

**Deuxième partie**

**Applications**

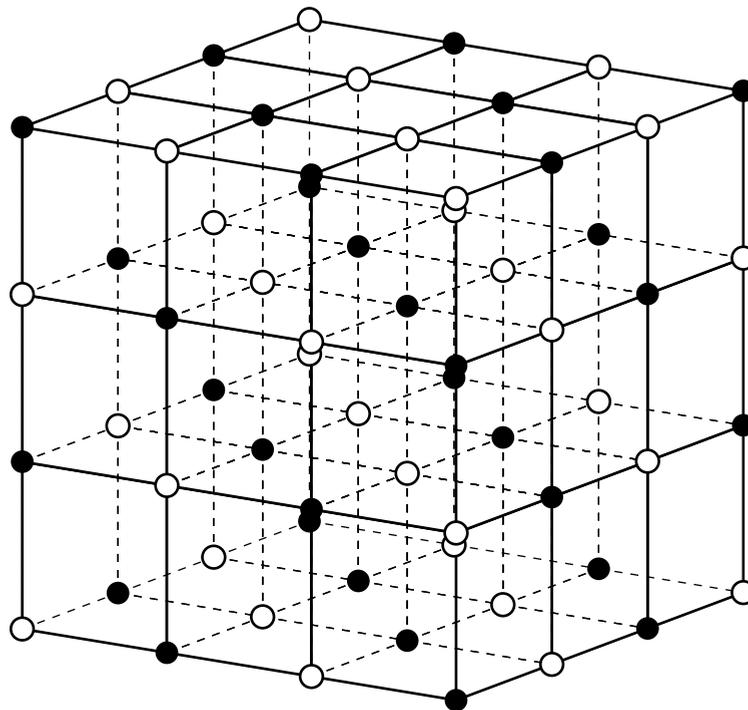
# Chapitre 3

## Un réseau cubique électrique ?

3.1	Introduction . . . . .	189
3.2	La géométrie des charges électriques . . . . .	192
3.3	Le champ créé par les deux premières couches . . . . .	195
3.4	Le champ créé par la couche n°2 . . . . .	199
3.5	Et le champ correspondant à la couche n°n ? . . . . .	203
3.6	Pourquoi pas une couche cubique ? . . . . .	206

## 3.1. Introduction

L'application qui suit nous a été inspirée par la constatation que certains cristaux, dits ioniques, sont constitués non d'atomes neutres, mais d'ions chargés, certains positivement, d'autres négativement. Par exemple, le sel de cuisine,  $\text{NaCl}$ , cristallise dans un réseau cubique, les ions  $\text{Na}^+$  et  $\text{Cl}^-$  alternant aux sommets de ce réseau. Dans la figure suivante, les boules blanches représentent les ions  $\text{Na}^+$  et les boules noires représentent les ions  $\text{Cl}^-$ .



Dans un premier temps, nous avons essayé de montrer la stabilité du cristal. L'idée est simple : on imagine qu'on écarte un des ions de sa position d'équilibre, et on calcule la résultante des forces coulombiennes exercées alors sur lui par les autres ions. Si cette force résultante tend à le ramener au point de départ, on peut considérer le cristal comme stable.

Nous avons dû constater que nous ne parvenions pas de cette façon à établir la stabilité du sel de cuisine ! En l'occurrence, ce ne sont pas les aspects mathématiques qui sont trop compliqués, mais bien les aspects physico-chimiques. Il semble en effet que la stabilité d'un cristal ionique ne dépende pas seulement des forces coulombiennes, mais également d'autres types de forces d'attraction ou de répulsion.

Il nous a semblé cependant intéressant de proposer la composition de forces électrostatiques coulombiennes comme application du calcul vectoriel, et cela dans une situation qui ne soit pas simpliste. De la considération d'un cristal ionique, nous ne conserverons que l'idée de charges électriques ponctuelles, situées aux sommets d'un réseau cubique, les charges positives alternant avec les charges négatives. La question posée consistera à déterminer le champ électrique créé en un point de l'axe  $OX$  par certaines configurations de ces charges, ayant des propriétés remarquables de symétrie. Ceci simplifie considérablement la situation en assurant que le champ résultant soient orienté parallèlement à l'axe  $OX$  en point de cet axe.

Les idées à mettre en œuvre ne nécessitent que la connaissance de la somme d'un nombre fini de vecteurs, mais le problème nécessite une bonne maîtrise de la technique, des qualités d'analyse et d'organisation ainsi que du soin et de la persévérance. Les sujets rencontrés sont, outre le calcul vectoriel, des polyèdres réguliers élémentaires dont les propriétés de symétrie sont exploitées et des fonctions algébriques qui sont représentées et dont le comportement peut être étudié sans qu'il soit absolument nécessaire d'en faire une étude systématique précise.

Pour arriver à nos fins, nous n'avons besoin de connaître que la loi de Coulomb :

*Si deux charges électriques de valeurs respectives  $q$  et  $q'$  sont situées en des points  $A$  et  $B$ , la force exercée par la charge  $q$  sur la charge  $q'$  s'exprime en unités MKSA par la formule*

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{|AB|^2} \vec{1}_{AB}$$

où  $\vec{1}_{AB}$  est un vecteur de longueur 1 dirigé de  $A$  vers  $B$ .

On voit que si les charges  $q$  et  $q'$  sont de même signe, la force  $\vec{F}$  est une force de répulsion, alors que c'est une force d'attraction si  $q$  et  $q'$  sont de signes opposés. Les charges électriques s'expriment en coulombs, les distances en mètres et les forces en Newtons.  $\epsilon_0$  est une constante dont la valeur nous importe peu, mais qu'il n'y a cependant aucune raison de cacher :

$$\epsilon_0 = 8,854187182 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

(Pour le lecteur non physicien, l'unité est le Farad par mètre.)

Nous nous placerons dans le cas où les sommets du réseau cubique sont occupés alternativement par des charges électriques de  $+1$  Coulomb et de  $-1$  Coulomb, l'origine étant occupée par une charge positive (représentée par une boule blanche sur les différentes figures).

La question posée est

$$\text{Quel est le champ électrique créé en le point } \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ?$$

Rappelons que le champ électrique en un point est la force électrique qui s'exercerait sur une charge unité placée en ce point. Le champ créé en  $P = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  par une charge de  $\pm 1$

Coulomb en le point  $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  du réseau est donc  $\pm K \frac{1}{|AP|^2} \vec{1}_{AP} = \pm K \frac{1}{|AP|^3} (P - A)$  où

$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , constante que nous éliminerons de nos calculs puisque, multipliant toutes les forces considérées, elle ne modifie pas l'allure des résultats.

## 3.2. La géométrie des charges électriques

Dire que les charges électriques positives et négatives alternent aux sommets du réseau a pour conséquence qu'en les sommets  $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$  se trouvent des charges négatives. Ensuite, en  $\begin{pmatrix} \pm 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 2 \end{pmatrix}$ , mais aussi en  $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ , on trouve des charges positives.

Continuant de la sorte, on constate que les charges positives (boules blanches) occupent les sommets du réseau dont la somme des coordonnées est paire, et que les charges négatives (disques noirs) sont aux sommets dont la somme des coordonnées est impaire.

Nous exploiterons cette remarque en répartissant les charges électriques en couches :

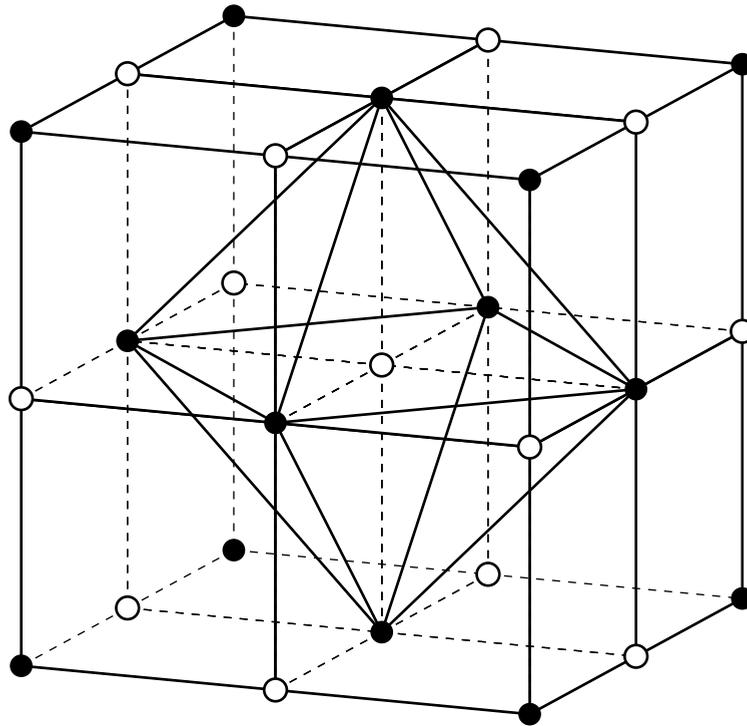
- la couche n°0 est formé de l'origine  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,
- la couche n°1 comportera les charges situées aux sommets pour lesquels  $|x| + |y| + |z| = 1$  <sup>(1)</sup>,
- la couche n°2, comportera celles qui sont situées aux sommets pour lesquels  $|x| + |y| + |z| = 2$ ,
- etc.

La quantité  $|x| + |y| + |z|$  est parfois appelée la *taxi-distance* du point  $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  au

point  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . C'est tout simplement le nombre minimum d'arêtes du réseau à parcourir pour aller de  $P$  à l'origine  $O$ .

Quel est l'aspect géométrique de chacune des couches ?

<sup>(1)</sup> On note au passage que  $x + y + z$  et  $|x| + |y| + |z|$  ont toujours la même parité.



Couche n°1

Pour  $n > 0$ , considérons la couche n° $n$ , nous la noterons  $C_n$ . Elle est formée des charges situées aux sommets du réseau pour lesquels  $|x| + |y| + |z| = n$ . La présence de valeurs absolues dans cette formule nous amène à considérer séparément la portion de  $C_n$  située dans chacun des huit octants de l'espace. Le premier octant, par exemple, est formé des points pour lesquels  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  et  $z \geq 0$ . Dans cet octant, l'équation  $|x| + |y| + |z| = n$

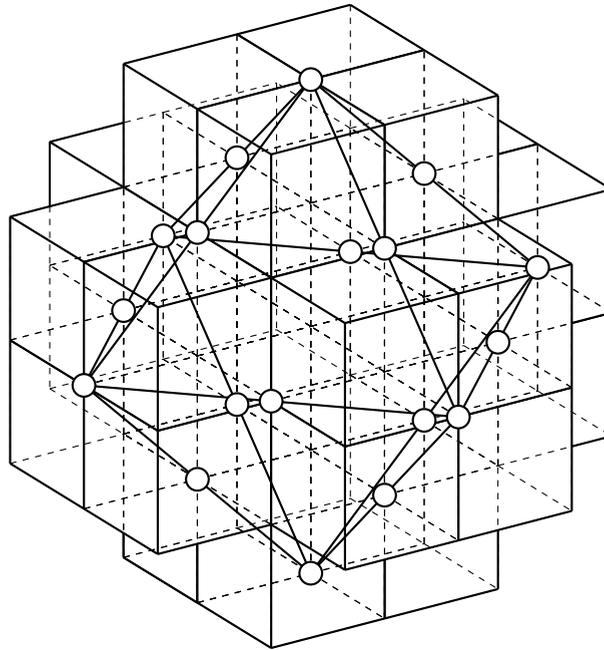
se réduit à  $x + y + z = n$ . C'est l'équation du plan passant par les points  $\begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ n \\ 0 \end{pmatrix}$

et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n \end{pmatrix}$ . La portion de  $C_n$  contenue dans le premier octant est donc formée des points

de coordonnées entières situés à l'intérieur ou au bord du triangle ayant ces points comme sommets.

En procédant de la même façon pour chacun des huit octants, nous constatons que la couche  $C_n$  est constituée des points à coordonnées entières situés dans huit triangles équilatéraux et isométriques. C'est un octaèdre régulier ayant pour sommets les six points

$$\begin{pmatrix} \pm n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm n \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm n \end{pmatrix}.$$



Couche n°2

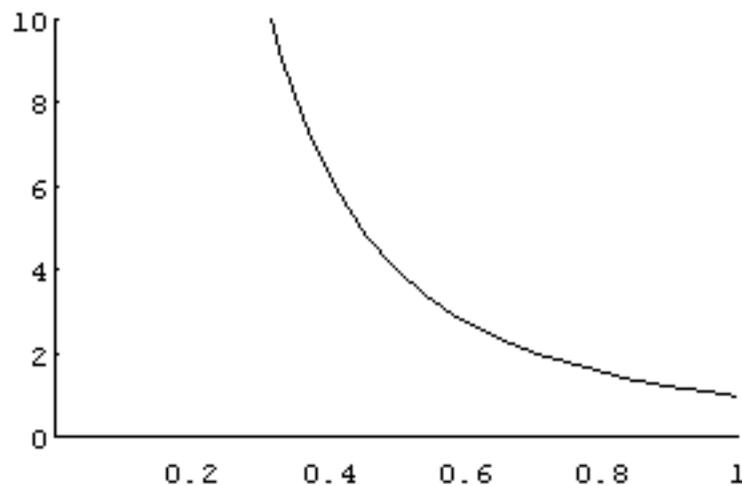
### 3.3. Le champ créé par les deux premières couches

Intéressons-nous au champ électrique créé en un point  $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  de l'axe  $OX$  par les couches  $C_0$  et  $C_1$ . Supposons de plus  $0 < x < 1$ .

La couche n°0 est constituée d'un seul point : l'origine. Le champ  $\vec{F}_0$  en  $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est donné (au facteur  $K$  près) directement par la formule

$$\vec{F}_0(x) = \frac{1}{|OP|^3}(P - O) = \frac{1}{x^3} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Voici le graphique de son intensité :  $x \mapsto f_0(x) = \frac{1}{x^2}$  pour  $0 < x < 1$  :



La couche n°1 va être débitée en trois tranches  $T_{1,-1}$ ,  $T_{1,0}$  et  $T_{1,1}$  :

1.  $T_{1,-1}$  ne contient que le point  $A_{1,-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

2.  $T_{1,0}$  comprend les quatre points  $A_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $B_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $C_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

$$D_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Enfin la tranche  $T_{1,1}$  est réduite au point  $A_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Comme nous l'avons remarqué, ces points sont les six sommets d'un octaèdre régulier, et en chacun de ces sommets se trouve un charge négative.

Nous devons donc calculer les expressions

$$\begin{aligned} \vec{F}_{1,-1} &= \frac{1}{|PA_{1,-1}|^3}(A_{1,-1} - P) \\ \vec{F}_{1,0} &= \frac{1}{|PA_{1,0}|^3}(A_{1,0} - P) + \frac{1}{|PB_{1,0}|^3}(B_{1,0} - P) + \frac{1}{|PC_{1,0}|^3}(C_{1,0} - P) \\ &\quad + \frac{1}{|PD_{1,0}|^3}(D_{1,0} - P) \\ \vec{F}_{1,1} &= \frac{1}{|PA_{1,1}|^3}(A_{1,1} - P) \end{aligned}$$

Puisque  $P = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $0 < x < 1$ , on a

$$|PA_{1,-1}| = 1 + x, \quad |PA_{1,1}| = 1 - x$$

et

$$|PA_{1,0}| = |PB_{1,0}| = |PC_{1,0}| = |PD_{1,0}| = \sqrt{x^2 + 1}$$

Le champ dû à la couche n°1 est donc, au facteur  $K$  près :

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= \vec{F}_{1,-1} + \vec{F}_{1,0} + \vec{F}_{1,1} \\ &= \frac{1}{(1+x)^3}(A_{1,-1} - P) \\ &\quad + \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}(A_{1,0} + B_{1,0} + C_{1,0} + D_{1,0} - 4P) \\ &\quad + \frac{1}{(1-x)^3}(A_{1,1} - P) \end{aligned}$$

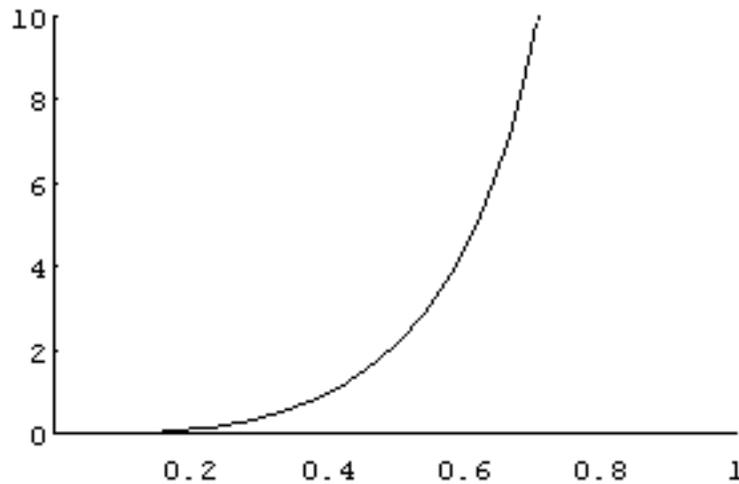
Comme  $A_{1,0} + B_{1,0} = O$  et  $C_{1,0} + D_{1,0} = O$ ,

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{(1-x)^3} \begin{pmatrix} 1-x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{(1+x)^3} \begin{pmatrix} -1-x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme la symétrie de la situation le laissait prévoir, ce champ est dirigé selon l'axe  $OX$ . Son intensité vaut

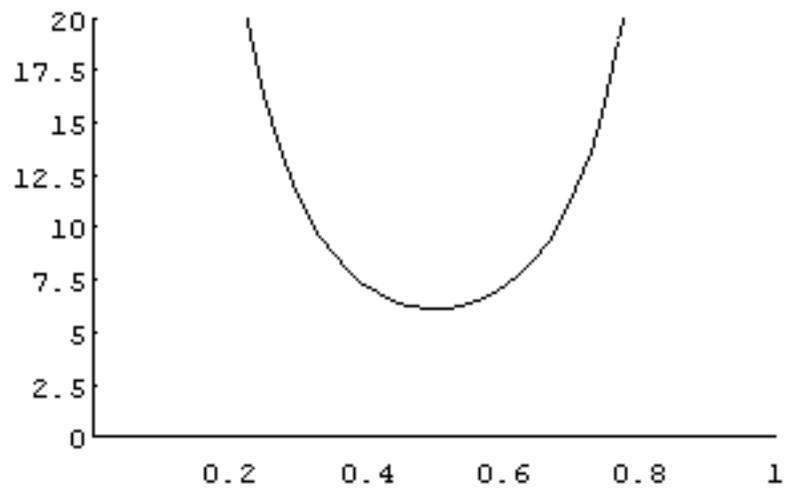
$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} - 4x \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \\ &= 4x \left( \frac{1}{(1-x^2)^2} - \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

Voici le graphe de cette fonction :



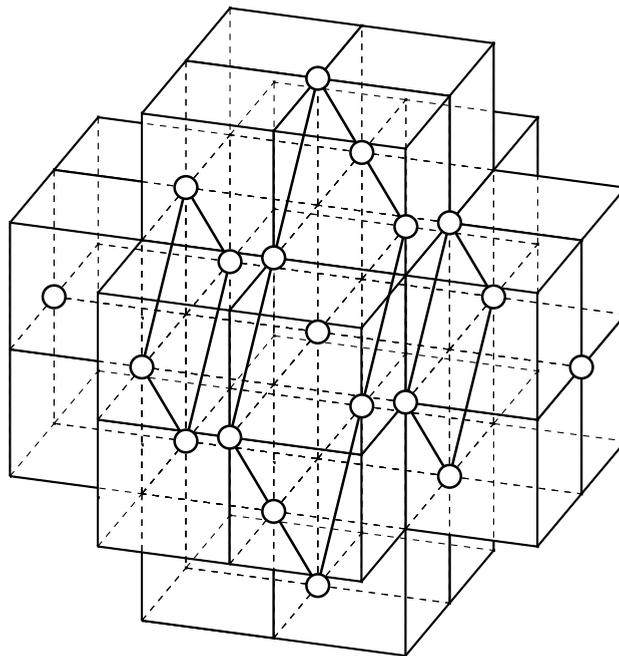
Pour  $x = 0$ , le champ est nul : les champs créés par les quatre points de la tranche  $T_{1,0}$  s'équilibrent alors que les influences des tranches  $T_{1,-1}$  et  $T_{1,1}$  s'annulent mutuellement. Dès que  $x$  augmente, l'intensité devient positive : le champ est dirigé dans la direction des  $x$  croissant, l'influence de  $T_{1,1}$  domine. Lorsque  $x$  tend vers 1, l'intensité du champ tend vers l'infini, ce à quoi on pouvait s'attendre.

Nous pouvons aussi additionner les champs créés par les couches n°0 et 1 :



### 3.4. Le champ créé par la couche n°2

La couche  $C_2$  est constituée des charges situées aux points du réseau pour lesquels  $|x| + |y| + |z| = 2$ . Ces points occupent les six sommets et les douze milieux d'arêtes d'un octaèdre. Nous découperons cette couche  $C_2$  en cinq tranches  $T_{2,-2}, \dots, T_{2,2}$ . La tranche  $T_{2,k}$  est formée des points de  $C_k$  d'abscisse  $k$ .



Examinons, tranche par tranche, les distances au point  $P = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  des points de la couche  $C_2$ . Les 18 distances ne prennent que six valeurs différentes :

**Tranche  $T_{2,-2}$  :** Elle n'est constituée que du sommet  $A_{2,-2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Sa distance à  $P$  vaut  $2 + x$ .

**Tranche**  $T_{2,-1}$  : Elle comprend les points  $A_{2,-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $B_{2,-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $C_{2,-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $D_{2,-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ , constituant les sommets d'un carré. Ces quatre points sont à la distance  $\sqrt{x^2 + 2x + 2}$  de  $P$ .

**Tranche**  $T_{2,0}$  : Elle comprend huit points situés aux sommets et aux milieux des côtés d'un carré.

Les quatre sommets sont les points  $A_{2,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $B_{2,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $C_{2,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

et  $D_{2,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  Leur distance à  $P$  est  $\sqrt{x^2 + 4}$ .

Les milieux des côtés du carré sont les points  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Leur distance à  $P$  vaut  $\sqrt{x^2 + 2}$ .

**Tranche**  $T_{2,1}$  : Elle est analogue à la tranche  $T_{2,-1}$  : quatre points formant un carré. Ces quatre points sont à la distance  $\sqrt{x^2 - 2x + 2}$  de  $P$ .

**Tranche**  $T_{2,2}$  : Elle n'est constituée que du sommet  $A_{2,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Sa distance à  $P$  vaut

$$2 - x.$$

Nous décomposons donc l'expression du champ créé par  $C_2$  en cinq composantes correspondant aux cinq tranches. Les charges situées en les points de  $C_2$  étant positives, les champs correspondant sont des forces de répulsion, donc exprimées par les vecteurs  $P - A_{2,-2}$ ,  $P - A_{2,-1}$ , ... (alors que dans le cas de la couche n°1, on devait considérer  $A_{1,-1} - P$ , ...). Ainsi :

$$\vec{F}_{2,-2} = \frac{1}{(2+x)^3} (P - A_{2,-2}) = \frac{1}{(2+x)^3} \begin{pmatrix} x+2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{(2+x)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_{2,-1} = \frac{1}{(x^2 + 2x + 2)^{3/2}} ((P - A_{2,-1}) + (P - B_{2,-1}) + (P - C_{2,-1}) + (P - D_{2,-1}))$$

$$= 4 \frac{1}{(x^2 + 2x + 2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x + 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{2,0} &= \frac{1}{(x^2 + 4)^{3/2}} ((P - A_{2,0}) + (P - B_{2,0}) + (P - C_{2,0}) + (P - D_{2,0})) \\ &+ \frac{1}{(x^2 + 2)^{3/2}} \left( P - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + P - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + P - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + P - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= 4 \left( \frac{1}{(x^2 + 4)^{3/2}} + \frac{1}{(x^2 + 2)^{3/2}} \right) \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

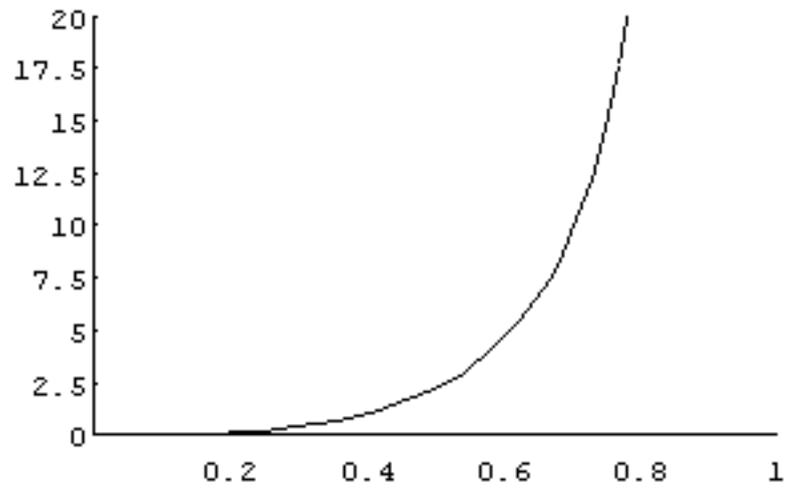
$$\begin{aligned} \vec{F}_{2,1} &= \frac{1}{(x^2 - 2x + 2)^{3/2}} ((P - A_{2,1}) + (P - B_{2,1}) + (P - C_{2,1}) + (P - D_{2,1})) \\ &= 4 \frac{1}{(x^2 - 2x + 2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x - 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{F}_{2,2} = \frac{1}{(2 - x)^3} (P - A_{2,2}) = \frac{1}{(2 - x)^3} \begin{pmatrix} x - 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{(2 - x)^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On constate à nouveau que le champ résultant est dirigé suivant l'axe  $OX$ . Son intensité est donnée par la fonction

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{1}{(2 + x)^2} + \frac{-1}{(2 - x)^2} \\ &+ \frac{4(x + 1)}{(x^2 + 2x + 2)^{3/2}} + \frac{4x}{(x^2 + 4)^{3/2}} + \frac{4x}{(x^2 + 2)^{3/2}} + \frac{4(x - 1)}{(x^2 - 2x + 2)^{3/2}} \\ &= -\frac{8x}{(4 - x^2)^2} + \frac{4x}{(x^2 + 4)^{3/2}} + \frac{4x}{(x^2 + 2)^{3/2}} + \frac{4(x - 1)}{(x^2 - 2x + 2)^{3/2}} + \frac{4(x + 1)}{(x^2 + 2x + 2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Voici le graphe de cette fonction :



Comme  $f_1$ , la fonction  $f_2$  est positive, autrement dit les influences des deux premières couches s'additionnent. Cependant, l'intensité de  $F_2$  est nettement plus faible que celle de  $F_1$ .

### 3.5. Et le champ correspondant à la couche $n^{\circ}n$ ?

La méthode appliquée précédemment permet de déterminer le champ créé par n'importe laquelle des couches  $C_n$ . Les calculs sont simplement plus longs et nécessitent une organisation soignée.

Analysons de plus près la couche  $C_n$ . Nous déterminerons en particulier le nombre de points du réseau qui en font partie. Nous pouvons écrire

$$C_n = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3 \mid |x| + |y| + |z| = n \right\}$$

L'abscisse d'un point de  $C_n$  est nécessairement comprise entre  $-n$  et  $n$ . Découpons  $C_n$  en tranches de points ayant même abscisse. La tranche  $T_{n,k}$ ,  $k = -n, \dots, 0, \dots, n$ , est définie par :

$$T_{n,k} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3 \mid x = k \text{ et } |y| + |z| = n - |k| \right\}$$

Autrement dit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in T_{n,k} \Leftrightarrow x = k, y \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{Z} \text{ et } |y| + |z| = n - |k|$$

Chaque tranche est l'ensemble des points à coordonnées entières situés sur le bord d'un carré (la section de l'octaèdre  $C_n$  par le plan  $x = k$ ).

Déterminons le nombre de points de chaque tranche. La tranche  $T_{n,-n}$  ne contient que le sommet  $A_{n,-n} = \begin{pmatrix} -n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . De même, la tranche  $T_{n,n}$  ne contient que  $A_{n,n} = \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Il est clair que  $T_{n,k}$  et  $T_{n,-k}$  contiennent le même nombre de points. La tranche  $T_{n,-(n-1)}$  est formée des quatre points  $\begin{pmatrix} -(n-1) \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -(n-1) \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ .

D'une façon générale, si  $k \neq n$  et  $k \neq -n$ , la tranche  $T_{n,k}$  contient

1. les quatre points  $A_{n,k} = \begin{pmatrix} k \\ n - |k| \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $B_{n,k} = \begin{pmatrix} k \\ -n + |k| \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $C_{n,k} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ n - |k| \end{pmatrix}$ ,
- $$D_{n,k} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -n + |k| \end{pmatrix}.$$

2. les points à coordonnées entières situés sur les côtés du carré de sommets  $A_{n,k}$ ,  $B_{n,k}$ ,  $C_{n,k}$ ,  $D_{n,k}$ . Par exemple, sur le côté pour lequel  $y > 0$  et  $z > 0$ , on trouve, outre les sommets  $A_{n,k}$  et  $C_{n,k}$ , les  $n - |k| - 1$  points

$$\begin{pmatrix} k \\ 1 \\ n - |k| - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ n - |k| - 2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} k \\ n - |k| - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous voyons que si  $k \neq n$  et  $k \neq -n$ , la tranche  $T_{n,k}$  contient  $4 + 4(n - |k| - 1) = 4(n - |k|)$  points. Finalement, le nombre  $S_n$  de points de la couche  $C_n$  est donné par la formule

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 4 + 8 + \dots + (4n - 4) + 4n + (4n - 4) + \dots + 8 + 4 + 1 \\ &= 2 + 4n + 8(1 + 2 + \dots + (n - 1)) \\ &= 2 + 4n + 8 \frac{n(n - 1)}{2} \\ &= 4n^2 + 2 \end{aligned}$$

Ainsi,  $S_1 = 6$ ,  $S_2 = 18$ ,  $S_3 = 38$ , ...

Le champ créé par la couche  $C_n$  est donc la somme de  $4n^2 + 2$  champs élémentaires. Pour effectuer le calcul, on tient compte de ce que la somme des termes correspondant aux points d'une même tranche est nécessairement, pour des raisons de symétrie, une force parallèle à l'axe  $OX$ . A l'exception de ceux qui correspondent aux tranches  $T_{n,-n}$  et  $T_{n,n}$ , les termes se regroupent par paquets de 4.

En tenant compte de ce que les charges situées en les point de  $C_n$  sont positives pour  $n$  pair et négatives pour  $n$  impair, nous obtenons les résultats suivants :

1. Champ engendré par  $T_{n,-n}$  :

$$\vec{F}_{n,-n} = (-1)^n \frac{1}{(x+n)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Champ engendré par  $T_{n,n}$  :

$$\vec{F}_{n,n} = (-1)^n \frac{1}{(n-x)^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Champ engendré par  $T_{n,k}$   $-(n-1) \leq k \leq n-1$  :

Cette tranche a la forme d'un carré. Nous calculerons d'abord l'influence de l'un des côtés de ce carré (en n'y incorporant qu'un seul sommet).

Considérons donc les points  $\begin{pmatrix} k \\ n-|k| \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} k \\ n-|k|-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\dots$ ,  $\begin{pmatrix} k \\ 1 \\ n-|k|-1 \end{pmatrix}$ .

Leur forme générale est  $\begin{pmatrix} k \\ n-|k|-h \\ h \end{pmatrix}$  où  $h$  varie de 0 à  $n-|k|-1$ . La distance

de ce point à  $P = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  vaut  $\sqrt{(x-k)^2 + (n-|k|-h)^2 + h^2}$  et le champ créé en

$P$  est

$$(-1)^n \frac{1}{((x-k)^2 + (n-|k|-h)^2 + h^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x-k \\ -n+|k|+h \\ h \end{pmatrix}$$

Lorsqu'on prend en compte les quatre côtés du carré, on note que la situation est invariante par une rotation de  $90^\circ$  autour de l'axe  $OX$ . Il en résulte que dans le calcul de  $\vec{F}_{n,k}$ , les composantes selon  $OY$  et  $OZ$  s'annulent et que la composante selon  $OX$  vaut quatre fois celle qui résulte de la considération d'un seul côté. Ainsi

$$\vec{F}_{n,k} = 4(-1)^n \sum_{h=0}^{n-|k|-1} \frac{x-k}{((x-k)^2 + (n-|k|-h)^2 + h^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'intensité de la force  $\vec{F}_n$  est ainsi donnée par la fonction

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (-1)^n \left( \frac{1}{(x+n)^2} - \frac{1}{(x-n)^2} + 4 \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \sum_{h=0}^{n-|k|-1} \frac{x-k}{((x-k)^2 + (n-|k|-h)^2 + h^2)^{3/2}} \right) \\ &= (-1)^n \left( \frac{-4nx}{(x^2-n^2)^2} + 4 \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \sum_{h=0}^{n-|k|-1} \frac{x-k}{((x-k)^2 + (n-|k|-h)^2 + h^2)^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

Pour des valeurs particulières de  $n$ , on peut à l'aide d'un bon logiciel de représentation graphique, dessiner cette fonction sans difficulté.

### 3.6. Pourquoi pas une couche cubique ?

Dans ce qui précède, nous avons choisi d'examiner les champs créés par des parties du réseau ayant la forme d'un octaèdre. L'avantage était que tous les points du même couche étaient munis de charges de même signe. De plus, chaque couche était constituée des points situés à une taxi-distance déterminée de l'origine. Rien ne nous empêche de considérer d'autres configurations. En regroupant les points du réseau par exemple,

- selon leur distance euclidienne à l'origine. Les couches sont alors sphériques.
- selon la valeur de leur plus grande coordonnée (en valeur absolue). On obtient des couches cubiques.
- selon des plans passant par l'origine.
- ...

Les configurations intéressantes sont nombreuses. On peut aussi examiner le champ créé en un point situé ailleurs que sur un axe. Les calculs seront plus complexes. Mais dans tous les cas, les idées à appliquer ne seront guère différentes de celles que nous venons de rencontrer.

# Chapitre 4

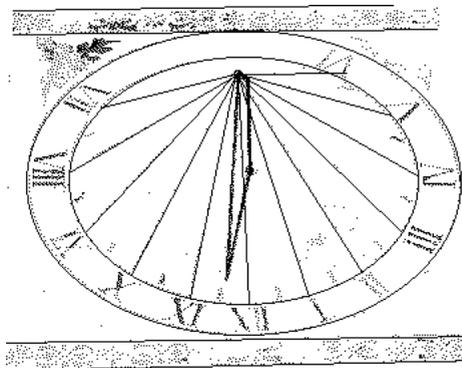
## Construire un cadran solaire

4.1	Introduction . . . . .	208
4.2	Où est le soleil? . . . . .	211
4.3	Les cadrans solaires classiques . . . . .	212
4.4	Où est l'ombre? . . . . .	213
4.4.1	Les cadrans équatoriaux . . . . .	214
4.4.2	Les cadrans horizontaux . . . . .	215

## 4.1. Introduction

Des cadrans solaires ont été construits depuis la plus haute antiquité. Le plus ancien cadran connu serait égyptien et daterait du premier millénaire et demi avant notre ère, cependant que « les chinois prétendent qu'ils employaient déjà des cadrans à l'époque de l'empereur Yao, 24 siècles avant Jésus-Christ. Malheureusement l'existence de l'empereur Yao est incertaine » <sup>(1)</sup>.

Il est des cadrans de formes et de disposition variées. Certains sont de véritables œuvres d'art. Tous sont basés sur le même principe. Une baguette, appelée *style*, est fixée sur une *table* (qui peut être verticale aussi bien que horizontale ou oblique). Un cadran, ensemble de rayons issus de la base du style, est dessiné sur la table. La position de l'ombre du style par rapport à ce cadran indique l'heure.



Si un cadran solaire indique l'heure, il s'agit bien évidemment de l'heure solaire. Il n'est peut-être pas inutile de rappeler rapidement les faits de base à ce sujet.

Comme chacun sait, le globe terrestre est animé de deux mouvements de rotation :

- la rotation diurne, mouvement au cours duquel la terre tourne sur elle-même en 24 heures, autour de l'axe des pôles. Ce mouvement induit un découpage du temps en jours. Il est aussi utilisé afin de définir l'heure.
- la révolution autour du soleil, mouvement qui s'effectue en approximativement 365,25 jours. Ce mouvement induit un découpage du temps en années.

Le découpage en mois n'est pas dû au mouvement de la terre, mais bien à celui de la lune. Le fait que l'année ne comporte pas un nombre entier de jours est la raison des difficultés rencontrées pour fixer un calendrier. L'évolution du calendrier depuis l'antiquité jusqu'à nos jours est un sujet qui comporte des aspects mathématiques intéressants mais que nous n'aborderons pas ci-dessous.

Nous nous intéresserons uniquement au mouvement de rotation diurne et au découpage du jour en 24 heures qu'il permet de définir. Le principe est simple et basé sur le fait que pour un observateur vivant à la surface du globe terrestre, tout se passe comme si c'était le soleil qui tournait autour de la terre en un jour plutôt que la terre autour du soleil.

*L'intervalle de temps séparant deux passages consécutifs du soleil dans le plan méridien d'un lieu donné définit ce qui est appelé le jour solaire vrai.*

<sup>(1)</sup> Les cadrans solaires classiques, *L'Astronomie*, 419–428, 1983

Rappelons que le soleil ne passe pas à la verticale de tous les points de la terre. En fait, il n'est jamais à la verticale que de points situés entre les deux tropiques, c'est à dire des points de latitude comprise entre  $-23^{\circ}27'$  et  $+23^{\circ}27'$ . De plus, il ne passe à la verticale d'un de ces points qu'au maximum deux fois par an. C'est donc le passage du soleil dans le plan méridien qui sert de référence. Rappelons donc aussi ce qu'est le plan méridien d'un point de la terre :

*Le plan méridien du point  $P$  situé à la surface de la terre est le plan passant par  $P$  et par l'axe de rotation de la terre*

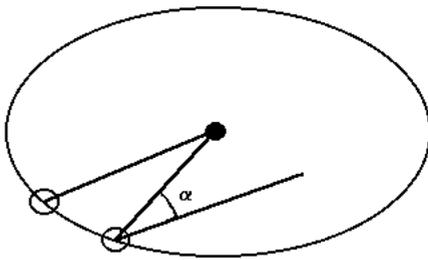
À présent, nous pouvons définir correctement le jour solaire vrai :

*Le jour solaire vrai est l'intervalle de temps séparant deux passages consécutifs du soleil dans le plan méridien d'un lieu donné.*

Au moment où le soleil est dans le plan méridien d'un point  $P$ , on dit que qu'il est « midi vrai » (s'il fait jour) ou « minuit vrai » (s'il fait nuit). La définition est parfaite et il ne reste plus qu'à trouver un moyen (par exemple un cadran solaire) de découper ce jour solaire vrai en 24 heures pour pouvoir déterminer l'heure.

Cette définition comporte cependant un inconvénient : l'heure dépend du lieu. Deux points n'ont la même heure que s'ils ont le même plan méridien, c'est-à-dire s'ils ont la même longitude. Si cet inconvénient était faible tant que les hommes (et les femmes) restaient dans leur village, il est devenu majeur dès lors que les activités humaines impliquent des déplacements fréquents et importants. De là ont résulté au dix-neuvième siècle l'adoption d'un temps de référence (celui du méridien de Greenwich) et le découpage de la surface terrestre en fuseaux horaires. Ce n'est donc pas l'heure solaire vraie que nos montres renseignent mais une heure « officielle », qui nous est communiquée par la radio (les « tops horaires ») ou l'horloge parlante.

L'heure solaire vraie est affligée d'un autre inconvénient, qui la rend impropre à la consommation. C'est que la durée du jour solaire vrai varie d'un jour à l'autre. Autrement dit, l'intervalle de temps qui sépare deux passages consécutifs du soleil au méridien d'un lieu donné n'est pas toujours le même. Cela résulte de l'autre mouvement de la terre, le mouvement annuel de révolution autour du soleil.



Pendant qu'elle tourne sur elle-même, la terre avance au long de son orbite autour du soleil. Après qu'elle ait effectué un tour complet, le plan méridien d'un point  $P$  a repris une position parallèle à sa position initiale, mais ne contient plus le soleil. La terre doit encore tourner d'un (petit) angle  $\alpha$  avant que le soleil traverse de nouveau le plan méridien de  $P$ .

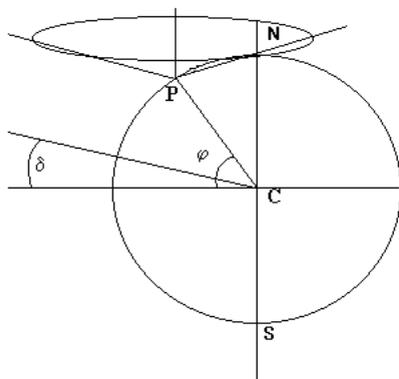
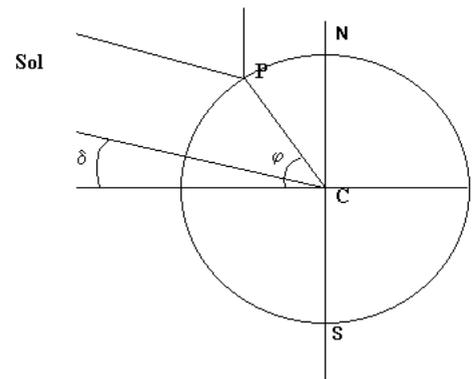
L'angle  $\alpha$  vaut environ 4 minutes d'arc. Le jour « vrai » est donc en quelque sorte 4 minutes trop long. Mais il ne s'agit là que d'une première approximation car la trajectoire de la terre étant elliptique, sa vitesse varie au cours de l'année et l'angle  $\alpha$  varie aussi. Tout ceci a amené les astronomes à définir plusieurs notions de « jour » : le jour solaire vrai, le jour solaire moyen, . . . On peut déterminer l'heure solaire moyenne en appliquant une correction, appelée *équation du temps* à l'heure solaire vraie. (La courbe donnant l'équation du temps est gravée sur certains cadrans solaires.)

Dans ce chapitre, nous ne nous préoccupons pas des corrections à appliquer au temps solaire vrai pour déterminer le temps solaire moyen, puis le temps officiel. Nous nous contenterons de décrire un cadran solaire fournissant le seul temps solaire vrai. Cela revient à admettre que la terre et le soleil occupent des positions fixes dans l'espace, la terre se contentant de tourner sur elle-même en 24 heures. Comme il est d'usage, nous admettrons aussi que le soleil est suffisamment loin pour que tous les rayons solaires puissent être considérés comme parallèles.

## 4.2. Où est le soleil ?

Puisque nous ne nous intéressons qu'au mouvement de rotation diurne de la terre, nous admettrons que l'axe de cette rotation est fixe. De cette façon, les rayons solaires ayant toujours la même direction, l'angle entre ceux-ci et l'axe de la terre ne change pas au cours d'une journée.

Mais, pour un observateur terrestre, situé en  $P$ , ce n'est pas la terre qui tourne autour du soleil en un jour, c'est le contraire. Le soleil est, pour lui, animé d'un mouvement journalier (que l'on qualifie d'*apparent*).



Puisque l'angle entre le rayon solaire arrivant en  $P$  et la direction de l'axe de la terre est invariant, l'observateur a l'impression que ce rayon balaie un cône droit de sommet  $P$  et dont l'axe est parallèle à l'axe de la terre. Appelons-le le *cône de soleil*.

*La figure ci-contre est destinée à illustrer la situation, mais elle ne présente aucun caractère réaliste puisque le globe terrestre et le cône de soleil sont représentés suivant des conventions différentes*

Si la *déclinaison* du soleil, c'est-à-dire l'angle entre les rayons solaires et le plan de l'équateur, est notée  $\delta$ , l'ouverture du cône de soleil (l'angle entre l'axe du cône et les génératrices) est l'angle complémentaire de  $\delta$ . Au cours de l'année,  $\delta$  varie de  $-23^{\circ}27'$  à  $+23^{\circ}27'$ . L'ouverture du cône est donc toujours comprise entre  $90^{\circ}$  et  $66^{\circ}33'$ . En particulier, l'ouverture vaut  $90^{\circ}$  (de sorte que le cône de soleil est un plan), lorsque le soleil est situé dans le plan de l'équateur, ce qui arrive deux fois par an lors des équinoxes.

### 4.3. Les cadrans solaires classiques

Le style d'un cadran solaire classique est orienté parallèlement à l'axe de la terre. Le rayon solaire passant par l'extrémité du style balaie donc un cône droit dont l'axe est le style (plus exactement la droite supportant le style). Quel que soit le jour de l'année, le plan déterminé par le style et ce rayon solaire à une heure donnée occupe toujours la même position : c'est le plan méridien à midi (ce serait aussi le plan méridien à minuit si la terre était transparente!), c'est le plan perpendiculaire au plan méridien et passant par le style à 6 h et 18 h, etc. Comme ce plan contient aussi l'ombre du style, la position de celle-ci ne dépend que de l'heure solaire vraie, et indique cette heure. Il suffit de repérer la position de l'ombre à midi, une heure, . . . , pour graduer efficacement le cadran.

Pour déterminer l'ombre du style, il suffit aussi de déterminer l'ombre de son extrémité, et de la joindre à la base du style. Nous nous intéresserons donc à *la trajectoire (au cours de la journée) de l'ombre de l'extrémité du style*.

Si la table du cadran solaire est plane, ce qui est généralement le cas, rechercher cette trajectoire revient à rechercher la section du cône par le plan de la table du cadran. La forme de cette section dépend de l'orientation de la table par rapport au style.

On distingue ainsi des cadrans solaires

- équatoriaux : la table du cadran est perpendiculaire au style, elle est donc parallèle au plan équatorial.
- horizontaux : la table est horizontale. L'angle entre le style et la table est alors la latitude du lieu, que nous notons  $\varphi$ . Il est des lieux sur la terre où un cadran horizontal est aussi équatorial. Lesquels ?
- verticaux : la table est verticale. Ceci ne fixe pas complètement sa position. Les cadrans solaires verticaux sont généralement placés sur la façade d'un bâtiment, ce qui ne permet pas toujours de les orienter comme on le souhaiterait. Les cas les plus simples sont ceux des cadrans orientés Nord-Sud ou Est-Ouest.
- d'orientation quelconque

Nous nous limiterons dans ce qui suit à l'étude des cadrans équatoriaux et horizontaux.

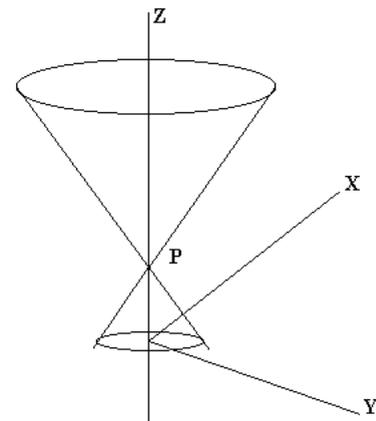
## 4.4. Où est l'ombre ?

Adoptons un repère orthonormé dont l'origine est le point situé à la base du style, et choisissons la longueur de celui-ci comme unité. Prenons comme axe  $OZ$  la droite qui supporte le style, dont l'extrémité est

par conséquent le point  $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Ainsi

défini, l'axe  $OZ$  est dans le plan méridien de  $P$ . Plaçons également l'axe  $OX$  dans le plan méridien, perpendiculairement à  $OZ$ , et en direction du nord géographique. Le plan  $XOZ$  est donc le plan méridien.

Enfin, l'axe  $OY$  est placé perpendiculairement à ce plan, donc dans le plan horizontal passant par l'origine, et dans la direction opposée au soleil couchant, c'est à dire vers l'est. De cette façon, l'ombre du style sera superposée à midi à la partie positive de  $OX$  et balayera le premier quadrant au cours de l'après-midi. Notons que le trièdre que nous venons de définir est lévogyre.



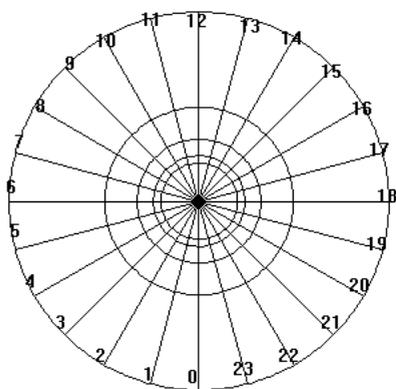
### 4.4.1 Les cadrans équatoriaux

La table d'un tel cadran est parallèle au plan équatorial. Supposons que le soleil ne soit pas dans ce plan, c'est-à-dire que sa déclinaison  $\delta$  n'est pas nulle. Alors le cône solaire passant par l'extrémité du style est un cône droit d'axe  $OZ$  et son intersection avec le plan  $OXY$  est un cercle, dont le rayon vaut  $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \delta) = \operatorname{cotg} \delta$ . Ceci règle définitivement le cas des cadrans solaires équatoriaux : on les gradue tout simplement en découpant le plan en 24 secteurs de  $15^\circ$ . La trajectoire de l'ombre de l'extrémité du style est alors un cercle dont le rayon varie au cours de l'année de  $\operatorname{cotg} 23^\circ 27' \simeq 2,305$  à l'infini.

Les astronomes appellent « angle horaire » l'angle dont la terre a tourné sur elle-même depuis le dernier passage du soleil dans le plan méridien. Cet angle est mesuré en heures, à partir du sud, dans le sens horlogique. Il varie donc de 0h (midi) à 24h, minuit correspondant à  $H = 12h$ . Cette pratique des astronomes ne nous convient guère car les fonctions trigonométriques que nous utilisons supposent que les angles sont mesurés en radians. Nous préférons écrire  $\cos H$  plutôt que  $\cos \frac{\pi H}{12}$ . Dans ce qui suit nous nous écartons donc de la pratique des astronomes en admettant que  $H$  varie de 0 à  $2\pi$ ,  $H = 0$  correspondant à midi et  $H = \pi$  à minuit.

Si  $Q(H)$  est le point du cercle, parcouru par l'ombre de l'extrémité du style à l'heure  $H$  on a

$$Q(H) = \begin{pmatrix} \operatorname{cotg} \delta \cos H \\ \operatorname{cotg} \delta \sin H \\ 0 \end{pmatrix}$$

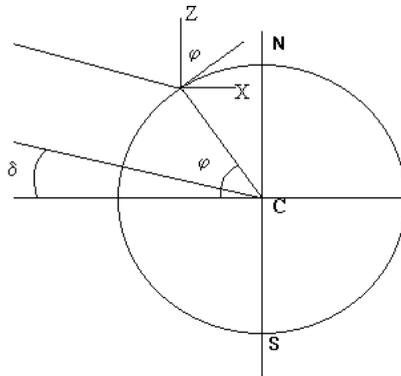


Sur la figure ci-contre, on a représenté, de l'extérieur vers l'intérieur, les cercles correspondant aux valeurs  $5^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $20^\circ$  et  $23^\circ 27'$  de la déclinaison du soleil.

Notons qu'un cadran équatorial n'est utilisable que durant la demi-année durant laquelle le soleil et le style se trouvent du même côté de la table, c'est-à-dire de l'équinoxe de printemps à celle d'automne pour les lieux situés dans l'hémisphère nord. Il n'est pas non plus utilisable aux moments des équinoxes puisque, la cotangente de  $0^\circ$  n'étant pas définie, le point  $Q(H)$  ne l'est pas non plus.

### 4.4.2 Les cadrans horizontaux

Il est sans doute plus facile d'installer un cadran horizontal qu'un cadran équatorial puisque sa table est ...horizontale. Nous pouvons assez facilement trouver l'équation du plan horizontal  $\zeta$  passant par l'origine (la base du style) par rapport au système d'axes choisi précédemment. En effet, le plan  $XOZ$  est le plan méridien et l'axe  $OY$  est situé dans le plan horizontal. De plus l'angle de l'axe  $OZ$  avec le plan horizontal est la latitude  $\varphi$  du lieu.



L'équation du plan horizontal  $\zeta$  est donc

$$x \cos \varphi - z \sin \varphi = 0$$

Un vecteur normal au plan  $\zeta$  est le vecteur  $N = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ 0 \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ .

- Au paragraphe précédent, dans le cas où le soleil n'est pas dans le plan de l'équateur ( $\delta \neq 0$ ), nous avons déterminé l'ombre  $Q(H)$  de l'extrémité du style (le point  $P$ ) sur le plan perpendiculaire au style. Pour trouver l'ombre de  $P$  sur le plan horizontal, il suffit de déterminer l'intersection de la droite  $PQ(H)$  et du plan  $\zeta$ . Nous utiliserons dans ce but l'équation vectorielle

$$X = P + s(Q(H) - P)$$

(où  $s \in \mathbb{R}$ ) de la droite  $PQ(H)$ .

- Dans le cas où  $\delta = 0$ , le rayon solaire passant par  $P$  à l'heure  $H$  a comme équation vectorielle

$$X = P + s \begin{pmatrix} \cos H \\ \sin H \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans les deux cas, nous devons rechercher la valeur de  $s$  pour laquelle  $X \in \zeta$ , ce qui revient à résoudre l'équation  $N \cdot X = 0$ .

La valeur de  $s$  est donc donnée par

**si  $\delta \neq 0$  :**

$$N \cdot P + sN \cdot (Q(H) - P) = 0$$

$$\text{Puisque } P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q(H) - P = \begin{pmatrix} \cotg \delta \cos H \\ \cotg \delta \sin H \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$s = -\frac{N \cdot P}{N \cdot (Q(H) - P)} = \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi + \cos \varphi \cotg \delta \cos H}$$

et l'ombre de  $P$  sur  $\zeta$  est

$$\begin{aligned} R_\delta(H) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi + \cos \varphi \cotg \delta \cos H} \begin{pmatrix} \cotg \delta \cos H \\ \cotg \delta \sin H \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\cotg \delta}{\sin \varphi + \cos \varphi \cotg \delta \cos H} \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos H \\ \sin \varphi \sin H \\ \cos \varphi \cos H \end{pmatrix} \\ &= \frac{\cos H}{\tg \varphi \tg \delta + \cos H} \begin{pmatrix} \tg \varphi \\ \tg \varphi \tg H \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**si  $\delta = 0$  :**

$$N \cdot P + sN \cdot \begin{pmatrix} \cos H \\ \sin H \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

D'où  $s = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi \cos H}$  et

$$R_0(H) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\tg \varphi}{\cos H} \begin{pmatrix} \cos H \\ \sin H \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tg \varphi \\ \tg \varphi \tg H \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ayant calculé  $R_\delta(H)$  dans les deux cas  $\delta \neq 0$  et  $\delta = 0$ , notons  $C_\delta$  la courbe parcourue par le point  $R_\delta(H)$  pour une valeur déterminée de la déclinaison  $\delta$  du soleil.

Etudions les courbes  $C_\delta$ , en commençant par le cas  $\delta = 0$ . Nous pouvons alors écrire

$$R_0(H) = \begin{pmatrix} \tg \varphi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \tg H \begin{pmatrix} 0 \\ \tg \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

La courbe  $C_0$  décrite par l'ombre du style est donc une droite passant par le point  $R_0(0) = \begin{pmatrix} \operatorname{tg} \varphi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et parallèle à l'axe  $OY$ .

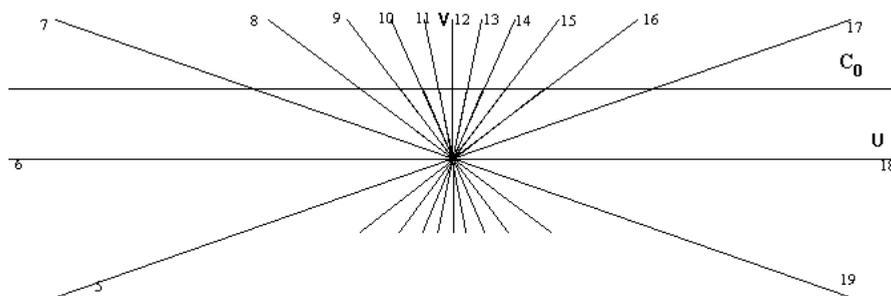
Introduisons dans le plan  $\zeta$  un repère orthonormé  $OUV$ , en plaçant l'origine au point  $O$  (qui est aussi l'origine de l'espace), en superposant l'axe  $OU$  à  $OY$  et en plaçant  $OV$  perpendiculairement à  $OU$ . L'axe  $OV$  est donc orienté vers le nord géographique et l'axe  $OU$  vers l'est. Le point  $R_0(0)$  est alors situé sur l'axe  $OV$ , à la distance  $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi}$  de l'origine. La droite  $C_0$  est la parallèle à  $OU$  passant par  $R_0(0)$ . L'abscisse de  $R_0(H)$

dans le plan  $OUV$  vaut  $\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} H$  puisque  $R_0(H) = R_0(0) + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Dans le système de coordonnées qui vient d'être défini, nous pouvons écrire

$$R_0(H) = \begin{pmatrix} \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} H \\ 1 \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Comme 24 heures correspondent à un angle de  $2\pi$  radians, nous marquerons sur  $C_0$  les points  $R_0(H)$  correspondant à  $H = 0, H = \pi/12, H = 2\pi/12$ , etc, et nous retrouverons la pratique des astronomes en les notant 12, 13, ..., 11.

Nous savons que la direction de l'ombre du style en un moment déterminé de la journée ne dépend pas de la déclinaison du soleil. Nous pouvons donc dès à présent tracer les droites qui joignent l'origine du plan  $OUV$  (qui est la base du style du cadran) aux points qui viennent d'être marqués sur la droite  $C_0$ . Pour la latitude  $\varphi = 50^\circ$ , nous obtenons ainsi la figure ci-dessous, sur laquelle les indications de 20 h, à 4 h n'ont pas été mentionnées, les ombres étant rarement observables lorsque le soleil est couché ! Cette figure peut être utilisée pour connaître l'heure solaire vraie en observant la direction de l'ombre du style.



A présent, étudions les courbes  $C_\delta$ . En observant sur laquelle de ces courbes se trouve l'ombre de l'extrémité du style, nous saurons (approximativement) quelle est la déclinaison du soleil (donc la date).

Nous avons déterminé la valeur de  $R_\delta(H)$  :

$$R_\delta(H) = \frac{\cos H}{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta + \cos H} \begin{pmatrix} \operatorname{tg} \varphi \\ \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} H \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\cos H}{\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi + \cos H} R_0(H)$$

Remarquons immédiatement que cette formule montre en particulier que les points  $R_\delta(H)$  et  $R_0(H)$  sont alignés avec l'origine quel que soit  $\delta$ , ce qui confirme qu'à une heure déterminée, la direction de l'ombre du style est la même tous les jours de l'année.

Intéressons-nous aussi au dénominateur  $\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta + \cos H$ . Il peut être nul : si  $\cos H = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta$ . Si le dénominateur est nul, c'est que le point  $R_\delta(H)$  se trouve... à l'infini. Plus précisément, rappelons-nous que  $R_\delta(H)$  est le point de percée de la droite  $PQ(H)$  dans le plan  $\zeta$ . Dire que le dénominateur est nul signifie que le rayon du soleil est parallèle au plan horizontal  $\zeta$ , donc qu'il est lui-même horizontal. Cela se produit *au lever et au coucher astronomiques* du soleil... pour autant que le soleil se lève et se couche : n'oublions pas l'existence du soleil de minuit !

Les solutions éventuelles de l'équation

$$\cos H = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta$$

sont donc les heures de lever et de coucher astronomiques du soleil à l'emplacement du cadran solaire. Par exemple, à la latitude  $\varphi = 50^\circ$  (latitude approximative des ardenes belges), le jour du solstice d'été ( $\delta = 23^\circ 27'$ ), les heures de lever et de coucher du soleil sont données par l'équation  $\cos H = -0.516953$ , d'où  $H_1 = -121,128^\circ$  et  $H_2 = 121,128^\circ$ . Après conversion de ces angles en heures-minutes-secondes (et en tenant compte de ce que l'angle  $H = 0$  correspond à midi), nous constatons que le soleil se lève ce jour là (qui est le plus long de l'année) à 3 heures 55 minutes et se couche à 20 heures 5 minutes. Rappelons qu'il s'agit ici de l'heure solaire vraie qui nécessite donc diverses corrections après lesquelles il apparaît que les heures de lever et de coucher du soleil ne sont que rarement symétriques par rapport à midi.

Comment se fait-il qu'il arrive que le soleil ne se couche pas ? Reprenons l'équation  $\cos H = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta$ . Pour qu'elle ait des solutions, il faut que  $\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta$  soit compris entre  $-1$  et  $+1$ . La condition peut s'écrire  $|\operatorname{tg} \varphi| \leq |\cotg \delta|$ , ou encore  $|\operatorname{tg} \varphi| \leq |\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \delta)|$ .

Par exemple, en un point de l'hémisphère nord, pour que le soleil soit visible durant une journée complète, il faut avoir  $\varphi > \frac{\pi}{2} - \delta$ . Le point le plus au sud de l'hémisphère nord où il est possible d'admirer le soleil de minuit au moins une fois par an s'obtient le jour du solstice d'été, quand la valeur de  $\delta$  est maximale :  $23^\circ 27'$ . Dans ce cas on doit avoir  $\varphi \geq 66^\circ 33'$ , le point le plus au sud correspondant à  $\varphi = 66^\circ 33'$ . C'est la latitude du cercle polaire arctique. A cette latitude, le jour du solstice d'été à minuit, le soleil est situé au nord et vient raser l'horizon à minuit,

Revenons à notre courbe  $C_\delta$  parcourue par l'ombre  $R_\delta(H)$  de l'extrémité du style. Si  $|\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta| < 1$ , le dénominateur  $\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta + \cos H$  de  $R_\delta(H)$  s'annule pour deux valeurs  $H_1$  et  $H_2$  de  $H$ , de sorte que la courbe admet deux directions asymptotiques. Le soleil n'est levé que pour  $H_1 < H < H_2$ , c'est donc la portion de la courbe  $C_\delta$  déterminée par cette inéquation qui doit être tracée sur la table du cadran solaire. Ci-dessous, nous déterminerons l'équation de l'intégralité de  $C_\delta$ , mais nous ne devons pas oublier que seule une portion de cette courbe est utile.

Remarquons aussi que si  $\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta = 1$ , l'équation n'a qu'une seule solution,  $H = \pi$  : c'est bien, comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, à minuit que le soleil vient éventuellement raser l'horizon et est en fait visible durant au moins 24 heures consécutives. Dans ce cas, la courbe  $C_\delta$  n'admet qu'une direction asymptotique, mais elle reste non bornée. Elle ne se ferme pas dans le plan. Enfin, si  $\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta > 1$ , la courbe  $C_\delta$  est bornée et fermée, elle n'a pas de directions asymptotiques.

Recherchons une équation de  $C_\delta$ . Puisque  $R_\delta(H) = \frac{\cos H}{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta + \cos H} R_0(H)$  et que dans le système d'axes choisi dans le plan  $OUV$ , nous pouvons écrire  $R_0(H) = \left( \frac{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} H}{\cos \varphi} \right)$ , dans ce système d'axes, nous avons

$$R_\delta(H) = \frac{\cos H}{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta + \cos H} \begin{pmatrix} \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} H \\ \frac{1}{\cos \varphi} \end{pmatrix}$$

Notons  $u$  et  $v$  les coordonnées dans le plan  $OUV$ . Des équations paramétriques de  $C_\delta$  sont donc

$$\begin{cases} u = \frac{\operatorname{tg} \varphi \sin H}{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta + \cos H} \\ v = \frac{\cos H}{\cos \varphi (\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta + \cos H)} \end{cases}$$

Éliminons  $H$ . En divisant les deux expressions membre à membre, on obtient

$$\frac{u}{v} = \sin \varphi \operatorname{tg} H$$

D'où  $\operatorname{tg} H = \frac{u}{v \sin \varphi}$ . De la deuxième équation, on tire aussi  $\cos H = \frac{v \sin \varphi \operatorname{tg} \delta}{1 - v \cos \varphi}$

En exploitant l'identité  $1 + \operatorname{tg}^2 H = \frac{1}{\cos^2 H}$ , on obtient alors successivement

$$\begin{aligned} \frac{v^2 \sin^2 \varphi + u^2}{v^2 \sin^2 \varphi} &= \frac{(1 - v \cos \varphi)^2}{v^2 \sin^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta} \\ v^2 \sin^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta + u^2 \operatorname{tg}^2 \delta &= 1 - 2v \cos \varphi + v^2 \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

Si nous ne sommes pas en un pôle <sup>(2)</sup>, nous pouvons diviser par  $\cos^2 \varphi$  :

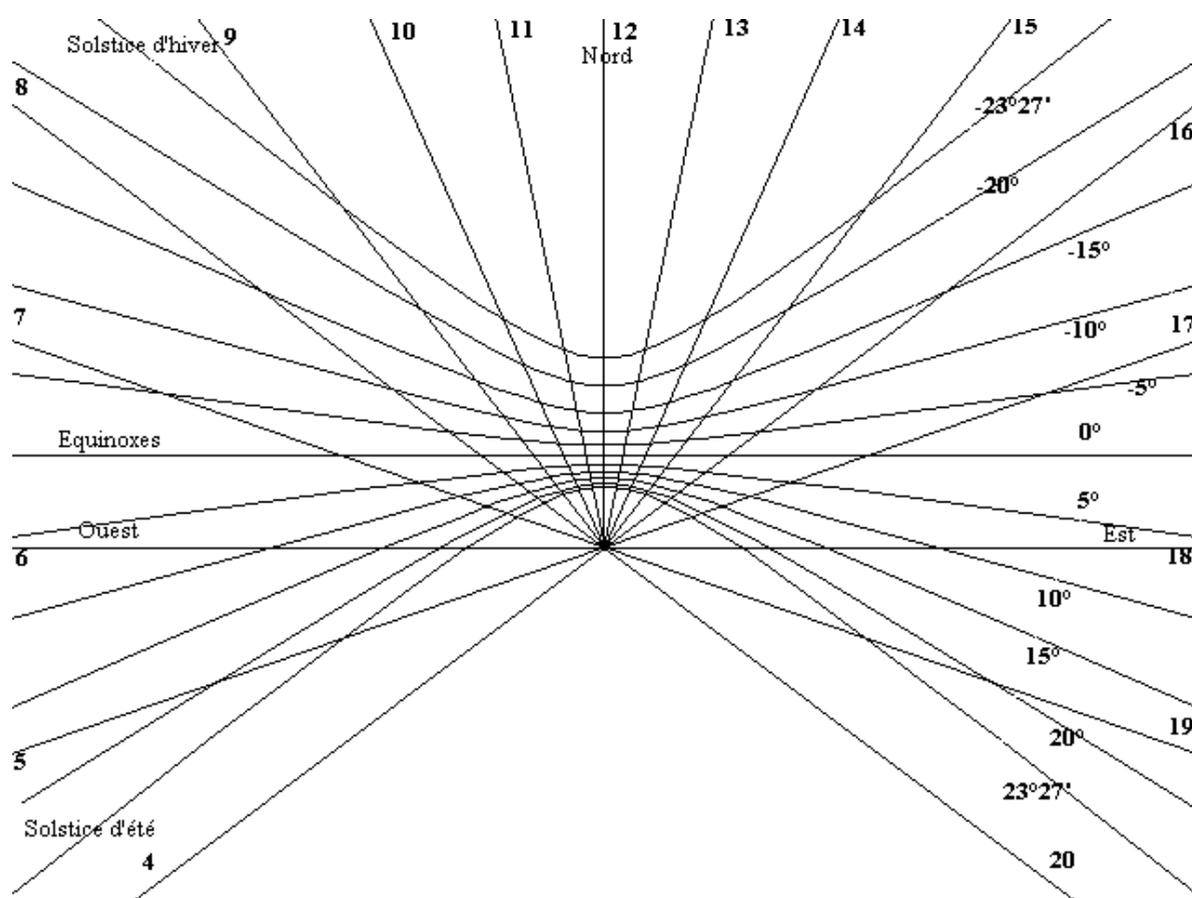
<sup>(2)</sup> Et si nous sommes en un pôle, le cadran horizontal est identique à un cadran équatorial, la courbe  $C_\delta$  a pour équation  $u^2 + v^2 = \cot^2 \delta$ , ce que nous savions.

$$u^2 \frac{\operatorname{tg}^2 \delta}{\cos^2 \varphi} + v^2 (\operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta - 1) + 2 \frac{v}{\cos \varphi} = 1$$

Cette équation est celle d'une ellipse si  $\operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta - 1 > 0$ , d'une parabole si  $\operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta - 1 = 0$  et d'une hyperbole si  $\operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta - 1 < 0$ . La condition  $\operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta - 1 < 0$  est équivalente à  $|\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta| < 1$ , condition déjà rencontrée. Elle est satisfaite en un lieu de latitude  $\varphi$ , le jour où la déclinaison du soleil vaut  $\delta$ , si et seulement si le soleil n'est pas visible durant 24 heures consécutives en ce lieu. Dans ce cas nous savions déjà que la courbe  $C_\delta$  avait deux directions asymptotiques. Nous voyons maintenant qu'en fait, c'est une hyperbole. Par contre, les jours où brille le soleil de minuit à la latitude  $\varphi$ , la courbe  $C_\delta$  est une ellipse. Enfin la courbe peut-être une parabole. C'est par exemple le cas en les points du cercle arctique le jour du solstice d'été.

Plaçons-nous en un lieu et un jour qui vérifient la condition  $\operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta - 1 < 0$ . (C'est le cas en Belgique toute l'année.) La courbe  $C_\delta$  est donc une hyperbole. Mais entre le lever et le coucher du soleil, seule une branche de l'hyperbole est parcourue par l'ombre de extrémité du style du cadran. L'autre branche de l'hyperbole sera cependant parcourue par cette ombre lorsque la déclinaison du soleil vaut  $-\delta$ . Car l'équation de  $C_\delta$  montre bien que les hyperboles  $C_\delta$  et  $C_{-\delta}$  sont identiques.

Il reste à appliquer les techniques usuelles d'étude et de dessin des coniques pour réaliser la figure suivante, représentant la table d'un cadran solaire horizontal pour les lieux de latitude  $50^\circ$ . Y sont dessinées les hyperboles  $C_\delta$  correspondant aux valeurs  $\pm 5^\circ$ ,  $\pm 10^\circ$ ,  $\pm 15^\circ$ ,  $\pm 20^\circ$  et  $\pm 23^\circ 27'$  de la déclinaison  $\delta$  du soleil. L'étiquette  $\delta$  figurant sur une branche d'une hyperbole mentionne que c'est cette branche qui est parcourue par l'ombre de l'extrémité du style lorsque la déclinaison vaut  $\delta$ . Dans ce cas la seconde branche de la même hyperbole porte l'étiquette  $-\delta$ . Sur la figure sont également représentées les droites indiquant la direction de l'ombre, heure par heure. La droite correspondant à l'heure  $H$  coupe la branche correspondant à  $\delta$  si, le jour où la déclinaison vaut  $\delta$ , le soleil se lève avant l'heure  $H$  et se couche après celle-ci.



Tracé d'un cadran solaire pour un lieu de latitude 50°.

