Chapitre 1 : La proportionnalité d'un point de vue mathématique et didactique lors de la liaison primaire-secondaire

1. Pourquoi s'intéresser à la proportionnalité ?

Il est difficile et fastidieux de dresser un bilan exhaustif des résultats des nombreuses recherches menées ces vingt dernières années sur l'enseignement de la proportionnalité. Les quelques éléments et citations suivants devraient néanmoins planter le décor et permettre aux lecteurs d'appréhender diverses sources de difficultés et les mettre ainsi en relation (proportionnelle ?) avec des situations vécues au sein d'une classe ou lors d'activités de préparation.

1.1 La proportionnalité, une notion centrale et pourtant bien difficile à construire

La proportionnalité est une notion centrale ; une bonne maîtrise par les élèves des connaissances relatives à ce thème est fondamentale, aussi bien pour son usage dans la vie courante, son utilisation dans diverses disciplines ou dans le cadre professionnel que pour son importance dans divers domaines des mathématiques. La proportionnalité est donc partout et pourtant son apprentissage ne va pas de soi ... tout particulièrement au moment de la transition primaire-secondaire.

> « *Ce n'est un mystère pour personne, la proportionnalité est pour bien des élèves une notion qui pose problème. Or sa maîtrise est indispensable non seulement pour les mathématiques mais aussi pour la plupart des disciplines scolaires et autres formations professionnelles* » (Boisnard et al, 1994).

1.2 Des évolutions majeures dans l'enseignement de la proportionnalité

> « *Les idées concernant la manière d'enseigner la proportionnalité ont beaucoup évolué ces dernières années. Le terme même de proportionnalité est relativement récent. On ne parle presque plus de la règle de trois alors qu'elle occupait une place fondamentale il n'y a pas si longtemps* » (Boisnard et al, 1994).

Aujourd'hui, l'enseignement de la proportionnalité ne se réduit plus à une simple technique de calcul. On est passé à une autre conception de l'enseignement de la proportionnalité, moins centrée sur l'algorithme de résolution (comme par exemple la règle de trois), mais davantage axée sur la perception d'une relation particulière entre deux grandeurs, sur la structure des problèmes et sur la description que permet d'en faire le modèle des proportions[3].

> « *Le simple apprentissage mécanique de la règle de trois et de toutes les règles qui en découlent n'est pas suffisant pour donner une véritable connaissance de la proportionnalité, c'est-à-dire une bonne représentation du concept sous-jacent à tous les problèmes, toutes les méthodes de résolution et toutes les propriétés mathématiques qui composent cet apprentissage particulier que l'on désigne désormais sous le terme de proportionnalité* » (Boisnard et al, 1994).

[3] voir notamment l'analyse de la notion de proportion dans les programmes français élaborée dans les différents ouvrages de la collection ERMEL.

1.3 Une évolution qui s'inscrit dans le cadre plus général de l'apprentissage par résolution de problèmes

Cette évolution de la notion de proportionnalité doit également être mise en parallèle avec les acquis récents de la recherche en didactique des mathématiques. A l'heure actuelle, la résolution de problèmes devrait occuper une place centrale dans la conception de dispositifs d'enseignement. Toutefois, il ne s'agit plus comme par le passé, d'amener les élèves à résoudre des classes de problèmes – identifiées par une technique de résolution précise - mais bien de développer des situations qui posent problème aux élèves, qui les obligent à réfléchir, à remettre en cause leurs connaissances, à franchir un pas supplémentaire dans la compréhension du concept et ainsi à se construire de nouveaux outils…

Ce principe général prend tout son sens dans le champ de la construction de la notion de proportionnalité.

> « *L'idée de situation de proportionnalité devient centrale. On va s'intéresser à la manière dont l'élève traite ce type de situations ainsi qu'à la manière dont il se les représente et les différencie des situations qui ne relèvent pas de la proportionnalité. On va s'interroger également sur les langages et les modèles mathématiques les mieux adaptés à chaque niveau de résolution* »(Boisnard et al, 1994).

1.4 Enseigner par situations-problèmes, plus facile à dire qu'à faire !

L'élève ne peut comprendre et construire la notion de proportionnalité qu'en résolvant des problèmes qui ne sont pas simplement des exercices d'application. Partir des situations et des problèmes, oui ... mais comment et qu'est-ce que cela implique au niveau de la (re)définition du travail des enseignants ?

> « *Aujourd'hui, on demande au maître d'enseigner en proposant d'abord aux élèves des problèmes dont la solution nécessite d'inventer des solutions originales que le maître cherche ensuite à faire évoluer pour aboutir à des éléments de savoirs nouveaux et à des solutions plus élaborées* » (Charnay, 2003).

Au niveau des discours officiels, il semble y avoir consensus sur une sorte de principe général sur la manière dont les compétences mathématiques se construisent. Mais entre des intentions générales et des pratiques quotidiennes, il y a souvent un fossé difficile à franchir car la mise en oeuvre de ce principe d'action pédagogique doit nécessairement s'accompagner d'une solide réflexion didactique préalable.

> « *Les enseignants et les formateurs sont, dans leur grande majorité, d'accord avec l'idée qu'il faut partir des situations et des problèmes (…) Malheureusement la mise en œuvre pratique d'une telle idée n'est pas seulement une affaire de choix pédagogique. Les travaux menés en didactique montrent bien qu'il faut des connaissances précises (sur les élèves, leurs conceptions, leurs difficultés, sur les problèmes eux-mêmes, sur les concepts qu'ils mettent en jeu, …). Surtout, il faut une démarche pour la mise au point des situations et des séquences particulières correspondant à l'apprentissage visé* » (Boisnard et al, 1994).

L'apprentissage par résolution de problèmes n'est pas qu'un principe général auquel il faut se référer ; c'est d'abord une démarche d'analyse et de prise en compte de la spécificité des situations et des problèmes pouvant conduire à un processus d'apprentissage et de compréhension. Cette démarche ne va pas de soi et est souvent laissée à l'initiative des enseignants. Les programmes et autres Socles de compétences évoquent bien le cadre général dans lequel doit s'inscrire l'enseignement des mathématiques mais ils sont par contre muets sur la démarche à adopter… comme si elle allait de soi. Or, tous les praticiens et les enseignants le savent : la réalité est toute autre.

1.5 La proportionnalité, un apprentissage qui s'inscrit dans la durée

Il a déjà été rapidement question des difficultés liées à l'enseignement de la proportionnalité lors de la transition primaire-secondaire. En fait, il n'est sans doute pas faux d'affirmer que la proportionnalité traverse pratiquement toute la scolarité obligatoire.

> « *Le fait que toutes les situations de proportionnalité, quels que soient leurs contextes, puissent être modélisées par un seul type de fonctions numériques de la variable réelle, la fonction linéaire, est mis en évidence en classe de troisième où ce type de fonctions est étudié et intégré au type des fonctions affines, inaugurant ainsi l'étude de la notion de fonction qui est poursuivie par la suite, notamment dans l'enseignement de l'analyse. Cependant, dès l'école primaire, l'étude de telles situations est abordée, en mettant en œuvre de manière moins formelle, moins économique mais également moins abstraite certains aspects de ce modèle mathématique* » (« Articulation Ecole-Collège »).

La fonction linéaire ne fait l'objet d'une première étude qu'en classe de troisième alors que le travail sur la proportionnalité commence très tôt dans le primaire. Certains auteurs n'hésitent pas à établir que la première rencontre des élèves avec ce concept se situe lors de la découverte des structures multiplicatives (cycles 5/8).

2. Que disent les documents officiels ?

2.1 L'enseignement de la proportionnalité dans les Socles de compétences

Les Socles de compétences ne donnent guère d'informations sur les étapes d'une gradation de l'apprentissage de la proportionnalité. Il est vrai qu'il n'entre pas dans les objectifs d'un tel document de définir des axes de progression curriculaire.
On note toutefois que la proportionnalité apparaît de **manière explicite** dans la section qui définit les compétences relatives aux grandeurs. Dans l'introduction de cette section, on peut en effet lire ceci : « *La proportionnalité est travaillée à partir d'exemples de la vie quotidienne. On construit des tableaux et des graphiques qui montrent des relations entre les grandeurs* ».

Cette affirmation se retrouve traduite en compétences dans le tableau suivant[4]:

Tableau 1 : 3.3.2. Opérer, fractionner des grandeurs

		8 ans	12 ans	14 ans
M55	Calculer des pourcentages		C	E
M56	Résoudre des problèmes simples de proportionnalité directe.	↗	C	E
M57	Dans une situation de proportionnalité directe, compléter, construire, exploiter un tableau qui met en relation deux grandeurs.		C Compléter uniquement	C
M58	Reconnaître un tableau de proportionnalité directe parmi d'autres.		↗	C
M59	Déterminer le rapport entre deux grandeurs, passer d'un rapport au rapport inverse.		↗	C

Les compétences mises en évidence sont celles qui semblent directement et explicitement liées à la notion de proportionnalité. On pourra ainsi établir qu'au sortir de l'école primaire, les élèves doivent être capables de :

- calculer des pourcentages ;
- résoudre des problèmes simples de proportionnalité directe ;
- **compléter** (pas construire ni exploiter) un tableau qui met en relation deux grandeurs dans une situation de proportionnalité directe.

A ce stade de la réflexion, une première remarque s'impose : si, dans l'introduction du document de référence, il est clairement fait mention d'une construction de tableaux et de graphiques, au niveau de la définition des compétences, on ne parle plus que de représentations à l'aide de tableaux ; les graphiques semblent avoir disparus.

Assez curieusement, on note également que la compétence « *reconnaître un tableau de proportionnalité directe parmi d'autres* » semble réservée au seul enseignement secondaire (du moins au niveau de la certification). Comme on le verra par la suite, cela peut sembler étonnant au vu des difficultés rencontrées par les enseignants du secondaire confrontés à des élèves chez lesquels l'illusion de la linéarité est bien ancrée.

[4] Il est repris dans la rubrique « Opérer et fractionner » soit une des deux sections du domaine des Grandeurs, l'autre étant « Comparer et mesurer ».

Les compétences liées à la proportionnalité sont explicitement reprises dans le champ des grandeurs. Toutefois, comme cela a été dit précédemment, cette notion est assez centrale et il serait réducteur de la limiter à ce seul ensemble de compétences.

On retrouve aussi la proportionnalité, mais de manière implicite cette fois, dans le développement d'autres compétences en mathématiques. Ainsi, au niveau du **Traitement des données**, il est précisé que les élèves doivent apprendre à « *interpréter, comparer des tableaux, des arbres, des graphiques et d'en construire pour clarifier une situation ou éclairer une recherche. Le calcul des pourcentages, des moyennes, d'effectifs et de fréquences sont des outils pour répondre à ces questions. Le traitement de certaines situations prépare la notion de fonction* ». Les compétences correspondantes sont, pour la plupart, à certifier en secondaire.

De même, comme le souligne Ph. Rome[5], la proportionnalité ne se trouve-t-elle pas de manière encore plus implicite dans le développement des compétences reprises dans les tableaux ci-dessous ?

Tableau 2 : 3.1.2. Organiser les nombres par familles

		8 ans	12 ans	14 ans
M7	Relever des régularités dans des suites de nombres.	↗	↗	C

Tableau 3 : 3.2.3. Dégager des régularités, des propriétés, argumenter (Les solides et figures)

		8 ans	12 ans	14 ans
M40	Reconnaître et construire des agrandissements et des réductions de figures.	↗	C En s'appuyant sur des quadrillages.	C En s'appuyant sur les propriétés de **proportionnalité** et de parallélisme.

La proportionnalité est présente, de manière plus ou moins explicite, dans trois domaines de compétences mathématiques définis par les Socles de compétences. Une telle dispersion ne facilite guère son appréhension. A cet égard, il serait sans doute utile de disposer de documents plus précis s'adressant de manière spécifique aux enseignants du dernier cycle du primaire et du premier cycle du secondaire.

2.2 L'enseignement de la proportionnalité dans les documents officiels français

En France, à côté des différents programmes d'enseignement des mathématiques pour l'école primaire et le collège, le législateur a prévu des documents d'accompagnement « Articulation Ecole-Collège ». Ces documents ont pour but de préciser, pour les enseignants du dernier cycle de l'école élémentaire et pour ceux du collège, les aspects les plus significatifs pour aider à une bonne articulation entre ces deux niveaux d'enseignement.

[5] dans Pratiques d'écoles, 4 (2007).

> Dans le document introductif « Articulation Ecole-Collège », on peut lire ceci :
> « *Le document d'application associé aux nouveaux programmes de 2002 précise les contenus travaillés au cycle 3 et en sixième*[6]*, en particulier quant aux niveaux d'appropriation attendus pour les notions travaillées à ces deux étapes de la scolarité. Le programme de sixième peut donner l'impression que rien de vraiment nouveau n'y est enseigné. En réalité, les notions communes aux programmes de l'école primaire et du début du collège ne sont pas envisagées avec les mêmes objectifs : certaines en cours de construction au cycle 3, sont approfondies et consolidées en sixième ; d'autres, comme la proportionnalité, font l'objet d'une première approche au cycle 3 dans le cadre de la résolution de problèmes et sont ensuite progressivement formalisées et généralisées tout au long du collège* ».

Dans la progression proposée par le document d'accompagnement relatif à l'enseignement de la proportionnalité, nous avons retenu les éléments suivants[7] :

2.2.1 Varier les cadres et les contextes

La proportionnalité peut être envisagée dans trois cadres différents, qui souvent peuvent être mis en relation : le cadre des **grandeurs**, le cadre **numérique** (dans lequel on s'intéresse uniquement aux relations entre nombres) et le cadre **graphique** (dans lequel on représente la relation entre les grandeurs ou entre les nombres dans un système d'axes gradués).

Dans le cadre des grandeurs, la proportionnalité peut être mise en évidence de plusieurs manières différentes qui dépendent notamment des contextes utilisés :

- dans certains cas, la proportionnalité a un caractère arbitraire (par exemple, le prix peut être décidé comme étant ou non proportionnel à la masse);
- dans d'autres cas, la reconnaissance d'une relation de proportionnalité entre grandeurs relève d'une expérimentation (en physique par exemple, pour une vitesse constante donnée d'un mobile, l'espace parcouru est proportionnel au temps);
- dans le contexte de la géométrie et de la mesure, la mise en évidence de la proportionnalité relève d'une preuve formelle (démonstration), qui est ou non à la portée des élèves (comme dans le théorème de Thalès par exemple dont la démonstration n'est abordée qu'en 3e secondaire);
- …

Il est important que les élèves soient confrontés à des situations relevant de ces différentes catégories, dans des contextes variés, notamment en exploitant des situations empruntées à d'autres disciplines ou à des questions de société.

2.2.2 Étendre progressivement à d'autres types de nombres

Les étapes d'un enseignement de la proportionnalité doivent tenir compte de l'évolution du domaine numérique disponible pour les élèves : **naturels**, **entiers**, puis nombres **décimaux**, puis nombres **rationnels** (et quelques nombres **réels**) pour ce qui concerne la scolarité obligatoire. Un rapport 2 sera en effet plus facilement appréhendable par les élèves qu'un rapport $\frac{5}{4}$ par exemple.

[6] Il s'agit donc ici de l'équivalent de notre cycle 10/12 ans (cycle 3) et de la première année de l'enseignement secondaire (sixième).
[7] Nous ne présenterons ici que les points principaux développés dans ce document. Ceux-ci seront repris et détaillés dans la section 3 de ce chapitre.

2.2.3 Diversifier la nature des questions posées

Les élèves peuvent être confrontés à différents types de questions :

- reconnaître, à partir d'une série de données, si l'hypothèse de proportionnalité peut être formulée ou non ;
- rechercher une ou plusieurs données manquantes dans une situation de proportionnalité (problème de recherche de quatrième proportionnelle) ;
- comparer des proportions (par exemple des mélanges : tel mélange eau-sucre est-il plus ou moins sucré que tel autre ?) ;
- passer du cadre des grandeurs ou du cadre numérique au cadre graphique et inversement.

2.2.4 Faire varier les procédures de résolution mobilisées par les élèves

Toutes les procédures de résolution utilisables peuvent être reliées à des propriétés de la fonction linéaire qui sont d'abord utilisées de façon implicite :

- la propriété d'additivité ($f(x+y)=f(x)+f(y)$),
- la propriété d'homogénéité ($f(kx)=kf(x)$),
- la combinaison linéaire ($f(kx+ly)=kf(x)+lf(y)$),
- le coefficient de proportionnalité,
- l'égalité de rapports,
- l'égalité des produits en croix et
- la représentation graphique.

Celles-ci seront reprises par la suite (cf. section 3 du présent chapitre).

2.3 En conclusion : une proposition pour la Communauté française de Belgique

Un document similaire à celui de nos voisins français n'existe pas encore en Communauté française de Belgique et sa réalisation pourrait constituer dans le cadre de l'enseignement de la proportionnalité, un exemple d'outil favorisant la transition primaire-secondaire.

C'est l'objectif poursuivi via la diffusion de ce document.

Néanmoins, au delà de la précision et de l'explicitation des différences rencontrées dans les deux niveaux d'enseignement, il nous paraît indispensable de proposer également aux enseignants des exemples concrets d'activités à mener en classe pour travailler l'une ou l'autre facette de la proportionnalité. Celles-ci sont présentées dans les chapitres 2, 3 et 4 sous forme de fiches qui développent souvent des variantes à apporter aux activités pour les adapter au mieux aux besoins et au niveau de compétences attendues des élèves.

Plus précisément, cette publication est structurée de la manière suivante :

- le présent chapitre reprend les balises théoriques, tant mathématiques que didactiques, qui ont guidé notre réflexion. « Pourquoi s'intéresser à l'enseignement de la proportionnalité ? », « Quels éléments prendre en considération pour définir un cadre conceptuel pour l'enseignement de la proportionnalité à la liaison primaire-secondaire ? », sont des questions pour lesquelles nous apportons des éléments de réponse au travers notamment d'une proposition de progression didactique pour l'apprentissage de la proportionnalité (cf. §5).

- Les chapitres 2, 3 et 4 constituent la partie pratique de cette réflexion sur l'enseignement de la proportionnalité. Trois kits pédagogiques y sont présentés selon un même canevas composé de quatre parties qui seront détaillées dans la section 5.1 de ce chapitre (cf. page 35).
  Chacun de ces trois kits pédagogiques est consacré à une des trois facettes de la proportionnalité que nous avons retenues :

  - Le premier kit pédagogique proposé aux enseignants constitue le chapitre 2 de cette brochure. Il est entièrement consacré à la proportionnalité simple, la plus fréquemment rencontrée dans le primaire et le secondaire.

  - Le deuxième kit pédagogique concerne des problèmes dont les grandeurs ne sont pas toujours liées par une relation de proportionnalité (cf. Chapitre 3). L'objectif est de confronter les élèves à différents types de problèmes pour susciter une prise de conscience de leur part : le modèle multiplicatif ne convient pas toujours !

  - Le dernier kit concerne les problèmes de proportionnalité simple composée et de proportionnalité multiple (cf. Chapitre 4). Nous les avons regroupés au sein du même kit parce que leurs différences n'émergent clairement que lorsqu'on les compare : ils font intervenir trois grandeurs, l'une étant proportionnelle aux deux autres, et c'est la relation existant ou non entre ces deux dernières grandeurs qui détermine le type du problème posé.

3. Quels repères mathématiques pour développer l'enseignement de la proportionnalité ?

3.1 Quelques définitions

3.1.1 Qu'est-ce qu'une grandeur ?

Il s'agit d'une caractéristique d'un objet qui permet de le comparer à d'autres.
Les grandeurs les plus couramment utilisées sont la longueur, l'aire, le volume, la masse, la durée, le prix,… mais cela peut être aussi une grandeur discrète comme le nombre de personnes, de crayons, de jours…
Cela ne se limite donc pas aux traditionnelles unités de mesure rencontrées en primaire.

> Pour Nicolas Rouche, dans « Le sens de la mesure » : « *dans la pensée commune, il y a d'abord des objets, et la grandeur est considérée comme une propriété de ceux-ci* ». Cependant, « *lorsqu'on mathématise l'idée de grandeur, on ne peut pas en faire un attribut absolu des objets. Au contraire, on ne définit pour commencer que des relations entre objets, à savoir une relation d'égalité (appelée plus précisément 'équivalence') et une relation d'ordre (est plus petit que). On considère d'abord un ensemble d'objets de même nature (par ex. l'ensemble des objets allongés, ou l'ensemble des objets lourds, etc.), puis les sous-ensembles dont chacun est formé de tous les objets équivalents à l'un d'eux. On dit alors que chacun de ces sous-ensembles est une grandeur.* »

3.1.2 Qu'est ce que la proportionnalité[8] ?

Il s'agit d'une relation particulière entre deux grandeurs (ou plutôt leurs mesures) ou entre deux suites de nombres.
Ces deux suites de nombres (associées ou non à des grandeurs) doivent être multiples l'une de l'autre et être donc telles que toute combinaison linéaire de valeurs de l'une corresponde à la même combinaison linéaire des valeurs correspondantes de l'autre.

Illustrons cette définition par un exemple :

Masse de jambon en g	1000	500	250	750
Prix du jambon en €	15	7,5	3,75	11,25

Le prix d'un demi kilo de jambon correspond à la moitié du prix d'un kilo de jambon.

: 2

Masse de jambon en g	1000	500	250	750
Prix du jambon en €	15	7,5	3,75	11,25

: 2

De plus, on détermine le prix de 750g de jambon, soit en multipliant le prix d'un kilo de jambon par ¾ (puisque 750g = ¾ de 1000g),

× ¾

Masse de jambon en g	1000	500	250	750
Prix du jambon en €	15	7,5	3,75	11,25

× ¾

[8] Nous limitons volontairement nos développements aux aspects de la proportionnalité abordés dans le cadre de la liaison primaire-secondaire.

soit en additionnant les prix de 500g et 250g de jambon (puisque 750g = 500g + 250g).

750 = 500 + 250

Masse de jambon en g	1000	500	250	750
Prix du jambon en €	15	7,5	3,75	?

7.5 + 3.75 = **11.25**

3.2 Les différents processus de résolution à disposition des élèves

Les élèves ont le choix entre plusieurs procédés de résolution : utilisation du rapport interne, du rapport externe, des propriétés de linéarité,...
Il n'existe pas de méthode unique de résolution à privilégier. Pour que les élèves aient réellement le choix, il est indispensable qu'ils aient rencontré et travaillé tous les procédés en question. Dans un premier temps, il faut donc orienter et diversifier les démarches de résolution pour que les élèves les maîtrisent et puissent faire leur choix en connaissance de cause.

Explicitons-en quelques-unes et pour illustrer notre propos, prenons comme point de départ l'exemple suivant :

> Pour peindre 16 m² il me faut 2 litres de peinture. Combien me faut-il de peinture pour faire 32 m², 64m² et 8m² ?

Pour mieux visualiser les données, organisons-les sous forme de tableau :

Aire de la surface à peindre en m²	16	32	64	8
Nombre de litres de peinture	2	.	.	.

3.2.1 Rapport interne ou rapport externe ?

Deux procédures peuvent être utilisées par les élèves du primaire et du secondaire pour résoudre ce problème : l'utilisation **du rapport interne ou du rapport externe**, ce dernier étant également appelé coefficient de proportionnalité.
Le rapport interne s'établit entre deux valeurs d'une même grandeur tandis que le rapport externe permet de passer d'une grandeur à l'autre.
Ainsi, dans notre exemple et pour la première valeur à trouver, le rapport interne est de 2 tandis que le rapport externe est de $\frac{1}{8}$.

Rapport interne
$\times 2$

Aire de la surface à peindre en m²	16	32
Nombre de litres de peinture	2	4

Rapport externe
$\times \frac{1}{8}$

Le choix des enfants d'utiliser l'un ou l'autre rapport est souvent guidé par les nombres en jeu. Ils choisiront plus volontiers le nombre (naturel) le plus petit ou dont la table de multiplication est la mieux connue, quel que soit le rapport qu'il représente.

Ceci est le cas lorsqu'une seule valeur est à trouver. Si tel n'est pas le cas et que plusieurs valeurs sont à trouver (plusieurs lignes ou colonnes du tableau sont à 'compléter'), il sera plus simple d'utiliser le rapport externe puisque celui-ci ne change pas quelles que soient les valeurs des données et ce, contrairement au rapport interne.

Rapports internes

$\times \frac{1}{2}$ ou : 2

$\times 4$

$\times 2$

Aire de la surface à peindre en m^2	16	32	64	8
Nombre de litres de peinture	2	4	.	.

Rapport externe

$\times \frac{1}{8}$ ou : 8

Il est par ailleurs possible d'influencer l'utilisation de l'un ou l'autre rapport en choisissant judicieusement les nombres en jeu comme par exemple des nombres décimaux, souvent dissuasifs.

Outre l'utilisation des rapports internes et externe, la mise en tableau permet aussi de visualiser et d'utiliser plus aisément les propriétés de linéarité, à condition que la question posée induise l'utilisation de ces propriétés.

3.2.2 Les propriétés de linéarité

Il est possible de résoudre le problème ci-dessous de deux manières différentes : en utilisant une démarche additive (linéaire) ou multiplicative (rapport interne ou externe).

> Louis roule à bicyclette, compte le nombre de tours de roue et mesure les distances parcourues. Il obtient le tableau suivant :

Nombre de tours de roue	5	10	23	30
Distance parcourue en m	11	22	50,6	66

> Quelle est la distance parcourue après 43 tours de roue ?

Le rapport externe étant égal à $\frac{11}{5}$, peu d'élèves sont susceptibles de choisir cette méthode de résolution. De même, le rapport interne est, dans ce cas, égal à $\frac{43}{5}$ et ne sera donc pas facile à manipuler. Par contre, une méthode simple et efficace pour résoudre ce problème est celle qui utilise les **propriétés de linéarité**.

En effet, 43 = 10 + 10 + 23. Le nombre de tours peut donc être obtenu par combinaison linéaire de données du tableau. Les grandeurs étant proportionnelles, les propriétés de linéarité sont conservées et la distance parcourue sera donc égale à la combinaison linéaire des valeurs correspondantes : 22 + 22 + 50,6 c'est-à-dire 94,6.

43 = 10 + 10 + 23

Nombre de tours de roue	5	10	23	30	43
Distance parcourue en m	11	22	50,6	66	?

22 + 22 + 50,6 = **94,6**

Cette méthode de résolution permet aux enfants du primaire d'éviter l'utilisation du rapport externe quand celui-ci devient trop compliqué. Il est sans doute judicieux de proposer aussi cette méthode aux élèves du secondaire en même temps qu'une première approche de la notion de fonction.
Ici encore la question posée et les nombres en jeu sont des variables didactiques importantes puisqu'elles influencent la méthode de résolution privilégiée par les élèves et permettent de faire varier le niveau de difficulté du problème de manière à l'adapter à différents niveaux d'enseignement.

3.2.3 La règle de trois

Jusqu'il y a peu, la procédure classique de résolution des problèmes de proportionnalité était la **règle de trois** avec ou sans passage par l'unité. Elle était utilisée dans les classes comme outil répondant aux besoins de la vie courante et non comme méthode d'apprentissage mathématique de la proportionnalité.

En effet, Boisnard souligne que « *ceux qui fréquentent l'école* (avant 1945 notamment) *auront besoin rapidement de savoir résoudre de tels problèmes. On leur fournit alors les savoir-faire correspondants : à chaque collection de problèmes correspond une méthode de résolution particulière à laquelle on entraîne les élèves* ».

Aujourd'hui, l'accent n'est plus tant mis sur l'application des techniques de résolution mais davantage sur la perception d'une relation particulière entre deux grandeurs.

Selon Boisnard, « *les progrès accomplis* (dans l'enseignement de la proportionnalité) *ne peuvent se mesurer que par rapport à l'augmentation de nos ambitions : on veut que les élèves sachent résoudre un plus grand nombre de problèmes et de manière plus intelligente, on veut qu'ils soient plus nombreux à accéder à une vraie compréhension et une véritable maîtrise de la notion, on veut donner à cette notion un statut mathématique plus rigoureux afin que les élèves possèdent un modèle plus puissant pour résoudre les problèmes.* »

Il s'agit dès lors, non pas d'abandonner cette règle de trois, d'autant qu'elle est encore beaucoup utilisée lors des cours de sciences notamment, mais de la proposer aux enfants comme un outil parmi d'autres.

Il convient également de rappeler que cette méthode de résolution n'est qu'un cas particulier d'utilisation de rapport interne.

En effet, il suffit de décomposer un rapport fractionnaire par exemple ($\frac{3}{5}$ dans l'exemple ci-dessous) en deux opérations (: 5 puis $\times$ 3). Ceci est d'autant plus visible lorsqu'on met les données de l'exemple ci-dessous sous forme de tableau :

Je vois que le prix de 5 kg de girolles est de 32 €. Combien vais-je payer pour 3 kilos ?

	Nombre de kg de girolles	Prix en €	
: 5	5	32	: 5
× 3	1	6,4	× 3
	3	19,2	

L'utilisation systématique de la règle de trois proprement dite mettait trop l'accent sur la résolution du problème et pas assez sur le lien existant entre deux grandeurs.
Or, il est indispensable que les élèvent perçoivent cette relation.
Il semble donc que la règle de trois soit de moins en moins une méthode imposée à tous mais de plus en plus un outil parmi d'autres à proposer aux enfants pour leur permettre de choisir une procédure de résolution adaptée au problème posé et à ses variables didactiques.

3.3 L'organisation des données

L'organisation des données est une étape primordiale dans la résolution d'un problème de proportionnalité.

Plusieurs méthodes existent :
- graphe sagittal (6 œufs → 1€),
- phrases courtes type 'règle de trois' (6 œufs coûtent 1€),
- mise en tableau,
- graphiques, …

Les deux premières sont étroitement liées à la troisième. Même si le tableau n'y apparaît pas explicitement, la disposition des données s'en approche grandement.
Peu importe le choix des élèves, l'important est que la méthode utilisée facilite la résolution du problème.
Il est à noter que les graphiques sont plus utilisés et travaillés en secondaire, en accord avec les Socles de compétences (cf. point 2.1).

3.3.1 La mise en tableau

La **mise en tableau** est une méthode schématique, visuelle et accessible pour les enfants tant du primaire que du secondaire. Deux formats sont possibles :

Rapport(s) interne(s)

Aire de la surface à peindre en m²	16	32	64	8	Rapport externe
Nombre de litres de peinture	2	.	.	.	

ou

Rapport externe

Aire de la surface à peindre en m²	Nombre de litres de peinture
16	2
32	.
64	.
8	.

Rapport(s) interne(s)

Ceci influence la 'position' du rapport externe puisque, dans le premier, c'est celui qu'on obtient quand on passe d'une ligne à l'autre alors que dans le second, c'est celui qu'on obtient en passant d'une colonne à l'autre. D'où l'importance de ne pas réduire les définitions et illustrations à un seul cas de figure pour permettre à chacun d'utiliser à bon escient les outils qui lui conviennent le mieux.

3.3.2 Les graphiques

Comme déjà mentionné ci-avant, le recours au graphique comme outil de résolution est davantage spécifique au **<u>secondaire</u>** puisqu'il est également lié à l'apprentissage des fonctions.

> Une compagnie de transport propose deux formules :
> Formule A : le billet ordinaire pour un voyage, soit 3 euros.
> Formule B : une carte demi-tarif qui coûte 24 euros pour un maximum de 16 voyages.
> Compléter le tableau suivant :

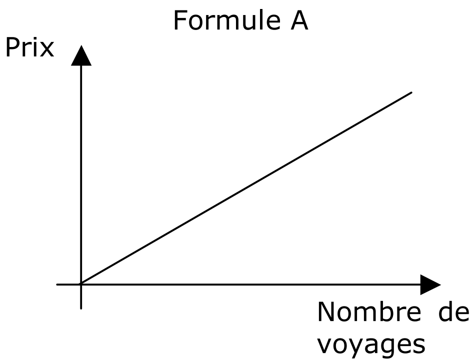
Nombre de voyages	6	10	16	20	24
Prix payé avec la formule A					
Prix payé avec la formule B					

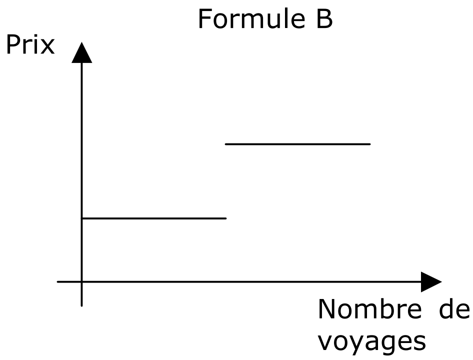
> Peut-on dire qu'il y a proportionnalité entre le prix et le nombre de voyages avec la formule A ? Justifier.
> Qu'en est-il pour la formule B ?
> Représenter les données de ce tableau dans un diagramme cartésien et expliquer comment on peut contrôler s'il y a ou non proportionnalité.

L'utilisation du tableau permet une traduction rapide de l'énoncé :

Nombre de voyages	6	10	16	20	24
Prix payé avec la formule A	18	30	48	60	72
Prix payé avec la formule B	24	24	24	48	48

La résolution sous forme graphique permet de bien visualiser la différence entre les deux formules proposées dans l'énoncé. Les points donnés par la formule A sont bien sur une droite passant par l'origine des axes (d'où la proportionnalité) tandis que les points donnés par la formule B sont rangés 'en escaliers' (d'où la non-proportionnalité).





3.4 D'autres variables didactiques pour analyser les problèmes

Une variable didactique est un paramètre du problème sur lequel on peut agir pour augmenter ou diminuer la complexité du problème.
Les différents éléments analysés dans les paragraphes précédents peuvent être assimilés à des variables didactiques. Dans cette partie, nous allons nous centrer sur deux autres paramètres essentiels des problèmes de proportionnalité : les nombres en jeu et le domaine mathématique concerné.

3.4.1 Nombres en jeu

Outre le fait que les nombres en jeu peuvent influencer la méthode de résolution privilégiée par les élèves, ceux-ci permettent aussi d'adapter les problèmes au niveau d'enseignement visé : dans le primaire, on utilisera davantage les nombres entiers et décimaux tandis que les rationnels (et les réels) seront davantage réservés au secondaire.

Par exemple, si on propose aux enfants le problème suivant,

> Pour peindre 16 m² il me faut 2 litres de peinture. Combien me faut-il de peinture pour faire 32 m² ?

il y a de fortes chances pour qu'ils utilisent le rapport interne 2 plutôt que le rapport externe $\frac{1}{8}$.

Rapport interne
$\times 2$

Aire de la surface à peindre en m²	16	32
Nombre de litres de peinture	2	4

Rapport externe
$\times \frac{1}{8}$

Par contre si on modifie la question et qu'on demande combien de peinture il faut pour faire 40m², on peut s'attendre à voir le rapport externe davantage utilisé, puisque trouver le rapport interne à partir de 16 et 40 est moins aisé que de trouver le rapport externe existant entre 16 et 2.

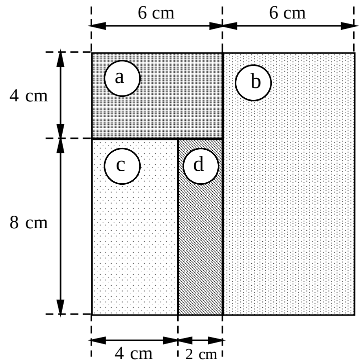
Rapport interne
$\times 2{,}5$

Aire de la surface à peindre en m²	16	40
Nombre de litres de peinture	2	5

Rapport externe
$\times \frac{1}{8}$

Modifier les nombres en jeu peut donc fortement influencer l'utilisation d'une procédure de résolution particulière par les enfants.
De plus, de la même manière, la difficulté du problème posé peut être facilement adaptée. Le problème ci-dessous par exemple pourrait être considérablement simplifié en demandant que le segment qui mesure 4 cm sur le modèle mesure 8 cm sur le puzzle agrandi au lieu de 5 cm.

Voici un puzzle constitué de 4 pièces a, b, c, d :



Construire un agrandissement de ce puzzle de telle manière que le segment qui mesure 4 cm sur le modèle devra mesurer 5 cm sur le puzzle agrandi.

3.4.2 Domaine mathématique

Le domaine des grandeurs (géométriques ou non) convient aussi bien aux élèves du primaire qu'à ceux du secondaire. C'est le cas notamment des deux problèmes présentés dans le paragraphe précédent, moyennant, pour le secondaire, des choix de nombres plus adéquats.
En revanche, le domaine purement numérique ne s'applique qu'aux élèves du secondaire. C'est le cas notamment dans les problèmes du type 'machines à nombres[9]' : aucune grandeur n'y apparaît et le rapport externe est utilisé de même que son inverse. Ce dernier peut être modifié à foison pour adapter la difficulté du problème à l'objectif poursuivi.

Observe les machines à transformer les nombres puis complète les transformations.

2	→	3
-4	→	-6
1,5	→	2,25
70	→	105
0	→	?
0,01	→	?
2,5	→	?

4,5	→	31,5
1,5	→	10,5
60	→	420
?	→	21
?	→	451,5
3,5	→	?
x	→	?

36	→	12
-3	→	-1
1200	→	400
?	→	500
?	→	1/3
?	→	10^6
?	→	N

Comme nous l'avons déjà mentionné précédemment, pour permettre aux élèves de disposer d'un maximum d'outils face à une situation nouvelle, il est indispensable de leur faire travailler toutes les procédures. Agir sur les nombres en jeu constitue un moyen facile à disposition des enseignants pour aiguiller les élèves vers une procédure plutôt qu'une autre et leur permettre ainsi de la maîtriser.

[9] Source : Mathématiques 7-8-9

4. Quels repères didactiques pour structurer l'enseignement de la proportionnalité ?

Nous proposons de classer les problèmes de proportionnalité au départ d'un cadre conceptuel qui s'appuie largement sur une typologie proposée par Vergnaud.

Celui-ci distingue trois types de proportionnalité :

- la proportionnalité simple et directe,
- la proportionnalité simple composée et
- la proportionnalité multiple.

4.1 Proportionnalité simple et directe

Un problème de proportionnalité simple met en jeu deux grandeurs[10] dont on ne considère, pour chacune, que deux valeurs. En tout, trois données et une inconnue sont la plupart du temps rencontrées. Les problèmes de quatrième proportionnelle font donc partie de cette catégorie de même que les problèmes d'agrandissement et de réduction de figures.
Prenons un exemple :

Exemple 1

Aurélie achète 30cm de ruban et paie 0,20€. Son amie Marie a besoin de 90cm du même ruban. Combien va-t-elle payer ?

autrement dit,

Longueur du ruban (en cm)	30	90
Prix (en €)	0,20	?

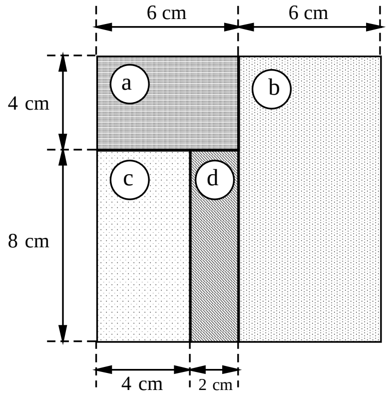
Les deux grandeurs en jeu sont la longueur du ruban et le prix. Il s'agit là d'un problème classiquement rencontré dans les manuels. La résolution du problème est assez rapide, quelle que soit la méthode utilisée pour organiser les données ou pour réaliser le calcul.

[10] Nous limiterons le cadre de nos illustrations à celui des grandeurs, applicable aussi bien dans le primaire que dans le secondaire. Il est bien entendu que tout ceci est transposable dans le domaine strictement numérique.

Un autre exemple de ce type de proportionnalité fait intervenir des grandeurs géométriques.

Exemple 2

Voici un puzzle constitué de 4 pièces a, b, c, d :



Construire un agrandissement de ce puzzle de telle manière que le segment qui mesure 4 cm sur le modèle devra mesurer 5 cm sur le puzzle agrandi.

Dans cet exemple, seule une grandeur est à considérer : la longueur des différents segments. Toutefois, deux types de longueur sont à différencier : celle des segments de départ et celle des segments agrandis.

Longueur du segment de départ (en cm)	4	6	8	2
Longueur du segment agrandi (en cm)	5	?	?	?

Malgré le nombre de colonnes et le nombre de données et d'inconnues plus élevés que pour l'exemple précédent, il s'agit bien de proportionnalité simple puisque, pour résoudre ce problème, il suffit de considérer successivement la colonne des données $\binom{4}{5}$ avec une des trois colonnes comportant les inconnues ramenant ainsi la résolution à trois problèmes du même type que ci-dessus :

Longueur du segment de départ (en cm)	4	6
Longueur du segment agrandi (en cm)	5	?

Longueur du segment de départ (en cm)	4	8
Longueur du segment agrandi (en cm)	5	?

Longueur du segment de départ (en cm)	4	2
Longueur du segment agrandi (en cm)	5	?

Tous les problèmes traitant de proportionnalité simple ont la même structure même si une sous-classification est encore possible en fonction de la question posée comme le détaille le tableau de la figure 1 ci-après (cf. point 5.1).

Ce type de problème est le plus couramment utilisé en primaire et en secondaire. Cela étant, il existe deux autres classes de problème de proportionnalité qui se distinguent de la première par le nombre de grandeurs en jeu. Dans les deux sections suivantes, nous allons définir et illustrer d'un exemple chacune de ces classes avant de revenir sur leur principale différence.

4.2 Proportionnalité simple composée

Un problème de proportionnalité simple composée met en jeu plus de deux grandeurs et il s'agit, pour la résolution, d'appliquer successivement la proportionnalité simple à deux paires de grandeurs. Dans ce cas, il apparaît également une seule inconnue mais elle est liée à plusieurs données dépendant les unes des autres.
Analysons un exemple pour souligner la différence existant avec les problèmes du premier type.

Exemple 3

> Un directeur d'école commande 4 boîtes de compas. Dans chacune des boîtes, il y a 8 compas. Un compas coûte 3€. Combien le directeur doit-il payer en tout ?

Trois grandeurs apparaissent dans cet énoncé : le nombre de boîtes, le nombre de compas et le prix.
Le prix est proportionnel au nombre de compas.
Le prix est également proportionnel au nombre de boîtes.
Les deux grandeurs 'nombre de boîtes' et 'nombre de compas' dépendent aussi l'une de l'autre. Toute variation de l'une entraîne une variation de l'autre et elles sont elles aussi proportionnelles.
Les trois grandeurs sont donc proportionnelles deux à deux.

Nombre de boîtes	Nombre de compas	Prix (en €)
4		?
1	8	
	1	3

La résolution de ce problème ne consiste pas en une seule opération mais en deux opérations 'type proportionnalité simple' qui s'enchaînent. En effet, dans un premier temps, il s'agit par exemple de trouver le nombre total de compas

Nombre de boîtes	Nombre de compas
4	?
1	8

avant d'utiliser ce résultat pour trouver le prix total à payer.

Nombre de compas	Prix (en €)
32	?
1	3

Reprenons encore l'exemple mentionné dans la figure 1 du point 5.1 :

Exemple 4

Une voiture consomme 5l aux 100km.
Avec 30€, son conducteur peut acheter 20l d'essence.
Combien coûtera un voyage de 500km avec cette voiture?

Nombre de litres	Nombre de kilomètres	Prix (en €)
5	100	.
20	.	30
.	500	?

Il existe plusieurs manières de résoudre ce problème. Revenons sur deux d'entre elles. Dans le première, on considère d'abord que le prix est proportionnel au nombre de litres de façon à trouver le prix de 5l d'essence (7,5€) grâce au rapport interne (× ¼ ou :4).

	Nombre de litres	Nombre de kilomètres	Prix (en €)	
:4	5	100	7,5	:4
	20	.	30	
	.	500	?	

Ensuite, il suffit d'utiliser le fait que le prix est également proportionnel au nombre de kilomètres pour trouver le coût d'un voyage de 500km.

Nombre de litres	Nombre de kilomètres		Prix (en €)	
5	100		7,5	
20	.	×5	30	×5
.	500		37,5	

Dans la seconde méthode, on utilise d'abord la relation de proportionnalité entre le nombre de kilomètres et le nombre de litres avant celle liant le prix au nombre de kilomètres.

	Nombre de litres		Nombre de kilomètres		Prix (en €)	
×4	5		100		.	
	20	×4	400	$\times\frac{5}{4}$	30	$\times\frac{5}{4}$
	.		500		37,5	

Quel que soit le choix des grandeurs sur lesquelles on opère, la réponse est obtenue par applications successives de deux rapports internes puisque les trois grandeurs sont proportionnelles deux à deux.

4.3 Proportionnalité multiple

Un problème de proportionnalité multiple met également en jeu plus de deux grandeurs mais dans ce cas, il est impossible de se ramener à un ou plusieurs problèmes successifs de proportionnalité simple. Il faut obligatoirement associer simultanément plusieurs données qui ne dépendent pas les unes des autres pour trouver la valeur de l'inconnue. De ce fait, il est impossible de ne considérer les colonnes du tableau que 2 par 2.

Exemple 5

> Pour un séjour à la montagne, le prix est de 20€ par personne et par jour. Quel est le prix d'un séjour pour un groupe de 4 personnes et pour 6 jours ?

Trois grandeurs sont repérées dans ce problème : le prix, le nombre de personnes et le nombre de jours.
Pour un nombre de jours donné, le prix est proportionnel au nombre de personnes.
Pour un nombre de personnes donné, le prix est également proportionnel au nombre de jours.
Mais le nombre de personnes n'est pas proportionnel au nombre de jours. Ces deux grandeurs sont indépendantes.

Inconnue	Données	
Prix (en €)	Nombre de personnes	Nombre de jours
20	1	1
?	4	6

Lors de la résolution, il faut tenir compte des trois grandeurs sans les dissocier. Dans un premier temps, il s'agit de 'bloquer' la valeur d'une des deux données (par exemple le nombre de jours) tout en faisant varier la deuxième (le nombre de personnes) proportionnellement à l'inconnue (le prix).

Prix (en €)	Nombre de personnes	Nombre de jours
20	1	1
×4 80	×4 4	1
?	4	6

Dans un deuxième temps, il suffit alors d'appliquer le même procédé une seconde fois en faisant varier l'autre donnée (le nombre de jours) proportionnellement à l'inconnue (le prix) sans plus s'occuper du nombre de personnes déjà égal à 4.

Prix (en €)	Nombre de personnes	Nombre de jours
20	1	1
80	4	1
×6 480	4	×6 6

Dans ce cas-ci aussi, la résolution du problème revient à utiliser deux fois le rapport interne. Mais la grande différence avec la classe de problème précédente réside dans le fait que les trois grandeurs ne sont pas proportionnelles deux à deux et que pour pouvoir appliquer deux fois le rapport interne, il faut bloquer une des deux données.

Sur un plan strictement mathématique, il faut être particulièrement attentif avec ce genre de problèmes car la stratégie de résolution présentée ci-dessus est applicable lorsque l'inconnue concerne la grandeur proportionnelle aux deux autres mais devient inadéquate lorsque la question porte sur une valeur d'une des deux grandeurs indépendantes.

Exemple 6

Pour un séjour de 6 jours à la montagne, le prix est de 480€ pour 4 personnes. Un groupe de 8 personnes dispose de 1440€. Combien de jours peut durer leur séjour ?

Prix (en €)	Nombre de personnes	Nombre de jours
480	4	6
1440	8	?

Les deux méthodes présentées pour l'exemple précédent mènent, à un moment ou un autre, à bloquer le prix, proportionnel aussi bien au nombre de personnes qu'au nombre de jours :
soit on bloque d'abord la donnée 'nombre de personnes' puis la donnée 'prix',

Prix (en €)	Nombre de personnes	Nombre de jours
480	4	6
1440	4	18
1440	8 ×2	? 9 :2

soit on bloque d'abord la donnée 'prix' puis la donnée 'nombre de personnes'.

Prix (en €)	Nombre de personnes	Nombre de jours
480	4 ×2	6 :2
480	8	3
1440	8	? 9

Dans les deux cas, lorsqu'on fixe le prix, on revient non pas à un problème de proportionnalité entre les deux autres grandeurs mais à un problème de proportionnalité inverse. En effet, pour un même prix, plus il y a de personnes, moins le séjour est long.
Pour éviter l'utilisation de la proportionnalité inverse et revenir à deux problèmes de proportionnalité simple, il faut bloquer la grandeur dont on cherche une valeur (le nombre de jours) puis une des deux autres grandeurs :

	Prix (en €)	Nombre de personnes	Nombre de jours
	480	4	6
	960 ×2	8 ×2	6
×1,5	1440	8	? 9 ×1,5

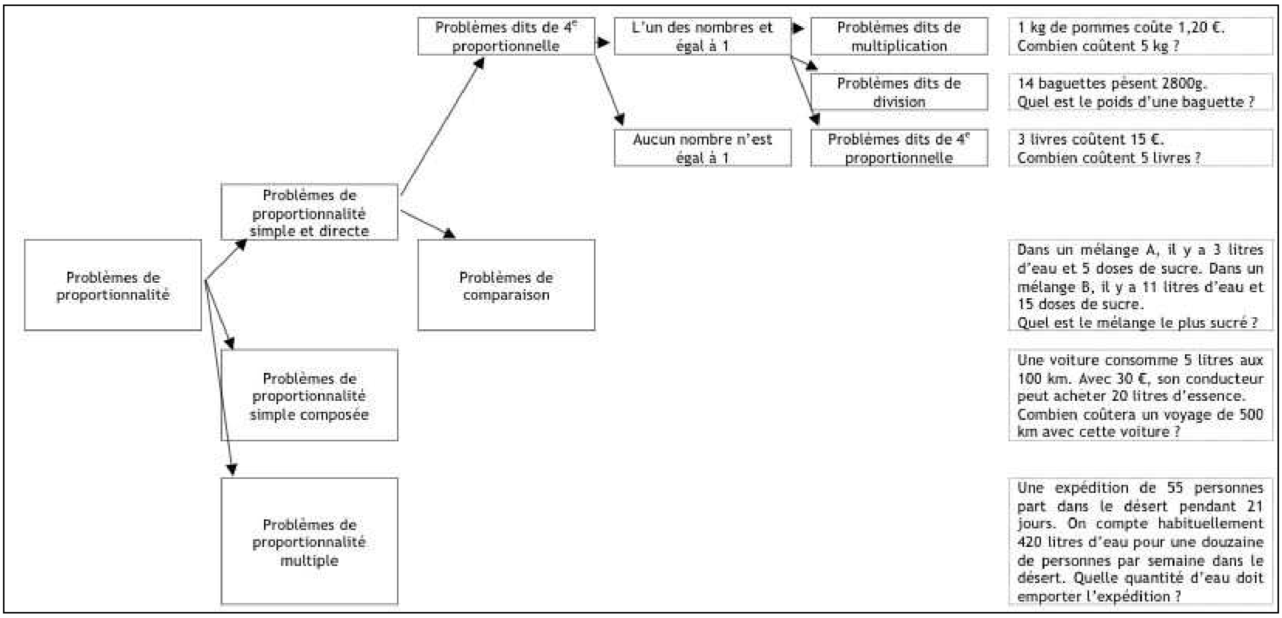
En résumé, la principale différence entre les problèmes de proportionnalité simple composée et de proportionnalité multiple réside dans les relations existant entre les grandeurs : pour la proportionnalité simple composée, les trois grandeurs sont proportionnelles deux à deux tandis que pour la proportionnalité multiple, une grandeur est proportionnelle aux deux autres, qui sont indépendantes entre elles.

5. En conclusion : que retenir de tout ceci ?

5.1 Sur un plan mathématique

Pour résumer, voici un tableau qui reprend la typologie de Vergnaud illustrée par les exemples qui servaient de support aux explications du paragraphe précédent :

Figure 1 : une classification des problèmes de proportionnalité adaptée de Vergnaud



Il est encore à noter que les problèmes de proportionnalité simple et directe sont scindés en deux catégories : les problèmes de 4^{e} proportionnelle et les problèmes de comparaison.

- Pour les derniers, il s'agit de traduire l'énoncé sous forme d'égalité de rapports (donc de proportion) et de les comparer.
- Pour les autres, il s'agit de calculer la valeur manquante. On peut encore affiner davantage cette classification en différenciant les problèmes pour lesquels un des nombres est égal à un (ce qui permet de relier la proportionnalité au champ conceptuel de la multiplication) des problèmes pour lesquels ce n'est pas le cas. Cette catégorie regroupe les problèmes de proportionnalité traditionnellement envisagés dans les manuels.

Nous avons choisi de privilégier les problèmes dits de 4^{e} proportionnelle et de ne pas nous attarder sur les problèmes de comparaison (de rapports) puisqu'on les retrouve dans la brochure consacrée à l'enseignement des rationnels : résoudre ce type de problème revient en effet à comparer deux rapports exprimés sous la forme de fractions.

Par exemple, la réponse du problème suivant est obtenue en comparant $\frac{5}{3}$ et $\frac{15}{11}$.

> Dans un mélange A, il y a 3 litres d'eau et 5 doses de sucre. Dans un mélange B, il y a 11 litres d'eau et 15 doses de sucre.
> Quel est le mélange le plus sucré ?

Cette première clarification conceptuelle doit être complétée par la prise en compte des éléments suivants, déjà explicités dans la section 2 de ce chapitre :

- les domaines mathématiques concernés (grandeurs, géométrie, numérique) ;
- le nombre de grandeurs en jeu, les éventuelles liaisons entre celles-ci ;

- les stratégies de résolution attendues (rapport interne *vs* rapport externe, …).

Par ailleurs, la classification proposée (des problèmes de proportionnalité simple vers des problèmes de proportionnalité multiple) ne doit pas être conçue comme un axe de progression du primaire (proportionnalité simple) vers le début de l'enseignement secondaire (proportionnalité multiple). En effet, il est possible de rencontrer des problèmes de proportionnalité simple plus complexes que des problèmes de proportionnalité multiple. La distinction à opérer entre le primaire et le secondaire tient sans doute davantage à la nature des nombres en jeu, le type de grandeurs utilisées ou le cadre mathématique de résolution ... le cadre strictement numérique étant réservé à l'enseignement secondaire car il va permettre le passage vers le cadre graphique. Il est indispensable à l'école primaire d'amener les élèves à résoudre des problèmes de proportionnalité dans des cadres variés mais en référence à des situations concrètes. Dans cet esprit, la question des outils de résolution proposés aux enfants doit davantage préoccuper que la seule prise en compte des modalités de résolution (rapport interne *versus* rapport externe par exemple).

Il apparaît également que cette classification fait l'impasse sur la distinction entre des problèmes dont la résolution met en jeu la proportionnalité et d'autres problèmes mettant en jeu d'autres types de relations numériques entre deux ensembles de nombres (relations inversement proportionnelles, fonctions affines, ...). Pourtant, n'est-il pas important, avant de résoudre des problèmes, de s'assurer de l'adéquation des outils utilisés, autrement dit de s'assurer d'être réellement face à un problème de proportionnalité ? Diverses recherches soulignent la nécessité de confronter les élèves à des situations qui ne relèvent pas de proportionnalité.

A la lumière de tout ceci, nous avons choisi de décliner l'apprentissage de la proportionnalité entre 10 à 14 ans au départ de trois kits pédagogiques :

- le premier traite des problèmes de proportionnalité simple et directe,
- le deuxième de problèmes ne relevant pas toujours de la proportionnalité,
- le troisième regroupe les problèmes de proportionnalité simple composée et de proportionnalité multiple. Ces deux types de problèmes sont étroitement liés (puisqu'ils concernent tous deux au minimum trois grandeurs) et leurs différences ne prennent sens qu'en comparant leurs structures respectives. Les regrouper dans l'apprentissage ne semble donc pas dénué de sens.

Chacun des trois kits pédagogiques proposés est composé des éléments suivants :

- une liste d'éléments mathématiques et didactiques susceptibles d'être utilisés lors de la résolution des problèmes proposés. Celle-ci renvoie le lecteur désireux d'en savoir plus aux définitions et pistes de réflexion du présent chapitre.

- des items d'évaluation diagnostique pour organiser un prétest ;

  Où en sont les élèves par rapport au développement des compétences visées ?
  L'objectif de cette section est de donner différents outils aux enseignants pour évaluer les compétences de leurs élèves et ainsi pouvoir proposer des activités d'apprentissage adéquates.

- des activités d'apprentissage ;

  Différentes activités développées, adaptées, expérimentées sont proposées au départ d'un modèle de fiche de présentation des activités. L'identification de ces activités a fait l'objet d'un travail de recherche important. La persistance et la régularité des erreurs produites par les élèves conduisent à s'interroger sur les types de situations habituellement mises en

place par les enseignants. Cette réflexion renvoie au concept d'obstacles didactiques et épistémologiques.
Dans une perspective de re-médiation (au sens de nouvelle médiation entre l'élève et le savoir), le kit propose une série de situations d'apprentissage pour aider l'enseignant à mettre en place de nouvelles pratiques d'enseignement de la proportionnalité.
La structure générale d'une fiche d'activité est présentée à la page 9 de cette brochure.
Les activités proposées dans les kits constituent un complément à celles proposées habituellement dans les classes. Elles ne les remplacent en aucun cas puisqu'elles n'abordent pas tous les aspects de la proportionnalité, comme par exemple, les problèmes d'échelle.

- des exercices d'application.
  Au-delà des situations d'apprentissage développées, comment stabiliser les compétences des élèves ?
  Des propositions d'activités pour aller plus loin ou pour venir en aide aux élèves en difficultés sont présentées au sein des fiches d'activité.

5.2 Sur un plan didactique

5.2.1 Des objectifs d'apprentissage

De l'analyse qui précède, on retiendra trois objectifs essentiels à l'enseignement de la proportionnalité à l'école primaire :

Rendre les élèves capables :

- d'augmenter la capacité à mobiliser une procédure donnée et en accroître l'efficacité (notamment en permettant aux élèves de l'utiliser avec d'autres types de nombres que ceux avec lesquels elle a d'abord fonctionné) ;
- d'augmenter la variété des procédures utilisables et inciter les élèves à opérer le choix le plus approprié à la situation particulière à traiter ;
- de renforcer la compréhension des liens qui existent entre ces différentes procédures, avec, en secondaire, une synthèse possible à l'aide de la fonction linéaire et de ses propriétés.

Pour permettre aux élèves d'atteindre ces objectifs, l'enseignant doit ajuster sa gestion de la classe de manière à, par exemple, :

- éviter d'imposer un type particulier de résolution de problème,
- confronter, en classe, les différentes résolutions des élèves,
- travailler et comparer les différentes procédures,
- opérer constamment des aller-retour entre concret et abstrait,
- respecter une gradation,
- varier les nombres en jeu,
- adapter les variables didactiques,
- …

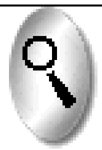
5.2.2 Un axe de progression didactique pour l'apprentissage de la proportionnalité

5.2.2.1 La notion de dialectique outil-objet et de jeux de cadres de Régine Douady

La dialectique outil-objet est un processus cyclique organisant les rôles respectifs de l'enseignant et des élèves, au cours duquel les concepts mathématiques jouent alternativement le rôle d'outil pour résoudre un problème et d'objet prenant place dans la construction d'un savoir organisé.
Le mot "cadre" est à prendre au sens usuel qu'il a quand on parle de cadre algébrique, cadre arithmétique, cadre géométrique… Les jeux de cadres sont des changements de cadres provoqués à l'initiative de l'enseignant, à l'occasion de problèmes convenablement choisis, pour faire avancer les phases de recherche et évoluer les conceptions des élèves…

Quels pourraient être ces cadres ?

- Cadre des grandeurs : situations concrètes, quantités, mesures. Il faut donner du sens aux manipulations. C'est celui dans lequel se rencontrent le plus souvent les situations de proportionnalité, mettant en relation deux grandeurs (masse et prix, masse et longueur dans le cas de l'allongement d'un ressort, longueurs dans le cas du périmètre du disque en fonction de son rayon, longueur et aire dans le cas de triangles de même base et de hauteur variable, distance et durée dans le cas d'un mouvement uniforme...). Il reprend aussi le cadre géométrique dans le cas notamment de l'agrandissement ou réduction de figures ;



Le nombre de domaines de grandeurs mis en jeu dans les problèmes est un paramètre important qui va jouer sur la difficulté ou non d'un problème. On laisse trop souvent de côté l'enseignement des grandeurs dans la résolution des problèmes et la compréhension des écritures mathématiques. Or, insérer les grandeurs dans une écriture mathématique, cela permet à l'élève de savoir exactement ce qu'il calcule. On s'aperçoit que les élèves, dans la plupart des cas, ne savent pas à quelle grandeur correspond le résultat qu'ils ont trouvé.

- Cadre numérique : manipulations abstraites (on ne s'intéresse qu'aux relations entre les nombres) ;

- Cadre graphique : représentation de la relation entre les grandeurs ou entre les nombres dans un système d'axes gradués.

5.2.2.2 Tableau récapitulatif

Notre objectif est de proposer un tableau récapitulatif de progression didactique. Il reprend les principales variables didactiques qui influencent le niveau de difficulté et la résolution des problèmes de proportionnalité et spécifie pour chacune d'elles les différences à apporter, à notre avis, selon le niveau d'enseignement des élèves auxquels on s'adresse.

Pour le construire, nous nous sommes basés sur tous les éléments développés dans les paragraphes précédents et plus particulièrement sur la typologie de Vergnaud, les Socles de compétences et la notion de dialectique outil-objet de Douady.

Proposition de progression didactique pour l'apprentissage de la proportionnalité[11]

Variables	5e – 6e primaire	1ere secondaire
Champs Conceptuels	Proportionnalité simple : Multiplication et division simple, recherche d'une 4e proportionnelle, … Proportionnel ou non ?	Proportionnalité simple : Multiplication et division simple, recherche d'une 4e proportionnelle, … Proportionnel ou non ? Proportionnalité simple composée Proportionnalité multiple
Domaine mathématique	Grandeurs (géométriques ou non)	Grandeurs (géométriques ou non) Numérique (avec ou sans graphique)
Nombre de grandeurs ou suites de nombres mises en jeu	2	2 ou 3
Nature des nombres mis en jeu dans le problème ou dans les rapports	Entiers, décimaux et quelques rationnels 'simples'	Rationnels et réels
Procédures de résolution	Mise en tableau, rapports internes (et 'règle de trois'), rapport externe.	Mise en tableau, utilisation de graphiques, rapports internes (et 'règle de trois'), rapport externe, propriétés de linéarité.

[11] Cet outil permet aussi aux enseignants de s'assurer que l'ensemble des problèmes qu'ils abordent avec leurs élèves couvre bien toutes les catégories répertoriées dans ce tableau.

En conclusion : **Que faire dans les classes ?**

On peut construire des connaissances mathématiques en faisant jouer la dialectique outil-objet au sein de jeux de cadres appropriés, grâce à des problèmes répondant à certaines conditions :

- L'énoncé (contexte et questions) a du sens pour les élèves ;
- Compte tenu de leurs connaissances, les élèves peuvent engager une procédure de résolution, mais ils ne peuvent pas résoudre complètement le problème ;
- Les connaissances visées par l'apprentissage (contenu et méthode) sont des outils adaptés au problème.

Au niveau de la proportionnalité à la transition primaire-secondaire, on peut donc déduire ceci :

- A l'école primaire, les élèves résolvent des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant des procédures personnelles (proportionnalité en situation, en tant qu'outil sans formalisation) ;
- Au premier cycle de l'enseignement secondaire, il s'agit de mettre en place les principaux raisonnements qui permettent de traiter les situations de proportionnalité (la proportionnalité devient un objet d'études).

Cela signifie peut-être qu'à l'école primaire, toutes les situations proposées aux élèves doivent rester associées à des grandeurs alors qu'en secondaire, le cadre strictement numérique doit progressivement faire son apparition (en lien avec le cadre graphique).