MATHEMATIQUES EXPERIMENTALES

ACTIVITES DE MODELISATION DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES AU TRAVERS DES PROBLEMES HISTORIQUES

Recherche en Education n°79 / 99

GLOTZ Sophie, JOELANTS Nadine, MICHAUX Christian
REMY Anne, POURBAIX Frédéric

Service de Logique Mathématique et Algèbre
Université de Mons-Hainaut
Le Pentagone
Avenue du Champ de Mars 6
7000 MONS

1. INTRODUCTION

Le présent article est scindé en deux parties. La première est destinée à éclairer le lecteur sur les motivations, les lignes directrices et le contenu du projet. Quant à la seconde, elle reproduit un extrait de la recherche, significatif de la philosophie sous-jacente. Nous avons choisi de reproduire dans le présent article une partie de la séquence intitulée « La découverte des irrationnel(le)s».

Motivations

L'étude des mathématiques n'est pas simple, c'est indéniable. A l'époque de l'image de synthèse et du fast-food, la jeune génération actuelle rencontre de sérieuses difficultés lors de l'étude de disciplines nécessitant rigueur et réflexion. On assiste à une désertion des cours forts de mathématique. Manque de motivation ? Manque de courage ? Plus grand attrait pour d'autres disciplines ? Inadéquation des programmes scolaires ? Et pourtant … Pourtant, personne ne s'opposera à cette idée : l'apprentissage du raisonnement est d'une importance primordiale. Et chacun s'accordera aussi à penser que les mathématiques sont reines en la matière !

L'acquisition d'une bonne capacité à raisonner est un facteur important de réussite dans tous les domaines aussi bien scolaire que professionnel, ou même familial, et un précieux bagage pour toute une vie. Dès lors, nous n'avons pas le choix. Nous nous devons de chercher encore et toujours des pistes pour tenter d'intéresser nos jeunes élèves et les guider sur la voie de l'envie d'apprendre. Car si le raisonnement est un outil indispensable et efficace, « être motivé », au sens large, c'est un grand pas sur la route qui mène au bonheur. L'interdisciplinarité est sans doute un moyen, et nous avons choisi l'histoire. Il ne s'agit pas de mener une recherche relative à l'histoire des mathématiques, mais d'utiliser celle-ci. Nous nous sommes référés à des sources historiques sérieuses mais nous ne sommes toutefois pas à l'abri d'une erreur. Répondre à la question « A quoi ¸ ça sert ? » est sans aucun doute intéressant mais il nous semble que « Comment en est-on arrivé là ? » est une question tout aussi porteuse de sens.

A l'époque du « tout, tout de suite », évoquer la patience dont peut faire preuve l'humanité dans le domaine scientifique apportera une saine réflexion. A l'ère du « chacun pour soi », s'apercevoir qu'une théorie bien ficelée est en réalité l'œuvre commune de générations de mathématiciens enseignera l'humilité. En effet, rarement en histoire des sciences une découverte est arrivée comme une étincelle, un coup de génie d'un être d'exception. Au contraire, les théories se mettent peu à peu en place, chaque nouveau résultat acquis s'ajoutant comme une nouvelle pierre à l'édifice déjà ébauché. C'est pourquoi le mot « découverte » est souvent exagéré et même si l'on associe souvent à un concept un concepteur précis, on ne peut oublier les multiples « ouvriers » qui ont contribué à l'œuvre. Parler de découverte en histoire des sciences, c'est résumer !

Nous montrerons donc à nos élèves que certains problèmes mathématiques ont mis vingt-cinq siècles à être résolus (comme le fameux problème de la quadrature du cercle), que d'autres viennent de « tomber » après de nombreux remous dans le monde scientifique (nous pensons au célèbre théorème de Fermat) et que nombre de questions reste encore sans réponses (l'existence de nombres parfaits impairs par exemple). Nous mettrons en exergue « l'universalité » de certaines notions, apparaissant indépendamment dans différentes parties du monde et nous montrerons comment des théories peuvent sombrer dans un profond sommeil pendant des siècles avant de revenir à la lumière sous une impulsion nouvelle. Nous ne négligerons pas l'histoire contemporaine, notamment les succès dus à l'apport des technologies liées à l'outil informatique et les visions nouvelles que cet apport a suscitées tant dans le domaine scientifique que philosophique.
Bref, nous souhaitons proposer une approche historique des programmes de mathématique et en particulier dans un premier temps, des programmes de quatrième année de l'enseignement secondaire. Cependant, nos séquences peuvent servir dans les années ultérieures pour aborder certains points de matière.

- Où et comment sont apparues certaines notions ?
- S'agissait-il d'une nécessité liée à une activité humaine ou bien d'une pure construction de l'esprit ?
- Quelles sont les différentes étapes qui ont conduit à la notion telle qu'elle est enseignée habituellement dans nos cours ?

En répondant à de telles questions, tout en faisant des mathématiques, nous voulons conduire nos élèves à apprécier l'efficacité du symbolisme mathématique actuel, à comprendre l'importance de la démonstration en particulier et du raisonnement en général, à rejeter une étude superficielle pour une étude approfondie, à perfectionner l'usage de la langue française dans un raisonnement scientifique, à décloisonner les différents chapitres en constatant qu'en mathématique comme dans d'autres disciplines, tout est dans tout.

Les lignes directrices

Il nous semble voir un parallélisme frappant entre le développement historique des mathématiques depuis l'Antiquité jusqu'à nos jours et l'apprentissage en spirale, appliqué aux mathématiques. Certes, l'essor des mathématiques a débuté il y a plus de 2500 ans et l'apprentissage des mathématiques dure rarement plus de 20 ans. Mais, si l'on fait abstraction de la durée des deux processus, on constate qu'ils passent tous deux cycliquement par les mêmes phases.

Une première phase expérimentale s'installe, de nombreuses situations mathématiques « similaires » sont expérimentées, des conjectures sont faites, des compétences locales s'installent. Ensuite survient une phase de maturation, un nouveau concept naît, certaines conjectures sont prouvées (mais certaines attendront de nombreux cycles pour être résolues).
Finalement une phase de réification survient, le nouveau concept devient lui-même un objet sur lequel tôt ou tard le cycle des trois phases se réinstalle.

Ce sont des phases que les chercheurs en mathématiques (et dans d'autres disciplines) vivent constamment, « une introspection permanente s'installe » et s'applique à d'autres champs d'activités que les mathématiques. Cette « introspection permanente » est certainement l'une des compétences transversales les plus désirées, puisqu'elle élargit le champ d'application des compétences locales et disciplinaires acquises au cours des cycles précédents. Pendant tout le cycle, la communication entre individus semble jouer un rôle fondamental dans l'émergence d'une nouvelle idée mais il ne faut pas négliger l'analyse individuelle. Ce passage du « procédural au structural » qui se répète indéfiniment semble une constante du développement des mathématiques.

L'objectif du projet est d'étudier l'installation des compétences disciplinaires et transversales in situ chez les élèves du cycle secondaire supérieur au travers du cours de mathématique, en tenant compte du parallélisme décrit ci-avant. Celui-ci doit maintenir présent à notre esprit que la plupart des concepts mathématiques (pensons à la notion de continuité, à la notion de groupe, à la notion de nombres complexes,...) ont émergés après bien des tâtonnements. Il ne faut dès lors pas s'étonner que le passage à la troisième phase (dans le processus d'apprentissage) soit difficile à atteindre pour nos élèves.

Cependant le contexte cognitif historique de la naissance des concepts peut nous aider à prévoir certaines difficultés de leur apprentissage, quoique cette analyse a ses limites car le contexte cognitif d'un élève de quinze ans aujourd'hui est bien différent de celui des élèves de quinze ans en 1960. Et que dire de la comparaison avec un mathématicien du 18ème siècle ! Mais nous sommes persuadés que l'utilisation de notre connaissance du développement historique des concepts dont nous voulons favoriser l'intégration au sein des compétences de nos élèves, peut aider. Souvent les problèmes qui ont donné naissance à ces concepts sont faciles à formuler et à comprendre. Ces derniers ont servi à résoudre des problèmes technologiques de l'époque. Ils constituent donc une merveilleuse source d'interdisciplinarité (par exemple, on consultera les quelques références mentionnées ci-dessous pour la navigation, les tables de mortalité,...) et ils permettent de se centrer sur l'activité principale en mathématique : résoudre des problèmes.

Pour réaliser l'objectif, le projet vise à concevoir et à expérimenter en continu des séquences d'enseignement des mathématiques qui tiennent compte des remarques ci-dessus. Comme l'indique le sous-titre du projet, des problèmes historiques sont à la base des séquences d'enseignement. Par la même occasion, des compétences terminales relatives au cours d'histoire sont rencontrées : analyser et critiquer des sources historiques (textes originaux de mathématiciens), organiser une synthèse mettant en évidence des processus évolutifs, des changements ou des synchronismes, communiquer un savoir historique (traduction dans un langage moderne ou symbolique), …

La validation (par rapport à l'objectif d'installer des compétences transversales) des séquences d'enseignement mises au point dans le cadre ci-dessus, ne peut que difficilement se faire à travers des expériences de courte durée. En effet, l'installation des compétences transversales ne se fait que lentement au cours de l'apprentissage (plusieurs cycles sont nécessaires).

Il nous semble également important que certains des chercheurs soient à la fois impliqués dans l'élaboration des séquences d'enseignement et dans la mise en oeuvre des séquences d'enseignement sur le terrain.
La préparation des premières séquences d'enseignement a débuté en juillet 1999. Des contacts avec des enseignants ont été pris dans les divers réseaux en vue de concrétiser la phase de test des séquences. Ces dernières seront modifiées à la lumière de ces expérimentations.

Bref résumé du contenu de la recherche

Il existe de nombreux travaux antérieurs qui tentent de cerner les objectifs d'un cursus de mathématique en terme de compétences. On citera des travaux réalisés à Mons, dans le cadre du CREM , du GEM, . . . ou encore à l'extérieur de nos frontières.

Dans cette recherche, il ne s'agit pas de répéter ces études mais plutôt démontrer comment atteindre ces compétences au travers de séquences. Un des objectifs finaux de la recherche est donc la production de séquences d'enseignement rédigées sous forme de modules, comprenant toutes les informations utiles pour leurs réalisations pratiques. Ces séquences d'enseignement ainsi mises au point seraient à la disposition des enseignants (via Internet entre autres) et pourraient faire l'objet de séances d'information et de formation continuée destinées aux enseignants.

Dans ce rapport, les séquences réalisées sont disponibles sous la forme de modules détachables, faciles à manipuler et à reproduire. En outre, l'enseignant peut les adapter à ses besoins. Elles ne se veulent pas exhaustives mais simplement cohérentes. Elles n'incluent pas les exercices de « drill » qui succèdent la phase d'introduction et sont laissés à l'appréciation du professeur.

Chaque séquence comporte des références aux compétences terminales et une fiche méthodologique distincte. Les programmes de mathématique recommandent l'utilisation de l'outil informatique. A cette fin, certaines séquences font appel aux logiciels EXCEL 97 (disponible dans tous les centres cybermédias) et DERIVE (logiciel classique pour les professeur de mathématique, de coût modéré et faisant l'objet de formations en cours de carrière).

Dans chaque module, des problèmes historiques tels qu'ils nous ont été transmis au travers de divers documents (tablettes d'argile, manuscrits,...) servent de « situation problème ». Quand c'est possible nous avons choisi des textes dont la multidisciplinarité est évidente.

Titres des modules réalisés :

La genèse des équations
La découverte des irrationnel(le)s
Second degré et chaos
Histoires coniques : la parabole
Le nombre « π » et le cercle

De la « ligne » au vecteur
Des lieux plans au fil du temps
Un problème de Fermat

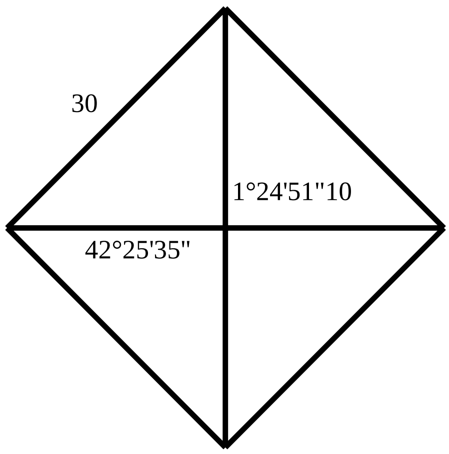
2. LA DECOUVERTE DES IRRATIONNEL(LE)S

La tablette YBC 7289 et la racine de 2

Les mathématiques babyloniennes sont caractérisées par l'importance de la résolution d'équations du deuxième degré. Dans la grande majorité des problèmes rencontrés dans les tablettes babyloniennes, les données numériques sont telles que l'extraction d'une racine carrée lors de l'avant-dernière étape de la résolution soit réalisée sur un carré parfait[1].
Cependant, il y a des exceptions. Certains textes montrent l'utilisation d'une approximation de la racine de *2*. Plusieurs approximations ont été proposées par les Babyloniens. Par exemple, *1°25'* ou mieux, *1°24'51"10*.

Ces derniers nombres sont écrits dans le système de numération de base 60, appelé système sexagésimal[2]. Actuellement, nous exprimons les nombres dans le système décimal. Cependant, le système de base soixante ne nous est pas étranger. C'est, par exemple, celui que nous utilisons pour la mesure du temps. Chaque heure y est divisée en 60 minutes et chaque minute en 60 secondes.
Nous mélangeons parfois les systèmes de base 60 et de base 10 lorsque les circonstances nous obligent à utiliser une subdivision de la seconde (on parle de dixièmes, centièmes, millièmes, ... de seconde).

Voici la tablette YBC 7289 (Yale Babylonian Collection). Elle date d'environ 1700 av. J.-C.



On y trouve le dessin d'un carré et de ses deux diagonales.
On y relève aussi les indications *30* sur un côté et *1°24'51"10* et *42°25'35"* sur une diagonale.

$$\begin{aligned} 1°24'51"10 &= 1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60\times 60}+\frac{10}{60\times 60\times 60} \\ &= 1+\frac{4}{10}+\frac{36}{3600}+\frac{15}{3600}+\frac{10}{60\times 3600} \end{aligned}$$

---

[1] Voir le module intitulé " La genèse des équations"
[2] Voir la séquence multimédia relative au module "La genèse des équations"

$$= 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{910}{216000}$$
$$= 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{864}{216000} + \frac{46}{216000}$$

$$= 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{432}{216 \cdot 10^4} + \frac{216}{216 \cdot 10^5} + \frac{432}{216 \cdot 10^6} + \frac{208}{216 \cdot 10^7} + \cdots$$

$= 1{,}41421296$...... Il s'agit visiblement d'une très bonne approximation de $\sqrt{2}$.

En effet, la calculatrice de Windows $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562373$.
Les Babyloniens calculaient une longueur approchée de la diagonale d'un carré en multipliant la longueur de son côté par le nombre *1°24'51"10*.

Les tables de carrés

Actuellement, lorsque le nombre dont on doit extraire la racine carrée n'est pas un carré, nous disposons de calculatrices qui nous simplifient considérablement la vie.

Pour faciliter la recherche de racines carrées, les Babyloniens avaient mis au point des tables de carrés du type suivant :

Côtés	Carrés
1°20'	*1°46'40"*
1°21'	*1°49'21"*
1°22'	*1°52'04"*
1°23'	*1°54'49"*
1°24'	*1°57'36"*
1°25'	*2°00'25"*

Supposons que le scribe ait à calculer la racine carrée de *1°54'49"*. Il choisit la table de carrés adéquate et cherche le nombre *1°54'49"* dans la colonne des carrés. Le côté correspondant lui fournit la racine carrée cherchée.

Exemple décimal : supposons que nous disposions de tables décimales de carrés et recherchons la racine carrée de *13,4689* en nous aidant des tables figurant ci-dessous.

- *13,4689* est compris entre 9 et 16.
  Sa racine carrée est comprise entre 3 et 4.
  Prenons la table de carrés des nombres compris entre 3 et 4.
- 13,4689 est compris entre 12,96 et 13,69.
  Sa racine carrée est comprise entre 3,6 et 3,7.
  Prenons la table de carrés des nombres compris entre 3,6 et 3,7.
- 13,4689 y figure et sa racine carrée vaut 3,67.

Nombres	Carrés
1	1

2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

3,1	9,61
3,2	10,24
3,3	10,89
3,4	11,56
3,5	12,25
3,6	12,96
3,7	13,69
3,8	14,44
3,9	15,21

3,61	13,0321
3,62	13,1044
3,63	13,1769
3,64	13,2496
3,65	13,3225
3,66	13,3956
3,67	13,4689
3,68	13,5424
3,69	13,6161

Cependant, lorsque le nombre dont on doit rechercher la racine ne figure pas dans une table, il faut déterminer une valeur approchée de sa racine carrée.

Supposons que nous devions calculer, à l'aide de la table sexagésimale ci-dessus, une valeur approchée de $\sqrt{2}$.

Le carré est *2* : il est compris entre *1°57'36"* et *2°00'25"*.

Sa racine est donc comprise entre *1°24* et *1°25*.

$$1°24' \leq \sqrt{2} \leq 1°25'$$

$$1+\frac{24}{60} \leq \sqrt{2} \leq 1+\frac{25}{60}$$

$$1{,}4 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}416666...$$

Nous obtenons déjà une valeur approchée de $\sqrt{2}$ au dixième près !

Les Babyloniens sont allés plus loin dans la précision quant au nombre correct de décimales et ont donné[3] pour $\sqrt{2}$ la valeur *1°24'51"10* comme nous l'atteste la tablette YBC7289.

Ce qui donne $1+\frac{24}{60}+\frac{51}{3600}+\frac{10}{216000}=1{,}414212963\cdots$ dans le système décimal !

L'erreur commise est de l'ordre de $6\cdot 10^{-7}$!

[3] On doit à CHRISTOPH RUDOLFF (499-1545) la notation actuelle de la racine carrée : $\sqrt{\ }$. Les algébristes plus anciens utilisaient le « R » pour **r**acine. En fait, l’invention de la presse à imprimer par GUTENBERG en 1434 favorisa l’impression de textes anciens de mathématiques (APOLLONIUS, DIOPHANTE). Cela accéléra la mise en place de notations algébriques mieux adaptées à cette impression.

Les Pythagoriciens et les irrationnel(le)s

Une biographie pleine d'incertitudes …[4]

Originaire de Samos en Ionie — à moins que ce ne soit de Tyrrhénie, de Tyr ou de Syrie), PYTHAGORE (vers 585 av. J.-C.), que certains auteurs tiennent pour un personnage légendaire, se fixe vers 530 avant notre ère à Crotone après un voyage en Egypte.
Il introduit, dit-on, le mot *philosophie* et fonde un cercle, sorte de communauté à la fois savante et religieuse, dont le nombre de membres s'étend rapidement.
Les novices revêtent l'habit de la "secte", prononcent des vœux de silence et de pauvreté, reçoivent une sévère formation morale puis un enseignement mathématique.
La spéculation sur les nombres et sur l'harmonie occupe la place la plus importante de l'initiation : dans la pensée pythagoricienne, le nombre représente en effet l'essence de toute chose. Cette école développe d'ailleurs une théorie de la musique et de l'acoustique, ou, encore, une astronomie.

A côté d'un certain souci religieux, elle accorde enfin un grand intérêt pour la politique : elle cherche une harmonie morale qu'elle veut étendre au plan de la cité.

PYTHAGORE estime que la même âme s'incarne successivement dans le corps de différents animaux. Alors que quelqu'un bat un chien qui hurle, il s'interpose : "Je reconnais en lui la voix d'un ami!"...
En visitant un temple, PYTHAGORE reconnaît parmi les ex-voto un bouclier qu'il avait porté lors de la guerre de Troie ! En se concentrant, il se souvient avoir été poisson, prétend-il ...

De nombreux disciples, des deux sexes, emboîtent le pas à PYTHAGORE. Bien qu'issus de tous les milieux, ils forment un groupe homogène. On dénombre notamment dans leurs rangs des champions olympiques, des astronomes, des sculpteurs, des médecins, des musiciens, des ingénieurs, des amiraux, des architectes, etc. Les centres pythagoriciens les plus remarquables se situent en Italie du Sud, à Crotone et à Tarente.

Plus de 2.500 ans après sa mort, il est bien difficile de connaître la vie de PYTHAGORE. Les sources sont tardives. Le premier "témoin", l'historien HERODOTE, lui est postérieur d'un siècle. PLATON n'est pas d'un grand secours : il ne cite en tout et pour tout le nom de PYTHAGORE qu'une seule fois.

Certes, ARISTOTE avait bien rédigé *Sur les Pythagoriciens*, mais cet ouvrage est perdu. En revanche, deux œuvres, la *Vie de Pythagore*, de PORPHYRE, et la *Vie pythagorique*, de JAMBLIQUE, ont été conservées intégralement, mais elles datent du III^{ème} siècle après J.-C. et paraissent fantaisistes. Comble de malchance, aucun écrit de PYTHAGORE — pour peu que de telles traces aient jamais existé! — n'est parvenu jusqu'à nous.

[4] Les premières biographies de PYTHAGORE datent de plusieurs siècles après sa mort. La fiabilité que l'on peut leur accorder est donc limitée. Nous renvoyons le lecteur à la bibliographie.

PYTHAGORE constitue donc l'une des figures les plus mystérieuses de l'Antiquité. Sa pensée n'est connue longtemps que par une tradition orale entourée de secrets. Le personnage devient vite — peut-être même de son vivant — une légende. Une extraordinaire affabulation l'entoure rapidement et ne cesse de se développer.

Que d'ouvrages n'a-t-on écrits au sujet d'un homme dont on ne connaît pratiquement rien !

L'enseignement dispensé chez les Pythagoriciens ...

Pythagoriciens

Akousmatikoi (acousmaticiens)	**Mathematikoi** (mathématiciens)
akousma = enseignement oral. **kousmatikoi** = ceux qui suivaient l'enseignement oral de Pythagore. = candidats à l'initiation ?	**mathema** = le sujet d'étude, le savoir **mathematikoi** = ceux qui étaient plus avancés dans le savoir ; = initiés ? Cours dispensés : arithmétique, géométrie, harmonie et astro$\left\{\begin{array}{l}\text{nomie}\\ \text{logie}\end{array}\right.$.

La découverte des irrationnelles, un événement de taille !

Expliquons tout d'abord l'utilisation de ce féminin pluriel. A l'époque grecque, l'épithète "irrationnel" ne pouvait être appliqué à un nombre. C'est pourquoi on parle plutôt de la découverte des "irrationnelles", sous-entendant qu'il s'agit de "grandeurs", de "quantités".

Soulignons aussi que dans les textes grecs anciens, trois termes font référence à la notion d'irrationalité. Nous les traduirions littéralement par : "inexprimable", "irrationnel" et "incommensurable". On comprend donc aisément les délicats problèmes de traduction et d'exégèse soulevés par l'examen de ces textes.

> *Certains disent que la divinité s'est vengée de ceux qui ont divulgué les enseignements de PYTHAGORE : c'est ainsi que celui qui avait révélé la construction de la figure à vingt angles*[5] *périt en mer, pour avoir commis un acte d'impiété. Certains ont dit que celui aussi qui avait révélé ce qui concerne l'irrationalité et l'incommensurabilité, a subi le même sort.*
>
> *Jamblique, Vie de PYTHAGORE, §247*

---

[5] Il s'agit du dodécaèdre.

Dans le commentaire de JAMBLIQUE reproduit ci-dessus, on évoque l'*irrationalité* et l'*incommensurabilité*. C'est donc que ces deux concepts ne prennent pas exactement la même signification dans l'esprit de l'auteur. Examinons la notion d'*incommensurabilité*, dans lequel on retrouve la notion de *mesure*.

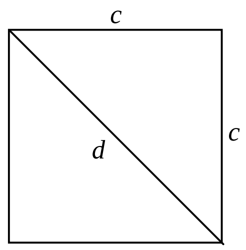
Remarquons que les nombres négatifs n'existaient pas à l'époque, les seuls nombres reconnus étaient positifs et forment ce que nous appelons maintenant les *naturels* et les *rationnels*[6] (c'est-à-dire les quotients de nombres entiers).

Définition :

Deux grandeurs[7] a et b sont dites commensurables (traduction littérale : *mesurables ensemble*) si elles ont une unité de mesure commune, c'est-à-dire s'il existe une unité de mesure u (u nombre naturel ou rationnel) telle que :

$$a = \mathrm{m}.u \text{ et } b = \mathrm{n}.u \text{ avec m et n entiers.}$$

La diagonale et le côté d'un carré n'ont pas de commune mesure.



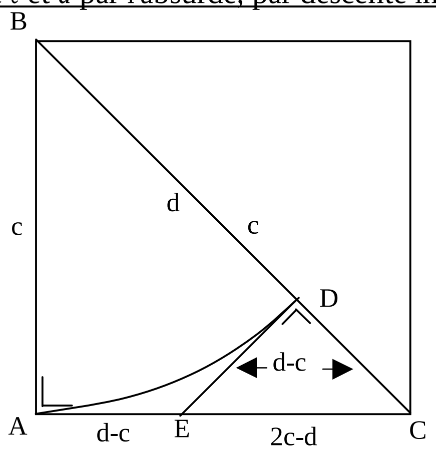
Si nous considérons un carré de côté c, le théorème de PYTHAGORE permet d'écrire successivement :

$$d^2 = c^2 + c^2 = 2c^2 \text{ et } \frac{d^2}{c^2} = 2.$$

Comme nous le montrerons plus loin, cette dernière relation ne peut être satisfaite pour d et c entiers. Ce fait se traduit en disant que d et c n'ont pas de commune mesure[8].
Les historiens des mathématiques admettent généralement que le tournant essentiel dans le domaine de l'incommensurabilité fut effectué lors de la prise de conscience de ce fait capital.

Démonstration de l'incommensurabilité
de c et d par l'absurde, par descente infinie :

> La démonstration par l'absurde consiste à affirmer le contraire de la thèse et à en déduire une contradiction face aux éléments de départ.



Supposons que dans le carré ci-contre, côtés et diagonales possèdent une commune mesure, c'est-à-dire, avec les notations adoptées :

$$\left.\begin{array}{l}|AB| = c \\ |BC| = d\end{array}\right\} \text{avec } c \text{ et } d \text{ entiers.}$$

Le cercle de centre B et de rayon c coupe la diagonale AC en D et on a, de manière évidente : $|DC| = |BC| - |BD| = d - c$.

[6] Les naturels sont bien entendu des rationnels.
[7] Chez les anciens Grecs, ces grandeurs peuvent être des longueurs de segments, des aires ou des volumes.
[8] On pourrait dire que d et c n'ont pas de **rapport**, sous-entendu rapport rationnel. En français, lorsque l'on dit que "deux faits n'ont aucun rapport", cela signifie que l'on ne peut les comparer.

Soit E l'intersection de AC et de la tangente au cercle en D.
$DE \perp BC$ car la tangente en un point d'un cercle est perpendiculaire au rayon y arrivant.

Par conséquent, le triangle CDE est un triangle rectangle isocèle (car $\widehat{DCE} = 45°$) et on en déduit :
$|DE| = |DC| = d - c$
De plus, EA et ED sont les deux tangentes issues du point E au cercle, ce qui nous permet d'affirmer successivement :
$|EA| = d - c$ et $|EC| = c - (d - c) = 2c - d$

Les nombres c et d sont entiers, par conséquent, il en est de même pour $d - c$ et $2c - d$.
Le triangle DCE a donc ses trois côtés de longueur entière.

Comme il est rectangle isocèle tout comme le triangle ABC de départ sur lequel nous avons effectué notre construction, nous pouvons recommencer la construction et obtenir un autre triangle dont les côtés seront eux aussi entiers et plus petits que les précédents.

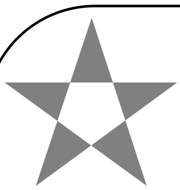
(d, c)	devient	$(2c - d, d - c)$.
$(2c - d, d - c)$	devient	$(3d - 4c, 3c - 2d)$.
$(3d - 4c, 3c - 2d)$	devient	$(10c - 7d, 5d - 7c)$.
$\vdots$		$\vdots$

Et ainsi de suite. Toutes les grandeurs mises en jeu sont donc des nombres entiers de plus en plus petits mais non nuls d'où réside la contradiction. Cette technique est appelée « descente infinie ».

Examinons également la suite des rapports de la diagonale au côté : $\dfrac{d}{c} = \dfrac{2c - d}{d - c} = \dfrac{10c - 7d}{5d - 7c} = \cdots$

Chaque égalité se ramène à $\left(\dfrac{d}{c}\right)^2 = 2$.

Cette technique dite "par descente infinie" est également applicable au pentagone régulier. Certains avancent d'ailleurs que la découverte de l'incommensurabilité aurait pu être réalisée grâce à la figure bien connue du *pentagramme*.

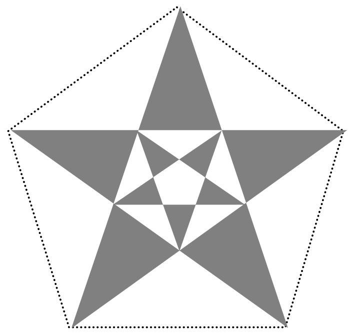


<u>Le pentagramme, signe de reconnaissance des Pythagoriciens</u>

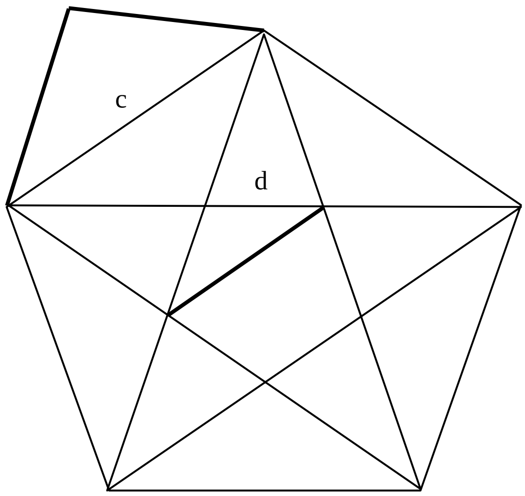
"Le devin PYTHAGORE, bien qu'il n'ait pas jugé bon de nous laisser rien de ses propres écrits, à en croire du moins OCELLOS DE LUCANIE, ARCHYTAS et le reste de ses disciples, ne commençait jamais une lettre par les formules traditionnelles : "Bonjour !" ou "Prospérité !", mais prescrivait de débuter par "Santé !". Aussi tous ses disciples avaient-ils coutume, dans la correspondance qu'ils échangeaient, de placer le vœu de "Santé" au tout début de leurs lettres, parce qu'il convenait parfaitement à l'âme et au corps.
En outre, le triple triangle étoilé, le pentagramme, symbole éternel à la secte, ils l'appelaient "Santé"; si en général, "Santé !" voulait dire en même temps "Bonjour !" et "Prospérité", la réciproque n'était nullement vraie."

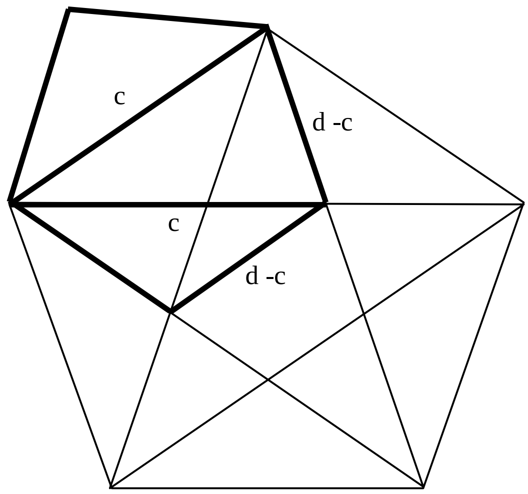
LUCIEN DE SAMOSATE (écrivain et philosophe cynique du II^{ème} siècle)
Sur une faute en saluant, 5.

Un vase d'Aristophon datant du VII$^{\text{ème}}$ siècle av. J.-C. présente un tel pentagone étoilé sur ses flancs. Ce vase, trouvé en Italie et actuellement conservé à Rome, atteste que la figure géométrique du pentagramme était déjà connue à cette époque.
D'autre part, en observant pentagone et pentagramme, on ne peut que constater l'infinité de figures semblables de plus en plus petites déduites les unes des autres et de considérer la suite des rapports des diagonales aux côtés.



Voici un pentagone convexe régulier et ses diagonales. Soit c la longueur des côtés et d celle des diagonales. Des segments supplémentaires ont été tracés de manière à faire apparaître un nouveau pentagone convexe régulier[9].





En observant la figure ainsi obtenue, on peut calculer la longueur du côté et de la diagonale du nouveau pentagone obtenu. On trouve $d-c$ comme côté et c comme diagonale.

Nous pouvons reprendre tout le processus avec le nouveau pentagone obtenu.
De d et c comme longueur de diagonale et de côté, on passe à c et $d - c$.

(d , c)	devient	$(c , d - c)$.
$(c , d - c)$	devient	$(d - c , 2c - d)$.
$(d - c, 2c - d)$	devient	$(2c - d, 2d - 3c)$.

Et ainsi de suite.

[9] La démonstration de la régularité de ce pentagone est simple. Elle ne fait appel qu'à des notions du programme de 3$^{\text{ème}}$.

De la même façon que pour le triangle rectangle isocèle, la méthode dite de « descente infinie » nous livre une suite de longueurs **entières** de plus en plus petites mais non nulles d'où vient la contradiction.

Tous les pentagones obtenus étant semblables, on obtient également la suite des rapports suivants : $\frac{d}{c} = \frac{c}{d-c} = \frac{d-c}{2c-d} = \cdots$.

Chaque égalité se ramène à affirmer que $\left(\frac{d}{c}\right)^2 - \left(\frac{d}{c}\right) - 1 = 0$.

En posant $\frac{d}{c} = \varphi$, on obtient l'équation $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ dont la racine positive est le fameux *nombre d'or* $\varphi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Dans les cas du carré et du pentagone régulier, nous avons donc prouvé que *c* et *d* étaient incommensurables.

Les rapports $\frac{d}{c}$ ne sont donc pas des nombres rationnels.

De nos jours, nous les appelons *nombres irrationnels.*

Nous les notons $\frac{d}{c} = \sqrt{2}$ dans le cas du carré et $\frac{d}{c} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ dans le cas du pentagone.

Certains prétendent que la date de la découverte des quantités irrationnelles remonte à PYTHAGORE. D'un spécialiste à l'autre, cette date varie entre le VI$^{\text{ème}}$ siècle av. J.-C. et le V$^{\text{ème}}$ siècle de notre ère. Certains affirment que la découverte est l'apanage du Maître lui-même, d'autres estiment qu'il faut l'attribuer à un disciple. Peu de certitudes …

Nous n'avons aucune preuve du fait que les contemporains des Pythagoriciens ont établi le lien entre les grandeurs incommensurables et les racines irrationnelles de nombres naturels.

Ce que l'on peut affirmer, par contre, c'est le contexte autour duquel la découverte a eu lieu. En effet, en ce qui concerne tous les calculs d'ordre pratique, des approximations de racines carrées suffisaient amplement. On pouvait toujours s'imaginer n'être pas allé assez loin dans les décimales du nombre envisagé pour découvrir une éventuelle séquence de chiffres qui se répète dans son expression décimale, c'est-à-dire sa *période*. Par contre, dans le domaine des arts « nobles » tels que la musique, il était inadmissible de ne pas aboutir à un résultat exact, quelle que soit l'opération effectuée.

La proposition X,117 des *Eléments* d'EUCLIDE, adaptée ci-dessous, concerne l'irrationnalité de $\sqrt{2}$. La place plutôt modeste qui lui est réservée dans cette œuvre magistrale prouve que le résultat était bien connu et largement diffusé à cette époque.

Auparavant, ARISTOTE déjà, cite la preuve de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ comme exemple typique de démonstration par l'absurde. Cet exemple est cité 26 fois dans le *Corpus aristotélicien*.

ARISTOTE naît à Stagire, en Macédoine, aux alentours de 384 avant J.-C. Son nom signifie "le meilleur". Il descend d'une lignée de médecins, métier que son père exerce à la cour de Macédoine. Durant ses études à l'Académie d'Athènes, ARISTOTE est un brillant disciple de PLATON. A la mort de son Maître et déçu de ne pas assurer sa succession, il est envoyé à Assos en Troade où il devient conseiller politique du tyran HERMIAS D'ATARNEE.
Il y ouvre également une école. Par la suite, ARISTOTE est appelé à la cour de Macédoine pour éduquer le petit ALEXANDRE qui deviendra

Démonstration par l'absurde :

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel.
On peut dès lors l'écrire sous la forme d'une fraction.

$\sqrt{2}=\dfrac{a}{b}$ avec *a*, *b* nombres entiers positifs, premiers entre eux (c'est-à-dire que l'on a simplifié la fraction).

La définition de la racine carrée nous permet d'écrire :

$$2=\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2} \quad \Leftrightarrow \quad a^2=2b^2$$

Le second membre de cette égalité est un nombre pair, par conséquent, le premier l'est aussi.

De plus, un nombre entier est pair si et seulement si son carré l'est.
Par conséquent, *a* est un nombre pair.
Nous pouvons donc écrire : $a=2k$ avec *k* entier.
Réécrivons $a^2=2b^2$ en tenant compte de ce fait :

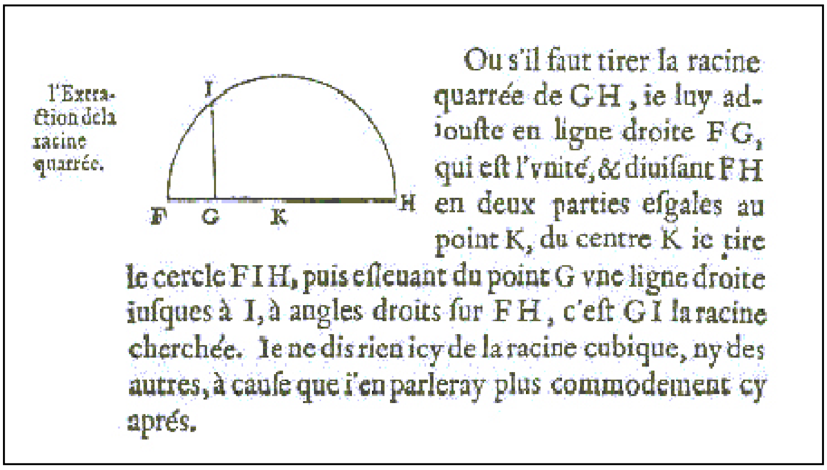
$$(2k)^2=2b^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4k^2=2b^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2k^2=b^2$$

De la même manière que précédemment, nous en déduisons que *b* est pair puisque son carré est le double d'un nombre entier.

Nous avons donc démontré que *a* et *b* étaient tous les deux pairs ce qui est impossible puisque nous étions partis d'une fraction simplifiée c'est-à-dire dont le numérateur et le dénominateur n'avaient pas de facteur commun.

Construction de la racine carrée de la longueur d'un segment quelconque :

Le moyen précédent nous permet uniquement de construire la racine carrée d'un nombre entier.



l'Extraction de la racine quarrée.

Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouste en ligne droite F G, qui est l'vnité, & diuisant F H en deux parties esgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis esleuant du point G vne ligne droite iusques à I, à angles droits sur F H, c'est G I la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cause que i'en parleray plus commodement cy aprés.

RENE DESCARTES, philosophe et savant bien connu, naquit en France en 1596 et y décéda en 1650. Il écrivit le "*Discours de la méthode pour conduire correctement la Raison et chercher la vérité dans les Sciences*." dont est extraite la célèbre phrase "*cogito ergo sum*" ("Je pense donc je suis"). Nous allons nous intéresser à "*La Géométrie*" de DESCARTES, annexée à son œuvre précitée. Un extrait en est reproduit dans l'encadré ci-dessus.

- Construisons un segment [GH] dont la longueur est le nombre dont nous voulons extraire la racine carrée.
- Prolongeons [GH] en lui ajoutant un segment unitaire [FG] ;
- Construisons K, le milieu de [FH] ;
- Traçons le cercle de centre K et de rayon $|KF|$;
- La perpendiculaire à FH en G coupe le cercle en I.

$|GI|$ est la racine de $|GH|$, c'est-à-dire du nombre de départ.

En effet, le triangle FIH est rectangle (l'angle $F\hat{I}H$ intercepte le diamètre [FH]).

$IG^2 = FG \cdot GH$ (Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur cette dernière.)

Or, $|FG| = 1$, donc $IG^2 = GH$ et $|IG| = \sqrt{|GH|}$

Approximation d'une racine selon Héron d'Alexandrie

On attribue à HERON D'ALEXANDRIE la formule d'approximation de la racine carrée de N. Nous ne connaissons avec précision ni la date de sa naissance, ni celle de sa mort mais on estime qu'il a vécu au premier siècle de notre ère.

Dans son ouvrage intitulé *Métriques*, il explique son approche de la racine carrée de 720. Voici ce qu'il en dit :

Texte de HERON	Commentaires

Puisque 720 n'a pas son côté rationnel, on peut obtenir son côté avec une très petite différence comme suit. Comme le premier nombre carré successeur de 720 est 729 qui a 27 pour côté, on divise 720 par 27. *Cela donne* $26+\frac{2}{3}$.	Cela signifie que 720 n'est pas l'aire d'un carré dont le côté est rationnel. Dans notre langage actuel, nous dirions que $\sqrt{720}$ n'est pas un nombre rationnel. Le carré le plus proche de 720 est $729 = 27^2$.
On ajoute 27, ce qui fait $53+\frac{2}{3}$ *, et l'on en prend la moitié, soit* $26+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.	$27^2 = 729$ ✹ 27 est une approximation par excès $\left(26+\frac{2}{3}\right)^2 = 711+\frac{1}{9}$ ✹ $26+\frac{2}{3}$ est une approximation par défaut Leur moyenne arithmétique $26+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ est donc une meilleure approximation.
Le côté de 720 sera par conséquent très proche de $26+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.	
En fait, si on multiplie $26+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ *par lui-même, le produit est* $720+\frac{1}{36}$, *de sorte que la différence (sur le carré) est* $\frac{1}{36}$.	En effet, le carré de ce nombre ne diffère de 720 que de $\frac{1}{36}$.
Si l'on désire rendre la différence inférieure encore à $\frac{1}{36}$, *on prendra* $720+\frac{1}{36}$ *au lieu de 729, et en procédant de la même façon, on trouvera que la différence résultante est beaucoup moindre que* $\frac{1}{36}$.	Pour obtenir une meilleure approximation, il suffit de réitérer le processus en remplaçant 729 par $720+\frac{1}{36}$.

Utilisons la technique de HERON pour un nombre N quelconque[10] dont nous voulons calculer la racine carrée.

- Soit r, un nombre connu[11] dont le carré est proche de N par excès.
  C'est une approximation par excès de $\sqrt{N}$, donc $r > \sqrt{N}$.

- Calculons $\frac{N}{r}$. C'est une approximation par défaut de $\sqrt{N}$.

[10] Que se passe-t-il lorsque N est un carré parfait ?
[11] On peut, par exemple, utiliser une table de carrés.

En effet, $r > \sqrt{N}$

$$r^2 > N \qquad \text{(élévation au carré de l'inégalité ci - dessus)}$$

$$1 > \frac{N}{r^2} \qquad (r \neq 0)$$

$$N > \frac{N^2}{r^2} \qquad (N > 0)$$

$$\sqrt{N} > \frac{N}{r} \qquad \text{(passage à la racine carrée)}$$

- Le nombre $\dfrac{\frac{N}{r}+r}{2}$, moyenne arithmétique de ces deux approximations, nous fournit une nouvelle approximation de $\sqrt{N}$, meilleure que les deux précédentes[12].

Si r était une approximation par défaut, alors $\dfrac{N}{r}$ serait une approximation par excès, et le même processus serait d'application.

Soit r_0 l'approximation initiale. Les approximations successives obtenues seront notées r_1, r_2, r_3, …

Formule de HERON pour le calcul approché de $\sqrt{N}$: $r_n = \dfrac{r_{n-1} + \frac{N}{r_{n-1}}}{2}$ est la $n^{\text{ème}}$ approximation.

Appliquons le processus ci-dessus pour calculer $\sqrt{5}$. Prenons $r_0 = 2$.

1. $r_1 = \dfrac{2+\frac{N}{2}}{2} = 2{,}25$
2. $r_2 = \dfrac{2{,}25+\frac{N}{2{,}25}}{2} = 2{,}236111111$
3. $r_3 = \dfrac{2{,}236111111+\frac{N}{2{,}236111111}}{2} = 2{,}236067978$
4. $r_4 = \dfrac{2{,}236067978+\frac{N}{2{,}236067978}}{2} = 2{,}236067977$

En seulement 3 étapes, on obtient 8 décimales exactes ! En 4 étapes, on a le même résultat que la calculatrice, à savoir 2,236067977.

Bibliographie

[12] En général, la moyenne arithmétique d'une approximation par défaut et d'une approximation par excès d'un nombre n'est pas forcément meilleure que les approximations de départ. C'est vrai dans ce cas-ci.

Mathématiques en Méditerranée – Des tablettes cunéiformes au théorème de Fermat, Edisud, Aix-en-Provence, 1988

Otto Neugebauer, *Les sciences exactes dans l'Antiquité*, Actes Sud, Paris 1990

A. Dahan-Dalmenico / J.Peiffer, *Une histoire des mathématiques – Routes et dédales*, Seuil, Paris 1986

Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press 1972

Histoire des sciences arabes, sous la direction de Roshdi Rashed, Seuil, Paris 1997

B.L. van der Waerden, *A History of Algebra*, From al-Khwarizmi to Emmy Noether, Springer-Verlag, Berlin, 1985

Maurice Caveing, *L'irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide*, Presses Universitaires du Septentrion, Villeneuve d'Ascq 1998

Gilles Godefroy, *L'Aventure des nombres*, Editions Odile Jacob, Paris 1997

Jamblique, *Vie de Pythagore*, Les Belles Lettres, Paris 1996.

Diogène Laërce, *Vies et opinions des hommes illustres*, Les Belles Lettres.