Histoires coniques :

"la parabole"

Table des matières :

1. Un témoignage unique …

Enrichir sa culture

En 1930, dans la revue « *Ancient Egyptian Masonary* », figure un diagramme d'architecte retrouvé à Saqqara en Egypte. Ce diagramme date de l'époque de construction de la première pyramide à Saqqara, soit 2700 ans av. J.-C. .

Ce diagramme donne des chiffres utiles pour la construction de la courbe du toit d'un temple à proximité.

Les chiffres spécifient la hauteur du toit pour des points régulièrement espacés horizontalement.

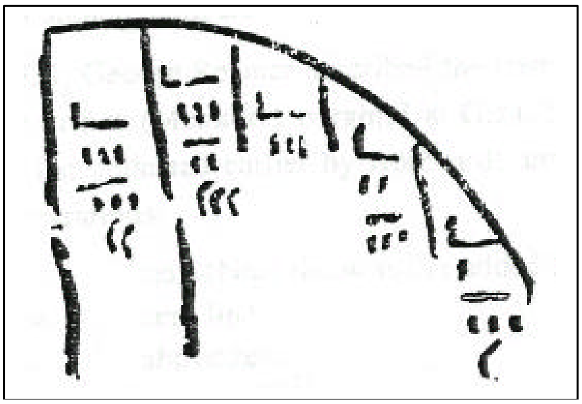


Diagramme d'architecte, Saqqara, 2700 av. J.-C.
Le plus ancien graphique de fonction ?

Il est impossible de déterminer si cette utilisation précoce du concept de couple de coordonnées est un exemple unique en son genre ou bien si elle était répandue mais que le temps n'a pas permis à d'autres témoignages de nous parvenir.

Ce que l'on sait, en revanche, c'est que des réseaux carrés étaient utilisés pour recopier ou agrandir des originaux. On a retrouvé des traces de ces réseaux dans des peintures et des fragments de sculptures. Pour les artisans utilisant les réseaux, compter le nombre de carrés pour situer un point semble être une démarche logique.

(Extrait du Bulletin de l'Indian Society for History of Mathematics, Vol.19, Nos. 1-4, 1997, 1-10)

2. MÉNECHME et la duplication du cube

Le problème de Délos :

Lorsque, vers 430 av. J.-C., les Athéniens durent supporter une épidémie de peste, ils consultèrent l'oracle du dieu Apollon à Délos qui leur révéla que pour détourner le fléau, il serait nécessaire de doubler le volume de leur autel, construit en forme de cube.

Traduire un énoncé

Comme un cube d'arête a a pour volume a^3, il s'agit donc de construire un cube de volume $2a^3$, c'est-à-dire d'arête $\sqrt[3]{2a^3} = \sqrt[3]{2}.a$. Vu l'irrationalité du facteur de proportionnalité, ce problème ne possède pas de solution du moins dans le monde des nombres rationnels où évoluaient les Grecs.

On évoque ici l'un des trois problèmes célèbres qui ont occupé les mathématiciens grecs de l'Antiquité, à savoir :
- la quadrature du cercle.
- la trisection de l'angle.
- la duplication du cube.

> <u>*Un avis de PROCLUS*</u> *:*
>
> *AMYCLAS D'HÉRACLÉE, l'un des associés de PLATON, et MÉNECHME, un élève d'EUDOXE qui étudia avec PLATON, et son frère DINOSTRATE ont contribué à rendre la géométrie plus parfaite encore.*

MÉNECHME est né à Alopéconnesus en Asie Mineure (Turquie actuelle) en 380 av. J.-C. et décédé approximativement en 320 av. J.-C. dans un endroit inconnu. Il fut le tuteur d'ALEXANDRE LE GRAND.

C'est en tentant de résoudre le problème de la duplication du cube qu'il étudia la section d'un cône[1] par un plan et effectua des découvertes intéressantes.

Que fait MÉNECHME pour construire un segment de longueur $\sqrt[3]{2}$?

Nous allons exprimer les constructions de MÉNECHME en langage moderne tout en respectant le principe de son raisonnement.

Soit les deux « courbes » P_1 et P_2 respectivement d'équations $y = x^2$ et $y^2 = 2x$. Le segment reliant l'axe de symétrie de P_1 au point d'intersection non trivial de P_1 et P_2 a pour longueur $\sqrt[3]{2}$.

Utiliser un logiciel

Nous ne connaissons pas de moyen de construction particulier pour P_1 et P_2. Nous allons donc rechercher des points de leur graphique. Utilisons le tableur Excel, par exemple.

x	***y=x²***
0,0000	0,0000
0,2500	0,0625
0,5000	0,2500
0,7500	0,5625
1,0000	1,0000
1,2500	1,5625
1,5000	2,2500
1,7500	3,0625
2,0000	4,0000
2,2500	5,0625
2,5000	6,2500
2,7500	7,5625
3,0000	9,0000
3,2500	10,5625
3,5000	12,2500
3,7500	14,0625
4,0000	16,0000

x	***y=x²***
0,0000	0
-0,2500	0,0625
-0,5000	0,25
-0,7500	0,5625
-1,0000	1
-1,2500	1,5625
-1,5000	2,25
-1,7500	3,0625
-2,0000	4
-2,2500	5,0625
-2,5000	6,25
-2,7500	7,5625
-3,0000	9
-3,2500	10,5625
-3,5000	12,25
-3,7500	14,0625
-4,0000	16

x=y²/2[2]	***y***
0	0,0000
0,03125	0,2500
0,125	0,5000
0,28125	0,7500
0,5	1,0000
0,78125	1,2500
1,125	1,5000
1,53125	1,7500
2	2,0000
2,53125	2,2500
3,125	2,5000
3,78125	2,7500
4,5	3,0000
5,28125	3,2500
6,125	3,5000
7,03125	3,7500
8	4,0000

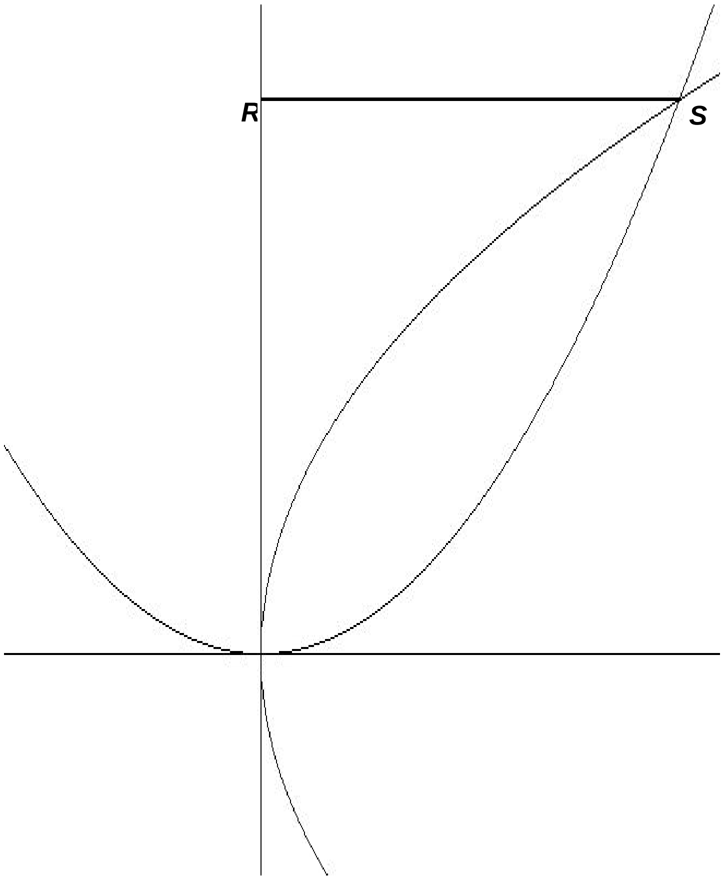
x=y²/2	***y***
0	0,0000
0,03125	-0,2500
0,125	-0,5000
0,28125	-0,7500
0,5	-1,0000
0,78125	-1,2500
1,125	-1,5000
1,53125	-1,7500
2	-2,0000
2,53125	-2,2500
3,125	-2,5000
3,78125	-2,7500
4,5	-3,0000
5,28125	-3,2500
6,125	-3,5000
7,03125	-3,7500
8	-4,0000

[1] Voir l'encadré à la page suivante pour des explications concernant l'évolution de la notion de section conique.

[2] Pour obtenir les points de P_2, nous avons d'abord transformé son équation : $y^2 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2}$.

Voici les graphiques de P_1 et P_2 obtenus à l'aide du logiciel Derive :

Utiliser un logiciel



Résoudre graphiquement

P_1 et P_2 se coupent en deux points dont l'un est l'origine *(0,0)*.

Nous pouvons obtenir les coordonnées précises de l'autre point en résolvant le :

Résoudre un système

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = 2x \end{cases}$$

En remplaçant y par x^2 dans la deuxième équation, nous obtenons successivement :

$$x^4 = 2x \Leftrightarrow x^4 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 2) = 0 \Leftrightarrow x = o \text{ ou } x = \sqrt[3]{2}$$

Les coordonnées du point S sont donc $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ et le segment $[RS]$ a pour longueur $\sqrt[3]{2}$.

Malheureusement, ce segment n'est pas constructible à la règle et au compas. Il a cependant fallu attendre le XIXème siècle[3] pour démontrer cette impossibilité.

---

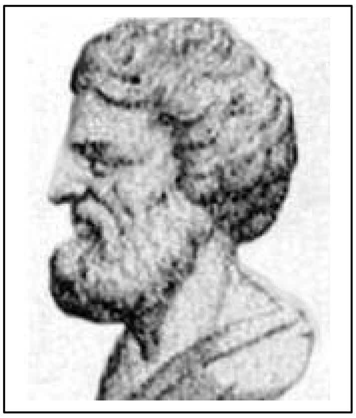
[3] Ceci a été démontré par Pierre WANTZEL (1814-1848) EN 1837.

3. APOLLONIUS DE PERGE

Enrichir sa culture

APOLLONIUS DE PERGE (III^{è} av. J.-C. – II^{è} av. J.-C.) naquit une quarantaine d'années après ARCHIMÈDE et précéda le grand astronome HIPPARQUE. Il serait mort en 170 avant notre ère. C'est l'un des plus grands mathématiciens de la période hellénistique. Il était d'ailleurs appelé le "Grand Géomètre". Ses travaux se situent dans la plus pure tradition géométrique grecque. Il aurait étudié à Alexandrie et à Pergame. Il écrivit un traité de huit livres sur les « Coniques » dont sept nous sont parvenus, pour trois d'entre eux, dans leur traduction arabe.

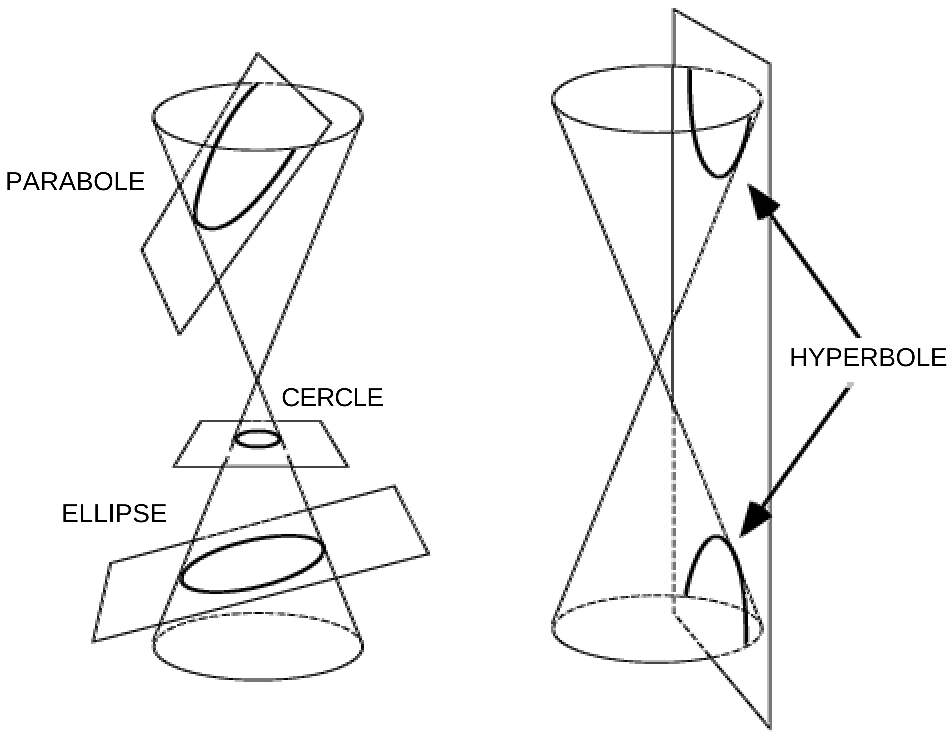
Parabole, ellipse et hyperbole y sont introduits en tant que sections d'un cône circulaire. Les noms sont d'APOLLONIUS et ont été choisis d'après les propriétés de ces courbes.



Parabole : application $y^2 = px$

Ellipse : application avec déficience $y^2 = px - \frac{p}{d}x^2$

Hyperbole : application avec excès $y^2 = px + \frac{p}{d}x^2$



"Mais ces grands hommes sont rares; il s'en trouve peu comme ces ARISTARQUE DE SAMOS, ces PHILOLAÜS et ces ARCHYTAS DE TARENTE, ces APOLLONIUS DE PERGE, ces ERATOSTHENE DE CYRENE, ces ARCHIMEDE et ces SCOPINAS DE SYRACUSE, qui, avec le secours du calcul et de la connaissance des secrets de la nature, ont fait de grandes découvertes dans la mécanique et la gnomique, et en ont laissé de savants traités à la postérité."

VITRUVE, *Traité d'Architecture*

<u>Application simple, application par excès, application par défaut</u>

Les mathématiciens grecs étaient de grands géomètres et toute leur géométrie était basée sur des relations entre lignes (segments), aires et volumes. Ils développèrent une méthode actuellement connue sous le nom d'*application des aires*, introduite dans l'école de PYTHAGORE et utilisée par EUCLIDE.

Cette méthode consiste à construire des figures de forme donnée et d'aire donnée, en utilisant les instruments habituels, règle et compas.

Par exemple, construire un rectangle (ceci précise la forme) sur un segment donné ayant même aire qu'un carré donné (ceci précise l'aire).

APOLLONIUS ne dérogea pas à la règle et utilisa cette technique dans le cadre de ses recherches sur les sections coniques.

Dans le cas de la parabole, il démontra l'égalité des aires d'un carré et d'un rectangle, appelée *application simple*.

Dans le cas de l'ellipse, il démontra que l'aire du carré n'est pas atteinte (*application avec déficience*) et dans celui de l'hyperbole, que l'aire du carré est dépassée (*application avec excès*).

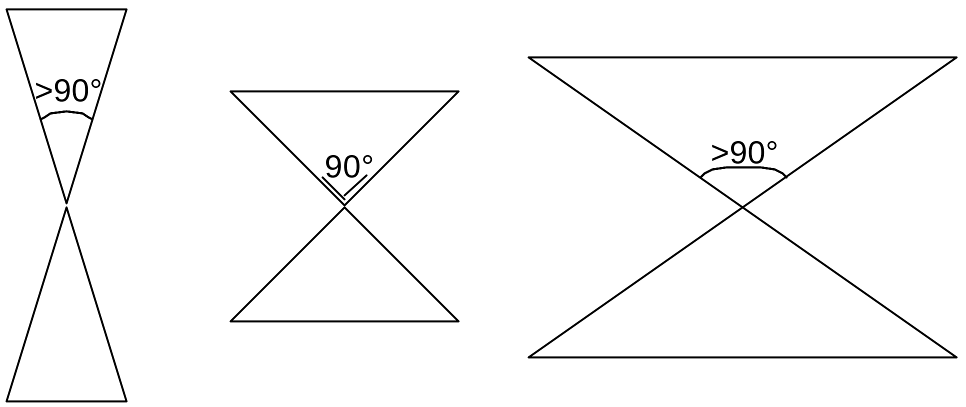
APOLLONIUS ne connaissait pas les systèmes de coordonnées ni les notations algébriques, mais nombreux sont ses résultats directement traduisibles dans notre langage avec coordonnées.

APOLLONII PERGÆI
CONICORVM LIB. V. VI. VII.
PARAPHRASTE
ABALPHATO ASPHAHANENSI
Nunc primùm editi.
ADDITVS IN CALCE
ARCHIMEDIS ASSVMPTORVM LIBER.
EX CODICIBVS ARABICIS MSS.
SERENISSIMI
MAGNI DVCIS ETRVRIÆ
ABRAHAMVS ECCHELLENSIS MARONITA
In Alma Vrbe Linguar. Orient. Professor Latinos reddidit.
IO: ALFONSVS BORELLVS
In Pisana Academia Matheseos Professor curam in Geometricis versioni contulit, & notas vberiores in vniuersum opus adiecit.
AD SERENISSIMVM
COSMVM III.
ETRVRIÆ PRINCIPEM.

FLORENTIÆ.
Ex Typographia Iosephi Cocchini ad insigne Stellæ MDCLXI.
SVPERIORVM PERMISSV.

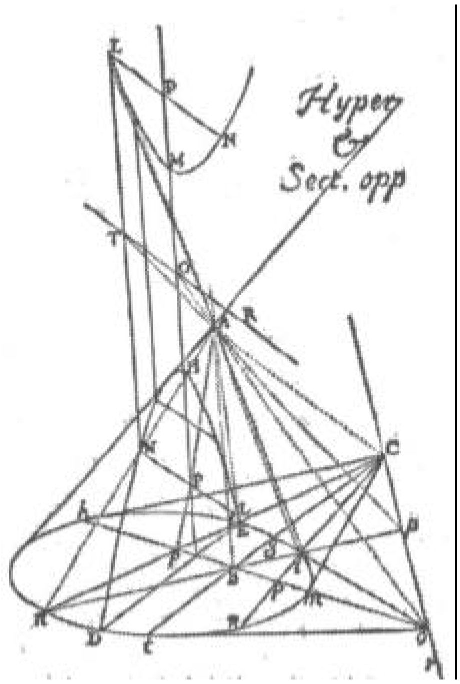
Cônes droits et cônes quelconques

MÉNECHME classifiait les sections d'un cône par un plan selon l'amplitude de l'angle au sommet de ce dernier. En effet, tout plan contenant l'axe d'un cône contient aussi deux génératrices de ce cône qui peuvent former entre elles un angle aigu, droit ou obtus (voir figure ci-dessous).
Par section d'un cône par un plan, MÉNECHME entend toujours section par un plan perpendiculaire à n'importe quelle génératrice du cône. Vu les trois catégories de cônes qu'il envisage (angle au sommet aigu, droit ou obtus), il obtient donc trois cas de section différents. i



Angle aigu	Angle droit	Angle obtus
Ellipse	Parabole	Hyperbole

APOLLONIUS, lui, fait apparaître les trois sections coniques mises en évidence par MÉNECHME dans un cône oblique quelconque. Il démontre que toutes les coniques peuvent être obtenues en modifiant simplement l'angle de section du plan sécant.



<u>Quelles sont les originalités du traité d'APOLLONIUS sur les coniques</u> ?

✓ Tous les prédécesseurs d'APOLLONIUS - PLATON, ARISTÉE, EUCLIDE et ARCHIMÈDE - avaient exclusivement considéré les trois sections coniques, parabole, hyperbole et ellipse, comme obtenues par la section d'un cône respectivement droit, obtusangle et acutangle, par un plan perpendiculaire à l'une des génératrices.

Citons EUTOCIUS dans ses commentaires aux *Coniques* d'APOLLONIUS.

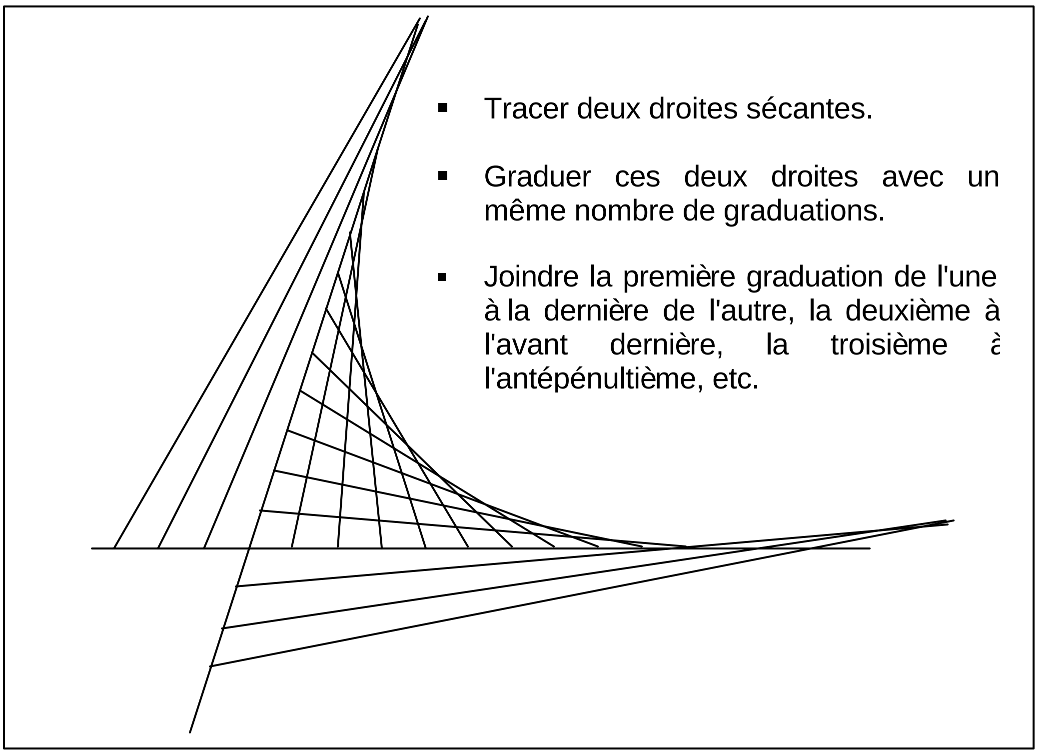
> "APOLLONIUS, qui considère le cône droit ou scalène, obtint les différentes sections au moyen d'une inclinaison différente du plan, …"

✓ Dans les œuvres d'ARCHIMÈDE, parabole, hyperbole et ellipse sont encore désignées par les circonlocutions de section de cône droit rectangle, obtusangle et acutangle. C'est dans les Coniques d'APOLLONIUS que les termes que nous employons encore actuellement font leur apparition (voir parenthèse étymologique).

✓ Pour la première fois parmi les géomètres de l'Antiquité, APOLLONIUS introduit la seconde branche de l'hyperbole et considère les deux branches de l'hyperbole - appelées sections opposées - comme formant une seule et même courbe.

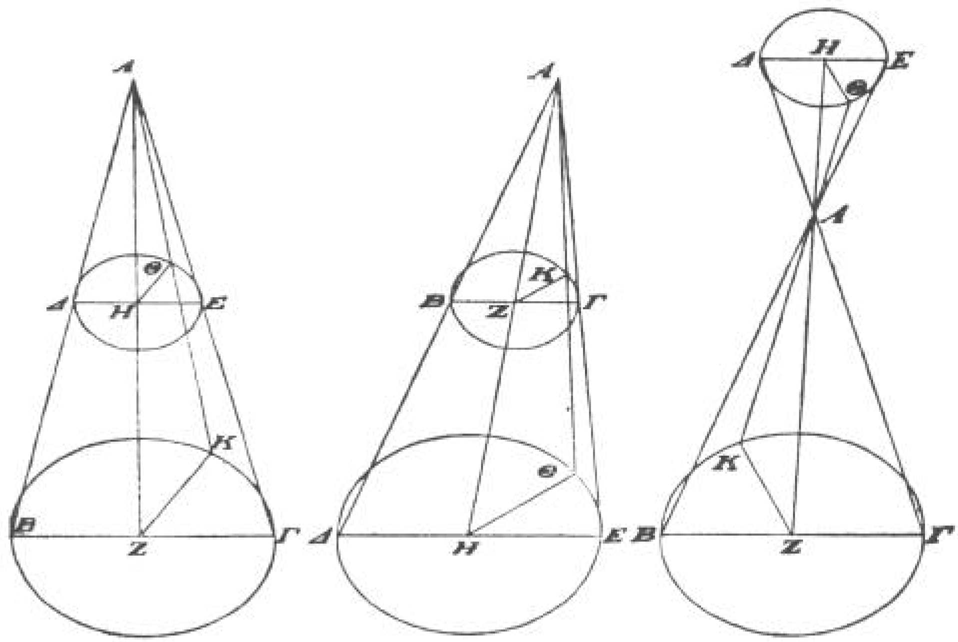
✓ APOLLONIUS parle de points remarquables des coniques qu'il appelle "points issus de l'application". Ces points seront baptisés plus tard "foyers" par les géomètres de la Renaissance en raison des propriétés optiques des courbes associées.

✓ APOLLONIUS est également le premier à découvrir que l'on peut construire une parabole sous la forme d'une enveloppe de tangentes.



APOLLONIUS a examiné tous les cas qui peuvent se présenter lorsqu'on coupe un cône par un plan. La section obtenue dépend de plusieurs paramètres. Le cône peut être droit ou oblique, le plan de section peut être incliné de différentes façons. Certains cas sont simples comme par exemple la section par un plan parallèle aux bases du cône qui donne un cercle.

D'autres cas sont plus compliqués mais démontrent avec éclat le génie et la clairvoyance d'APOLLONIUS. N'oublions pas en effet, qu'à l'époque, il était nécessaire de raisonner de manière abstraite sans le secours des notations algébriques actuelles qui facilitent l'expression de la pensée.



Lorsque le plan de section est parallèle à la base du cône, la section obtenue est un cercle.

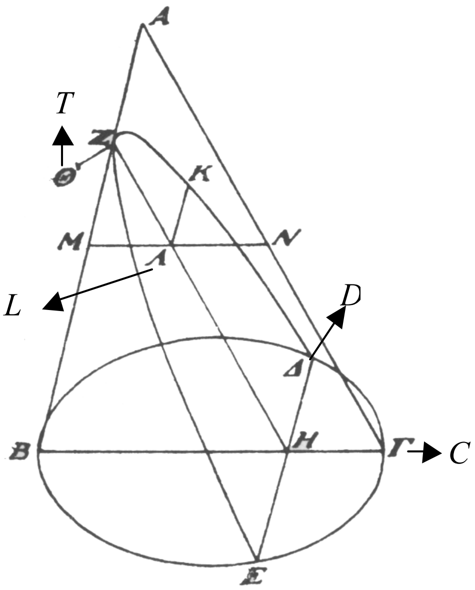
Le texte de la proposition XI du livre 1 des coniques d'APOLLONIUS[3] *a de quoi nous décourager :*

> Si un cône est coupé par un plan passant par l'axe et s'il est coupé par un autre plan coupant la base du cône suivant une droite perpendiculaire à la base du triangle passant par l'axe; si, de plus, le diamètre de la section est parallèle à l'un des côtés du triangle passant par l'axe, la carré de toute droite menée de la section du cône, parallèlement à la section commune du plan sécant et de la base du cône, jusqu'au diamètre de la section, équivaut au rectangle délimité par la droite qu'elle découpe sur le diamètre, du côté du sommet de la section, et par une certaine droite dont le rapport à la droite située entre l'angle du cône et le sommet de la section est le même que celui du carré de la base du triangle passant par l'axe au rectangle délimité par les deux côtés restants du triangle. Nous appellerons une telle section une parabole.

[3] Les coniques d'Apollonius de Perge, œuvres traduites pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke, ingénieur des mines (A. I. Lg.), inspecteur général du travail, Blanchard, Paris, édition de 1959

Analyser un document

Heureusement, APOLLONIUS lui-même explicite son énoncé en s'aidant de l'apport d'une figure :



Pour une question de lisibilité, nous abandonnerons les caractères grecs présents et les remplacerons par des lettres de notre alphabet.

1. Soit un cône dont le sommet est le point A, et dont la base est le cercle BC. Coupons-le par un plan passant par l'axe, lequel détermine comme section le triangle ABC.

2. Coupons-le aussi par un autre plan coupant la base du cône suivant une droite DE, perpendiculaire à la droite BC, lequel détermine la ligne DZE comme section dans la surface du cône, tandis que le diamètre ZH de la section est parallèle à l'un des côtés AC du triangle passant par l'axe.

3. Menons, du point Z, la droite ZT perpendiculaire à la droite ZH, et faisons en sorte qu'une droite ZT soit à la droite ZA comme le carré de la droite BC est au rectangle de côtés BA, AC.

4. Enfin, prenons un point quelconque K sur la section, et menons, par ce point K, la droite KL parallèle à la droite DE.

5. Je dis que le carré de la droite KL équivaut au rectangle délimité sous les droites ZT, ZL.

Malgré tout, l'énoncé reste difficile à comprendre et un certain nombre d'éclaircissements s'imposent :

✓ Les points 1 à 4 décrivent des constructions à effectuer avant de formuler la thèse et le point 5 est la thèse proprement dit.

✓ Le terme "droite" prend la signification de "segment".

✓ Les géomètres grecs de l'Antiquité avaient coutume de désigner un cercle par un de ses diamètres. Ici, APOLLONIUS parle du cercle BC, ce qui signifie le cercle de diamètre BC. Mais il est également question du diamètre de la section. Nous en reparlerons plus loin.

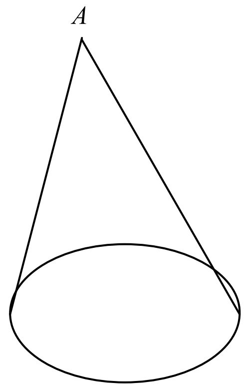
✓ L'emploi de l'alphabet grec complique un peu les notations mais il y en a peu et c'est pourquoi les lettres grecques ont été remplacées par des lettres de notre alphabet.

Nous allons examiner minutieusement l'énoncé et les constructions menant à la thèse proposée par APOLLONIUS. Quelques libertés sont prises par rapport au texte original de manière à exprimer le contenu dans un langage actuel.

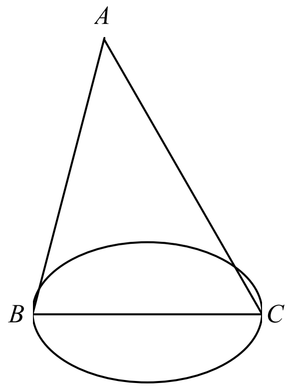
Construction

Construire

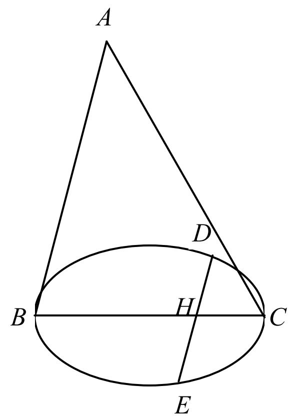
✓ Soit un cône de sommet A.



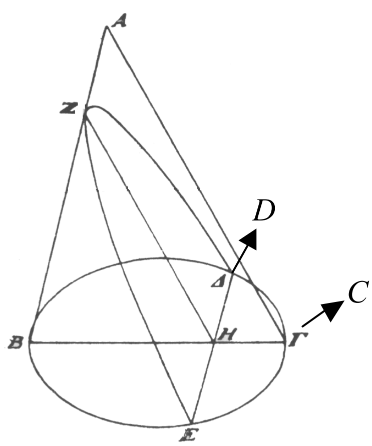
✓ Considérons la section du cône par un plan contenant son axe. Il s'agit d'un triangle ABC où BC est un diamètre du cercle de base du cône.



✓ Soit E, un point quelconque de la circonférence de la base. Par E, on mène la perpendiculaire à BC. Elle coupe la circonférence de la base au point D et le diamètre BC au point H.



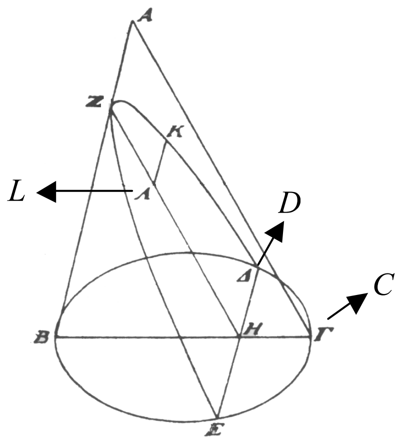
✓ On considère la section du cône par le plan contenant la droite DE et parallèle à la droite AC. APOLLONIUS baptise cette section "parabole" - nous comprendrons pourquoi plus tard - et met au point un procédé de construction.
Le point de percée Z de la droite AB dans le plan de section est un point de la parabole. On l'appelle le sommet.
Les points D et E sont également des points de la parabole. La droite ZH est un axe de symétrie de la parabole.



Tout segment joignant deux points de la section et perpendiculaire à l'axe de symétrie de la parabole s'appelle un

✓ Soit *K*, un point quelconque de la parabole. La parallèle à *DE* passant par *K* rencontre l'axe de symétrie de la parabole au point *C*.

✓ APOLLONIUS expose ensuite son procédé de construction. Il est basé sur la technique d'application des aires.



Voici ce qu'il énonce, transcrit en langage moderne :

> Le carré construit sur *KL* a la même aire qu'**un** rectangle de côtés *ZL* et *ZT*
>
> où *ZT* est un segment **perpendiculaire** à *ZH*
>
> et dont la longueur est donnée par $\boxed{\frac{ZT}{ZA} = \frac{BC^2}{BA.AC}}$.

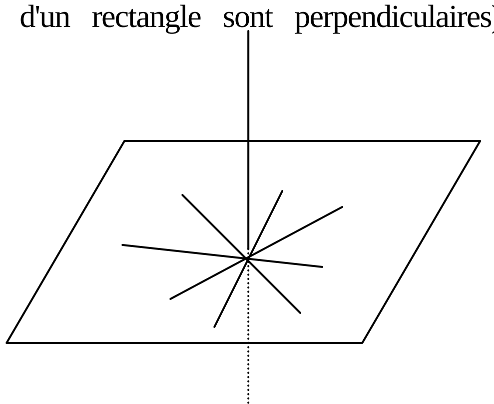
Remarquons que la longueur de *ZT* est complètement indépendante du choix des points *K* et *L* et dépend uniquement de la section conique considérée.

Les éléments mis en évidence dans cet énoncé appellent un certain nombre d'explications :

Analyser un énoncé

➟ Parler d'un rectangle de côtés *ZL* et *ZT* implique que *ZT* et *ZL* soient perpendiculaires (car deux côtés consécutifs d'un rectangle sont perpendiculaires). Donc, *ZT* et *ZH* sont **perpendiculaires**.

Or, dans l'espace, il y a une infinité de droites perpendiculaires à une droite donnée en l'un de ses points.
Ceci explique pourquoi APOLLONIUS parle d'**un** rectangle et emploie l'article indéfini.



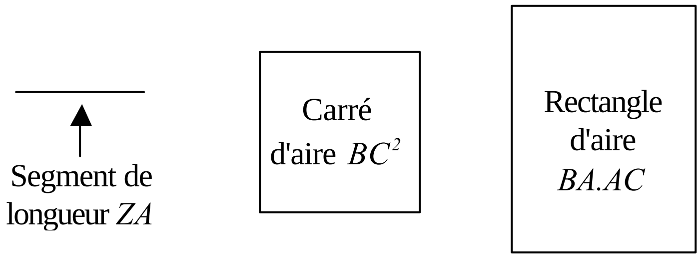
➟ En ce qui concerne la longueur du segment *ZT*, elle est définie par la formule

$$\frac{ZT}{ZA} = \frac{BC^2}{BA.AC}$$

où tous les segments utilisés sont connus.
Cependant, APOLLONIUS ne mesure rien évidemment !

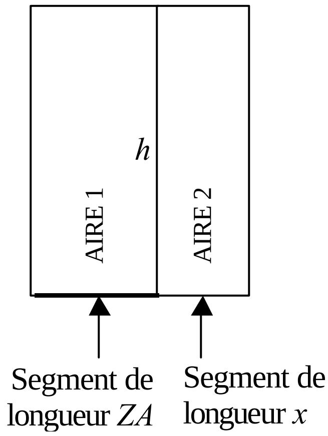
Il ne dispose - rappelons-le - que d'un compas et d'une équerre <u>non graduée</u>.
Pour construire ZT, il utilise la méthode d'application des aires.
En fait, la longueur de ZT est à celle de ZA comme l'aire du carré de côté BC est à celle du rectangle de côtés BA et AC.

<u>Eléments connus</u> :



<u>Elément à construire</u> : un segment de longueur x tel que $\frac{x}{ZA} = \frac{BC^2}{BA.AC}$.

Voici la description de la méthode d'application des aires dans ce cas-ci :



- Sur le segment de longueur ZA, construire un rectangle d'aire $BA.AC$ (Aire I). Appelons h sa hauteur.
- Construire ensuite un rectangle de hauteur h et d'aire BC^2 (Aire II), accolé au précédent.
- L'autre côté de ce rectangle a pour longueur x.

En effet :

$$h = \frac{AireII}{x} = \frac{BC^2}{x}$$

Donc, $\quad h \cdot x = BC^2$

Ceci signifie que le rectangle d'aire BC^2 dont le côté connu vaut h a comme autre côté x.

Nous allons maintenant passer à la démonstration.

Nous proposerons cette fois uniquement une version actuelle, la traduction fidèle du texte d'APOLLONIUS étant trop indigeste. Cependant, le raisonnement de l'auteur est tout à fait respecté.

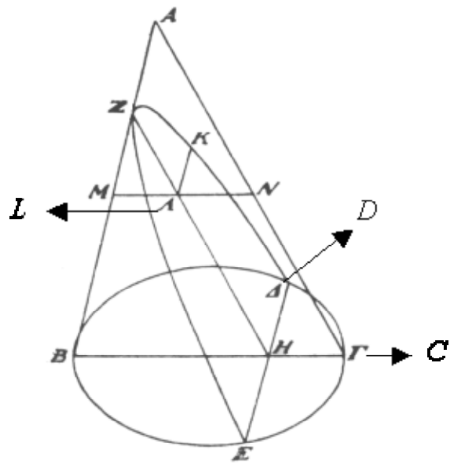
Pour faciliter la lecture, nous avons ajouté des figures intermédiaires matérialisant les constructions dans le plan où elles se développent.

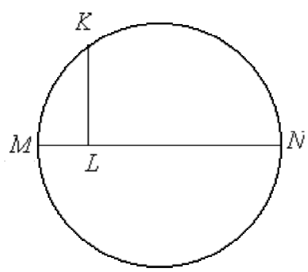
Nous ne reprendrons pas, dans la démonstration, les constructions supplémentaires nécessaires à expliciter la thèse, nous l'avons fait en détails ci-dessus. La preuve qui suit débute donc directement par les éléments nouveaux menant au résultat annoncé.

Démonstration

Démontrer

Construisons dans le plan ABC la droite MN parallèle à BC.
On obtient la figure ci-contre.





Le plan défini par les droites KL et MN est parallèle à la base du cône. Son intersection avec le cône est donc le cercle de diamètre MN.

$$\left.\begin{array}{l} DE\perp BC \\ MN || BC \\ KL\perp DE \end{array}\right\} \textit{donc}, KL\perp MN$$

Le triangle MKN est rectangle en K puisque l'angle $\widehat{K}$ intercepte un diamètre du cercle.

Par conséquent, $ML \cdot LN = KL^2$ (propriété de la hauteur relative à l'hypoténuse dans un triangle rectangle).

Exploiter un acquis

Nous allons maintenant modifier la relation $\frac{ZT}{ZA} = \frac{BC^2}{BA \cdot AC}$

On a successivement :

$$\frac{ZT}{ZA} = \frac{BC^2}{BA \cdot AC} = \frac{BC}{BA} \cdot \frac{BC}{AC}$$

décomposition en deux fractions

$$\frac{ZT}{ZA} = \frac{MN}{MA}\frac{MN}{NA}$$

Thales dans le triangle ABC :

$$\frac{BC}{AC} = \frac{MN}{AN} \text{ et } \frac{BC}{BA} = \frac{MN}{MA}$$

$$\frac{ZT}{ZA} = \frac{LN}{ZA}\frac{ML}{ZL}$$

$$\frac{\mathrm{ZT}}{\mathrm{ZA}} = \frac{LN.ML}{ZL \cdot ZA}$$

$$\frac{ZT}{ZA} = \frac{KL^2}{ZL \cdot ZA}$$

Thales dans le triangle MNA :

$$\frac{MN}{MA} = \frac{LN}{ZA} \; et \; \frac{MN}{NA} = \frac{ML}{ZL}$$

vu la relation $ML \cdot LN = KL^2$

Donc, en multipliant les deux membres par ZA, on a :

$$ZT = \frac{KL^2}{ZL} \text{ ou encore } KL^2 = TZ.ZL$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Remarque :

ZT est appelé le **côté droit**, c'est-à-dire le côté ou la hauteur du rectangle équivalent au carré de KL. Les géomètres de la Renaissance diront **latus rectum**.

Enrichir sa culture

Parenthèse étymologique

La racine « **bol** », venant du grec « **bolê** », signifie « lancement, jet d'un projectile, objet lancé ».
La racine « **para** », venant du grec « **para** », signifie « auprès de ..., au delà-de..., le long de..., à côté de... ».
Le terme « **parabole** » signifie « lancé à côté de ». Le terme « **hyperbole** » signifie « lancé avec excès ». Le terme « **ellipse** » signifie « tombé court ».

En rhétorique, chacun de ces termes peut prendre diverses significations :

Parabole	1) Comparaison, rapprochement, discours allégorique. 2) Rencontre, choc. 3) Action de s'écarter du droit chemin. 4) Conjonction d'astres.
Hyperbole	1) Action de lancer par dessus ou au-delà, franchir. 2) Action de dépasser la mesure, excès, surabondance. 3) Exagération de langage.
Ellipse	1) Qui laisse de côté ou derrière. 2) Négligent. 3) Qui reste en arrière, incomplet, insuffisant.

4. La parabole en tant que lieu géométrique

Il s'agit ici de la présentation classique de la parabole telle qu'enseignée dans la plupart des manuels, le but étant de la comparer avec le résultat d'APOLLONIUS.

Quel est le lieu des points du plan situés à égale distance d'un point donné et d'une droite donnée ne passant pas par ce point.

Construire

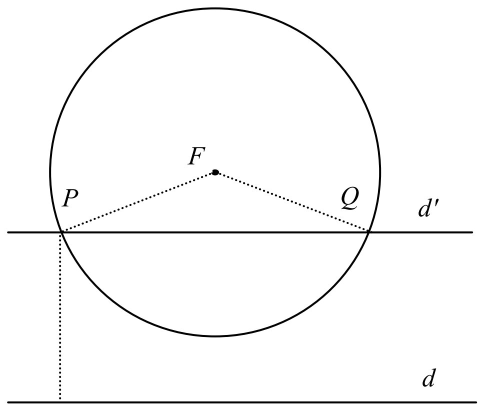
Construction géométrique de ce lieu :

1. Tracer le cercle de centre F et de rayon r supérieur à la moitié de la distance de F à d.

2. Tracer la droite d', parallèle à d et située à la distance r de d.

3. Les points d'intersection P et Q de d' et du cercle conviennent.
En effet, ils sont à la distance r de d puisqu'ils sont sur d' et ils sont à la distance r de F puisqu'ils sont sur la circonférence du cercle.

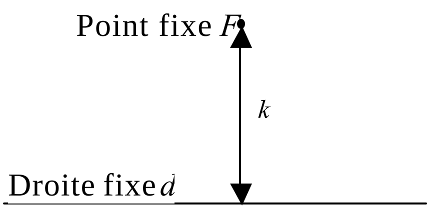
Pour obtenir d'autres points de la parabole, il suffit de recommencer l'opération avec d'autres valeurs de r.

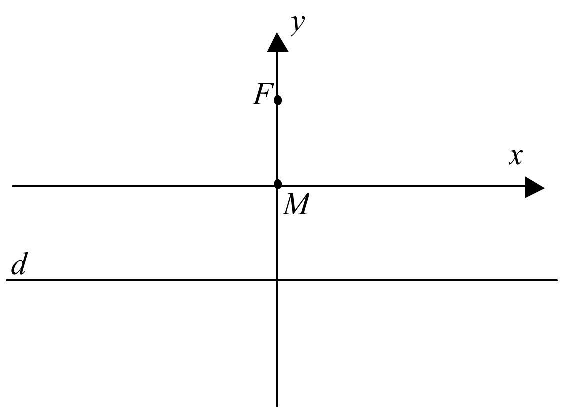


P et Q sont symétriques par rapport à la perpendiculaire à d passant par F. Donc, la parabole sera symétrique par rapport à cette même droite. Lorsque r vaut la moitié de la distance de F à d, la droite d' est tangente au cercle et il n'y a qu'un point d'intersection appelé **sommet**.

Recherche de l'équation d'une parabole dans un repère bien choisi :

Choisir un repère





Soient une droite d et un point F situé à la distance k de d.

Nous recherchons l'ensemble des points équidistants de d et F.

Choix du repère orthonormé : de manière générale, un repère est toujours défini en fonction des symétries des données ou des points du lieu qui apparaissent de manière évidente.

Origine de notre repère :	le point M situé à mi-distance entre F et d.
Axe des x :	la parallèle à d passant par M.
Axe des y :	la perpendiculaire à d passant par M.

Dès lors, nous pouvons écrire les coordonnées de F et l'équation de d :

$$F\left(0,\frac{k}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad d \equiv y = -\frac{k}{2}$$

Changer de registre

Soit $P(x,y)$ un point quelconque du lieu.
Exprimons que P est situé à égale distance de F et d :

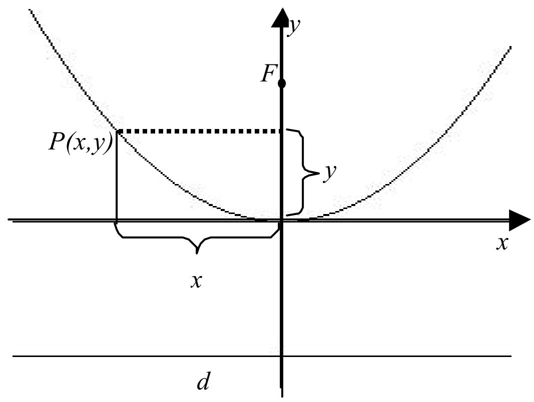
$$dist(P,F) = dist(P,d) \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{k}{2}\right)^2} = \left|y+\frac{k}{2}\right|$$

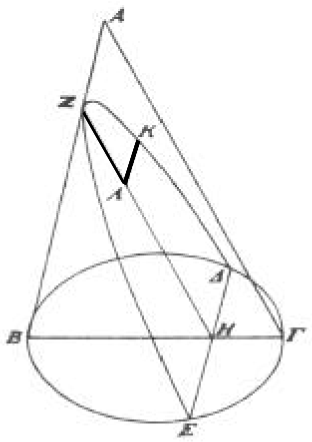
Elevons les deux membres au carré :

$$x^2+\left(y-\frac{k}{2}\right)^2 = \left(y+\frac{k}{2}\right)^2$$

Après développements et réduction des termes semblable $\boxed{x^2 = 2ky}$

Observons les figures suivantes :





$\boxed{x^2 = 2k.y}$ $\qquad$ $\boxed{KL^2 = ZQ.ZL}$

Etablir une analogie

Dans la figure de gauche, si on baptisait la droite ZH "axe des y" et la perpendiculaire au plan AZG passant par Z "axe des x", nous aurions une figure analogue à celle de droite.

Cette analogie est lumineuse : la section conique d'APOLLONIUS et le lieu géométrique que nous avons étudié sont des ***paraboles***.

Retenons que l'équation de la parabole peut être vue comme l'égalité entre l'aire d'un carré et celle d'un rectangle.

Remarques concernant le point et la droite donnés :

Enrichir sa culture

➠ Le point fixe donné est appelé le foyer.

Les géomètres de la Renaissance utilisèrent le terme de "*foyer*" pour baptiser certains points particuliers apparaissant dans l'étude des coniques. On peut rechercher[4] la source de cette dénomination dans les propriétés optiques des coniques.

Cependant, le pythagoricien PHILOLAOS (fin VIè-début Vè), élève direct de PYTHAGORE et maître de PLATON, dans sa vision pyrocentrique du Cosmos, place au centre de l'univers un "foyer" central déversant sa lumière sur le Soleil et sur les planètes.

> "Le pythagoricien PHILOLAOS place au milieu le Feu puisqu'il est le foyer de l'Univers, à la deuxième place se trouve l'Anti -Terre, à la troisième la Terre que nous habitons, située à l'opposé et dont la révolution est inverse de celle de l'Anti-Terre ; c'est pourquoi sur notre Terre, on ne voit pas ceux qui habitent l'Anti-Terre."
>
> *PLUTARQUE, Œuvres morales, Tome XII, Opinions des philosophes Texte établi par G.Lachenaud, Les Belles Lettres, Paris, 1993*

Bien plus tard, KEPLER démontrera que les planètes décrivent des orbites elliptiques dont le Soleil occupe l'un des "foyers"[5].

➠ La droite donnée s'appelle la directrice.

APOLLONIUS[6] parle quant à lui, des *points issus de l'application* en ce qui concerne l'ellipse et l'hyperbole. Il n'utilise certainement pas le terme "foyer". Connaît-il le foyer et la directrice de la parabole ? Nous ne sommes pas en mesure de nous prononcer sur ce fait. Peut-être les connaissait-il et n'en parle-t-il pas.

Ce qui est certain, c'est que PAPPUS, qui écrivait au IIIè ap. J.-C., disposait vraisemblablement encore de traités actuellement perdus. Or, on trouve trace dans ses "*Collections*" des lemmes célèbres qui aboutissent à la description des trois coniques à l'aide du foyer et de la directrice.

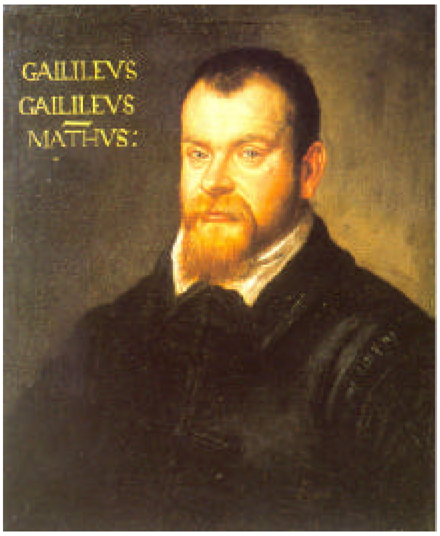
> *Le lieu des points tels que les distances de chacun d'eux à un point fixe et à une droite fixe soient dans un rapport constant est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que le rapport est plus petit, égal, ou plus grand que l'unité.*

[4] C'est ce qu'affirme P. VAN EECKE

[5] En rhétorique, nous étudierons l'ellipse et l'hyperbole et nous verrons que ces coniques possèdent deux foyers.

[6] Les renseignements ici fournis sont issus du livre de P. VAN EECKE.

5. GALILÉE et les trajectoires paraboliques



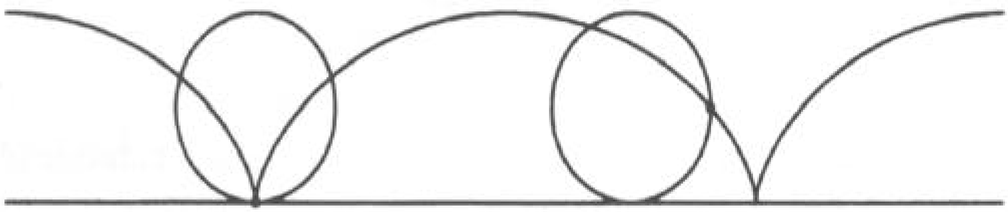
> Le livre de la nature est ouvert devant nous,
> écrit dans la langue des mathématiques.
> Galileo Galilei (1564-1642)

Enrichir sa culture

GALILEO GALILEI est né à Pise en 1564. Destiné par son père à devenir médecin, il se tourne résolument vers les mathématiques et obtient une chaire à Pise en 1589.

Ses travaux de jeunesse traitent probablement de la chute des corps. A-t-il effectué des expériences en lâchant des objets du haut de la célèbre tour de Pise ? Laissons ce genre d'affirmation dans le domaine de la légende. Il a découvert la cycloïde[7], courbe obtenue en suivant la trajectoire d'un point d'une circonférence qui roule sur une droite.

La cycloïde



GALILEE supposait - et il avait raison - que la cycloïde était la forme la plus solide pour l'arche d'un pont.
En 1599, il se lança dans la détermination de l'aire d'une arche de cycloïde. En découpant une arche complète et en comparant le poids obtenu à celui du cercle de départ, il découvrit que l'aire recherchée devait valoir environ trois fois celle du cercle de départ. ROBERVAL démontra en 1634 qu'elle vaut exactement trois fois l'aire du cercle.
Le premier traité sur la cycloïde fut écrit en 1644 par EVANGELISTA TORRICELLI, alors élève de GALILEE.

En 1592, il est nommé professeur de mathématique à l'Université de Padoue par le Sénat de Venise.
En 1609, il est sommairement informé par le français JACQUES BAUDOUÈRE de l'existence d'instruments d'optique intéressants. Il construit et perfectionne ce type d'instruments et obtient un grossissement linéaire de 30, ce qui est remarquable pour l'époque.

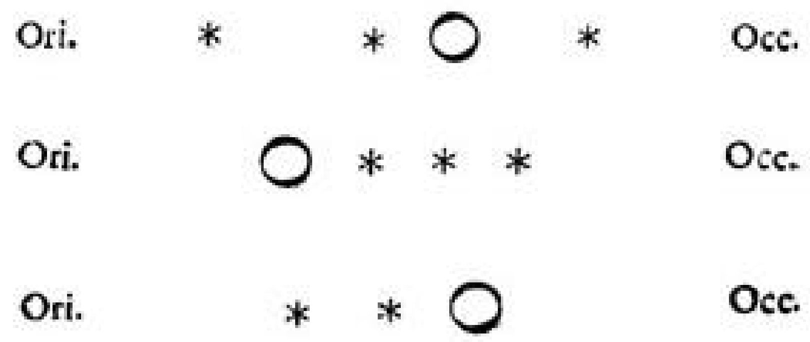
---

[7] Voir encadré pour la notion de cycloïde.

Lunette de GALILEE

C'est durant cette période que KEPLER publie ses deux premières lois du mouvement des planètes et le ciel est alors à la mode.

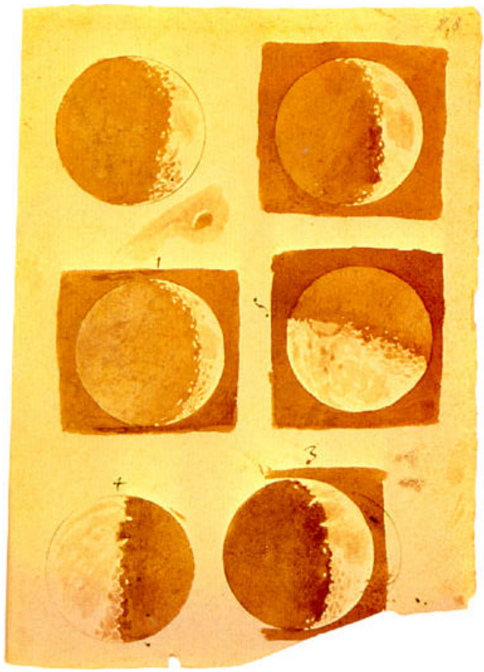
GALILÉE l'observe avec sa lunette et publie le 12 mars 1610 un ouvrage qui aura un retentissement important : *Sidereus Nuncius*[8].



Découverte capitale : GALILEE met en évidence les satellites de Jupiter. La Terre n'est plus une anomalie du système solaire, seule planète à posséder un satellite.

Les idées coperniciennes que GALILÉE professe vont lui valoir les pires ennuis. Alors qu'il exprime une position religieuse conforme aux écritures - ne dit-il pas que "*l'intention du Saint-Esprit est de nous enseigner comment on doit aller au ciel et non comment va le ciel*"-, il manque de prudence en présentant ses arguments en faveur du mouvement de la Terre.

Le 3 mars 1616, l'oeuvre de COPERNIC est mise à l'Index[9]. GALILÉE, lui, est épargné grâce à son prestige et à ses relations.



Dessin original de Galilée, réalisé à la fin de 1609. Galilée visualise grâce à sa lunette les cratères de la Lune et prouve ainsi qu'elle n'est pas parfaitement lisse comme on le croyait alors.

[8] Le message céleste.

[9] L'Index est le catalogue des livres prohibés par l'autorité religieuse catholique. Cette censure, créée au XVI^{e} siècle, a été abolie par PAUL VI en 1965.

Plus tard, avec la protection du pape URBAIN VIII, il entreprend la rédaction d'un ouvrage où il expose et confronte les deux thèses relatives au système du monde. En février 1632, le *Dialogue sur les deux principaux systèmes du Monde* paraît en langue vulgaire et dans un style ironique et blessant pour les partisans d'ARISTOTE. GALILÉE perd ses puissants appuis et le Saint Office l'assigne en justice.

Condamné à l'exil le 22 juin 1633, GALILÉE continue sa vie en résidence surveillée tout en poursuivant ses recherches et publications notamment via la France. En 1638, les *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux nouvelles sciences touchant la mécanique et les mouvements locaux* publiés à Leyde, laissent à Paris une influence considérable et ancrent définitivement la contribution fondamentale que GALILÉE aura apporté à l'histoire de la mécanique et de la gravitation.

GALILEE termine ses jours, aveugle, dans sa villa d'Arcetri, près de Florence en 1642.

En octobre 1992, une commission papale reconnaît l'erreur du Vatican concernant la condamnation de l'astronome.

Principaux apports scientifiques de GALILEE

✓ Construction de la première lunette astronomique.

✓ La Voie Lactée, alors seulement visible comme une traînée blanche dans le ciel, apparaît composée de millions d'étoiles semblables aux plus brillantes déjà connues.

✓ La Lune présente une surface irrégulière, comme celle de la Terre avec la présence de cratères.

✓ Jupiter possède des satellites, tout comme la Lune est le satellite de la Terre.

✓ Le Soleil est imparfait, il possède des taches.

✓ L'observation des phases de Vénus est inexplicable à l'aide du système géocentrique et plaide en faveur du système héliocentrique.

✓ La vitesse de chute libre est la même pour tous les corps.

✓ Principe d'inertie : tout corps possède une certaine "inertie " qui l'oblige à conserver sa vitesse, à moins qu'une force extérieure, une force de frottement par exemple, ne l'oblige à arrêter ce mouvement.

GALILÉE inaugure la cinématique, c'est-à-dire l'étude des mouvements. Cette science nouvelle prend place entre la géométrie, qui étudie les formes, et la dynamique, qui s'occupe des causes du mouvement.

Le *Principe de Relativité*, énoncé par GALILÉE bouleverse les anciennes idées, qui puisaient toujours leur origine chez ARISTOTE.

GALILÉE dit :

> "Ainsi, les marchandises dont un navire est chargé se meuvent en tant que, quittant Venise, elles passent par Corfou, par la Crète, par Chypre, et vont à Alep […] mais, pour ce qui concerne les balles, caisses et autres colis dont le navire est rempli et chargé, et respectivement au navire lui-même, le mouvement de Venise en Syrie est comme nul et ne modifie en rien la relation qui existe entre eux, cela parce qu'il est commun à eux tous et que tous y participent.
> Il est donc manifeste que le mouvement qui se trouve être commun à plusieurs mobiles est oiseux et comme nul, s'agissant des relations entre ces mobiles, parce que rien ne change entre eux."

GALILÉE parle aussi du *Principe d'inertie* :

> "Il faut remarquer […] qu'un degré de vitesse une fois communiqué à un mobile s'imprimera de façon indélébile du seul fait de sa nature, et pourvu que soient supprimées les causes extérieures d'accélération et de ralentissement."

Discours concernant deux sciences nouvelles

En septembre 1610, alors que GALILÉE regagne définitivement Florence, la première version de son "Dialogue concernant deux sciences nouvelles" est déjà rédigée.
La découverte de la lunette dirigera alors ses travaux vers d'autres horizons. Après la sentence prononcée par l'Inquisition, il entreprend, durant l'automne 1633, la nouvelle rédaction des "Discours".
Ils paraissent en Hollande en juillet 1638, publiés par l'éditeur hollandais LOUIS ELZÉVIR. Succès immédiat et total parmi toute l'élite européenne excepté en Italie où les membres de la Compagnie de Jésus y font obstruction en se procurant tous les exemplaires traversant la frontière. Ce n'est qu'en juin 1639 que GALILÉE, alors aveugle, eut la satisfaction de tenir entre ses mains un volume des "Discours". Toute une vie de savant.
GALILÉE décède le 9 janvier 1642, presque un an jour pour jour avant la naissance de NEWTON.

Les "Discours" s'articulent autour de trois personnages et se déroulent en quatre journées.

Les personnages :

- FILIPPO SALVIATI (1583-1614), issu de la noblesse florentine, fut d'abord l'élève de GALILÉE et puis son ami intime. Il était également membre de l'*Accademia dei Lincei*. Dans les "Dialogues", il représente le maître expliquant la pensée de GALILÉE.

- GIOVANFRANCESCO SAGREDO (1571-1620) était un aristocrate d'origine vénitienne. Il fut également élève de GALILÉE et s'engagea ensuite dans la voie de la diplomatie. Dans les "Discours", il tient le rôle de l'honnête homme, pour qui la démonstration et l'expérience l'emportent sur la connaissance purement livresque.

- SIMPLICIO est né de l'imagination de GALILÉE. Il personnifie le savant officiel, persuadé qu'il suffit de maîtriser parfaitement tous les ouvrages d'ARISTOTE pour être capable d'expliquer tous les secrets de la nature.

A la page 190 de la troisième journée des "Discours", GALILÉE nous dit :

> "On a observé que les corps lancés, ou projectiles, décrivent une courbe d'un certain type ; mais que cette courbe soit une parabole, personne ne l'a mis en évidence. Ce sont ces faits [...] qui vont être démontrés, et ainsi - ce que j'estime beaucoup plus important - ouvrir l'accès à une science aussi vaste qu'éminente, dont mes propres travaux marqueront le commencement, et dont des esprits plus perspicaces que le mien exploreront les parties les plus cachées."

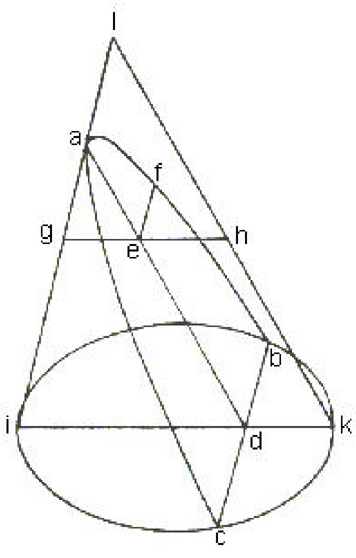
TARTAGLIA[10] pensait en effet - comme il l'explique dans sa "Dynamique" - que la trajectoire d'un projectile se composait successivement d'un mouvement rectiligne, d'un mouvement circulaire, enfin d'un mouvement rectiligne vers le bas.

Le Seigneur SALVIATI énonce ensuite la première proposition :

"Un projectile qu'entraîne un mouvement composé d'un mouvement horizontal uniforme et d'un mouvement naturellement accéléré vers le bas, décrit au cours de son déplacement une trajectoire semi-parabolique."

SIMPLICIO s'inquiète de ne pas être en mesure de comprendre les démonstrations exposées par SALVIATI, n'étant pas expert d'EUCLIDE. SALVIATI lui répond :

> "Je désire au contraire que vous les compreniez et grâce à l'Auteur lui-même qui, lorsqu'il me permit de voir son travail et parce que je n'avais pas à ma disposition les livres d'APOLLONIUS, s'efforça de me démontrer sans qu'aucune connaissance particulière soit requise, deux des propriétés essentielles de la parabole - les seules dont nous ayons besoin dans le présent traité. Ces propriétés sont également établies par APOLLONIUS, mais après de nombreuses autres qu'il serait trop long d'examiner ; aussi mon intention est-elle de suivre une voie plus brève, en dérivant purement et simplement la première proposition de la génération de la parabole, et en m'appuyant sur celle-ci pour démontrer la seconde."



Voici la première propriété relative à la parabole démontrée par GALILÉE. La figure est la même que celle d'APOLLONIUS, seuls les noms des points ont changé, GALILÉE utilise des lettres minuscules pour désigner les points.

Les hypothèses utilisées découlent du plan de section choisi pour obtenir une parabole.

Hypothèses : *bc* et *ik* sont perpendiculaires
ad et *lk* sont parallèles

Thèse : $\dfrac{bd^2}{fe^2} = \dfrac{da}{ae}$

---

[10] Voir la reproduction à la page suivante.

Frontispice de *La Nova Scientia*, NICOLO TARTAGLIA
Venise, 1537, Bibliothèque nationale, Dorka

TARTAGLIA est entouré de la Musique, de l'Astronomie, de l'Arithmétique et de la Géométrie. ARISTOTE et PLATON sont posés en maîtres absolus aux pieds de la Philosophie et EUCLIDE en guide. On remarque un canon et la trajectoire effectuée par le boulet, TARTAGLIA s'étant en effet intéressé à ce problème. Il pensait que le boulet parcourait tout d'abord une trajectoire linéaire suivie d'un arc de cercle et enfin d'une autre trajectoire linéaire.

Démonstration :

Démontrer

$$\left.\begin{array}{lll} bd \perp ik & donc & bd^2 = id.dk \\ fe \perp gh & donc & fe^2 = ge.eh \end{array}\right\} \text{propriété de la hauteur relative à l'hypoténuse}$$

En divisant ces deux relations membre à membre, nous obtenons :

$$\frac{bd^2}{fe^2} = \frac{id.dk}{ge.eh}$$

Or, le quadrilatère *ehkd* est un parallélogramme car ses côtés sont parallèles deux à deux.

Par conséquent, $eh = dk$

En remplaçant *eh* par *dk* dans la relation précédente, nous pouvons écrire :

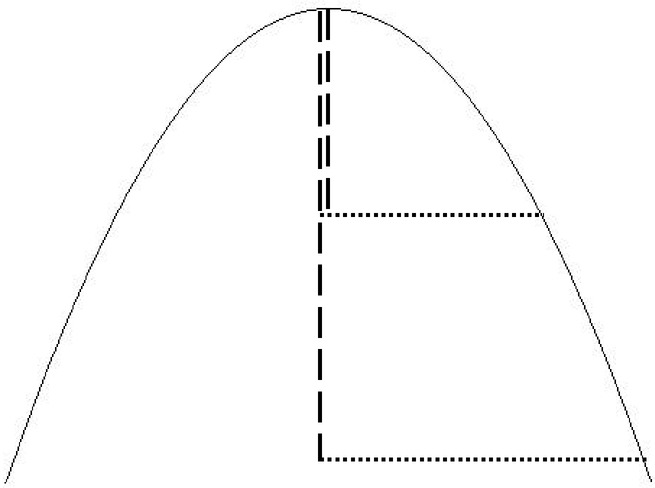
$$\frac{bd^2}{fe^2} = \frac{id.dk}{ge.dk} = \frac{id}{ge}$$

Exploiter un acquis

Finalement, le théorème de THALÈS appliqué dans le triangle *aid* permet d'affirmer :

$$\frac{id}{ge} = \frac{da}{ae}$$ d'où découle directement la thèse annoncée.

Visualisons de face cette très jolie propriété[11] des paraboles :



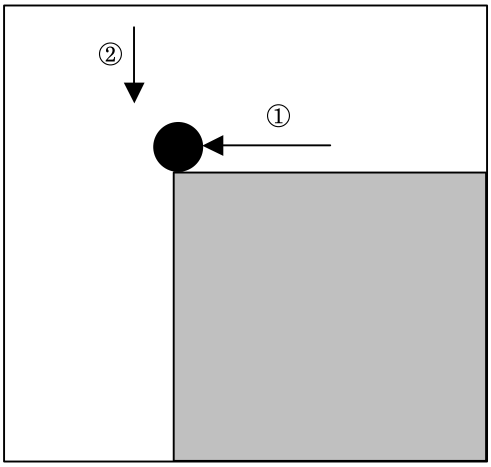
La propriété démontrée par GALILÉE exprime simplement le fait que le carré du rapport des deux segments en pointillés est égal au rapport des deux segments en tirets.

[11] Nous suggérons en exercice de déduire cette propriété de la proposition XI d'APOLLONIUS d'une part; de l'équation de la parabole ($x^2 = 2ky$) d'autre part.

GALILÉE va se servir de cette propriété pour démontrer que la trajectoire d'un projectile est parabolique.

Observer

Il remarque qu'un projectile tiré d'un canon reçoit deux mouvements :

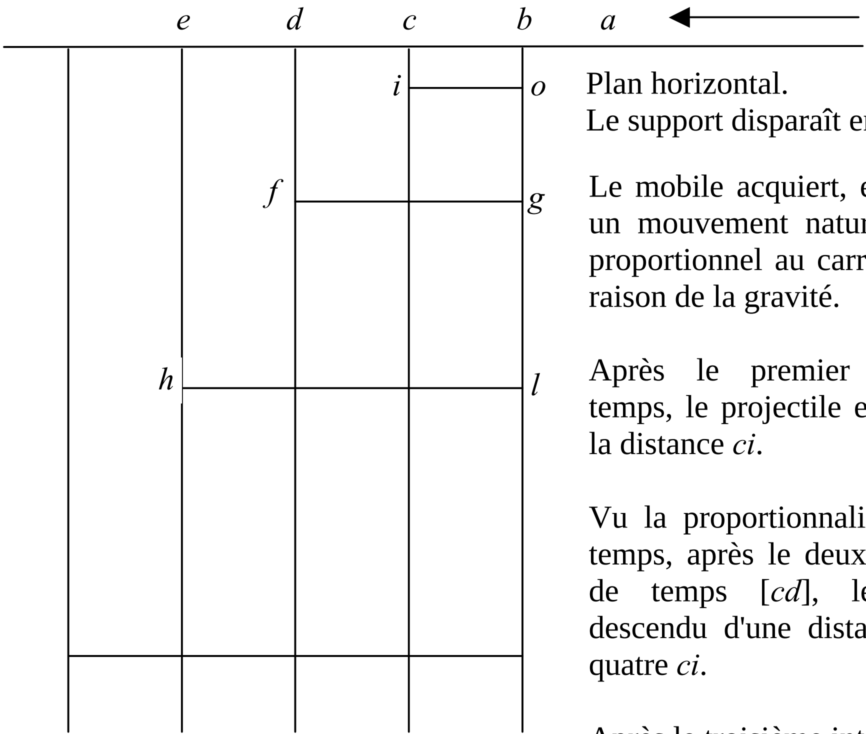


① Un mouvement horizontal dû à l'élan initial qu'on lui a imprimé. GALILÉE a démontré auparavant que ce mouvement est proportionnel au temps écoulé.

② Un mouvement vertical vers le bas dû à l'effet de la force de gravitation. GALILÉE a montré que ce mouvement est proportionnel au carré du temps écoulé.

Le mobile étant animé d'un mouvement rectiligne uniforme horizontal proportionnel au temps, GALILÉE partage le plan vertical où se déroule le mouvement en bandes verticales proportionnelles au temps.

[*bc*] = un intervalle de temps = *t*
[*cd*] = un intervalle de temps = *t*
[*de*] = un intervalle de temps = *t*
⋮



Plan horizontal.
Le support disparaît en *b*.

Le mobile acquiert, en dépassant *b*, un mouvement naturel vers le bas proportionnel au carré du temps, en raison de la gravité.

Après le premier intervalle de temps, le projectile est descendu de la distance *ci*.

Vu la proportionnalité au carré du temps, après le deuxième intervalle de temps [*cd*], le mobile est descendu d'une distance *df* égale à quatre *ci*.

Après le troisième intervalle de temps [*de*], le mobile est descendu d'une distance *eh* égale à neuf *ci*.

Et ainsi de suite.

Démontrer

Montrons que i, f et h sont sur une même parabole.

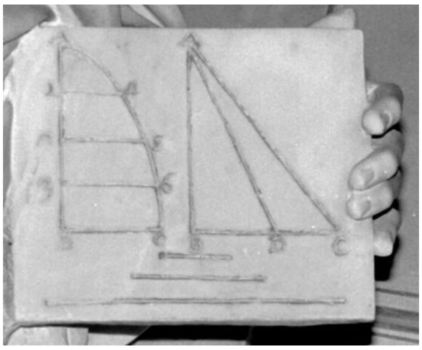
$$io = t \qquad bo = ci$$
$$fg = 2t \quad \text{et} \quad gb = fd = 4ci$$
$$hl = 3t \qquad lb = he = 9ci$$

Par conséquent,
$$\frac{hl^2}{fg^2} = \frac{(3t)^2}{(2t)^2} = \frac{9}{4} = \frac{lb}{gb}$$
$$\frac{fg^2}{io^2} = \frac{(2t)^2}{t^2} = \frac{4}{1} = \frac{gb}{bo}$$

Donc, les points i, f et h sont sur une même parabole.

Cette parabole possède le point b comme sommet et la droite verticale passant par b comme axe de symétrie.

Le monument funéraire de GALILEE
EGLISE SANTA CROCE - FLORENCE



Le monument funéraire de GALILÉE comporte de nombreux détails évoquant l'œuvre du savant et ses convictions scientifiques.

Notamment, on trouve la plaque ci-jointe, illustrant la découverte des trajectoires paraboliques des projectiles.

Remarque :

GALILÉE se sert de la réciproque de la propriété précédente. Or il ne l'a pas démontrée. Disons plutôt pas encore car SALVIATUS se hâte d'apporter les justifications supplémentaires à SIMPLICIO.

> "Si, en effet, après avoir mené une parabole par les points *b* et *h*, par exemple, l'un des deux points *f* et *i* n'y trouvait pas son emplacement, il tomberait soit à l'intérieur soit à l'extérieur, et par conséquent la ligne *fg* serait ou plus petite ou plus grande que lorsqu'elle va se terminer sur la parabole ; ce n'est donc pas avec le carré de *fg*, mais avec une autre ligne plus grande ou plus petite, que le carré de *hl* aurait le même rapport que la ligne *lb* avec la ligne *bg* ; mais c'est bien avec le carré de *fg* qu'existe ce rapport : donc le point *f* se trouve sur la parabole, et de même tous les autres."

➠ SALVIATUS parle de mener une parabole par deux points. Deux points définissent-ils toujours une et une seule parabole ? Parmi les deux points proposés, n'y en a-t-il pas un qui joue un rôle particulier[12] ?

D'autres remarques d'ordre physique sont à formuler.

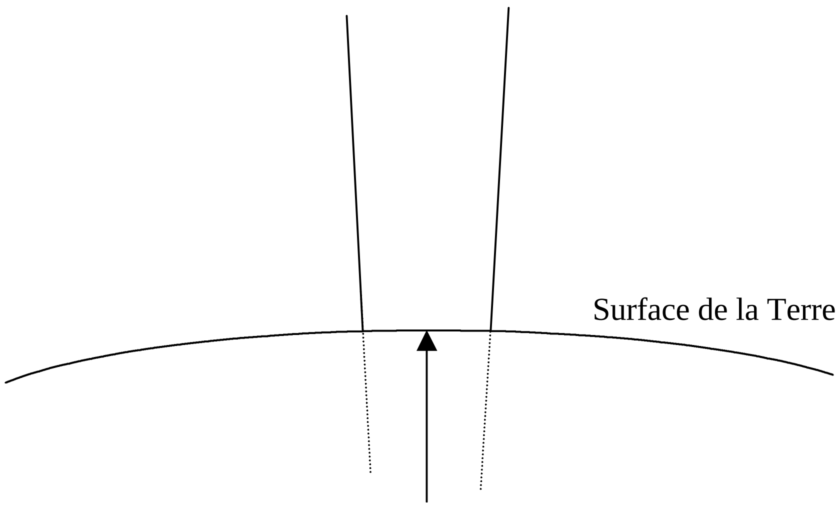
① La démonstration précédente fait abstraction de la résistance due au milieu dans lequel se déplace le projectile.

② La gravité s'exerce vers le centre de la Terre. Or, en travaillant sur un plan horizontal, on néglige le fait que la distance par rapport au centre de la Terre augmente lorsque l'on s'éloigne sur ce plan.

GALILÉE est conscient de ces faits et explique qu'il faut négliger les effets de la remarque ② dans le cas présent :

> "Or, certains excusent cette licence en considérant que dans la pratique, nos instruments et les longueurs mises en cause sont si petits en comparaison de la distance considérable qui nous sépare du centre du globe, que nous pouvons, à bon droit, assimiler une minute de degré prise sur un très grand cercle à une ligne droite, et deux perpendiculaires, abaissées par ses extrémités, à deux parallèles. Car si dans la pratique on devait tenir compte de ces détails, on devrait commencer par reprendre les architectes lorsqu'ils croient, avec un fil à plomb, élever de hautes tours avec des côtés parallèles. J'ajoute d'ailleurs qu'ARCHIMÈDE et les autres supposaient dans leurs recherches qu'ils étaient infiniment éloignés du centre, auquel cas leurs conventions étaient exactes, et leurs démonstrations parfaitement concluantes."

[12] Comme exercice, nous vous suggérons de répondre à ces questions.



Le rayon terrestre est tellement grand que l'on peut assimiler un petit arc de cercle à un segment de droite et deux droites verticales deux parallèles.

En ce qui concerne la résistance du milieu, GALILÉE nous livre la réflexion suivante :

> "Ces propriétés de gravité[13], de vitesse et même de forme sont susceptibles de varier de tant et tant de manières qu'il est impossible d'en donner une science rigoureuse : c'est pourquoi, si l'on veut traiter scientifiquement ce problème [du mouvement], il convient d'en faire abstraction, et après avoir découvert et démontré les lois, en supprimant toute résistance, de les compléter, au moment de les utiliser concrètement, par ces limitations que l'expérience nous enseignera. L'avantage de cette méthode n'est pas petit, car on peut choisir les matériaux et les formes les moins sensibles à la résistance du milieu, comme le sont les corps très pesants et de forme arrondie, et, d'autre part, les distances et les vitesses ne seront pas en général si grandes que l'on ne puisse corriger avec précision les différences ; d'ailleurs, avec les projectiles que nous utilisons, qu'ils soient d'une matière pesante et de forme arrondie, ou d'une matière moins pesante et de forme cylindrique, comme les traits qu'on lance avec une fronde ou un arc, l'écart entre leur mouvement et la forme exactement parabolique sera tout à fait insignifiant."

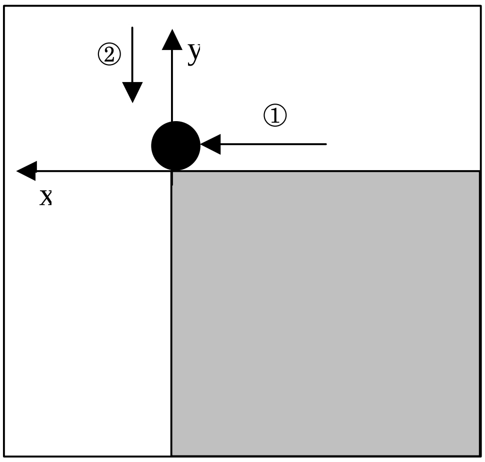
La géométrie analytique dont la paternité est attribuée à DESCARTES[14] va nous permettre de reprendre la démonstration de GALILÉE concernant les trajectoires paraboliques des projectiles.

Avec les notations actuelles, il est assez simple d'établir que la trajectoire d'un projectile animé d'un mouvement rectiligne et uniforme horizontal et d'un mouvement vertical vers le bas dû à la gravité est semi-parabolique.

---

[13] GALILEE veut parler de la masse du projectile.
[14] Voir encadré à la page 32.

Ayant choisi le repère comme on le voit sur la figure ci-contre, on va mettre en équations le mouvement rectiligne horizontal et le mouvement vertical accéléré :



Observer

① Le mouvement horizontal est proportionnel au temps écoulé et est fonction de la vitesse imprimée au projectile :

$$x = vt$$

② Le mouvement vertical vers le bas est proportionnel au carré du temps écoulé :

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

Le mobile effectue donc la trajectoire donnée par : $\begin{cases} x = vt & (1) \\ y = \frac{1}{2}gt^2 & (2) \end{cases}$

Ces équations sont des équations paramétriques. Elles donnent l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque de la trajectoire en fonction du temps.

Pour obtenir l'équation de la trajectoire, c'est à dire une relation indépendante du temps, qui caractérise uniquement la position du projectile, il suffit d'éliminer le temps entre ces deux équations.

Pour ce faire, extrayons *t* de la première équation et remplaçons-le dans la seconde :

$$t = \frac{x}{v} \quad \text{donc,} \quad y = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v}\right)^2 = \frac{g}{2v}x^2$$

Il s'agit de l'équation d'une parabole dont le sommet est le point (*0*,*0*) et dont l'axe de symétrie est l'axe des *y*, c'est-à-dire $x^2 = 2ky$ où $k = \frac{v}{g}$.

Enrichir sa culture

GALILÉE, DESCARTES et les autres …

Les siècles précédents préparèrent la Renaissance par de nouveaux développements industriels et technologiques : les pompes et ascenseurs dans les mines, l'invention des armes à feu, de l'imprimerie, la construction de moulins à vent, de canaux, de bateaux capables de traverser l'océan, … et surtout la mise au point d'horloges précises, bénéfiques à la navigation et à l'astronomie. L'horloge, modèle de l'univers, représente un changement important dans la conception mécanique du monde.

Ces progrès techniques engendrèrent des études théoriques sérieuses dans le domaine de la mécanique et de l'étude des mouvements en général. Citons les grands esprits que furent LÉONARD DE VINCI, NICOLO TARTAGLIA, SIMON STEVIN et ensuite COPERNIC, TYCHO BRAHÉ, KEPLER, CAVALIERI, TORRICELLI,…

En même temps que DESCARTES, STEVIN en néerlandais, GALILÉE en italien, BACON en anglais manifestèrent le soucis d'être compris par le plus grand nombre et écrivirent en langue vulgaire, abandonnant le latin.

Les théories d'ARISTOTE sont rejetées, considérées comme inadéquates dans un monde où le quantitatif prend une importance de plus en plus grande. Rappelons en effet que GALILÉE met en exergue non seulement l'importance des mathématiques mais aussi la nécessité de l'expérimentation.

La publication de la "Géométrie" de DESCARTES fut initialement proposée comme un appendice à son "Discours de la Méthode" où il propose une approche strictement rationnelle de la nature.

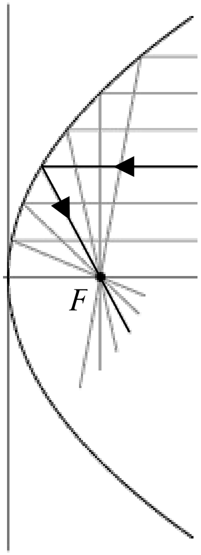
RENÉ DESCARTES était un gentilhomme français originaire de Touraine. Il servit un moment dans l'armée de MAURICE D'ORANGE, vécut de nombreuses années aux Pays-Bas et mourut en Suède à Stockholm, où il avait été invité par la Reine CHRISTINE, soucieuse de bénéficier de l'enseignement de l'érudit.

Pour DESCARTES, la clef de la compréhension du monde et notamment des sciences, passe par l'étude des mathématiques. La "Géométrie" de DESCARTES a pour but d'unifier géométrie et algèbre. Les historiens des sciences s'accordent à dire qu'on assiste dans ces écrits à la naissance de la géométrie "analytique" (terme probablement inventé par BIOT au XIX$^{\text{ème}}$ siècle). Cependant, pas de trace de "coordonnées cartésiennes" chez DESCARTES.

Pas de progrès décisif donc dans le sujet qui nous préoccupe. Rappelons-nous qu'APOLLONIUS avait déjà classifié les coniques en fonction de valeurs numériques que nous appellerions aujourd'hui coordonnées et que la notion de coordonnée elle-même était déjà présente dans les tables retrouvées sur les tablettes babyloniennes ou dans la « Géographie » de PTOLÉMÉE avec les notions de longitude et de latitude.

Cependant, DESCARTES eut le double mérite d'appliquer l'algèbre développée au XVI$^{\text{è}}$ siècle à la géométrie des anciens et de rejeter les conditions d'homogénéité faisant ainsi d'une équation une relation entre nombres, pas décisif vers l'abstraction.

6. Propriété de réflexion de la parabole



Dans un miroir parabolique, les rayons parallèles à l'axe de symétrie sont réfléchis en passant par le foyer.

Cette propriété est connue depuis deux mille ans et a donné lieu à une polémique concernant l'un des plus grands mathématiciens de l'Antiquité, ARCHIMÈDE.

Enrichir sa culture

Pendant la deuxième guerre punique, en 214 av. J.-C., le général MARCELLUS dirigea le siège de Syracuse. ARCHIMÈDE, qui assurait la défense de la ville en sa qualité d'ingénieur militaire a-t-il utilisé des "*miroirs ardents*" pour déclencher des incendies sur la flotte romaine ?

Aucun écrit d'ARCHIMÈDE ne nous est parvenu à ce sujet mais que nous apprennent les témoignages historiques[15] ?

- *L'historien grec POLYBE, né une dizaine d'années après le siège de Syracuse, ne parle pas de miroirs ardents lorsqu'il relate l'événement.*

- *DIOCLÈS (± 190-180 av. J.-C.) c'est-à-dire peu après la mort d'ARCHIMÈDE, a écrit un ouvrage intitulé "Sur les miroirs ardents" qui nous est parvenu par les Arabes et dans lequel 'on ne trouve aucune allusion à ARCHIMÈDE. Par contre, il nous apprend qu'un certain DOSITHÉE avait construit un miroir ardent parabolique. Or, DOSITHÉE n'est autre que l'ami auquel ARCHIMÈDE dédie quatre de ses traités de géométrie !*[16]

- *Au II^ème siècle J.-C., l'écrivain latin APULÉE signale :*

  "Le principal titre d'ARCHIMÈDE à la célébrité est d'avoir souvent et avec attention considéré un miroir."

[15] P. Thuillier, *D'Archimède à Einstein*, Fayard Le temps des sciences, Paris 1988
[16] Ce témoignage plaide en faveur d'une connaissance (au moins expérimentale) de la propriété focale de la parabole avant APOLLONIUS et peut laisser penser que APOLLONIUS et DOSITHEE ont profité des connaissances archimédiennes en matière de coniques.

- *Au IVème siècle, THÉON D'ALEXANDRIE indique qu'ARCHIMÈDE a écrit un traité de "Catoptrique"*[17].

- *Au VIème siècle après J.-C., l'ingénieur ANTHÈME DE TRALLE, architecte de la basilique de Sainte-Sophie de Constantinople considère comme évident qu'ARCHIMÈDE a réussi cet exploit.*
Son témoignage est intéressant du point de vue technologique car il émet l'hypothèse qu'ARCHIMÈDE a fait appel à des hommes portant des miroirs plans et se tenant côte à côte.

- *ROGER BACON, moine franciscain (1214-1294) :*

  "l'Antéchrist se servira de semblables miroirs pour détruire par le feu les cités, les camps et les armées, ..."

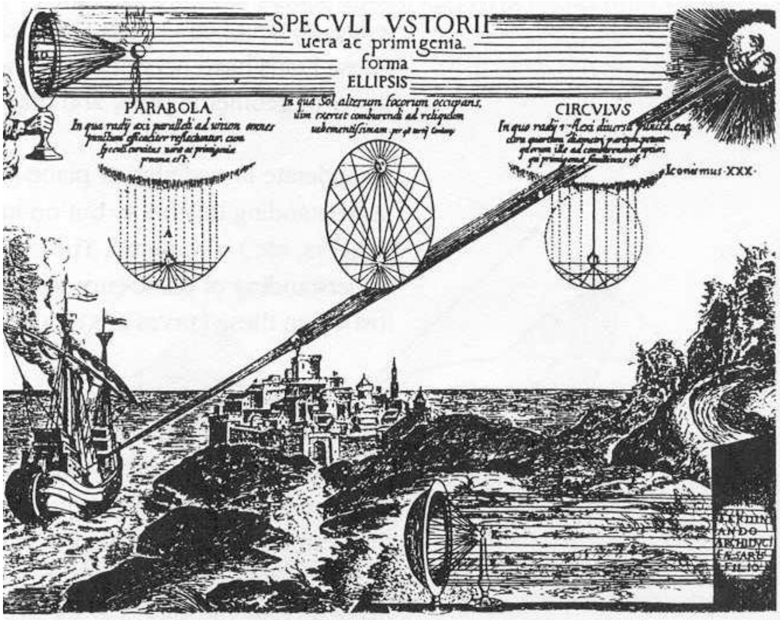
Gravure extraite de Vitellion, Editions Risner, 1572
Ce document a été réalisé au XVIème siècle pour illustrer le traité d'*Optique* du Polonais WITELO (écrit trois siècles plus tôt). Il vise à montrer les phénomènes étudiés par cette science.
- *En haut à gauche* : l'arc-en-ciel.
- *Le pont* : la perspective.
- *Les jambes de l'homme nu* : la réfraction.

[17] Il s'agit de la science qui étudie les propriétés de réflexion de la lumière.

▪ *Dès 1630, Descartes, s'adressant au père Marin Mersenne, qui croyait en l'exploit d'Archimède :*

> *"Et quand un ange aurait fait un miroir pour brûler, s'il n'avait plus de six toises[18] de diamètre, je ne crois pas qu'il pût avoir assez de force pour brûler à une lieue de distance, quelque figure qu'il lui donnât."*

▪ *En 1646, le défi est relevé par un jésuite, le père Athanasius Kircher, qui va jusqu'à enquêter à Syracuse. Avec cinq miroirs judicieusement disposés, on obtient une chaleur presque intolérable à plus de cent pieds[19].*



Représentation de l'exploit d'Archimède tirée du *Grand art de la lumière et de l'ombre* d'Athanasius Kircher (1646)

▪ *En 1747, Buffon contredit Descartes. Il construit un miroir constitué de 168 petites glaces et réussit à enflammer des pièces de bois.*

▪ *Son contemporain, le physicien français Du Fay, tente une expérience avec un miroir concave plus un petit paraboloïde mais le résultat n'est pas concluant. Il suggère cependant - idée judicieuse - de faire appel à de petits miroirs plans :*

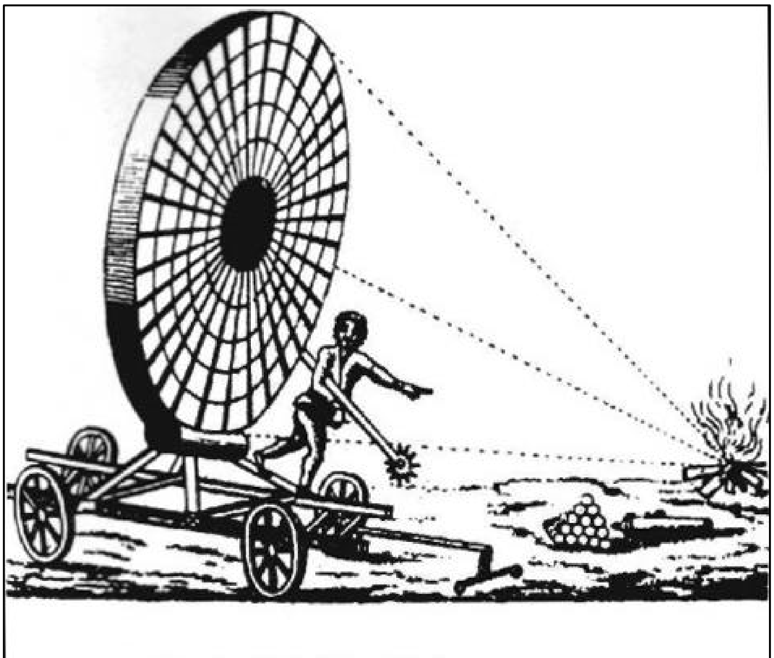
> *"Plusieurs personnes (les) tiendraient à la main et (les) dirigeraient tous de façon que les images du soleil formées par chacun de ces miroirs concourraient en un même point."*

▪ *En 1973, l'ingénieur grec Ionnis Sakkas réalise une expérience extraordinaire. Il réunit plus de 70 opérateurs munis de 70 miroirs de rendement semblable à celui de boucliers métalliques et il les aligne sur un quai du Pirée. En deux minutes, ils réussissent à enflammer une maquette imitant une galère et posée sur une barque située à 50 mètres de la rive.*

---

[18] Environ 11,7 m.
[19] 33 m.

Sachant que certaines galères romaines étaient reliées à des *sambuques* , sortes de tours destinées à assiéger des fortifications et cibles privilégiées pour les miroirs ardents et que la poix utilisée àl'époque pour rendre étanches les galères est un produit hautement inflammable, on peut tout au moins laisser à ARCHIMÈDE le bénéfice du doute.



Miroir d'Archimède à foyer mobile.

Extrait de E.G. Robertson, *Mémoires récréatifs, scientifiques et anecdotiques d'un physicien-aéronaute*, Café Clima Editeur, Langres 1985

Nous allons prouver, de deux manières différentes, la propriété de réflexion de la parabole. La première fait appel à la géométrie analytique, elle fait intervenir un repère du plan, des coordonnées et des équations ; la seconde utilise seulement quelques propriétés géométriques simples. Les lois de la réflexion sont nécessaires dans les deux cas.

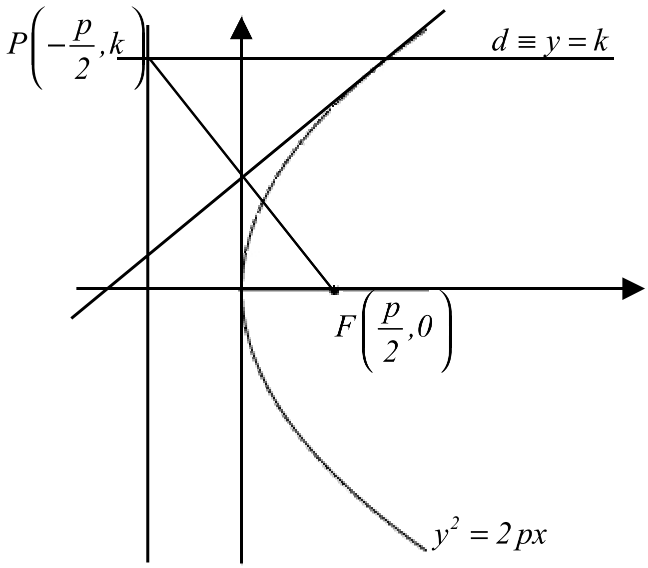
Démontrer

<u>Première démonstration</u> :

Dans un repère orthonormé, considérons la parabole[20] d'équation $y^2 = 2px$ et $P\left(-\frac{p}{2},k\right)$ un point quelconque de sa directrice. Appelons d la parallèle à l'axe des x passant par P.

Nous allons prouver, par la géométrie analytique, que la médiatrice du segment $[P,F]$ où $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ désigne le foyer de la parabole rencontre la droite d en un point Q de la parabole et qu'elle est tangente àla parabole en ce point.

[20] Remarquons qu'ici, nous avons échangé les rôles des axes x et y par rapport àce que nous fîmes aux pages 17 et 18.



Recherchons l'équation de la médiatrice de $[P,F]$:

- milieu de $[P,F]$: $\left(0,\frac{k}{2}\right)$ (il est donc sur l'axe des y)
- $m_{\perp PF} = \dfrac{1}{m_{PF}} = \dfrac{1}{\dfrac{k}{-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}}} = \dfrac{1}{\dfrac{k}{-p}} = -\dfrac{p}{k}$
- médiatrice : $y = \dfrac{p}{k}x + \dfrac{k}{2}$

Recherchons l'intersection de cette droite avec d :

$$\begin{cases} y = \dfrac{p}{k}x + \dfrac{k}{2} \\ y = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{p}{k}x + \dfrac{k}{2} \\ y = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{k^2}{2p} \\ y = k \end{cases}$$

Le point $\left(\dfrac{k^2}{2p},k\right)$ est bien sur la parabole puisque ses coordonnées vérifient l'équation de cette dernière.

Pour montrer que la médiatrice de $[P,F]$ est tangente àla parabole, nous devons résoudre le système formé de l'équation de la médiatrice et de celle de la parabole.

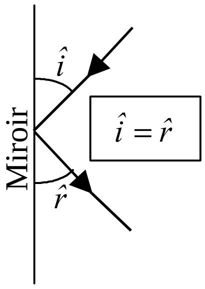
$$\begin{cases} y = \dfrac{p}{k}x + \dfrac{k}{2} \\ y^2 = 2px \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{p}{k}x + \dfrac{k}{2} \\ x = \dfrac{y^2}{2p} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{p}{k}\cdot\dfrac{y^2}{2p} + \dfrac{k}{2} \\ x = \dfrac{y^2}{2p} \end{cases}$$

Après simplifications, la première équation peut s'écrire : $y^2 - 2ky + k^2 = 0$ ou encore, $(y-k)^2 = 0$.

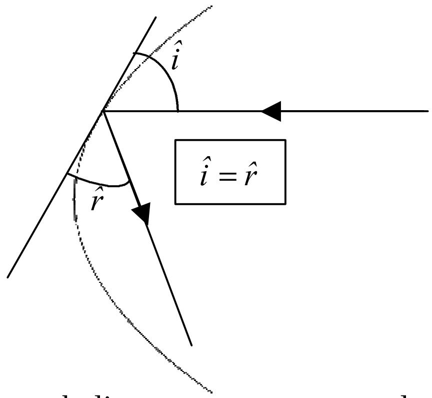
La solution $y = k$ de cette équation est une racine dite "double" et permet donc d'affirmer que la médiatrice de $[P,F]$ est tangente àla parabole.

Cette propriété de la parabole[21] et les lois de la réflexion que nous allons rappeler ci-dessous vont nous permettre d'établir la proposition annoncée, à savoir que dans un miroir parabolique, les rayons parallèles àl'axe de symétrie sont réfléchis en passant par le foyer..

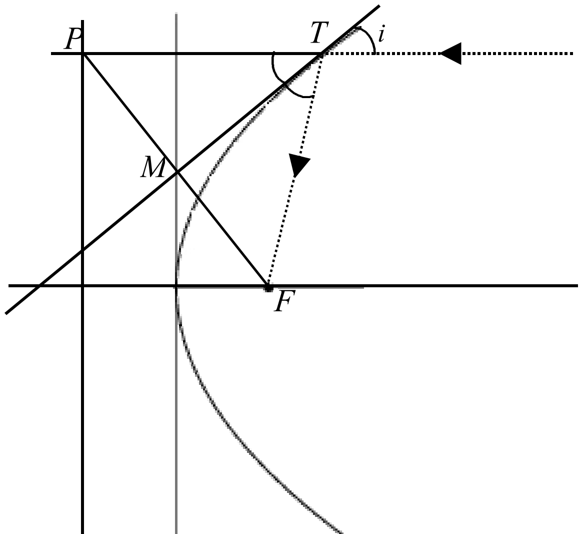
Les lois de la réflexion précisent qu'en tout point d'un miroir plan, l'angle d'incidence est égal àl'angle de réflexion.



Un miroir non plan peut être assimilé localement à une portion de son plan tangent. Dans ce cas, les angles d'incidence et de réflexion se mesurent par rapport à la tangente au miroir au point de réflexion.



Plaçons-nous donc dans le cas d'un miroir parabolique et supposons que le rayon incident fait un angle $\hat{i}$ avec la tangente au point *T*.



[21] Pour rappel : *dans un miroir parabolique, les rayons parallèles à l'axe de symétrie sont réfléchis en passant par le foyer*.

$\hat{i} = P\hat{T}M$ (angles opposés par le sommet)

$P\hat{T}M = M\hat{T}F$ (car TM est la médiatrice de $[P,F]$)

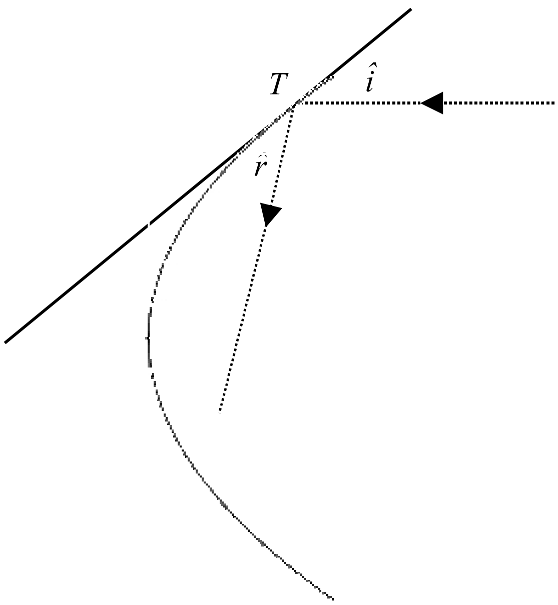
Donc, $\hat{i} = M\hat{T}F$ et $M\hat{T}F$ est donc l'angle réfléchi puisque d'une part, nous savons que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion et que d'autre part, la droite MT est l'un des côtés de cet angle.

Par conséquent, le rayon réfléchi passe par le foyer.

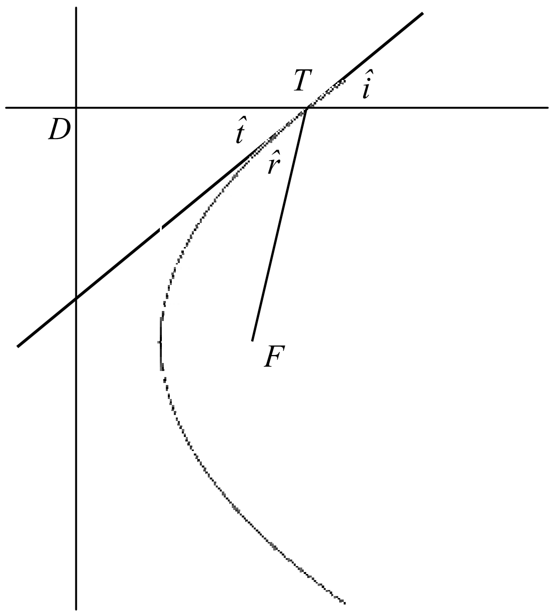
<u>Deuxième démonstration</u> :

Démontrer

Nous pouvons démontrer cette propriété sans faire appel à la géométrie analytique.



Les lois de la réflexion impliquent que l'angle formé par la tangente et le rayon incident a la même amplitude que l'angle formé par la tangente et le rayon réfléchi c'est-à-dire sur la figure : $\hat{i} = \hat{r}$.



Prolongeons le rayon incident jusqu'à la directrice de la parabole, nous obtenons le point D.

T est un point de la parabole, par conséquent, il est situé à égale distance de la directrice et du foyer.

Nous avons donc : $TD = TF$.

De plus, $\hat{i} = \hat{t}$ (angles opposés par le sommet)

Nous avons donc : $\begin{cases} \hat{i} = \hat{r} \\ \hat{i} = \hat{t} \end{cases}$ et par conséquent, $\hat{r} = \hat{t}$.

En conclusion, le rayon réfléchi passe par le foyer.

De plus, puisque *TD* a pour image *TF* par la symétrie orthogonale dont l'axe est la tangente, nous en déduisons que la tangente est la médiatrice du segment [*FD*].

Cette propriété de la parabole est utilisée dans de nombreuses applications :

- les fours solaires ;

- les antennes paraboliques et les télescopes ;

- les phares de voiture utilisent des miroirs approximativement paraboliques munis d'une source de lumière placée de foyer (Il s'agit en fait d'une application de la propriété réciproque de la précédente : *les rayons émis par une source lumineuse placée au foyer d'un miroir parabolique sont réfléchis par le miroir parallèlement à l'axe de symétrie du miroir*.

7. Annexe : l'alphabet grec

L'alphabet grec

Caractères	Valeur	Appellation
Α α	a	Alpha
Β β	b	bêta
Γ γ	g	gamma
Δ δ	d	delta
Ε ε	e (bref)	epsilonn
Ζ ζ	dz, ds	dzêta
Η η	ê (long)	êta
Θ θ	th	thêta
Ι ι	i	iôta
Κ κ	c, k	kappa
Λ λ	l	lambda
Μ μ	m	mu

Caractères	Valeur	Appellation
Ν ν	n	nu
Ξ ξ	x, cs, gs	ksi
Ο ο	o (bref)	omicronn
Π π	p	pi
Ρ ρ	r	rhô
Σ σ	s, ç (dur)	sigma
Τ τ	t (dur)	tau
ϒ υ	y, u (bref)	upsilonn
Φ φ	ps, bs	phi
Χ χ	ch, kh	chi (ki)
Ψ ψ	ps, bs	psi
Ω ω	ô (long)	ôméga

8. Bibliographie

Paul Ver Eecke, *Les coniques d'Apollonius de Perge*, Blanchart, Paris 1959

Dirk J. Struik, *A concise history of Mathematics*, Dover Publications, New York 1987

J.W. Downs, *Practical Conic Sections*, Dale Saymour Publications, Palo Alto 1993

David Wells, *Le dictionnaire Penguin des curiosités géométriques*, Editions Eyrolles, 1996

Galilée, *Discours concernant deux sciences nouvelles*, présentation, traduction et notes de M. CLAVELIN, Librairie Armand Colin, Paris 1970

F.Buekenhout, J.Doyen, *Coniques et quadriques*, cours dispensé à l'ULB, 2ème édition, 1995

P. Thuillier, *D'Archimède à Einstein*, Fayard Le temps des sciences, Paris 1988

A.Dahan-Dalmenico, J.Peiffer, *Une histoire des mathématiques*, Sciences Points, Seuil 1986