construction.

Enjeux Développer les capacités des élèves à exploiter des savoirs récemment acquis pour faire face à une situation-problème.

Compétences

Observer à partir des acquis antérieurs et en fonction du but à atteindre.

Choisir une procédure adéquate et la mener à son terme.

Produire un dessin qui éclaire une situation.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Une règle et un compas.

Prérequis

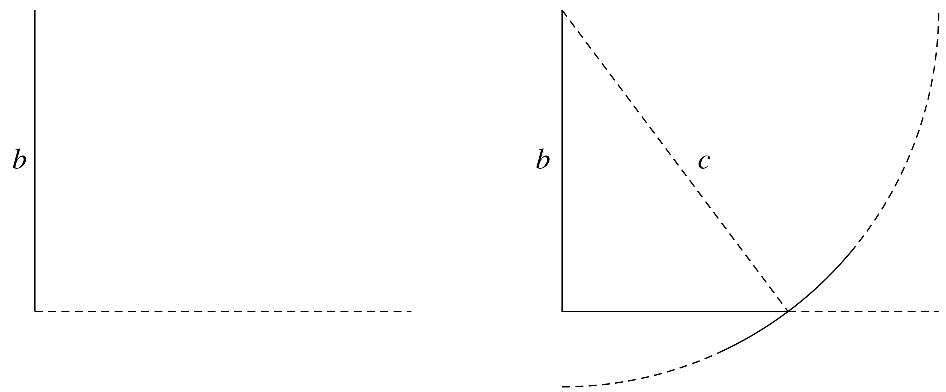
Les acquis de la section 1.

Comment s'y prendre ?

Construire géométriquement – au moyen de la règle et du compas – un carré dont l'aire égale la différence des aires de deux carrés donnés.

La consigne est simple. Le professeur ne donne aucun renseignement supplémentaire. Le travail demandé à l'élève est l'occasion, pour ce dernier, de faire valoir son aptitude à mettre en œuvre un ensemble organisé de savoirs, de savoir-faire et d'attitudes permettant d'accomplir la tâche qui lui est demandée.

La solution la plus simple est donnée ci-dessous. Si c est la mesure du côté du plus grand des deux carrés donnés et b, la mesure du côté du plus petit, nous cherchons la mesure a du côté d'un carré dont l'aire est la différence des aires des deux précédents.



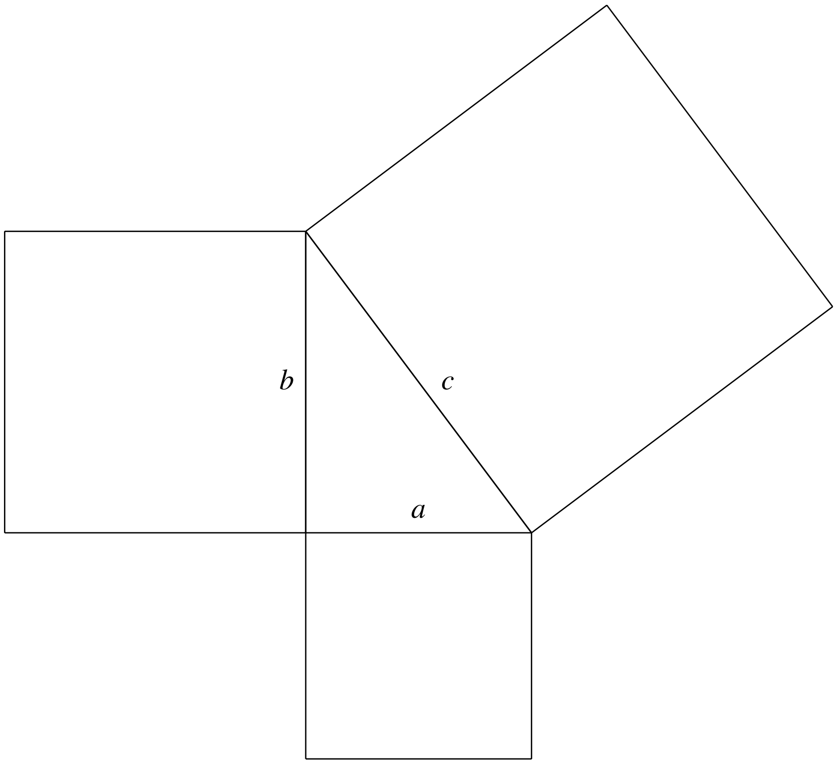


Fig. 20

Annexe II

Fiches à photocopier

Extrait du *Ménon* de Platon

Ménon : Soit, Socrate. Mais qu'est-ce qui te fait dire que nous n'apprenons pas, mais que ce que nous appelons le savoir est une réminiscence ? Peux-tu me montrer qu'il en est ainsi ?

Socrate : Je t'ai dit tout à l'heure, Ménon, que tu étais adroit et maintenant tu demandes si je peux t'instruire, moi qui affirme qu'il n'y a pas d'enseignement, mais <seulement> réminiscence. Pour que tout de suite je me contredise moi-même.

Ménon : Nullement, Socrate, par Zeus ! Ce n'était pas mon intention, c'est seulement l'habitude qui m'a fait parler ainsi. Mais s'il t'est possible de me prouver qu'il en est comme tu dis, prouve<-le>.

Socrate : Cela n'est pas facile, cependant j'<y> mettrai beaucoup d'ardeur, par amitié pour toi. Mais appelle pour moi un <membre> de ta nombreuse suite, celui que tu voudras, pour que je te <le> prouve par lui.

Ménon : Certes. (S'adressant à un esclave) Viens ici.

Socrate : Est-il Grec ? Sait-il le grec ?

Ménon : À coup sûr. <Il est> né chez moi.

Socrate : Veille à <déterminer> s'il semble, soit se souvenir, soit apprendre de moi.

Ménon : J'<y> veillerai.

Socrate : (à l'esclave) Dis-moi, mon enfant, sais-tu que ceci est une surface carrée ?

L'esclave : Oui.

Socrate : Et que la surface carrée a toutes ces lignes égales, au nombre de quatre[2] ?

L'esclave : Certainement.

Socrate : N'a-t-elle pas aussi ces lignes par le centre égales[3] ?

L'esclave : Si.

Socrate : Eh bien, une telle surface ne pourrait-elle <être rendue> plus grande ou plus petite ?

L'esclave : Certainement.

Socrate : Si donc ce côté était de deux pieds et celui-ci aussi, de combien de pieds serait le tout ? Envisage <les choses> de la manière suivante : s'il y avait deux pieds pour ce <côté> et un pied seulement pour ce <côté>, la surface ne serait-elle pas d'une fois deux pieds ?

L'esclave : Si.

Socrate : Et quand ce <côté> aussi <est> de deux pieds, ne produit-on pas <une surface> de deux fois deux ?

L'esclave : On <la> produit.

Socrate : On produit donc <une surface> de deux fois deux pieds ?

L'esclave : Oui.

Socrate : Combien de pieds font donc deux fois deux ? Dis-le moi après avoir fait le calcul.

L'esclave : Quatre, Socrate.

Socrate : Ne pourrait-on produire une autre <surface> double de cette surface, mais semblable, ayant toutes ses lignes égales comme celle-ci.

L'esclave : Oui.

Socrate : De combien de pieds sera-t-elle ?

L'esclave : Huit.

Socrate : Eh bien, essaie de me dire de quelle grandeur sera chaque côté de cette <surface>-là. Le côté de celle-ci <est> de deux pieds. Qu'<est> le <côté> du double.

[2] Il s'agit des côtés.

[3] Il s'agit des médianes.

L'esclave : Il est clair, Socrate, qu'<il est> double.

Socrate : Tu vois, Ménon, que je ne lui enseigne rien, mais <lui> demande tout. Et maintenant, il croit savoir quel est le <côté> à partir duquel la surface de huit pieds est produite. Ne te semble-t-il pas ?

Ménon : Si.

Socrate : Le sait-il donc ?

Ménon : Certes non.

Socrate : Il pense en vérité <que la surface est produite> à partir d'un côté double.

Ménon : Oui.

Socrate : Mais observe maintenant qu'il se souvient progressivement, comme on doit se souvenir.

[. . .]

Socrate : (à l'esclave) N'est-ce pas que ce <côté>-ci deviendra double de celui-là, si nous <lui> ajoutons un autre aussi grand ici ?

L'esclave : Certainement.

Socrate : La surface de huit pieds sera donc, dis-tu, produite à partir de ce <côté> si quatre <côtés> de même longueur sont produits ?

L'esclave : Oui.

Socrate : Nous tirerons donc quatre <côtés> identiques sur le modèle de celui-ci. La surface que tu dis être de huit pieds ne serait-elle pas celle-ci ?

L'esclave : Si.

Socrate : N'est-il pas que dans cette <nouvelle> surface, il y en a quatre dont chacune est égale à quatre pieds ?

L'esclave : Si.

Socrate : Quelle aire est donc produite ? N'est-elle pas quatre fois aussi grande ?

L'esclave : Sans doute.

Socrate : Donc, le quadruple d'une grandeur est son double ?

L'esclave : Non, par Zeus !

Socrate : Mais quel multiple <est-elle alors> ?

L'esclave : Le quadruple.

Socrate : Donc, mon enfant, sur un <côté> double est produit non pas une surface double, mais une surface quadruple.

L'esclave : Tu dis vrai.

Socrate : Et en effet quatre fois quatre font seize, n'est-ce pas ?

L'esclave : Oui.

Socrate : À partir de quelle ligne <construire> une surface de huit pieds ? À partir de celle-ci, n'<avons-nous> pas <une surface> quadruple ?

L'esclave : Je l'affirme.

Socrate : Et à partir de cette <ligne> moitié, cette <surface> de quatre pieds ?

L'esclave : Oui.

Socrate : Eh bien, la <surface> de huit pieds n'est-elle pas le double de celle-ci et la moitié de celle-là ?

L'esclave : Oui.

Socrate : Ne sera-t-elle pas <construite> sur une ligne plus grande que celle-ci et plus courte que celle-là, n'est-ce pas ?

L'esclave : Il me semble.

Socrate : Bien. Mais décide ce qu'il te semble. Et dis-moi : cette <ligne->ci n'était-elle pas de deux pieds et celle-là de quatre ?

L'esclave : Si.

Socrate : Il faut donc que le côté de la surface de huit pieds soit plus grande que celle-ci, celle de deux pieds, et plus petite que celle de quatre pieds.

L'esclave : Il le faut.

Socrate : Essaie de dire de quelle longueur tu crois qu'elle est.

L'esclave : Trois pieds.

Socrate : Si elle doit être de trois pieds, nous ajouterons la moitié de celle-ci et elle sera de trois pieds. En effet, <il y a> ici deux <pieds> et là un. Et, à partir d'ici, également deux <pieds> et un. Et cela produit la surface que tu dis.

L'esclave : Oui.

Socrate : Mais si ce <côté> est de trois <pieds> et celui-ci de trois <pieds>, la surface totale n'est-elle pas de trois fois trois pieds ?

L'esclave : Il semble.

Socrate : Trois fois trois, combien est-ce de pieds ?

L'esclave : Neuf.

Socrate : Mais de combien de pieds devait être le double ?

L'esclave : Huit.

Socrate : Donc, ce n'est pas encore sur le côté de trois pieds qu'est construite la surface de huit pieds ?

L'esclave : Certes non.

Socrate : Mais sur laquelle ? Essaie de nous le dire exactement et, si tu ne peux le calculer, montre-nous sur laquelle.

L'esclave : Mais, par Zeus, Socrate, je ne sais pas, moi.

[...]

Socrate : Ces quatre espaces ne sont-ils donc pas identiques ?

L'esclave : Oui.

Socrate : Et le tout, combien de fois est-il multiple de celui-ci ?

L'esclave : Quatre fois.

Socrate : Mais il nous fallait produire un <espace> double, tu ne t'en souviens pas ?

L'esclave : Certainement.

Socrate : N'est-il pas <vrai> que cette ligne <tracée> d'un angle à l'autre coupe chacune des surfaces <carrées> en deux ?

L'esclave : Si.

Socrate : N'est-il pas <vrai> que ces quatre lignes égales produisent cette surface <carrée> en l'entourant ?

L'esclave : Elles le font.

Socrate : Regarde maintenant : de quelle taille est cette surface <carrée> ?

L'esclave : Je ne sais pas.

Socrate : Chaque ligne n'a-t-elle pas délimité à l'intérieur <de la surface carrée> la moitié de chacune des quatre surfaces <carrées> présentes ?

L'esclave : Oui.

Socrate : Combien y a-t-il donc de telles <moitiés> dans cette <surface carrée> ?

L'esclave : Quatre.

Socrate : Et combien dans celle-ci ?

L'esclave : Deux.

Socrate : Et que sont quatre par rapport à deux ?

L’esclave : Le double.
Socrate : Et combien de pieds contient cette <surface> ?
L’esclave : Huit.
Socrate : À partir de quel côté <est-il construit> ?
L’esclave : À partir de celui-ci.
Socrate : À partir de la ligne tendue d’un angle à l’autre du <carré de> quatre pieds ?
L’esclave : Oui.
Socrate : Les sophistes nomment précisément cette <ligne> diamètre. Si diamètre est son nom, tu dirais, enfant de Ménon, que la surface double est produite à partir du diamètre.
L’esclave : C’est bien cela, Socrate.
Socrate : Que t’en semble-t-il, Ménon ? Y a-t-il une seule conjecture à laquelle il n’a pas répondu de lui-même ?
Ménon : Non, tout <vient> de lui.
Socrate : Et cependant il ne savait pas, nous l’avons dit il y a peu.
Ménon : Tu dis vrai.
Socrate : Ces opinions étaient assurément en lui, n’est-ce pas ?
Ménon : Oui.

[. . .]

Socrate : Le <fait que> l’on rappelle la science dans sa propre mémoire n’est-ce pas se ressouvenir ?
Ménon : Certainement.
Socrate : Et cette science, qu’il a maintenant, ne l’a-t-il pas, soit apprise un jour, soit eue depuis toujours ?

[. . .]

Ménon : Je sais que personne ne lui a jamais enseigné.
Socrate : A-t-il ces opinions, oui ou non ?
Ménon : <Cela> semble incontestable, Socrate.
Socrate : S’il ne les a pas acquises dans la vie actuelle, n’est-il pas dès lors évident qu’il <les> avait eues et apprises à quelque autre époque.
Ménon : Il <me> semble.
Socrate : Ce temps n’est-il pas justement celui où il n’était pas un homme ?
Ménon : Oui.

Platon, *Ménon*, 81e-86a, [117]