De la "ligne"

au "vecteur"

Table des matières :

1. Introduction

Enrichir sa culture

Par l'intermédiaire des mathématiciens arabes d'abord, de la Renaissance en Europe ensuite, nous savons[1] que l'algèbre est née pour résoudre des problèmes relatifs à des quantités inconnues. Nous avons pu admirer la richesse du formalisme mis en place et l'efficacité des règles de calcul simples établies pour résoudre des problèmes.

Au XVII[e] siècle, conscient de la simplification considérable apportée par un formalisme adapté, un certain GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ s'est demandé s'il n'était pas possible de réaliser un travail semblable pour exprimer les relations entre les objets de la géométrie.

Comment exprimer simplement, par exemple, qu'un point est le milieu d'un segment, qu'un point appartient à un cercle ou qu'un autre est le centre de gravité d'un triangle ?

Nous allons voir comment un nouveau concept mathématique, que l'on baptisera plus tard « vecteur », a pris naissance dans de telles circonstances et comment ce concept s'est trouvé impliqué dans de nombreuses situations...

Présentons les premiers acteurs de cette aventure...

CHRISTIAAN HUYGENS était un astronome et physicien hollandais, né en 1629 et décédé en 1695.
Il travailla dans de nombreux domaines : en optique (où il découvrit la nature ondulatoire de la lumière), en physique (où il définit la notion de force centrifuge et de moment d'inertie)...
Il énonça les lois du *pendule* (utilisées pour construire des horloges) et inventa le *ressort à spirale*, permettant la construction des montres.
Il fut également membre de l'Académie des sciences à Paris.

C'est à Paris, au début de l'automne 1672, qu'il rencontra GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ. Ils entamèrent à cette époque une correspondance régulière.

LEIBNIZ, né à Leipzig en 1646 et mort en 1716, était un philosophe, savant, juriste et diplomate allemand, mais aussi un grand mathématicien. Il fut guidé, dans ses études de mathématiques et de physique, par HUYGENS . Ce dernier lui prodigua des conseils de lecture.

Il fonda l'Académie des sciences de Berlin en 1700 et inventa une machine à calculer plus élaborée que celle de PASCAL.

[1] Voir module « La genèse des équations ».

Mais surtout, en 1686, il participa à l'élaboration du calcul différentiel et intégral. A ce sujet, soulignons que NEWTON et LEIBNIZ revendiquent tous deux la paternité du calcul différentiel. NEWTON introduisit des notations plus pratiques, encore utilisées de nos jours. Le terme « fonction » vient de lui. LEIBNIZ proposa aussi d'écrire ab au lieu de $a \times b$ ainsi que la notation $a : b$ pour désigner le quotient de a par b. Ce qui allégea considérablement l'écriture !

En 1679, LEIBNIZ écrit à HUYGENS :

> « *Je ne suis pas encore satisfait de l'algèbre, car cela ne donne pas les plus courtes méthodes ou les plus belles constructions en géométrie. C'est pourquoi je crois que, aussi loin que la géométrie soit concernée, nous avons cependant besoin d'une autre analyse qui est distinctement géométrique ou linéaire et qui exprimerait des situations [situs] directement tout comme l'algèbre exprime des grandeurs directement. Et je crois que j'ai trouvé la façon dont nous pouvons représenter des figures et même des machines et des mouvements par des caractères, comme l'algèbre représente des nombres ou des grandeurs.* ».

LEIBNIZ va donc essayer de **représenter des situations** et même **des mouvements** par des symboles mathématiques, tout comme les notations algébriques représentent des nombres et des grandeurs.

Dans l'essai contenu dans la même lettre :

> « [...] *L'algèbre est caractéristique pour les nombres ou les grandeurs indéterminés, mais n'exprime pas des situations, des angles et des mouvements.*
> *Il est donc souvent difficile d'analyser les propriétés d'une figure par calculs, et plus encore de trouver des démonstrations géométriques et des constructions commodes, même lorsque le calcul algébrique est complet.* »

Remarquons au passage que LEIBNIZ voyait de nombreuses applications à sa nouvelle méthode puisqu'il explique :

> « *Je crois que par cette méthode on pourra traiter de mécanique presque comme la géométrie, et on pourra même traiter la qualité des matériaux, puisque cela dépend ordinairement de certaines figures dans les endroits fragiles.* ».

La mécanique étudie le mouvement des objets (mouvement d'une balle, d'un pendule, d'une fusée...). C'est une science complexe où il faut tenir compte de la position des objets, de leur vitesse, de leur trajectoire ... et ce, à chaque instant ! La mise en équations de ces phénomènes est donc très ardue...
LEIBNIZ envisage aussi d'appliquer ses méthodes à l'étude de la résistance des matériaux utilisés dans les constructions, pour tester les endroits fragiles d'un pont, d'une arche, d'un plafond...

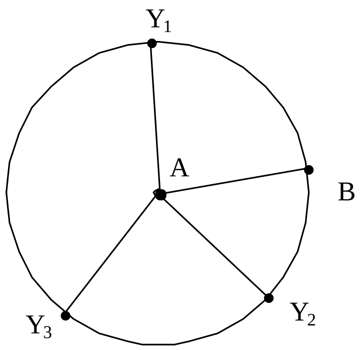
2. Des exemples

1. Soit un segment [AB]. Quel est l'ensemble des points Y tels que le segment [AY] peut être superposé au segment [AB] ?

Remarquons que le terme « superposé » implique que les segments [AY] et [AB] doivent avoir la même longueur.

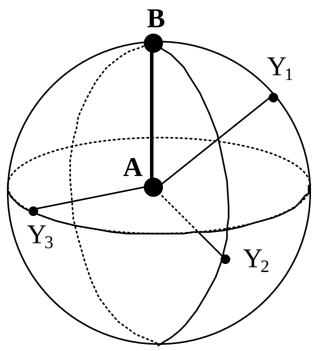
<u>Solution dans le plan[2] :</u>

L'ensemble des solutions est le cercle de centre A et de rayon [AB].



<u>Solution dans l'espace :</u>

L'ensemble des solutions est la sphère de centre A et de rayon [AB].

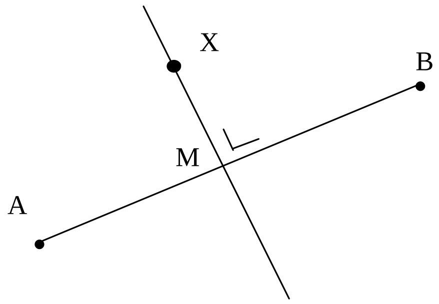


Voir dans l'espace

2. Etant donné deux points A et B, quel est l'ensemble des points X tels que les segments [AX] et [BX] aient la même longueur ?

<u>Solution dans le plan :</u>

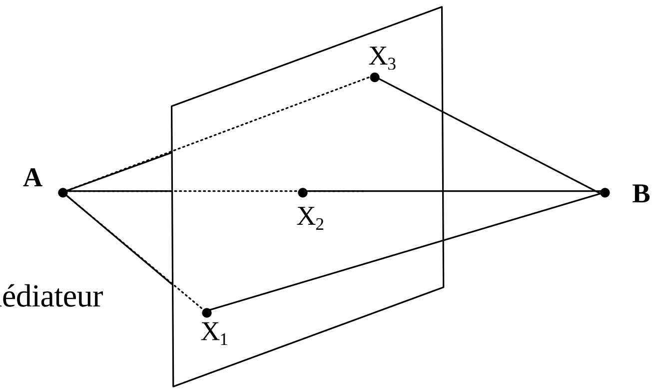
L'ensemble cherché est la médiatrice du segment [AB].



[2] LEIBNIZ ne travaillait pas dans le plan mais uniquement dans l'espace. Nous avons ajouté les solutions dans le plan pour faciliter le raisonnement.

Voir dans l'espace

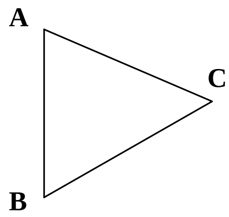
Solution dans l’espace :



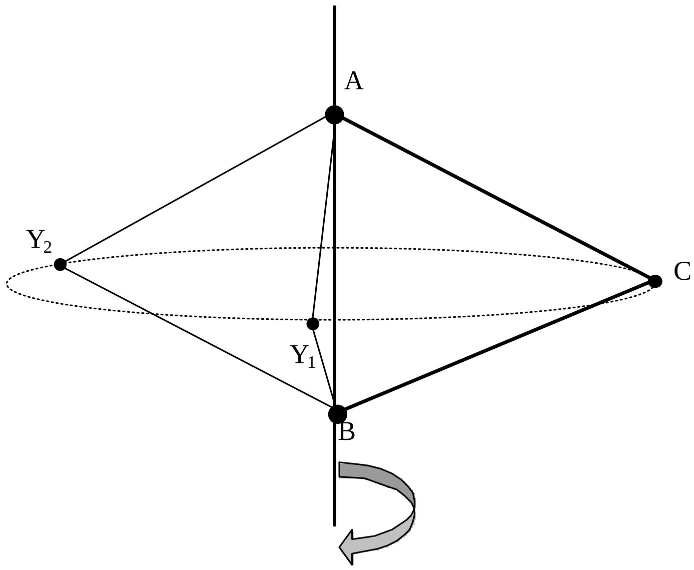
L'ensemble cherché est le plan médiateur du segment [AB].

3. Etant donné un triangle ABC, quel est l’ensemble des points Y tels que le triangle ABY puisse être superposé au triangle ABC ?

Le triangle ABY doit être semblable au triangle ABC. Or, le côté [AB] est fixé, donc seul Y peut varier.

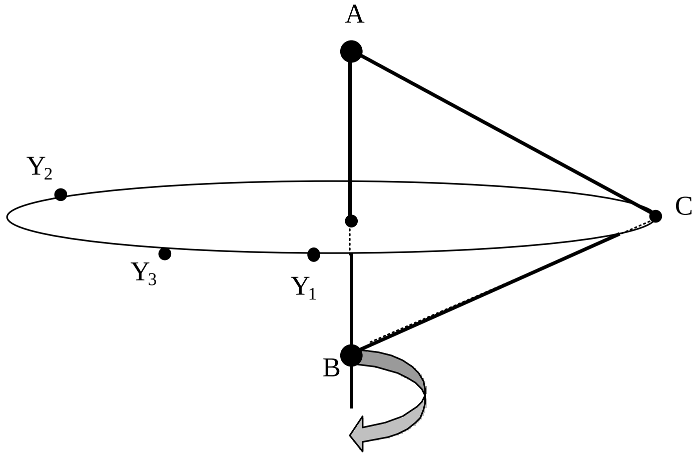


Voir dans l'espace



Il suffit de faire tourner le triangle ABC autour de l’axe AB, qui est fixe : les différents triangles ABY obtenus par cette rotation sont semblables à ABC. Par conséquent, les points Y ainsi obtenus sont les points répondant au problème : ils forment un cercle perpendiculaire à l'axe AB.

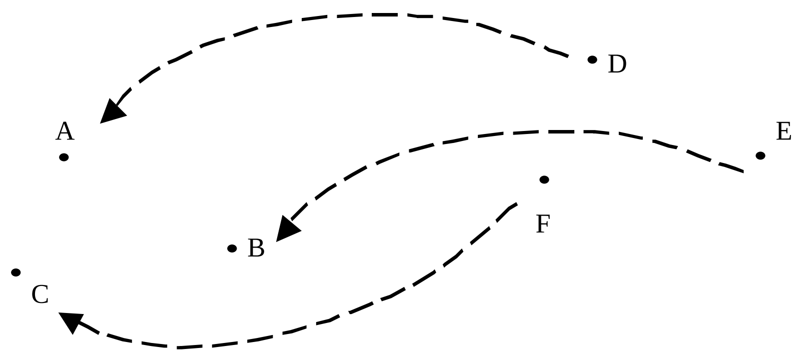
L'ensemble cherché est le cercle dont le centre est le pied de la hauteur du triangle ABC issue du sommet C et dont le rayon est cette hauteur.



L’idée commune à ces trois exemples est la recherche de figures superposables à une figure donnée.

LEIBNIZ a instauré un nouveau symbole pour exprimer l’idée de superposition : **♉** .

ABC ♉ DEF signifie que l’ensemble des trois points donnés A, B, C est superposable à l’ensemble des trois points D, E, F.



Pour nos trois exemples : ① AB ♉ AY
② AX ♉ BX
③ ABC ♉ ABY

3. Un peu de vocabulaire

Ce n’est qu’à partir du XVIIIe siècle que s’est posé le problème de distinguer les notions de direction, droite et segment.
Jusqu’alors, le terme « ligne » était utilisé en toutes circonstances pour désigner l’une ou l’autre de ces notions.
Précisons le vocabulaire utilisé actuellement et auquel nous ferons référence dans la suite du texte.

La ligne (XIIe siècle, du latin *linea*, « fil de lin »)

Une ligne est l’idéalisation d’un fil (cf. étymologie), c’est-à-dire d’un espace qui ne permettrait qu’une sorte de mesure (pour les parties de la ligne) : la longueur. Une ligne n’a ni largeur, ni épaisseur. La ligne peut être droite, brisée, courbe.

La droite (de l’adjectif droite, du latin *directus*)

Notre intuition nous incite à dire qu'une droite est une ligne non brisée, non courbée. C'est la définition que nous adopterons.

Le segment de droite (1613, du latin *segmentum*, de *secare*, « couper »)

Un segment de droite est une portion de droite limitée par deux points.
Soit une droite *d* et A et B deux de ses points. Le segment [AB] est l’ensemble des points de *d* compris entre A et B (dans ce cas, les points A et B appartiennent aussi au segment).

<u>La direction</u> (XIV^e siècle, du latin *directio*, de *dirigere*, « conduire »)

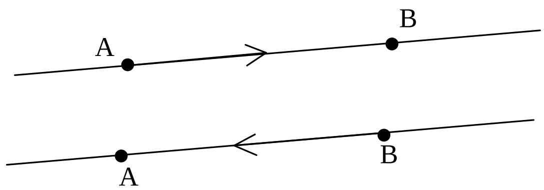
La caractéristique commune à des droites parallèles est de posséder la même direction.

<u>Le sens</u> (XI^e siècle, du latin *sensus*, « fait de sentir, sensation... »)

Une direction étant fixée, deux sens de parcours d'une droite sont possibles :

de A vers B :

de B vers A :



4. Caspar Wessel : précurseur méconnu

Caspar Wessel, né en 1745 et mort en 1818, était norvégien. Il écrivit en 1797 un article, en danois, intitulé « *Sur les nombres complexes* ». L'Europe ne prit connaissance du travail de Wessel qu'une centaine d'années plus tard, lorsqu'il fut traduit en français !

Il prolongea l'idée de Leibniz : donner une expression analytique du concept de direction. Mais nous allons voir que Wessel posa les bases d'une technique moderne.

La question posée par Wessel est la suivante[3] :

Analyser un énoncé

> *Comment exprimer des lignes droites pour que, dans une équation comprenant une ligne inconnue et d'autres connues, aussi bien la longueur que la direction de la ligne inconnue puissent être déterminées ?*

Nous la traduirions aujourd'hui par :

> *Comment écrire une équation permettant d'exprimer une relation entre segments en tenant compte de la longueur et de la direction de chacun d'eux ?*

[3] Les textes originaux étaient donc rédigés en danois. Nous les avons trouvés écrits en anglais et nous les avons traduits, pour plus de facilités.

Le sous-titre de l'article de WESSEL en dit long :

> *Une méthode pour former des lignes, à partir de lignes données, par des opérations algébriques, et déterminer leurs* ***directions*** *et leurs* ***signes****.*

Par « signe », il faut entendre le sens de parcours du segment. Pour un segment [*AB*], on peut choisir de définir le signe « + » pour le parcours de *A* vers *B* et le signe « - » pour le parcours de *B* vers *A* ou vice-versa. Donner un signe à un segment, c'est l'orienter. WESSEL a donc introduit un nouveau concept, celui de « **segment orienté** ».

Du point de vue des notations, on écrira *AB* pour le segment orienté qui va de *A* vers *B* et *BA* pour celui allant de *B* vers *A*. L'introduction de la notion de signe implique donc que :

$$\boxed{AB = -\ BA}$$

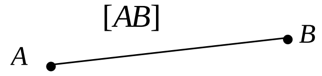
(*AB* et *BA* sont de signes opposés, le sens de parcours est opposé).

WESSEL poursuit :

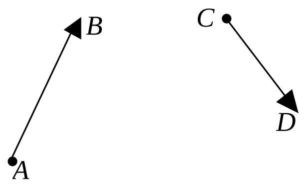
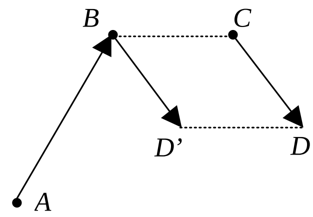
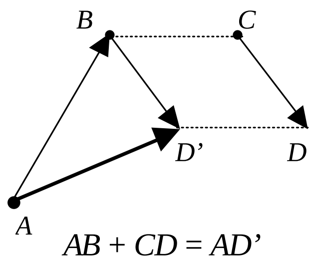
> *« Deux lignes droites sont additionnées si nous les unissons de manière à ce que la deuxième ligne commence là où la première se termine, la ligne droite passant par le premier et le dernier point des lignes unies est la somme de ces lignes droites. ».*

Analyser un énoncé

Fixer des notations

Notation	Objet représenté
[*AB*] 	Le segment non-orienté délimité par les points *A* et *B*.
AB 	Le segment orienté allant de *A* vers *B*.
| *AB* |	La longueur du segment *AB* = la longueur du segment orienté *AB*.

Analyser un document

Texte original	Traduction moderne	Figures
Deux lignes droites sont additionnées...	Deux segments orientés *AB* et *CD* sont additionnés...	
... si nous les unissons de manière à ce que la deuxième ligne commence là où la première se termine, ...	... si nous translatons le deuxième segment *CD* pour faire coïncider son origine *C* avec l'extrémité *B* du premier, ...	
...la ligne droite passant par le premier et le dernier point des lignes unies est la somme de ces lignes droites.	...le segment dont l'origine est l'origine *A* du premier segment et dont l'extrémité est l'extrémité *D'* du second translaté est la somme des deux segments donnés.	 $AB + CD = AD'$

<u>WESSEL a ainsi défini une loi d'addition des segments orientés.</u>

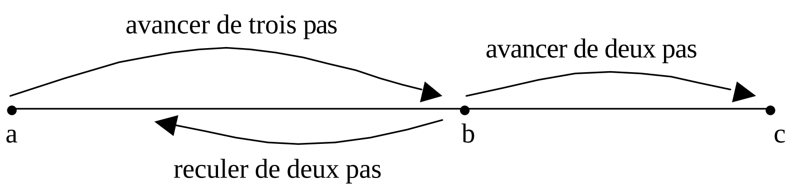
WESSEL généralise la loi d'addition à la somme d'un nombre quelconque de segments orientés.

Cette loi d'addition est toujours d'actualité mais est connue sous le nom de « Loi de CHASLES », malgré qu'elle ait été énoncée en premier par WESSEL ! Comme nous l'avons déjà dit plus haut, le travail de WESSEL fut connu en Europe seulement vers 1897. CHASLES, mathématicien français, et MÖBIUS, astronome allemand, ont découvert de leur côté cette loi, sans savoir qu'elle avait déjà été énoncée auparavant. C'est le nom de CHASLES qui lui est resté attaché.

WESSEL donne un exemple juste après la règle d'addition :

> *Par exemple, si un point avance de trois pieds et recule de deux pieds, la somme de ces deux chemins n'est pas les premiers trois pieds et les deux derniers pieds combinés ; la somme est de un pied en avant. Donc ce chemin, décrit par le même point, a le même effet que les deux autres.*

Si on avance de trois pas et qu'on recule ensuite de deux pas, le chemin total parcouru est de un pas. On n'a donc pas additionné les deux distances mais à trois pas, on a soustrait deux pas : *moins deux pas* va donc représenter quelques chose !



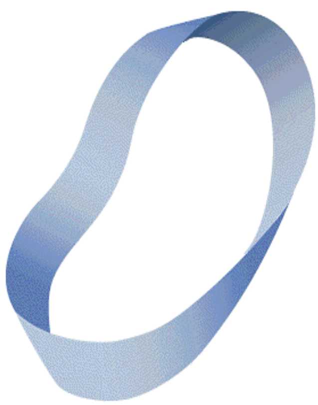
Enrichir sa culture

AUGUST FERDINAND MÖBIUS est né en 1790 à Schulpforta (maintenant en Allemagne) et décédé à Leipzig en 1868.

Il étudia l'astronomie d'abord à Leipzig, ensuite à Göttingen avec un des plus grand mathématicien de tous les temps, CARL FRIEDRICH GAUSS.

MÖBIUS est très connu pour son ruban, très facile à construire.

MÖBIUS caricaturé par ANDRE FRANQUIN

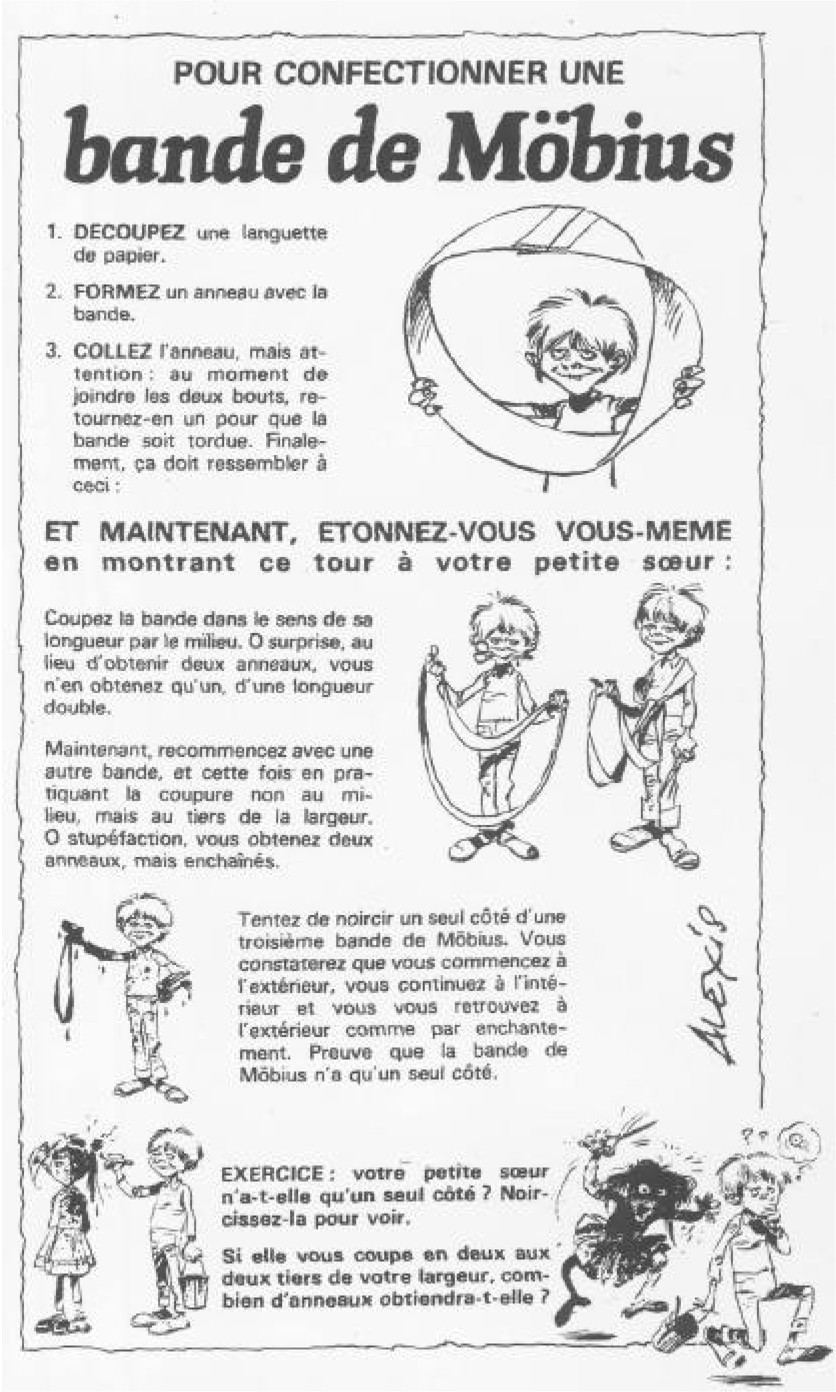


Qu'a-t-il de particulier, ce ruban ?

Plaçons-nous sur « une des deux faces » du ruban...
Nous allons voir tout de suite pourquoi nous mettons cette expression entre guillemets : c'est là l'intérêt du ruban.

Parcourons-le comme si c'était un sentier, sans en franchir le bord. Après un tour, que constatons-nous ? Nous avons « changé de face » sans franchir le bord !

Mathématiquement, le ruban de MÖBIUS est **une surface à deux dimensions** (tout comme un plan) mais **à une seule face**.



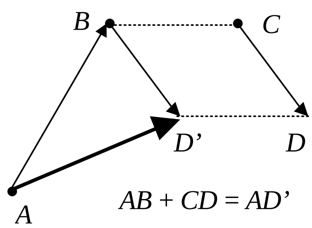
Un gag du dessinateur ALEXIS paru dans le *Trombone Illustré*.

En résumé…

Synthétiser

✎ Se donner un segment orienté, c'est se donner :

1. une origine
2. une direction
3. un sens
4. une longueur.



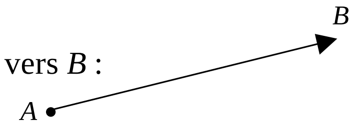
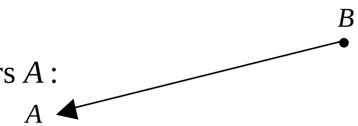
$AB + CD = AD'$

✎ Soient deux points A et B donnés.
Le segment orienté allant de A vers B est noté AB et celui allant de B vers A, BA.
On a la relation suivante : $AB = -\ BA$.

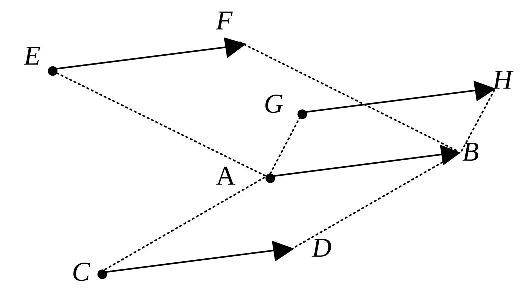
✎ La loi de Chasles nous permet d'additionner des segments orientés.

5. Comparer deux segments orientés : l’équipollence

GIUSTO BELLAVITIS va, lui, introduire la notion d’**équipollence**. Cela nous permettra de comparer deux segments orientés entre-eux.
Voici un extrait d’un de ses articles datant de 1835 : nous allons y rencontrer les principales définitions modernes de la théorie des vecteurs !

Texte de BELLAVITIS.	Traduction moderne.	Interprétation graphique.
1. Une ligne droite est notée par deux lettres et doit être regardée comme allant de la première lettre à la deuxième. Ainsi AB et BA représentent deux quantités égales de signes opposés.	Un segment orienté de A vers B est noté AB. AB et BA représentent deux segments orientés de signes opposés.	De A vers B :  De B vers A : 

Analyser un document

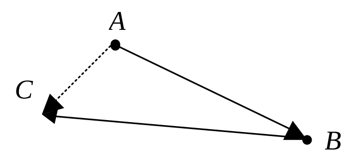
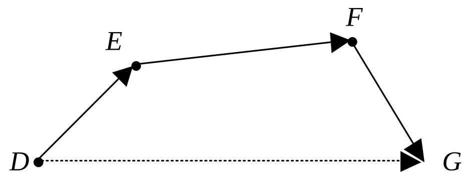
2. Deux lignes droites sont dites ***équipollentes*** *si elles sont* ♦ ***égales,*** ♦ ***parallèles*** *et* ♦ ***dirigées dans le même sens***.	Deux segments orientés sont dits équipollents s'ils ont : ♦ la même longueur, ♦ la même direction, ♦ le même sens.	Les segments orientés *AB*, *CD*, *EF* et *GH* sont équipollents. 

Remarques :

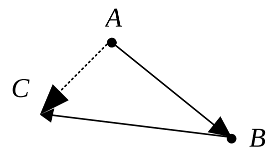
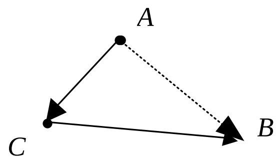
1. Les segments orientés *AB*, *CD*, *EF* et *GH* peuvent se représenter par les couples (*A*,*B*) ; (*C*,*D*) ; (*E*,*F*) et (*G*,*H*).
   Par extension, on dira aussi que les couples (*A*,*B*) ; (*C*,*D*) ; (*E*,*F*) et (*G*,*H*) sont équipollents.

2. **Il existe une infinité de segments orientés équipollents à un segment orienté donné !**

3. Deux côtés opposés d'un parallélogramme, lorsqu'ils reçoivent la même orientation, sont des segments orientés équipollents.

3. Si deux ou plusieurs lignes droites sont rattachées de telle manière que la seconde extrémité de chaque ligne coïncide avec la première extrémité de la suivante, alors la ligne qui forme avec celles-ci un polygone (régulier ou irrégulier) et qui est tracée de la première extrémité de la dernière ligne, est appelée leur somme équipollente. Ceci est représenté par les signes + intercalés entre les lignes à combiner, et avec le signe $\bumpeq$ *qui indique l'équipollence. On a donc* $AB + BC \bumpeq AC$ $AB + BC + CD \bumpeq AD$	Si nous disposons plusieurs segments orientés de façon que l'extrémité de l'un soit l'origine du suivant, alors le segment orienté obtenu en joignant l'origine du premier à l'extrémité du dernier est appelé somme de tous les segments orientés considérés.	 $AB + BC \bumpeq AC$  $DE + EF + FG \bumpeq DG$

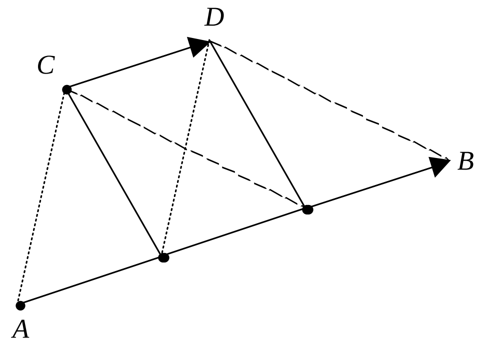
Nous reconnaissons la loi de CHASLES vue plus haut.

4. Dans les équipollences, tout comme dans les équations, une ligne peut être changée de membre, du moment que le signe est changé.	Dans une relation entre segments orientés, lorsqu'un terme change de membre, il change de signe.	 $AB + BC$ ♎ AC  AB ♎ $AC - BC$

La loi de CHASLES nous permet d'affirmer : $AB + BC$ ♎ AC.

et : AB ♎ $AC + CB$.

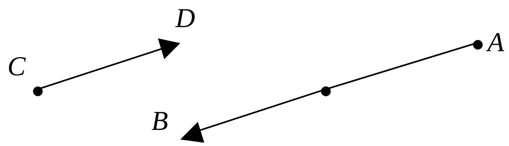
En comparant les deux équipollences, nous voyons que BC a changé de membre et est devenu CB. C'est bien la règle ci-dessus : changer de membre implique changer de signe.

5. L'équipollence $AB \bumpeq n \cdot CD$, où n est un nombre positif, indique que AB est à la fois parallèle à CD et a la même direction, et que le rapport entre leurs longueurs peut s'exprimer par $AB \bumpeq n \cdot CD$	La relation $AB \bumpeq n\, CD$ (où *n* est un nombre naturel) signifie que *AB* et *CD* ont même direction et même sens et que la longueur de *AB* vaut *n* fois celle de *CD*.	$AB \bumpeq 3CD$ 

Remarques :

1. Bellavitis n'a défini la relation $AB \bumpeq n \times CD$ que pour *n* nombre naturel. Cependant, si *n* est un nombre entier négatif, nous savons qu'il suffit de changer d'orientation.

$AB \bumpeq -2\ CD$
$AB \bumpeq 2\ DC$



2. Actuellement, nous avons étendu cette relation à un nombre réel *n* quelconque.

Synthétiser

En résumé…

✎ Deux segments orientés sont équipollents s'ils ont :

1. la même direction,
2. le même sens,
3. la même longueur.

Notation : $AB \bumpeq CD$

✎ Il existe une infinité de segments orientés équipollents à un segment orienté donné.

6. Un nouveau concept est né

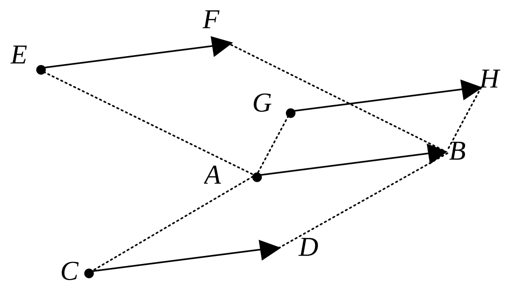
Un concept…

Conceptualiser

On appelle "vecteur"
l'ensemble de **tous** les segments orientés équipollents
à un segment orienté donné.

Coordonner divers registres

AB, *CD*, *EF*, *GH* sont des segments orientés représentant tous le même vecteur. Ils représentent également la translation qui applique le point *A* sur le point *B*. Une translation peut donc être exprimée à l'aide d'un vecteur.



Un mot...

C'est Sir WILLIAM ROWAN HAMILTON qui introduisit en 1844 le mot « **vecteur** » dans le monde des Mathématiques.

Voyons quelles sont les définitions et les concepts attachés au mot vecteur[4].

[4] Dictionnaire des mathématiques élémentaires, Stella BARUK, Edition du Seuil.

<u>Vecteur</u> (1596, du latin *vector*, « qui transporte »).

On a d'abord parlé, en géométrie et en astronomie, de « rayon-vecteur ». Ce terme usuel désignait la distance qui va du centre du soleil au centre de la planète (c'est le rayon du soleil qui « porte » la planète à son extrémité).

Ensuite, c'est devenu un être mathématique avec HAMILTON. Sa définition moderne est la suivante : « Un vecteur est un élément d'un espace vectoriel ». La définition d'un espace vectoriel nécessite, quant à elle, plus que quelques lignes !

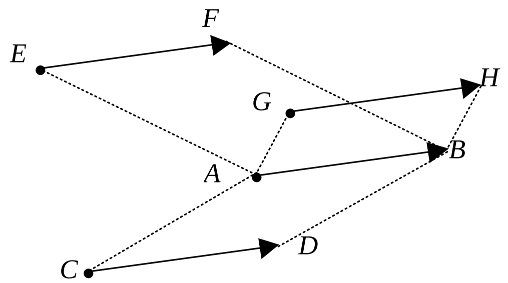
Enfin, soulignons que « vecteur » s'utilise également dans le langage courant, dans son sens initial (« qui transporte ») :

les moustiques sont les vecteurs du paludisme.

<u>Un symbole...</u>

Fixer une notation

Nous noterons $\overrightarrow{AB}$ le vecteur dont le segment orienté *AB* est un représentant.



Remarquons que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut aussi se noter $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, ... puisque les segments orientés *CD*, *EF*, ... sont équipollents au segment orienté *AB*.

Nous écrirons

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \ldots$$

lorsque

$$\{ XY \mid XY \bumpeq AB \} = \{ XY \mid XY \bumpeq CD \} = \{ XY \mid XY \bumpeq EF \} = \ldots$$

Deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils sont représentés par le même ensemble de segments orientés équipollents.

<u>Les opérations…</u>

Toutes les opérations sur les segments orientés vues dans ce chapitre vont s'étendre aux vecteurs.

Ainsi, la loi de CHASLES s'écrira : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ et la multiplication par un nombre réel : $n \cdot \overrightarrow{CD}$.

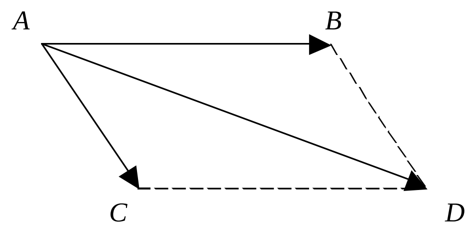
7. La « célèbre » règle du parallélogramme

Problème : représenter la somme de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Construisons un représentant de $\overrightarrow{AC}$ d'origine *B*. Pour cela, traçons le segment *BD* parallèle au segment *AC* et de même longueur. Nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

ABDC est un **parallélogramme** dont la **diagonale** est un représentant de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.



L'idée d'une règle du parallélogramme remonte à la nuit des temps. En effet, à la glorieuse époque des mathématiques grecques, d'illustres savants tels qu'ARISTOTE[5], ARCHIMEDE[6] ou HERON D'ALEXANDRIE[7] ont utilisé cette technique dans la résolution de problèmes relatifs à la composition des forces.

8. Le pont

Le problème du pont est un bel exemple d'application des équipollences.

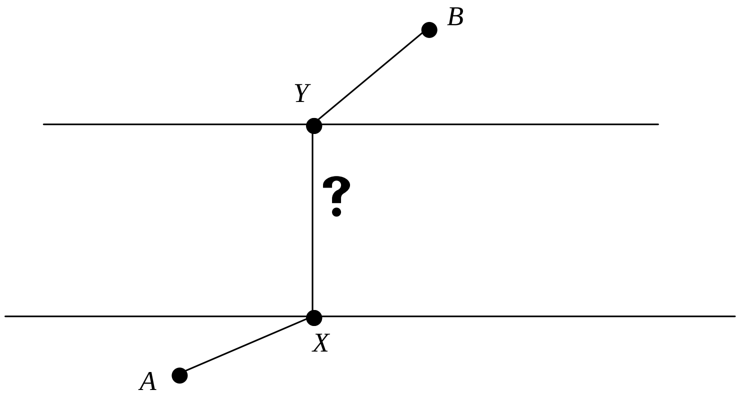
Ce problème est extrait du livre *Sur le calcul des équipollences, méthodes d'analyse géométrique de M. Bellavitis,* par J. HOÜEL[8] .

Voici l'énoncé du problème :

> *Soient A et B deux points séparés par une rivière, que l'on doit traverser sur un pont perpendiculaire aux deux rives.*
>
> Déterminer la position *XY* de ce pont, de manière que la somme arithmétique des longueurs *AX+XY+YB* soit la plus petite possible.

[5] ARISTOTE (384 av. J. C. ; 322 av. J. C.)
[6] ARCHIMÈDE (287 av. J. C. ; 212 av. J. C.)
[7] HERON D'ALEXANDRIE (10 ap. J. C. ; 75 ap. J. C.)
[8] M. J. HOÜEL, *Sur le calcul des équipollences, méthode d'analyse géométrique de M. Bellavitis*. Paris, Gauthier-villars, 1869.

On supposera la largeur de la rivière constante.



Voici la solution de BELLAVITIS (dans laquelle nous avons utilisé la notation moderne de vecteur) :

La relation

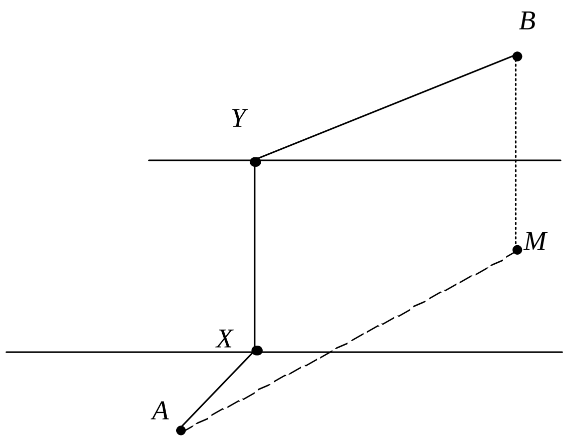
$$\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YB} = \overrightarrow{AB} \qquad \text{(relation de Chasles)}$$

implique

$$\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{YB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{YX}$$

Considérons à présent le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{YX}$.

Nous avons : $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{YB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{YX} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$

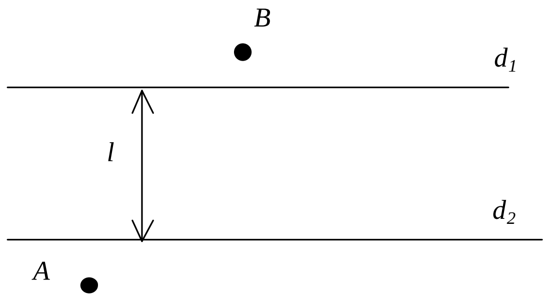


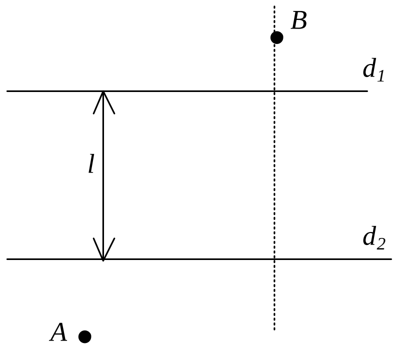
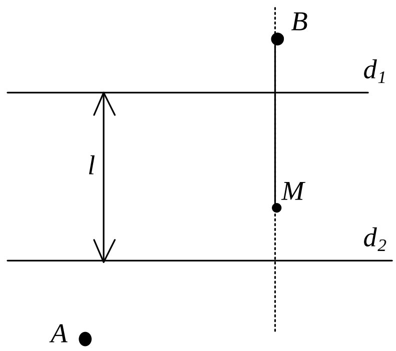
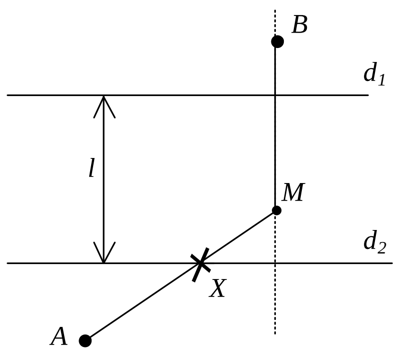
Le trajet $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XM}$ aura une longueur minimale lorsque A, X et M seront alignés.

<u>Remarque</u> : minimiser la somme des longueurs $|AX| + |XY| + |YB|$ est équivalent à minimiser $|AX| + |YB|$ puisque $|XY|$ est constant par hypothèse, quelque soit la position du pont XY.

<u>Construction du pont :</u>

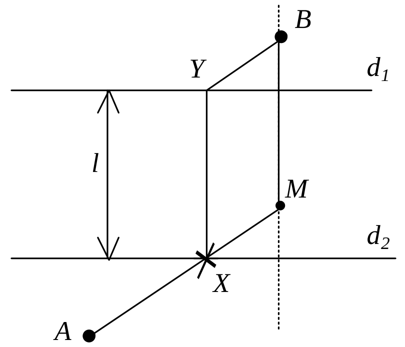
Situation initiale



Construction	Figure
Construire la perpendiculaire à d_1 et d_2 passant par B.	
Reporter sur cette droite la largeur l à partir de B. On obtient le point M.	
Traçons la droite AM. L'intersection des droites AM et d_2 est le point X.	

Construisons la parallèle à d_1 et d_2 passant par X. Elle rencontre d_1 en Y.

Le trajet $AXYB$ minimise la longueur $AX + XY + YB$.



9. Le triangle et son centre de gravité[9]

Premier problème

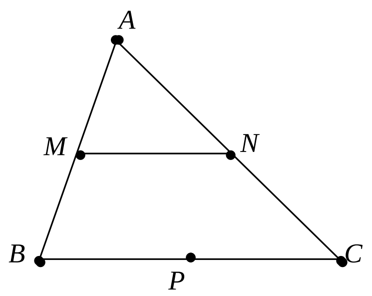
Caractériser le centre de gravité d'un triangle à l'aide d'une relation vectorielle.

Exploiter un acquis

Lemme : dans un triangle quelconque, le segment joignant les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté et sa longueur vaut la moitié de celui-ci.

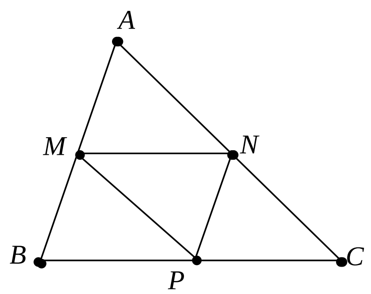
Soient M, N, P les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} && \text{(loi de Chasles)}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} && \text{(car } M \text{ milieu de } [AB] \text{ et } N \text{ milieu de } [AC])\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) &&\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} && \text{(loi de Chasles)}\end{aligned}$$



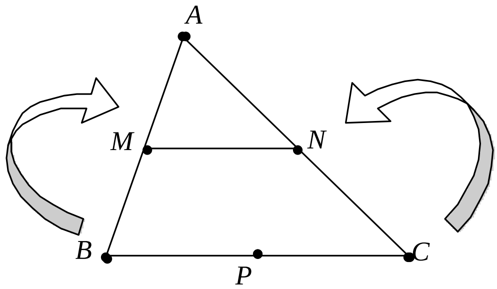
De la même manière,

$$\overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

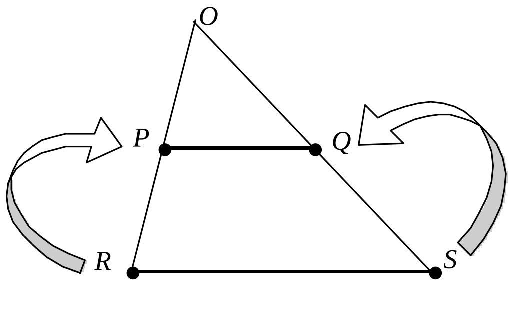


[9] Voir commentaire dans les indications méthodologiques.

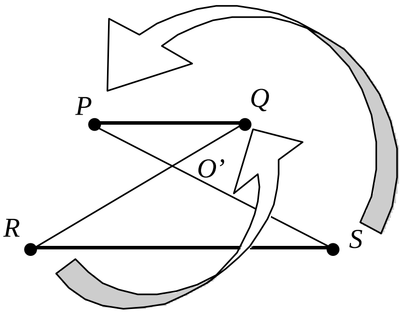
En terme d'homothétie, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ signifie que M est l'image de B et N l'image de C par l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.



Nous savons qu'étant donné deux segments de même direction, il existe toujours deux homothéties qui appliquent l'un sur l'autre : l'une d'entre elles conserve le sens et l'autre l'inverse.



Homothétie h de centre O
(rapport positif)

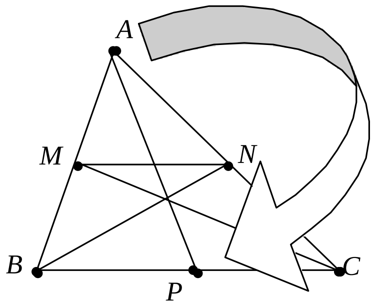


Homothétie h' de centre O'
(rapport négatif)

Considérons maintenant l'homothétie h' qui applique C sur M et B sur N.

Son rapport est $\frac{-1}{2}$ vu que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{CB}$.

Cette homothétie envoie A sur P car $\overrightarrow{NP} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{BA}$.



Récapitulons :

X	$h'(X)$
A	P
B	N
C	M

Donc AP, BN, CM sont trois traces d'une même homothétie. Elles concourent donc au centre de cette homothétie.
Les droites AP, BN et CM sont les trois médianes du triangle ABC et leur point d'intersection est le centre de gravité du triangle, habituellement appelé G.

$h'\left(G, \frac{-1}{2}\right)$	
G	G
A	P
B	N
C	M

De plus, $\overrightarrow{GP} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{GA}$; $\overrightarrow{GN} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{GM} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{GC}$.

Donc le centre de gravité G est situé aux deux tiers de chaque médiane en partant du sommet :

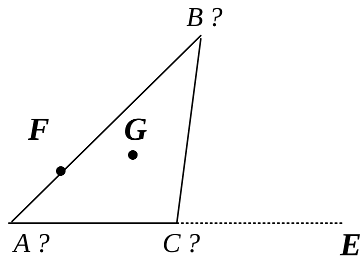
$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}.$$

Second problème

Il est extrait, tout comme le pont et le problème suivant, du livre écrit par J. HOÜEL :

On veut construire un triangle ABC, connaissant le centre de gravité G, le point F situé au quart du côté AB, et l'extrémité E du côté AC, prolongé d'une quantité CE = AC.

Les points donnés sont donc E, F et G (en gras sur la figure) et les points cherchés sont A, B et C.



Examinons ensemble la solution en utilisant les notations modernes des vecteurs. Exprimons d'abord les conditions données par l'énoncé.

- F est situé au quart[10] de AB donc $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.
- E est tel que $CE = AC$ donc C est le milieu de $[AE]$, ce que nous pouvons exprimer par la relation $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$.
- Soit M le milieu du côté $[BC]$.

  On sait que G est le centre de gravité du triangle ABC, donc $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

  De plus, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ (par la loi de CHASLES)

  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (car M est le milieu de $[BC]$)

  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$)

  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ (simplification et mise en évidence)

Donc $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

[10] F est situé au quart du segment $[AB]$ en partant de A.

Nous avons donc les trois relations suivantes :

① $\overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

② $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$

③ $3\,\overrightarrow{AG} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

Dans la condition ③, remplaçons $\overrightarrow{AC}$ par $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ par $4\overrightarrow{AF}$.

Nous obtenons :

$$3\,\overrightarrow{AG} = 4\overrightarrow{AF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

L'intérêt de cette expression est qu'elle fait intervenir trois points connus (*G*, *F* et *E*) et un seul point inconnu : le point *A*.

Elle détermine donc parfaitement le point *A*. Mais elle est inutilisable sous cette forme pour *construire* le point *A* car *A* est présent dans les deux membres. Modifions-la.

La "Loi de CHASLES" nous dit :

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GF} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GE}$$

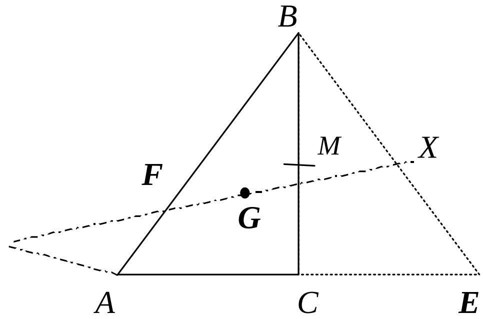
Introduisons ces deux égalités dans la relation précédente, elle devient :

$$3\,\overrightarrow{AG} = 4\overrightarrow{AG} + 4\overrightarrow{GF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GE}$$

Après simplifications :

$$-\frac{3}{2}\overrightarrow{AG} = 4\overrightarrow{GF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GE} \qquad \text{et enfin,} \qquad \overrightarrow{GA} = \frac{8}{3}\overrightarrow{GF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{GE}$$

Cela nous donne la manière de construire le point inconnu *A*, puisque $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{GE}$ sont connus et donnés.



Construction :

BELLAVITIS construit un point P tel que $\overrightarrow{GP} = \frac{8}{3}\overrightarrow{GF}$.

Ensuite, il construit A tel que $\overrightarrow{PA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GE}$.

Ainsi, $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{PA} = \frac{8}{3}\overrightarrow{GF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{GE}$.

La construction du point P tel que $\overrightarrow{GP} = \frac{8}{3}\overrightarrow{GF}$ fait appel à la matière de 3ème et est proposée en annexe.

Troisième problème

> *Cherchons, dans la figure précédente, dans quels rapports se coupent les deux droites BE, FG au point X.*

Nous cherchons donc les nombres réels x et y tels que $\overrightarrow{BX} = x \cdot \overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{FX} = y \cdot \overrightarrow{FG}$.

BELLAVITIS décompose $\overrightarrow{AX}$ de deux manières pour faire apparaître les nombres cherchés x et y :

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BX} = \overrightarrow{AB} + x.\overrightarrow{BE}$$
$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FX} = \overrightarrow{AF} + x.\overrightarrow{FG}$$

Il égale les deux équations, ce qui donne :

$$\overrightarrow{AB} + x.\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AF} + x.\overrightarrow{FG}$$

Il réécrit ensuite $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{FG}$ en fonction de A, B et C :

$$\overrightarrow{AB} + x.(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AF} + x.(\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AF})$$

En remplaçant par les données du problème qui sont, rappelons-le :

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{AC} \ , \quad \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),$$

il obtient :

$$\overrightarrow{AB} + 2x.\overrightarrow{AC} - x.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{y}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \frac{y}{4}\overrightarrow{AB}$$

En regroupant dans chaque membre les termes semblables :

$$(1-x)\overrightarrow{AB}+2x.\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{4}+\frac{y}{3}-\frac{y}{4}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{y}{3}\overrightarrow{AC}$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$\left((1-x)-\frac{1}{4}-\frac{y}{3}+\frac{y}{4}\right)\overrightarrow{AB}=\left(2x+\frac{y}{3}\right)\overrightarrow{AC}$$

Or, les droites *AB* et *AC* ne sont pas parallèles.

Ceci donne lieu à une nouvelle règle énoncée par J. HOÜEL :

> *Règle II. - Toutes les fois qu'au moyen d'un calcul on arrive à une équipollence binôme*
>
> *x.AB = y.CD,*
>
> *si l'on sait, de plus, que les droites AB, CD ne sont pas parallèles, on en conclura que les coefficients x et y sont nuls séparément.*
> *En effet, si x et y n'étaient pas nuls, cette équipollence indiquerait que les droites AB, CD seraient parallèles, et que leur rapport est égal à celui de y à x.*

Par conséquent,

$$\begin{cases} 1-x-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\cdot y=0 \\ 2x-\frac{1}{3}\cdot y=0 \end{cases} \qquad \text{c'est-à-dire : } \begin{cases} 12-12x=3+y \\ 6x=y \end{cases}.$$

Il ne reste plus qu'à résoudre le système linéaire de deux équations à deux inconnues.

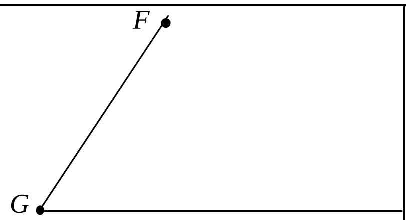
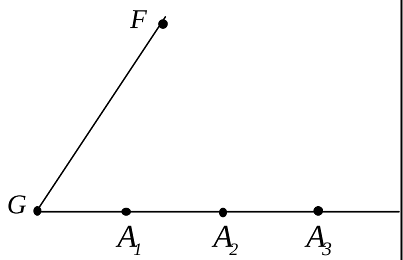
Cela donne : $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=3 \end{cases}.$

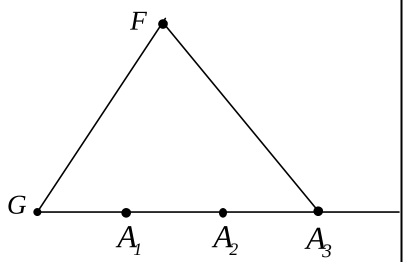
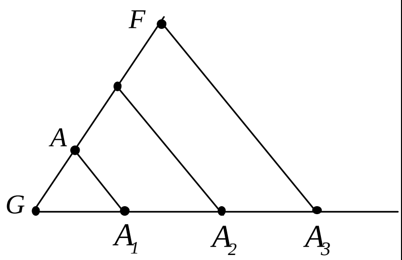
Donc $\overrightarrow{BX}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{FX}=3\overrightarrow{FG}$.

10. Annexe

Etant donnés deux points *G* et *F*, construire le point *P* tel que $\overrightarrow{GP} = \frac{8}{3}\overrightarrow{GF}$.

- Reporter une longueur donnée à l'aide du compas est une chose aisée. Si nous connaissons la longueur de $\frac{1}{3}\overrightarrow{GF}$, il suffit de la reporter *8* fois à partir du point *G*, sur la droite *GF*, du même côté que *F*, pour obtenir le point *P*.
- Pour construire $\frac{1}{3}\overrightarrow{GF}$, nous allons utiliser le théorème de THALES.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Tracer une demi-droite quelconque d'origine G, distincte de [GF.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Sur cette demi-droite, reporter 3 fois une même longueur quelconque à l'aide du compas.

On obtient les points A_1 , A_2 et A_3 .</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Joindre le point F au point A_3 .</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Tracer la parallèle à FA_3 passant par A_1 .

Elle coupe GF en un point A tel que $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GF}$

En effet,
▪ $\frac{|GF|}{|GA|} = \frac{|GA_3|}{|GA_1|} = 3$
▪ $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GF}$ ont même sens et même direction.</td>
</tr>
</table>

Pour obtenir le point *P* cherché, il suffit de reporter *8* fois le segment [*GA*] à partir de *G* sur la droite *GF*.

11. Bibliographie

Marshall CLAGETT, *The Science of Mechanics in the Middle Ages*, The University of Wisconsin Press, 1959.

Michaël J. CROWE, *A History of Vector Analysis*, Dover Publications, Inc. 1994.

M. J. HOÜEL, *Sur le calcul des équipollences, méthode d'analyse géométrique de M. Bellavitis*, Gauthier-Villars, Paris, 1869.

D. E. SMITH, *A source book in Mathematics*, Dover Publications, Inc.1959.