Quelques lieux plans

au fil du temps

Tables des matières :

1. Introduction

APOLLONIUS DE PERGE
(grec ; 262-180 av. J.-C.)

Connu comme « Le Grand Géomètre », son ouvrage le plus célèbre s'intitule *Coniques*. Mais nous allons nous intéresser à ses *Lieux plans*. Comment ces textes nous sont-ils parvenus ? En ce qui concerne les *Coniques*, les Grecs et les Arabes servirent de relais. Malheureusement, les textes originaux furent remaniés et des morceaux se sont perdus. Et pour les *Lieux plans* ?

Enrichir sa culture

Trois personnes jouèrent un rôle important dans la transmission des *Lieux plans* :

PAPPUS D'ALEXANDRIE
(grec, ± 290-350 ap. J.-C.)

Nous connaissons vraiment peu de choses de la vie de PAPPUS mais nous possédons sa *Collection mathématique* dans laquelle se trouvent des indications sur les travaux d'APOLLONIUS.

Voici un extrait des *Lieux plans* :
« Si, d'un point donné , ou de deux, l'on mène deux droites ; si celles-ci constituent une seule droite, ou sont parallèles, ou comprennent un angle donné ; si elles ont entre elles un rapport, ou comprennent une aire donnée, et si l'extrémité de l'une de ces droites appartient à un lieu plan donné de position, l'extrémité de l'autre droite appartiendra aussi à un lieu plan donné de position, du même genre que le premier ou d'un genre différent, et qui sera disposé semblablement au premier par rapport à la droite, ou disposé d'une manière opposée. Ces choses auront lieu d'ailleurs d'après les différences que présentent les hypothèses. »

COMMANDIN
(italien, 1509-1575)

Après de brillantes études, FEDERIGO COMMANDINO fut attaché à la Cour du Pape CLEMENT V en raison de ses connaissances étendues. Il publia les premières traductions latines des ouvrages des principaux scientifiques grecs : le *Traité du Planisphère et de L'Analemme* de PTOLEMEE ; les quatre premiers livres des *Coniques* d'APOLLONIUS ; les XV livres des *Eléments* d'EUCLIDE avec leurs commentaires anciens... et la *Collection mathématique* de PAPPUS. Il joua donc un rôle essentiel dans les transmissions des écrits : en effet, la langue pouvait être un obstacle à cette transmission.

PIERRE DE FERMAT
(français, 1601-1665)

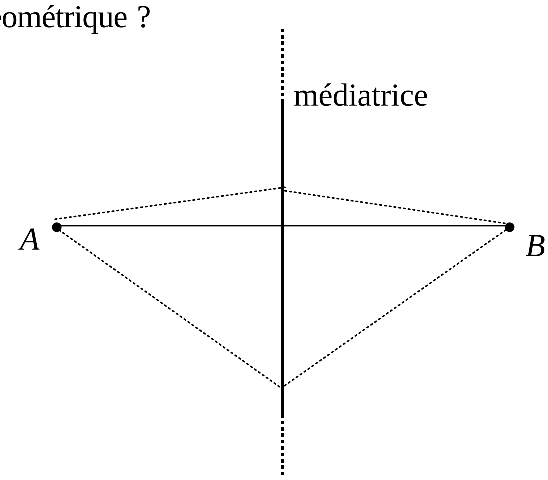
Au début de son livre *Restitution des deux livres des Lieux plans d'APOLLONIUS DE PERGE* , FERMAT écrit :
« *Ce que sont les lieux plans est chose bien connue ; ce sujet fut traité en deux livres par Apollonius, au témoignage de Pappus qui, au début de son Livre VII, en donne les diverses propositions, mais dans un langage passablement obscur ou du moins mal compris du traducteur (il ne m'a pas été possible d'examiner le manuscrit grec).* »
Le but de FERMAT fut donc d'éclaircir la version de PAPPUS. Il le fit à partir de la version latine de COMMANDIN, puisqu'il dit ne pas posséder le manuscrit grec de PAPPUS.

Actuellement, nous connaissons les problèmes des lieux plans d'APOLLONIUS par les écrits de FERMAT mais les écrits de PAPPUS nous sont parvenus directement également. Cet exemple illustre à merveille la complexité du problème de la fiabilité des sources.

2. Les lieux plans

Les **lieux plans** sont des **lieux géométriques** faisant intervenir uniquement des **droites** ou des **cercles**. Mais qu’est-ce qu’un lieu géométrique ?

Un exemple simple de lieu géométrique est la médiatrice d’un segment.



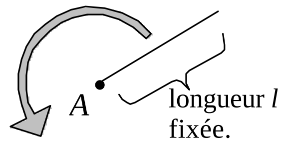
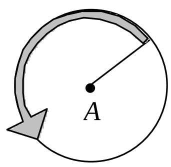
La médiatrice du segment [*AB*] est **l’ensemble de tous les points** équidistants de *A* et *B*.

La médiatrice du segment [*AB*] est **le lieu géométrique des points** équidistants de *A* et *B*.

Voici quelques lieux plans d'APOLLONIUS, dans la version de FERMAT. Par facilité, ceux-ci sont proposés dans un ordre différent de celui de FERMAT.

<u>Proposition II</u> Si l’on donne une extrémité d’une ligne droite donnée de grandeur, l’autre sera sur une circonférence concave donnée de position.

Analyser un énoncé

Texte de Fermat	Traduction moderne	Commentaires
Si l’on donne une extrémité d’une ligne droite donnée de grandeur,...	Si l’on donne une extrémité d’un segment de longueur fixée, ...	Etant donné un segment dont on connaît une extrémité *A* et la longueur *l* , … 
...l’autre sera sur une circonférence concave donnée de position.	...l’autre extrémité du segment appartiendra à un cercle constructible.	Quel est l'ensemble décrit par l’autre extrémité ? C’est le cercle de centre *A* et de rayon *l* : nous pouvons le construire... 

Il est important de préciser le vocabulaire utilisé par FERMAT.

1. Actuellement, nous dirions plutôt « définition » au lieu de « proposition » vu que dans ce cas précis, la « proposition » ne nécessite pas de preuve (cf. le commentaire de FERMAT donné ci-après).
2. A chaque fois que le mot « **constructible** » apparaît, il est en principe possible (parfois, en précisant les hypothèses) de **construire le lieu à la règle et au compas**. Nous ne le ferons pas.

L'énoncé moderne de cette proposition est le suivant :

Le cercle de centre *A* et de rayon *l* est **le lieu géométrique des points** situés à une distance *l* de *A*.	Le cercle de centre *A* et de rayon *l* est **l'ensemble de tous les points** situés à une distance *l* de *A*

Formuler une solution

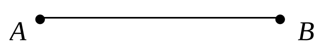
Commentaire de FERMAT :

« *Ce qui est évident de soi et ne mérite pas qu'on s'y attarde davantage.* »

3. La proposition IV

Proposition IV

Si, d'un triangle d'aire donnée, on donne la base de grandeur et de position, le sommet sera sur une droite donnée de position.

Texte de Fermat	Traduction moderne	Commentaires
Si, d'un triangle d'aire donnée, ...	Si, pour un triangle d'aire donnée, ...	On nous donne : • l'aire du triangle, • la base du triangle.  On cherche l'ensemble des points décrit par le troisième sommet *C*.
... on donne la base de grandeur et de position, ...	... la base est fixée, ...	

Analyser un énoncé

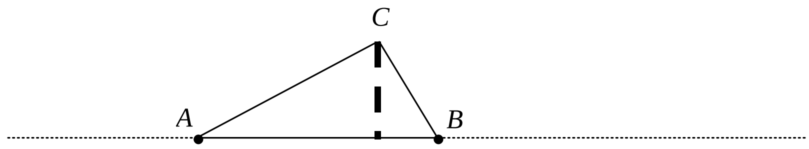
... le sommet sera sur une droite donnée de position.	... alors le sommet du triangle appartient à une droite constructible.	Le sommet *C* appartient à une droite que l'on va pouvoir construire avec les données de l'énoncé.

FERMAT nous donne comme solution : « *Cette droite sera une parallèle à la base ; sa construction et tout le reste se tirent immédiatement du Livre I des Eléments*[1]. »

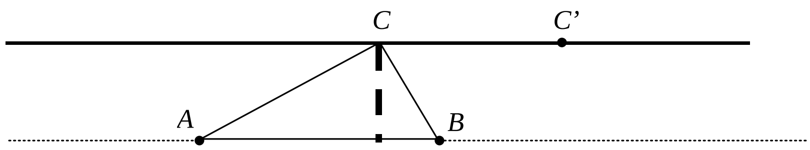
Construction de la solution

Construire

Soit *ABC* le triangle donné. Le point *C* doit appartenir au lieu cherché.



FERMAT nous donne comme solution au lieu cherché une droite parallèle à la base : cette droite passera donc par le sommet *C* du triangle.



Tous les points de la droite vérifient-ils bien les conditions de l'énoncé ?

Soit *C'* un point quelconque de la droite différent de *C*.
Le triangle *ABC'* a-t-il la même aire que le triangle *ABC* ?
Ces deux triangles ayant la même base et la même hauteur, ils ont effectivement la même aire.

Discuter

A l'époque d'APOLLONIUS, se donner « un triangle d'aire donnée », c'était **dessiner** un triangle dont l'aire était fixée. Pourquoi devait-on le dessiner ? Derrière cette obligation se cache des contraintes dues à la construction à la règle et au compas.

[1] Les *Eléments* dont il est question sont évidemment ceux d'EUCLIDE.

Donc, on connaissait au moins un point du lieu (le point C). De plus, **le lieu cherché** devait être en **<u>un seul morceau</u>**.

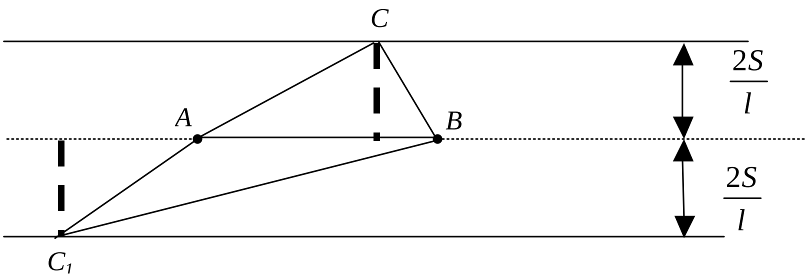
Nous raisonnons différemment de nos jour.

Appelons S l'aire donnée du triangle.

La hauteur du triangle est donnée par $h = \dfrac{2S}{l}$ (où h désigne la hauteur du triangle et S sa surface).

Le problème se ramène donc à la recherche de tous les points du plan situés à une distance $\dfrac{2S}{l}$ de la droite AB[2].

Le lieu est donc constitué des **deux droites** parallèles à la droite AB et situées à distance $\dfrac{2S}{l}$ de celle-ci.



FERMAT obtenait comme solution la droite du dessus puisque son lieu devait passer par le point C et être en un seul morceau. Nous n'avons pas ces contraintes...

<u>Remarque</u> :

La définition <u>actuelle</u> d'un **lieu géométrique** est **l'ensemble de <u>tous</u> les points vérifiant certaines propriétés**. Cela implique qu'il ne faut pas en oublier et qu'il ne faut pas en inclure trop !

Par exemple, dans le lieu ci-dessus, il ne faut pas oublier la deuxième droite. Nous verrons plus loin un lieu où certains points sont à exclure.

[2] En effet, pour mesurer la distance d'un point à une droite, il faut construire la perpendiculaire à cette droite passant par ce point. Ce qui correspond à la notion de hauteur.

4. La proposition V

Proposition V

Si une droite est donnée de grandeur et parallèle à une droite donnée de position, et qu'une de ses extrémités soit sur un lieu plan donné de position, l'autre extrémité sera aussi sur un lieu plan donné de position.

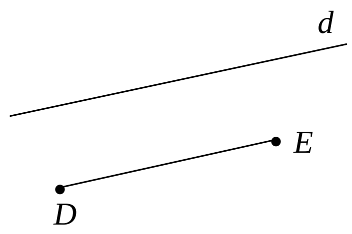
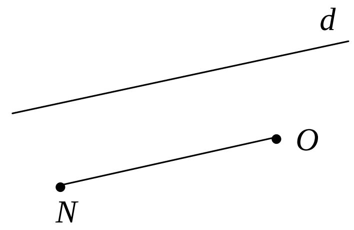
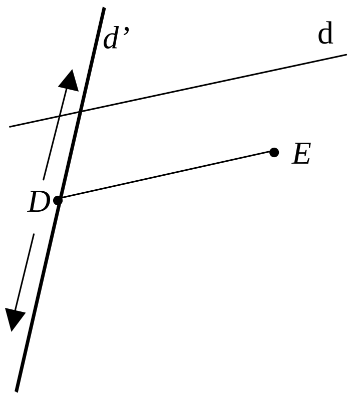
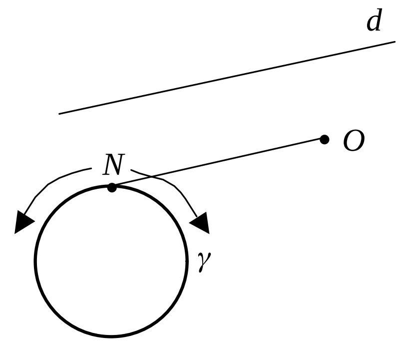
Il est important de signaler que « *lieu plan* » signifie droite ou cercle (selon le contexte !).

Analyser un énoncé

Texte de Fermat	Traduction moderne
Si une droite est donnée de grandeur ...	Soit un segment de longueur donnée ...
... et parallèle à une droite donnée de position, ...	... et parallèle à une droite donnée, ...
...et qu'une de ses extrémités soit sur un lieu plan donné de position, ...	... et dont une des extrémités est sur une droite donnée (respectivement un cercle donné), ...
...l'autre extrémité sera aussi sur un lieu plan donné de position.	...l'autre extrémité du segment appartiendra à une droite (respectivement un cercle) constructible.

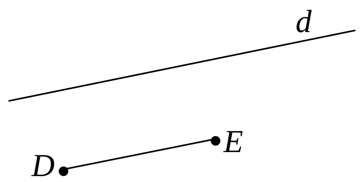
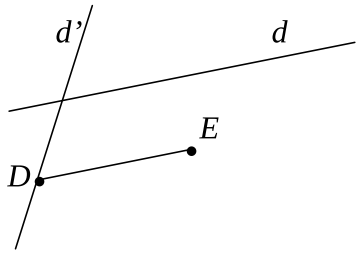
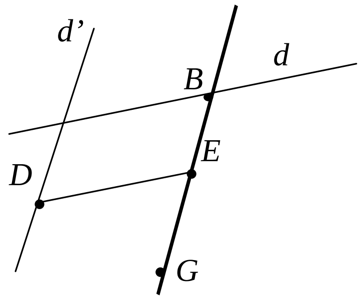
<u>Remarque</u> : un cercle « *donné de position* » implique la connaissance de son centre et de son rayon ; ce qui permet de le représenter.

Nous allons suivre, pour chaque proposition, les instructions de FERMAT pour construire la solution. Nous avons gardé autant que possible ses notations, sauf lorsque celles-ci nous semblaient alourdir inutilement le texte. Les quelques modifications du texte original seront écrites en caractères gras. Elles ne sont faites que pour éviter les notations lourdes ou pour souligner des analogies.

Texte de Fermat	Traduction moderne	Figures (cas n°1)	Figures (cas n°2)
Si une droite est donnée de grandeur ... *... et parallèle à une droite donnée de position, ...*	Soit un segment de longueur donnée ... ... et parallèle à une droite donnée, ...	On se donne un segment *DE* de longueur *l* donnée et parallèle à une droite donnée *d* : 	On se donne un segment *NO* de longueur *l* donnée et parallèle à une droite donnée *d* : 
...et qu'une de ses extrémités soit sur un lieu plan donné de position, ...	... et dont une des extrémités est sur une droite *d'* donnée (respectivement un cercle γ donné) ...	L'extrémité *D* parcourt une droite d' donnée :  Le point *E* va parcourir une droite constructible.	L'extrémité *N* parcourt un cercle γ donné :  Le point *O* va parcourir un cercle constructible.
...l'autre extrémité sera aussi sur un lieu plan donné de position.	... l'autre extrémité du segment appartiendra à une droite (respectivement un cercle) constructible.		

Construire

Construction dans le cas n°1.

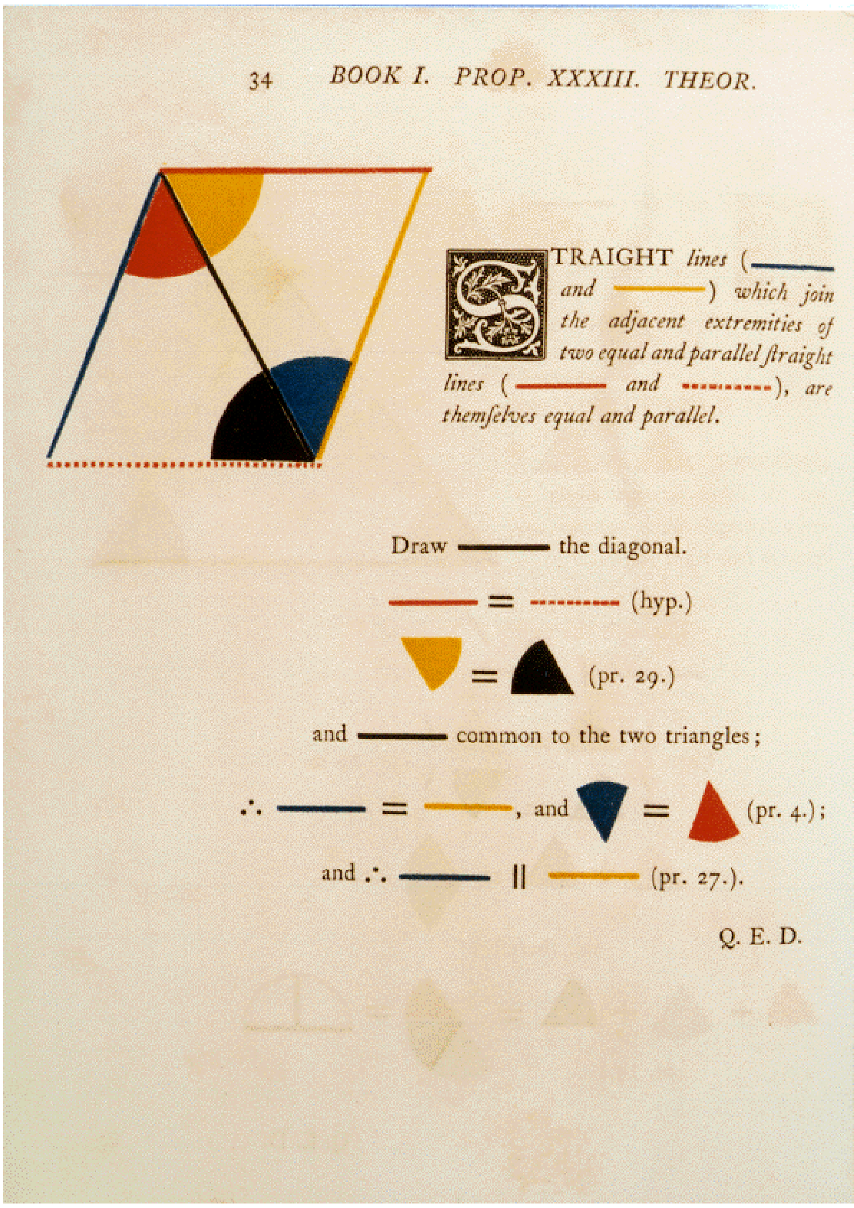
Texte de Fermat	Traduction moderne	Construction
Soit DE une droite donnée de grandeur et parallèle à la droite **d** *donnée de position.*	Soit [*DE*] un segment de longueur donnée et parallèle à la droite ***d*** donnée.	
L'extrémité D est supposée sur une droite **d'** *donnée de position.*	L'extrémité *D* est sur une droite ***d'*** donnée.	
Si par E vous menez BEG parallèle à **d'**, *elle résout la question.*	On trace la parallèle à la droite ***d'*** qui passe par *E* : c'est la droite cherchée.	

FERMAT justifie sa construction par la proposition 33 du Livre I des *Eléments* d'EUCLIDE (cf. p. suivante) : tous les segments parallèles à une droite donnée (ici ***d***) et compris entre deux droites parallèles (***d'*** et *BEG*) données sont de la même longueur.

Exercice : réfléchissez sur la même proposition énoncée de façon moderne :

> Soit un segment de longueur donnée, parallèle à une droite donnée et dont une des extrémités est sur une droite donnée (respectivement un cercle donné), l'autre extrémité du segment appartiendra à une droite (respectivement un cercle) constructible.

Proposition 33 –
Livre I des Eléments d'Euclide



34 BOOK I. PROP. XXXIII. THEOR.

STRAIGHT lines (and) which join the adjacent extremities of two equal and parallel ſtraight lines (and), are themſelves equal and parallel.

Draw the diagonal.

= (hyp.)

= (pr. 29.)

and common to the two triangles;

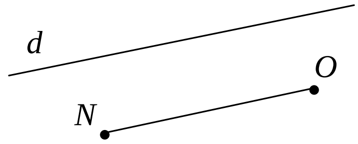
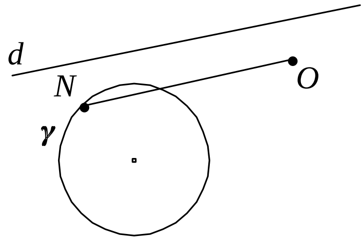
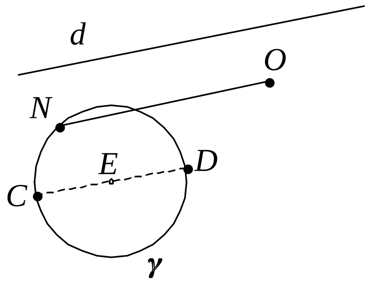
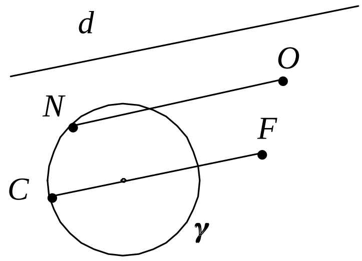
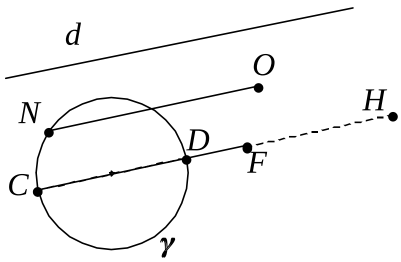
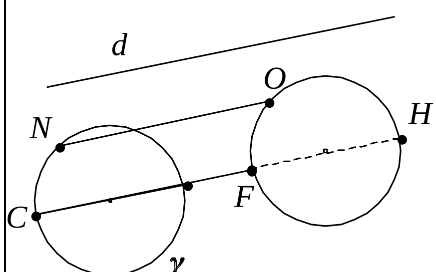
∴ = , and = (pr. 4.);

and ∴ || (pr. 27.).

Q. E. D.

Il s'agit de l'édition d'OLIVER BYRNE, publiée en 1847 en Angleterre.
Cette superbe édition est disponible sur Internet.

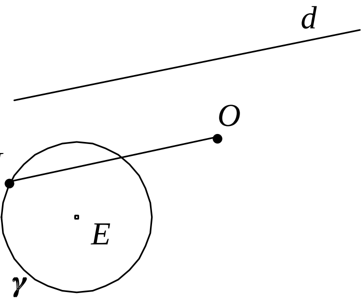
<u>Construction dans le cas n°2.</u>

Texte de Fermat	Traduction moderne	Construction
Soit **d** *une droite donnée de position, à laquelle est parallèle NO donnée de grandeur.*	Soit ***d*** une droite donnée à laquelle est parallèle le segment [*NO*] de longueur connue.	
Soit le point N sur la circonférence du cercle ***γ*** *donné de position.*	Le point *N* est sur le cercle ***γ*** donné. Donc, son centre est donné.	
Soit E le centre du cercle ***γ*** *; je mène le diamètre parallèle à* **d (appelons-le CD)...**	Soit *E* le centre du cercle ***γ*** ; traçons le diamètre **[*CD*]** parallèle à ***d***...	
... et je le prolonge jusqu'en F, de sorte que CF=NO, la droite donnée.	... et prolongeons-le jusqu'en *F*, de sorte que $\mid CF \mid = \mid NO \mid$.	
La droite CF sera donnée de grandeur et de position ; je la prolonge en faisant FH = CD.	Le segment [*CF*] sera parfaitement déterminé. Je le prolonge en construisant *H* tel que $\mid FH \mid = \mid CD \mid$.	
Le cercle décrit sur FH résout la question, car le point O sera sur sa circonférence.	Le cercle de diamètre [*FH*] résout la question, car le point *O* sera sur sa circonférence.	

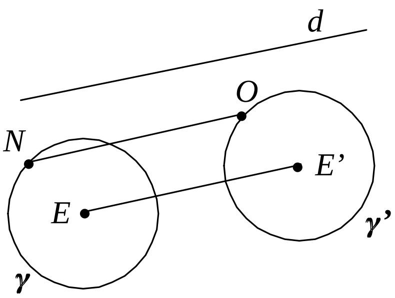
Plus simplement...

Discuter

Soit le segment [NO] parallèle à d et dont l'extrémité N se déplace sur le cercle γ de centre E et de rayon r.



Construisons le segment [EE'] parallèle à [NO] et de même longueur. Dessinons le cercle γ' de centre E' et de rayon $|E'O|$.

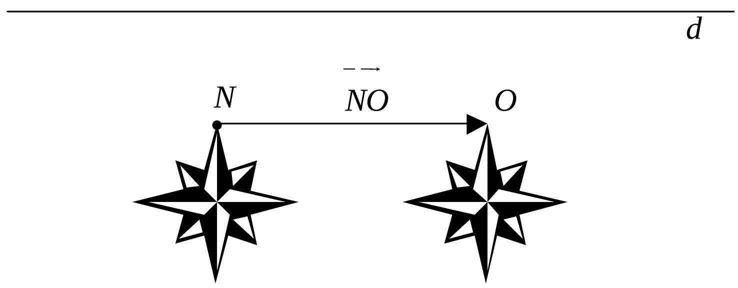


Lorsque N se déplace sur γ, O se déplace sur le cercle γ'. Prouvez-le ![3]

La bielle d'une locomotive qui relie deux roues illustre à merveille ce problème.

<u>Généralisation</u> : quand un lieu géométrique sera-t-il le translaté d'un autre ?

Généraliser



[3] Une preuve en utilisant les systèmes de coordonnées est donnée en annexe. Une autre preuve peut être déduite de la proposition II en utilisant le théorème de Thales.

Dans le problème que nous venons d’examiner, la solution est l’image du lieu plan de départ par la translation $\overrightarrow{NO}$.

Ce problème peut être généralisé dans le cas où le segment garde une direction et un sens donnés pendant que son extrémité parcourt une courbe plane quelconque.

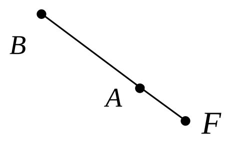
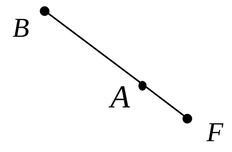
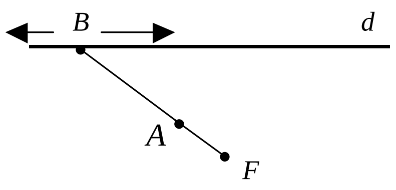
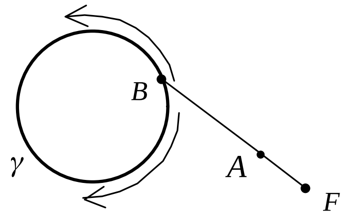
5. La proposition I.1

Proposition I.1

Si d’un point donné on mène en ligne droite deux lignes dans un rapport donné, et que l’extrémité de l’une se trouve sur un lieu plan donné de position (c’est-à-dire une droite ou une circonférence donnée de position), l’extrémité de l’autre sera sur une droite ou une circonférence donnée de position.

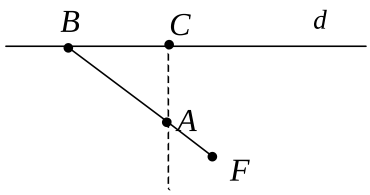
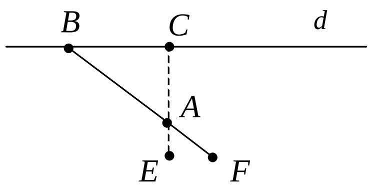
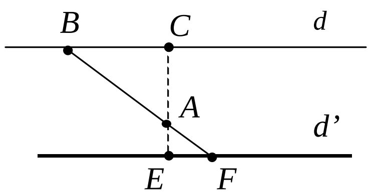
Analyser un énoncé

Texte de Fermat	Traduction moderne
Si d’un point donné on mène en ligne droite deux lignes dans un rapport donné, …	Si d’un point donné, on trace deux segments alignés et consécutifs dont le rapport des longueurs est fixé, …
…et que l’extrémité de l’une se trouve sur un lieu plan donné de position (c’est-à-dire une droite ou une circonférence donnée de position),…	…et que l’extrémité non commune d’un des segments parcourt une droite (respectivement un cercle) donnée, …
…l’extrémité de l’autre sera sur une droite ou une circonférence donnée de position.	…l’extrémité non commune de l’autre segment se déplacera sur une droite (respectivement un cercle) constructible.

Texte de Fermat	Traduction moderne	Figures (cas n°1)	Figures (cas n°2)
Si d'un point donné on mène en ligne droite deux lignes dans un rapport donné, …	Si d'un point donné on trace deux segments alignés et consécutifs dont le rapport des longueurs est fixé, …	Du point A, on donne AB et AF . Leur rapport $\frac{\lvert AB\rvert}{\lvert AF\rvert}$ est fixé. 	Du point A, on donne AB et AF . Leur rapport $\frac{\lvert AB\rvert}{\lvert AF\rvert}$ est fixé. 
…et que l'extrémité de l'une se trouve sur un lieu plan donné de position (c'est-à-dire une droite ou une circonférence donnée de position),…	…et que l'extrémité non commune d'un des segments parcourt une droite (respectivement un cercle) donnée, …	L'extrémité B parcourt une droite d donnée : 	L'extrémité B parcourt un cercle γ donné : 
…l'extrémité de l'autre sera sur une droite ou une circonférence donnée de position.	…l'extrémité de l'autre segment se déplacera sur une droite (respectivement un cercle) constructible.	Le point F va parcourir une droite constructible.	Le point F va parcourir un cercle constructible.

<u>Construction dans le cas n°1.</u>

Construire

Texte de Fermat	Traduction moderne	Construction
Du point A, j'abaisse sur la droite **d** *la perpendiculaire AC, le point C sera donné ; ...*	Du point A, abaissons sur la droite ***d*** la perpendiculaire AC, le pied C de la perpendiculaire sera déterminé ; ...	
... je prolonge CA jusqu'en E, en prenant $\frac{CA}{AE}$ *dans le rapport donné ; ...* *...AE sera donné, donc le point E.*	... prolongeons CA jusqu'en E, pour avoir $\frac{\lvert CA\rvert}{\lvert AE\rvert}$ dans le rapport donné $\frac{\lvert AB\rvert}{\lvert AF\rvert}$; ... nous connaîtrons AE, donc le point E.	 Nous avons construit le point E.
Par le point E je mène **d'** *parallèle à la droite* **d** *; elle sera donnée de position et passera par le point F* [...].	Par le point E, menons ***d'*** parallèle à la droite ***d*** ; elle sera déterminée passera par le point F. La droite *d'* satisfait au problème.	

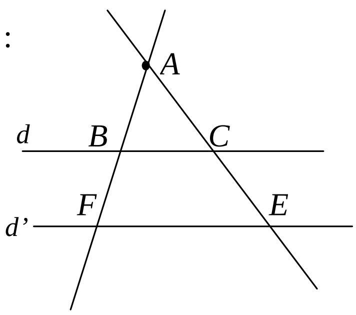
Il s'agit en effet d'une application du théorème de THALES.

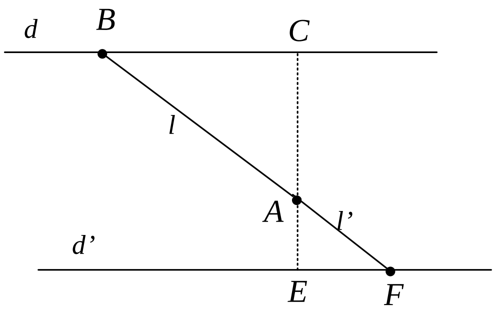
Comme le dit FERMAT : « [...], *car toutes les droites, passant par un point donné et coupant deux parallèles, sont divisées dans le même rapport.* »

Utiliser un acquis

Le théorème de THALES dit notamment que :

$$\frac{\lvert AB\rvert}{\lvert AF\rvert} = \frac{\lvert AC\rvert}{\lvert AE\rvert}$$





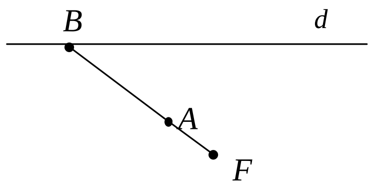
Nous sommes dans le cas où A est entre les droites d et d'.

Par THALES : $\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{|AC|}{|AE|}$

car d et d' sont parallèles.

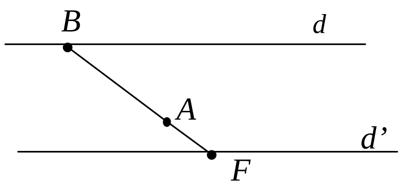
Plus simplement...

Nous savons que F est un point du lieu cherché.



Discuter

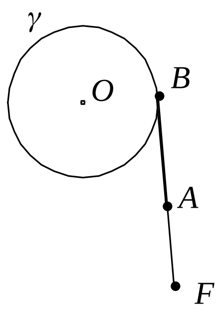
De plus, par le théorème de THALES, nous savons que tous les segments compris entre deux droites parallèles et passant par un point donné sont divisés dans un même rapport.

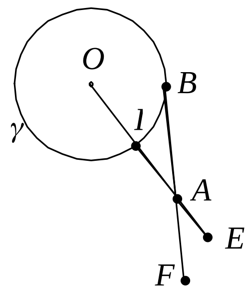
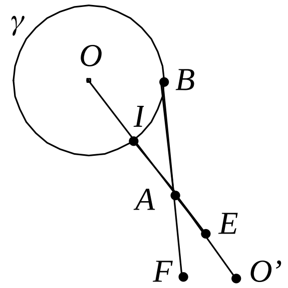
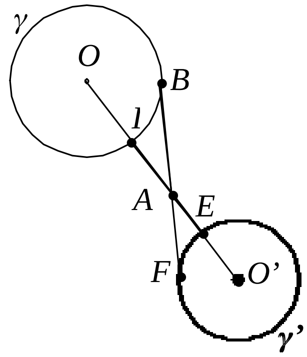


Le lieu cherché est donc la droite d' parallèle à d et passant par F.

Il n'est donc pas nécessaire de tracer CA et AE tels que $\frac{|AC|}{|AE|}$ puisqu'il existe une seule droite d' parallèle à une droite d donnée et passant par un point F donné.

<u>Construction dans le cas n°2.</u>

Texte de Fermat	Traduction moderne	Construction
Soient maintenant donnés le point **A** *et le cercle* $\boldsymbol{\gamma}$ *de centre* **O**.	Soient le point $\boldsymbol{A}$ et le cercle $\boldsymbol{\gamma}$ de centre $\boldsymbol{O}$.	

Menez **A***O qui coupe la circonférence en I, et prolongez I***A** *suivant* **A***E, en sorte que le rapport* $\frac{\mathrm{IA}}{\mathrm{AE}}$ *soit égal au donné.*	Traçons ***A****O* qui coupe la circonférence en *I* et prolongeons *IA* jusqu'en *E*, pour que le rapport $\frac{\lvert IA\rvert}{\lvert AE\rvert}$ soit égal au rapport donné $\frac{\lvert AB\rvert}{\lvert AF\rvert}$.	
Continuez le prolongement jusqu'en **O'** *en sorte que* $\frac{\mathrm{OI}}{\mathrm{EO'}}=\frac{\mathrm{IA}}{\mathrm{AE}}$, ...	De même, prolongeons *AO* jusqu'en ***O'*** pour que $\frac{\lvert OI\rvert}{\lvert EO'\rvert}=\frac{\lvert IA\rvert}{\lvert AE\rvert}$.	
... et de **O'** *comme centre, avec* **O'***E comme rayon, décrivez la circonférence du cercle* ***γ'*** *qui, d'après la construction, sera évidemment donné de position.*	Traçons le cercle ***γ'*** de centre ***O'*** et de rayon |***O'****E* | . C'est le lieu cherché.	

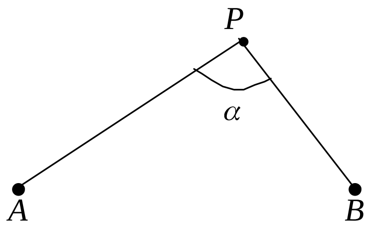
Remarquons que le lieu est l'image par l'homothétie de centre *A* et de rapport donné $\frac{\lvert AB\rvert}{\lvert AF\rvert}$ du cercle donné.

6. La proposition III

Proposition III

Si, de deux points donnés, on mène deux droites qui se coupent suivant un angle donné, leur point commun sera sur une circonférence concave donnée de position.

Analyser un énoncé

Texte de Fermat	Traduction moderne	Commentaires
Si, de deux points donnés,…	Si, à partir de deux points donnés, …	Soient les deux points A et B et l'angle α.
… on mène deux droites qui se coupent suivant un angle donné,…	…nous traçons deux segments qui se coupent suivant un angle donné,…	 Nous cherchons où va se trouver le point P.
…leur point commun sera sur une circonférence concave donnée de position.	…le point d'intersection des deux segments sera sur un cercle construc-tible.	Le point P se trouve sur un cercle[4].

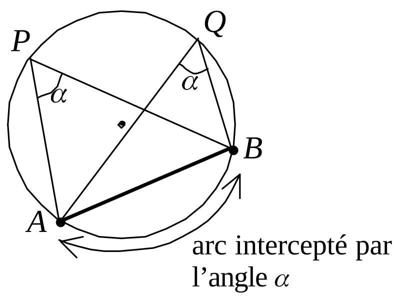
L'énoncé moderne de cette proposition est :

> Quel est le lieu géométrique des points d'où l'on voit un segment sous un angle α donné ?

Ce problème est connu sous le nom de *problème de l'arc capable*.

Rappel :

Deux angles inscrits dans un cercle et interceptant le même arc ont la même amplitude.



La propriété rappelée implique que de tous les points de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ situés du même côté que P par rapport à la corde $[AB]$, on voit le segment $[AB]$ sous le même angle α.

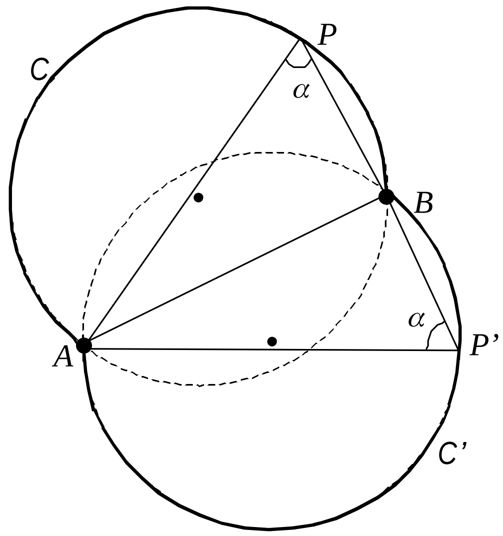
Ces points P, Q, ... font donc partie du lieu cherché.
Et qu'en est-il des points situés sur l'autre partie de la circonférence ?

[4] Dire que l'ensemble des points P satisfaisant à la question se trouve sur un cercle ne signifie pas que tous les points du cercle sont des points du lieu.

Ils interceptent la corde [*AB*] avec un angle π- α. Ils ne font donc pas partie du lieu. Il en est de même pour les deux points *A* et *B* (dans ce cas, l'angle est nul)[5].

Pour FERMAT, le lieu cherché est donc l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ passant par le point *P*. Il suffit donc, pour construire le lieu, de construire le cercle passant par les trois points donnés *A*, *B* et *P*. Nous le suggérons en exercice.

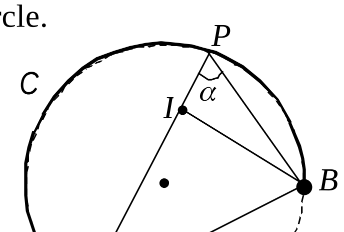
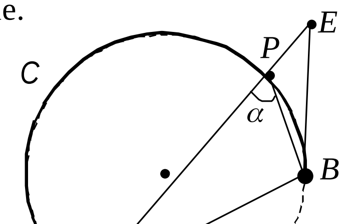
Ce lieu est-il complet ou bien, comme dans certaines propositions précédentes, manque-t-il un morceau ?



Effectivement, par symétrie, nous trouvons facilement un second arc de cercle répondant à la question.

Ce lieu est-il maintenant complet ?

Il est facile de prouver que les points qui ne sont pas sur les deux arcs de cercle que nous venons de décrire (dessinés en gras sur la figure) n'appartiennent pas au lieu.

Points à l'intérieur des arcs de cercles	Points à l'extérieur des arcs de cercles
Soit *I* un point à l'intérieur des arcs de cercle.  Prolongeons [*AI*] jusqu'à un des arcs de cercle. Nous obtenons le point *P*.	Soit *E* un point à l'extérieur des arcs de cercle.  Le segment [*AE*] coupe le cercle en *P*.

[5] Voici un exemple de lieu où des points sont à exclure du cercle trouvé.

Par définition, on a : $\widehat{APB} = \alpha$ et $\widehat{AIB} = \pi - \widehat{IBA} - \widehat{IAB}$. Or, $\widehat{IBA} < \widehat{PBA}$ et $\widehat{IAB} = \widehat{PAB}$. Donc $\widehat{AIB} > \pi - \widehat{PBA} - \widehat{PAB}$ $\widehat{AIB} > \widehat{APB} = \alpha$. Par symétrie, ceci est vrai sur le second arc de cercle. Les points à l'intérieur des arcs de cercle ne font donc pas partie du lieu.	Par définition, on a : $\widehat{APB} = \alpha$ et $\widehat{AEB} = \pi - \widehat{EBA} - \widehat{EAB}$. Or, $\widehat{EBA} > \widehat{PBA}$ et $\widehat{EAB} = \widehat{PAB}$ Donc $\widehat{AEB} < \pi - \widehat{PBA} - \widehat{PAB}$ $\widehat{AEB} < \widehat{APB} = \alpha$. Par symétrie, ceci est vrai sur le second arc de cercle. Les points à l'extérieur des arcs de cercle ne font donc pas partie du lieu.

Conclusion :

Le lieu des points d'où l'on voit le segment [*AB*] sous un angle donné α est la réunion de deux arcs de cercle symétriques et sous-tendus par la corde [*AB*] (les points *A* et *B* sont exclus de l'ensemble cherché).

Ces arcs sont appelés
arcs capables de l'angle α construit sur le segment [*AB*].

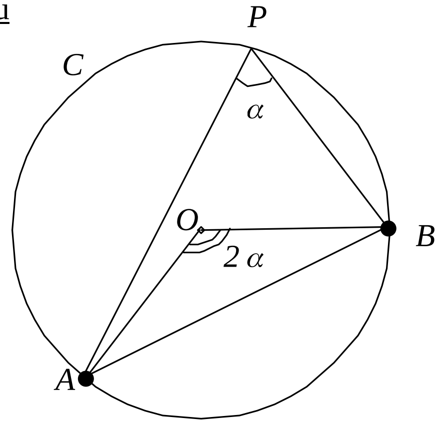
Formuler une solution

Examinons le lieu d'un peu plus près pour pouvoir le construire.

Soit *P* un point du lieu.

Rappel : dans un cercle, l'amplitude d'un angle au centre est double de celle d'un angle inscrit interceptant le même arc.

Cas où l'angle α est aigu



Utiliser un acquis

Puisque P est un point du lieu, $\widehat{APB} = \alpha$

Or, $\widehat{AOB} = 2\alpha$ (propriété rappelée ci-dessus)

$\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$ (car le triangle AOB est isocèle)

Construire

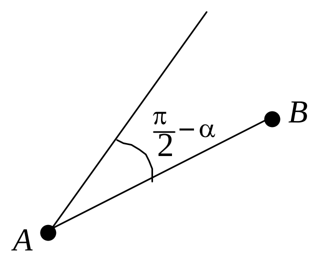
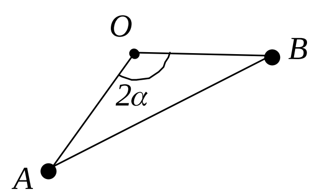
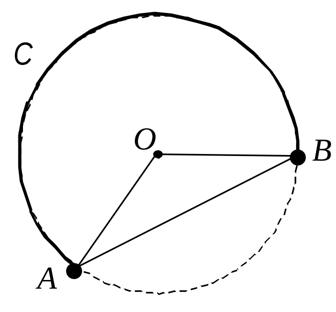
Donc, $\widehat{OAB} = \dfrac{\pi - 2\alpha}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$

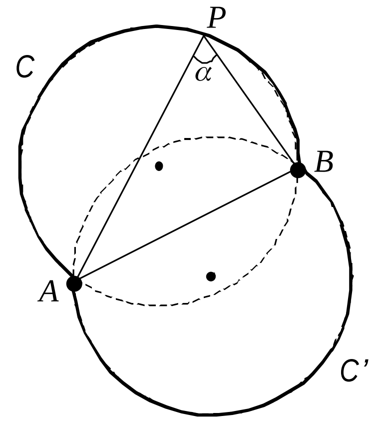
💣 Attention ! Ce raisonnement n'est valable que pour $\alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$ puisque dans le cas contraire, nous obtenons pour $\widehat{OAB}$ une mesure d'angle négative.

Nous laissons en exercice le cas où l'angle α est obtus.

Construction du lieu

Soit le segment [AB] donné et l'angle α connu (sans donner de point du lieu).

Construction	Figures
1. Construire un angle de sommet A, d'amplitude $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$ et dont l'un des côtés est [AB.	
2. Du même côté de [AB], effectuer la même construction en prenant B comme sommet. On obtient le point O.	
3. Traçons le cercle de centre O et passant par A et B. L'arc $\overset{\frown}{AB}$ situé du côté de O est l'un des deux arcs de cercle cherché.	

<table>
<tr>
<td>4. L’autre arc de cercle est son image par la symétrie orthogonale d’axe AB.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

La construction dans le cas où l’angle α est obtus est similaire ; nous la laissons au lecteur.

7. Annexe : les équations de lieux

> Proposition V
>
> Si une droite est donnée de grandeur et parallèle à une droite donnée de position, et qu’une de ses extrémités soit sur un lieu plan donné de position, l’autre extrémité sera aussi sur un lieu plan donné de position.

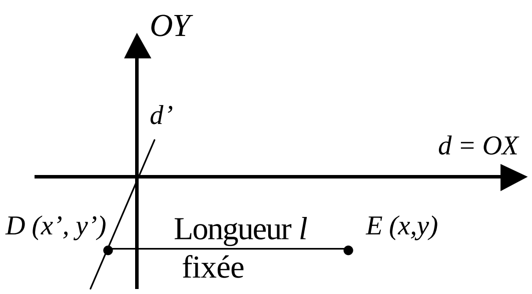
Equation du lieu dans le cas n°1

- Choix d’un repère

  Le choix judicieux d’un repère simplifie les équations des droites et cercles donnés.

  Convention : les coordonnées des points d’une droite ou d’un cercle donnés seront notées *(x’, y’)*. Les coordonnées des points du lieu seront notées *(x, y)*.

  Dans ce cas, on choisit un des axes (*OX* par exemple) confondu avec la droite *d* donnée et l’autre axe de telle manière que *d’* passe par l’origine.



- <u>Ce qui varie dans le problème</u>

  Le point *D* parcourt la droite *d'*. On va donc écrire les conditions sur les coordonnées *(x', y')* de *D* et ensuite, essayer de les relier aux coordonnées *(x, y)* du lieu.

- <u>Condition sur les coordonnées *(x', y')*</u>

  ☆ $y' = ax'$ avec *a* la pente de la droite *d'*.
  Cette équation caractérise l'ensemble des points de la droite *d'* qui sont aussi la première extrémité du segment [*DE*].

- <u>Comment déterminer les coordonnées *(x, y)* à partir des coordonnées *(x', y')*?</u>

  - si le point *E* est à droite de *d'* : $\begin{cases} x = x' + l \\ y = y' \end{cases}$

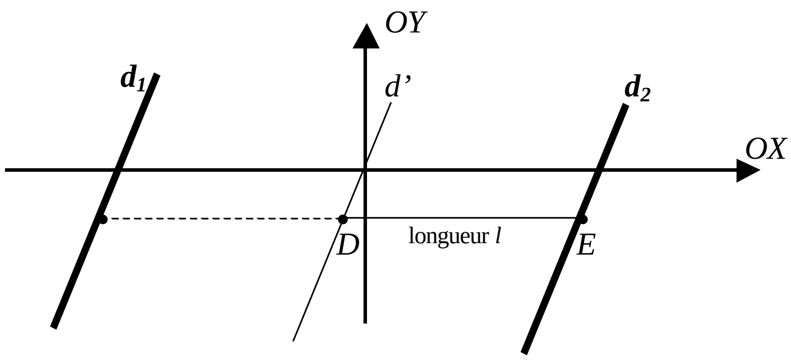
  - si le point *E* est à gauche de *d'* : $\begin{cases} x = x' - l \\ y = y' \end{cases}$

- <u>Equation du lieu</u>

  En replaçant les coordonnées *(x', y')* en fonction des coordonnées *(x, y)* dans ☆, on trouve la condition liant *x* et *y* :

  $$y = a\,(x - l) \quad \text{ou bien} \quad y = a\,(x + l).$$

  Nous voyons que le lieu de FERMAT dépend de la position du point *E*.

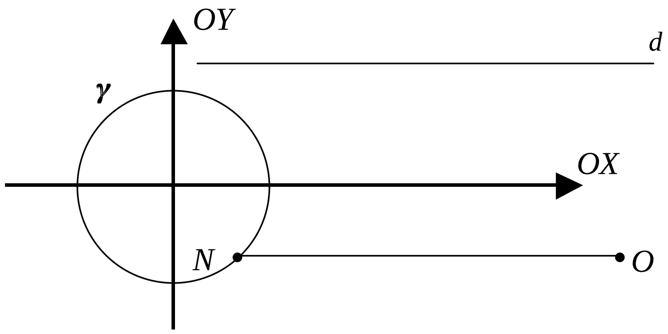


<u>Equation du lieu dans le cas n°2</u>

Appliquons le même raisonnement que dans le cas ci-dessus.

- <u>Choix d'un repère</u>

  Pour simplifier, choisissons l'origine du repère au centre du cercle donné et un des axes (*OX* par exemple) parallèle à *d*.



- Ce qui varie dans le problème

  Le point N varie : il doit parcourir le cercle $\boldsymbol{\gamma}$.

- Condition sur les coordonnées (x', y')

  ☆ $\boldsymbol{\gamma} \equiv x'^2 + y'^2 = R^2$ cette équation caractérise l'ensemble des points du cercle qui sont la première extrémité du segment [NO].

- Comment déterminer les coordonnées (x, y) à partir des coordonnées (x', y')?

  - si le point O est à droite de $\boldsymbol{\gamma}$: $\begin{cases} x = x' + l \\ y = y' \end{cases}$

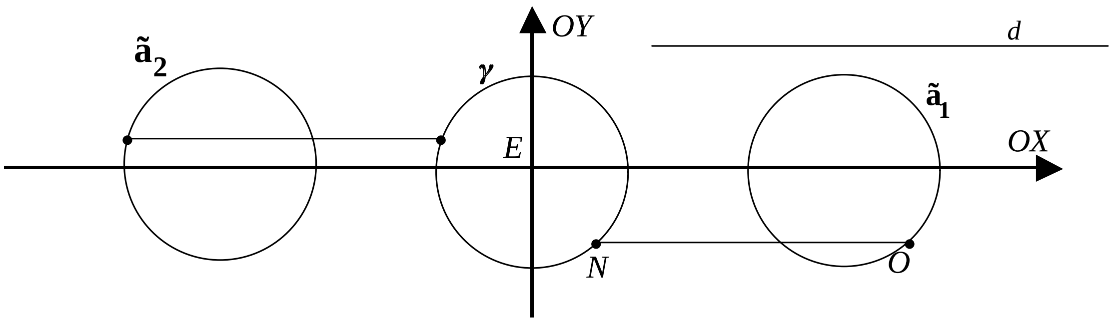
  - si le point O est à gauche de $\boldsymbol{\gamma}$: $\begin{cases} x = x' - l \\ y = y' \end{cases}$

- Equation du lieu

  En replaçant les coordonnées (x', y') dans ☆, on trouve l'équation caractérisant l'ensemble des points du lieu :

$$(x - l)^2 + (y)^2 = R^2 \quad \text{ou bien} \quad (x + l)^2 + (y)^2 = R^2.$$

Nous trouvons donc deux équations de cercles de même rayon que le cercle donné, l'un centré en $(l, 0)$ et l'autre en $(-l, 0)$, suivant que le point O se trouve à gauche ou à droite du cercle donné.

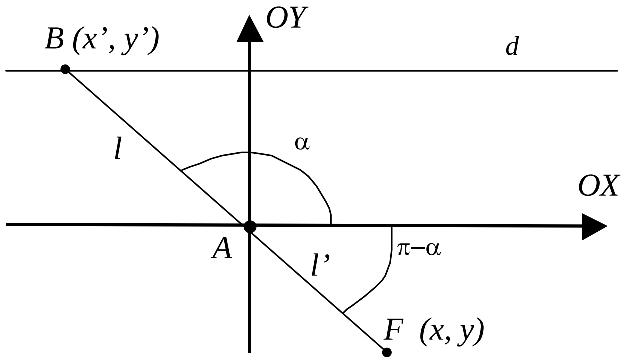


Proposition I.1
Si d'un point donné on mène en ligne droite deux lignes dans un rapport donné, et que de l'extrémité de l'une se trouve sur un lieu plan donné de position (c'est-à-dire une droite ou une circonférence donnée de position), l'extrémité de l'autre sera sur une droite ou une circonférence donnée de position.

Equation du lieu dans le cas n°1

- Choix du repère

  Le repère est centré en *A* et un des axes est choisi parallèle à la droite *d*.



- Ce qui varie dans le problème

  Le point *B* varie : il doit parcourir la droite *d*.

- Condition sur les coordonnées *(x', y')*

  ☆ $y' = p$ (où *p* est la distance du point *A* à la droite *d*).

- Comment déterminer les coordonnées *(x, y)* à partir des coordonnées *(x', y')*?
  - Exprimons les coordonnées *(x', y')* en fonction de l'angle α :

$$\begin{cases} x' = l \,.\, \cos\alpha \\ y' = l \,.\, \sin\alpha \end{cases}$$

  - Exprimons les coordonnées *(x, y)* en fonction de l'angle α :

$$\begin{cases} x = l'.\cos(\pi - \alpha) \\ y = -l'.\sin(\pi - \alpha) \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} x = -l'.\cos\alpha \\ y = -l'.\sin\alpha \end{cases}$$

En éliminant $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$, on obtient la liaison entre *(x, y)* et *(x', y')* :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{l'}{l}.x' \\ y = -\dfrac{l'}{l}.y' \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{r}\,.\,x' \\ y = -\dfrac{1}{r}\,.\,y' \end{cases} \quad \text{où } r \text{ est le rapport donné.}$$

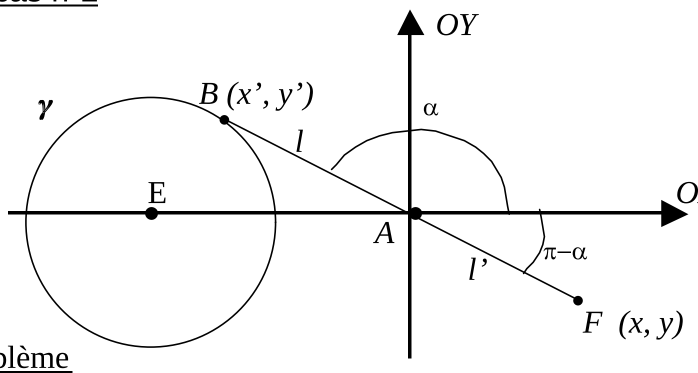
Ce lien nous dit en fait que $(x, y) = \dfrac{-1}{r}\,.\,(x', y')$: les coordonnées changent de signe (cela se voit très bien sur le dessin!) et, pour passer de *(x', y')* à *(x ,y)*, il suffit de diviser par le rapport *r* donné.

- Equation du lieu

  En remplaçant, dans ☆, les coordonnées *(x', y')* en fonction des coordonnées *(x, y)*, on obtient la condition caractérisant l'ensemble des points du lieu :

$$y = -\frac{p}{r}$$

Equation du lieu dans le cas n°2



- Choix du repère

  Le repère est toujours centré en *A*.

- Ce qui varie dans le problème

  Le point *B* varie : il doit parcourir le cercle $\boldsymbol{\gamma}$.

- Condition sur les coordonnées *(x', y')*

  ☆ $\boldsymbol{\gamma} \equiv (x' + p)^2 + (y')^2 = R^2$ où p est la distance du point *A* au centre du cercle donné.

- Comment déterminer les coordonnées *(x, y)* à partir des coordonnées *(x', y')*?

  Nous connaissons déjà cette relation (il n'y a pas de raison qu'elle ait changé par rapport au cas précédent!) :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{r} \cdot x' \\ y = -\dfrac{1}{r} \cdot y' \end{cases}$$

- Equation du lieu

  En remplaçant dans ☆, les coordonnées *(x', y')* en fonction des coordonnées *(x, y)*, on obtient la condition caractérisant l'ensemble des points du lieu :

$$(-r.x + p)^2 + r^2 (y)^2 = R^2$$

$$\left(x - \frac{p}{r}\right)^2 + (y)^2 = \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

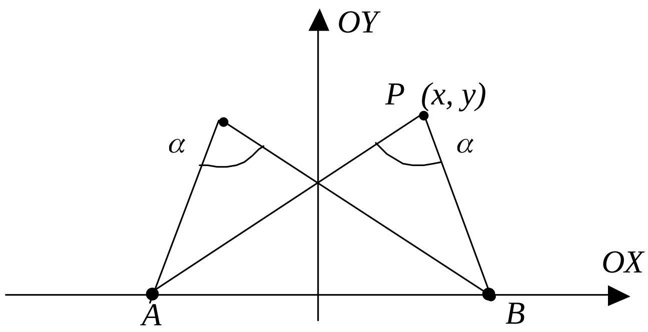
  C'est bien ce qui a été construit : un cercle de centre *p/r* et de rayon *R/r*.

Proposition III

Si, de deux points donnés, on mène deux droites qui se coupent suivant un angle donné, leur point commun sera sur une circonférence concave donnée de position.

- <u>Choix du repère</u>

  Remarquons tout d'abord que le lieu sera clairement symétrique par rapport à la médiatrice du segment *AB*. Choisissons donc comme axe *OX* la droite comprenant le segment *AB* et comme axe *OY*, la médiatrice de *AB*.

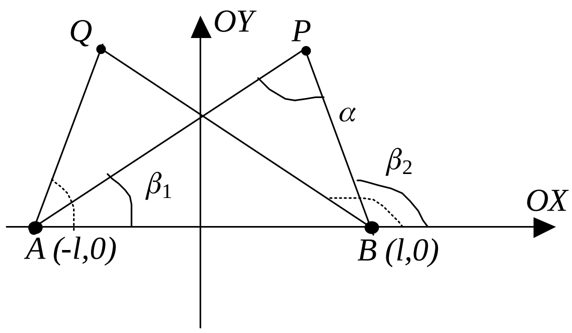


  Fixons aussi les coordonnées de *A* et *B* :
  $A = (-l, 0)$ et $B = (l, 0)$ où $2l$ est la longueur de *AB*.

- <u>Ce qui varie dans le problème</u>

  Soulignons ici la différence avec les autres propositions vues précédemment. Dans ce cas, il n'y a plus de coordonnées (x', y') parcourant une droite ou un cercle. Il n'y a donc plus de lien à faire entre des coordonnées (x', y') et les coordonnées (x, y) des points du lieu.

  Quel est l'élément que l'on va faire varier et qui va nous permettre de relier [*AB*] à *P* ?



  Pour répondre, regardons la différence entre deux points distincts *P* et *Q* du lieu : nous verrons ainsi ce qui varie dans la figure.

  Ce qui fera la différence entre *P* et *Q*, ce sont les pentes des segments *AP* et *AQ*.
  Nous allons noter β_1 la pente de *AP* et β_2 celle de *BP*.

- <u>Condition sur les angles β_1 et β_2.</u>

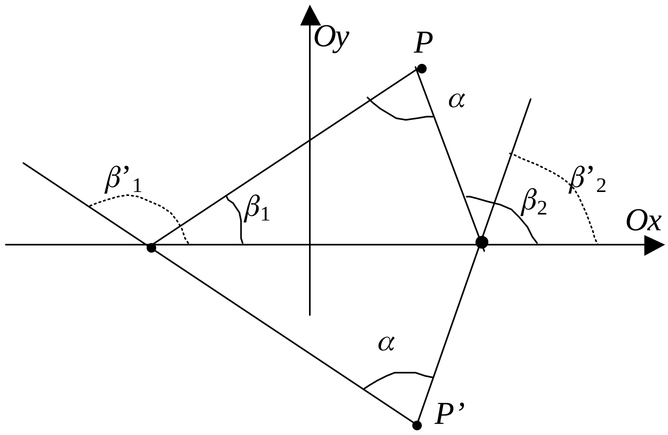
  Il suffit de dire que *ABP* forme un triangle dont un angle est α.

  Donc $\alpha + \beta_1 + (\pi - \beta_2) = \pi$.

  💣 Cette condition n'est valable que pour *P* situé au-dessus de l'axe *Ox* !

  Ecrivons la condition pour un point *P'* situé <u>sous</u> l'axe *Ox* :

  $\alpha + (\pi - \beta_1) + \beta_2 = \pi$.



- <u>Comment déterminer les angles β_1 et β_2 à partir des coordonnées *(x, y)* ?</u>

  Pente de la droite *AP* : $tg\ \beta_1 = \dfrac{y}{x+l}$

  Pente de la droite *BP* : $tg\ \beta_2 = \dfrac{y}{x-l}$

  Conditions d'existence de ces pentes : $x \neq -l, l.$

- <u>Equation du lieu</u>

  Il suffit donc de partir des conditions sur les angles β_1 et β_2 et d'essayer de les exprimer en fonction de *(x, y)* à l'aide des conditions ci-dessus.

  <u>Pour *P* situé au-dessus de l'axe *OX* :</u>

  Partons de $\alpha + \beta_1 + (\pi - \beta_2) = \pi$.

  $tg\ \alpha = tg\ (\beta_2 - \beta_1)$ c'est-à-dire : $tg\ á = \dfrac{tg\ â_2 - tg\ â_1}{1 + tg\, â_2\, tg\ â_1}$

  Ce qui peut s'écrire, en fonction de *(x, y)* comme :

$$tg\ á = \dfrac{\dfrac{y}{x-l} - \dfrac{y}{x+l}}{1 + \dfrac{(y)^2}{(x)^2 - l^2}}$$

$$tg\ á = \dfrac{y\,(x+l) - y\,(x-l)}{(x)^2 - l^2 + (y)^2} = \dfrac{2l\ y}{(x)^2 + (y)^2 - l^2}\ .$$

  Donc $(x)^2 + (y)^2 - l^2 = (\ 2\ l\ cotg\ á\ ).\ y$.

  Ecrivons cette équation comme l'équation d'un cercle :

$$(x)^2 + (y - l\ cotg\ á)^2 = \left(\dfrac{l}{sin\ á} \right)^2 .$$

<u>Pour *P* situé en-dessous de l'axe *OX* :</u>

Par le même raisonnement, on arrive à l'équation d'un autre cercle :

$$(x)^2 + (y + l \, cotg \, \acute{a})^2 = \left(\frac{l}{sin \, \acute{a}} \right)^2$$

Donc, tant que *P* reste au-dessus de l'axe *OX*, il parcourt le premier cercle trouvé. Dès qu'il passe sous l'axe *OX*, il parcourt le second cercle.

8. Bibliographie

Paul TANNERY, *Fermat, Œuvres complètes* , Editions Gautier- Villard.

Paul VER EECKE, *Pappus d'Alexandrie, la collection mathématique*, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard ; 1982 (introduction ; p. 495- 501 ; p. 658-669)