Communauté française de Belgique

Ministère de la Communauté française
Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique

L'ALGEBRE LINEAIRE AU TROISIEME DEGRE DU SECONDAIRE

Par G. NOEL, F. POURBAIX, P. TILLEUIL
Service d'analyse et de méthodologie mathématiques
Université de Mons-Hainaut

Article publié dans
Le Point sur la Recherche en Education
N° 4
Novembre 1997

et diffusé sur
http://www.agers.cfwb.be/pedag/recheduc/point.asp

Service général des Affaires générales, de la Recherche en éducation et du Pilotage interréseaux
9-13, rue Belliard 1040 Bruxelles
Tél. +32 (2) 213 59 11
Fax +32 (2) 213 59 91

1. INTRODUCTION

Le phénomène linéaire est présent dans le cours de mathématiques dès la fin de l'école primaire, par exemple dans les questions liées à la proportionnalité directe : pourcentages, intérêts, changements d'unités, dessins à l'échelle, emploi d'opérateurs fractionnaires, etc. Tout au long du premier et du deuxième degré de l'enseignement secondaire, le phénomène linéaire continue d'être présent en force : repérages, agrandissements et réductions, transformations du plan, projections parallèles, calculs en coordonnées, théorème de Thalès, fonctions, équations et inéquations du premier degré, moyennes, etc.

Mais si l'enseignement de l'algèbre linéaire durant les quatre premières années du secondaire peut raisonnablement procéder par accumulation de résultats, il vient un moment où une mise en ordre s'impose, où une synthèse doit être réalisée. Dans les programmes mis en application à partir de 1968, cette synthèse a reposé sur une explication de la structure d'espace vectoriel, présentée dès la quatrième année. Après quelques années d'application, on s'est rendu compte que l'introduction de cette structure était trop rapide, et trop souvent réalisée pour elle-même, sans liaisons suffisantes avec les applications.

Mais depuis cette époque, une habitude malencontreuse s'est instaurée, consistant à assimiler "algèbre linéaire" à "étude formelle de la structure d'espace vectoriel". Ce malentendu a finalement eu pour conséquence non seulement le rejet de l'étude formelle de la structure d'espace vectoriel, mais aussi le rejet de la plupart des concepts qui lui sont associés. En termes familiers, on a "jeté le bébé avec l'eau du bain".

Hélas, ce rejet n'a pas non plus été sans effets sur la préparation des jeunes gens qui abordent des études supérieures scientifiques, techniques, économiques ou même de sciences humaines, tant une bonne maîtrise des notions et des techniques de l'algèbre linéaire y est souvent indispensable.

A la lumière de ces expériences passées, il semble maintenant urgent de repenser en profondeur l'enseignement de l'algèbre linéaire.

C'est à cette entreprise que nous avons voulu apporter une contribution, dans le cadre d'un contrat de recherche financé par le Ministère de la Communauté Française à l'Université de Mons-Hainaut pendant l'année académique 1996-1997. Et c'est à un résumé du rapport final de cette recherche qu'est consacré le présent article.

Dans l'ensemble de tout le travail, notre but principal a été de mettre au point des séquences d'enseignement du niveau du troisième degré de l'enseignement secondaire, qui mènent progressivement les élèves des notions élémentaires de la géométrie aux concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire. A cet effet, nous nous sommes appuyés sur deux principes :

- *en ce qui concerne le contenu : ne pas enseigner l'algèbre linéaire pour elle-même,*
- *en ce qui concerne les activités : mettre en évidence des analogies et laisser mûrir des notions.*

Le rapport final comportant plus de 250 pages, il n'a pas semblé souhaitable d'en faire ici un résumé exhaustif. Cet article se limitera donc à fournir quelques points d'entrée dans le rapport, en laissant à qui le souhaite le loisir de l'étudier plus à fond.

2. LA GEOMETRIE DE L'ALGEBRE LINEAIRE

Le point de départ de notre recherche a été une analyse des problèmes rencontrés par l'enseignement de la géométrie dans l'espace, en particulier dans ses relations avec l'enseignement de l'algèbre linéaire.

Or, l'apprentissage de la géométrie dans l'espace recèle des difficultés plus importantes que celles rencontrées dans l'apprentissage de la géométrie plane; pour n'en citer que deux : le problème de la représentation plane des objets de l'espace, et le problème des méthodes, sinon d'"une" méthode de résolution des problèmes.

Il semble clair en effet qu'avant de raisonner sur les objets de l'espace, l'élève doit en maîtriser quelques modes de représentation plane (perspective dite "cavalière" - projection parallèle serait plus correct -, perspective centrale, développements, projections cotées, …).

Mais même dans les cas où le problème de représentation plane d'un objet spatial est résolu de façon satisfaisante, et même dans les cas où on a eu recours à un modèle matériel à trois dimensions, la complexité de l'objet lui-même ne permet pas toujours de tirer de cette représentation tout le bénéfice qu'on pourrait en espérer.

Or, cette complexité est pour ainsi dire naturelle en géométrie de l'espace : il y a désormais trois dimensions à contrôler au lieu de deux. La conjonction des difficultés mathématiques propres au sujet, des difficultés inhérentes à la représentation plane des objets de l'espace et des difficultés d'appréhension des situations spatiales a alors souvent comme conséquence que l'enseignement de la géométrie de l'espace est moins ambitieux que celui de la géométrie plane, alors que la géométrie de l'espace, étant celle du monde où nous vivons, revêt une importance particulière.

Et cette situation paradoxale soulève l'autre question : celle de la "méthode" en géométrie. Car comment donner aux élèves suffisamment de moyens d'être créatifs en géométrie de l'espace alors que les difficultés y sont grandissantes, qu'il est nécessaire de relayer "imagination de l'espace", et que le dessin n'y suffit pas ?

C'est là que l'introduction des méthodes algébriques, et le développement d'un dialogue équilibré entre l'algèbre et la géométrie se révèle irremplaçable, comme l'histoire des mathématiques en témoigne d'ailleurs à l'envi.

Dans ce contexte, l'algèbre linéaire se révèle un outil privilégié. Elle permet de traiter avec aisance certaines situations géométriques qui ne pourraient être étudiées qu'avec difficultés par les méthodes synthétiques. Il en est ainsi par exemple des transformations de l'espace.

Malheureusement ce que nous avons appelé le "malentendu de l'algèbre linéaire" a eu pour conséquence de priver le cours de géométrie de l'espace du bénéfice des méthodes de l'algèbre linéaire. Dans l'état actuel des choses, il y a par conséquent un vide à combler entre l'enseignement de la géométrie de l'espace dans le secondaire et l'enseignement de l'algèbre linéaire dans les écoles supérieures et les universités. D'autant plus que ce vide se traduit par une formidable perte de sens, et handicape ainsi sérieusement l'apprentissage de l'algèbre linéaire par ceux-là mêmes qui sont amenés à devoir s'en servir concrètement dans des contextes divers.

De telles difficultés doivent pouvoir se dissiper si on en revient aux sources mêmes de l'algèbre linéaire. Il existe en effet des chemins qui vont de la géométrie vers l'algèbre linéaire, sans réduire pour autant le cours de géométrie à une illustration désséchée des notions d'algèbre linéaire.

A la suite de cette analyse, la majeure partie de notre travail a consisté à mettre au point un exposé qui éclaire les difficultés propres à l'enseignement de la géométrie de l'espace et contribue à les résoudre par l'introduction de notions d'algèbre linéaire, qui facilite la transition entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur en ce qui concerne l'apprentissage des modes de pensée particuliers de l'algèbre linéaire, et dissipe ainsi les malentendus signalés plus haut.

En ce sens, on y entend parler sans arrêt des objets premiers de la géométrie : points, droites, plans, distances, angles, aires, volumes, directions, orientations, transformations, et des relations que tous ces objets entretiennent entre eux. Mais on y entend tout autant parler de la manière dont on amène tous ces objets à la portée du calcul, de la signification de ce calcul, et des avantages géométriques qu'on en retire.

Cet a priori géométrique une fois affirmé, une étude approfondie de la manière dont les notions et les méthodes de l'algèbre linéaire dérivent des notions et des résultats de bases de la géométrie dans l'espace a permis de dégager huit grands thèmes fondamentaux, fortement reliés entre eux, et qui forment le cœur de "la géométrie de l'algèbre linéaire".

Il s'agit de :

I. la géométrie d'incidence de l'espace,
II. la géométrie vectorielle élémentaire,
III. le produit scalaire,
IV. les nombres complexes et les rotations du plan,
V. les rotations de l'espace,
VI. l'aire, le volume, le produit extérieur et les déterminants,
VII. les systèmes d'équations linéaires géométriques,
VIII. les matrices et la composition des transformations.

Une description plus détaillée de ces thèmes et de leur relations de dépendance mutuelle se retrouve dans le rapport aux pp. 25-45.

3. UN APERCU DE LA TABLE DES MATIERES

Tous les thèmes n'ont pas été développés de la même manière dans les séquences d'enseignement.

Si les thèmes I, II et III ont été traités de manière exhaustive, les thèmes V, VI, VII et VIII n'ont été abordés - au niveau du rapport final - que partiellement, et le thème IV, classique au demeurant, n'a pas été abordé du tout. D'autre part, si certaines parties des thèmes V et VI n'ont pas été détaillées dans le rapport, c'est que - toutes élémentaires qu'elles soient - elles s'écartaient des matières habituellement enseignées dans les deux dernières années du secondaire. Ces parties ont néanmoins fait l'objet de séminaires au C.D.S. de l'Université de Mons-Hainaut en mars 1997, et concernaient le corps des quaternions de Hamilton en tant que généralisation des nombres complexes adaptée à l'étude des rotations de l'espace, et la construction du produit extérieur comme linéarisation du calcul des aires et des volumes dans des espaces à au moins trois dimensions.

Si les thèmes se veulent l'ossature d'un cours "idéal", les séquences d'enseignement sont, quant à elles, plus directement orientées vers la pratique quotidiennes des classes. Elles sont regroupées en 6 sections, et comportent 17 fiches, réparties comme suit.

Section A : la géométrie d'incidence de l'espace

- *Fiches 1 à 3 : incidence et parallélisme*

Section B : la géométrie vectorielle élémentaire

- *Fiche 4 : projections et coordonnées*
- *Fiche 5 : équations vectorielles d'une droite*
- *Fiche 6 : équations vectorielles d'un plan*

Section C : les systèmes d'équations linéaires et les formes linéaires

- *Fiche 7 : le point de percée d'une droite dans un plan*
- *Fiche 8 : les équations cartésiennes d'un plan*
- *Fiche 9 : les équations cartésiennes d'une droite*
- *Fiche 10 : les projecteurs et les équations cartésiennes*
- *Fiches 11 et 12 : les formes linéaires*

Section D : le produit scalaire

- *Fiche 13 : le produit scalaire*
- *Fiche 14 : la sphère et ses plans tangents*

Section E : le produit vectoriel, le volume et le déterminant

- *Fiche 15 : le produit vectoriel, le volume et le déterminant*

Section F : les rotations de l'espace

- *Fiche 16 : les rotations cubiques*
- *Fiche 17 : la représentation matricielle des rotations.*

Il faut encore signaler que dans le style de leur présentation, ces fiches, organisées autour de plusieurs situations-problèmes, sont destinées aux professeurs, et seulement indirectement aux élèves.

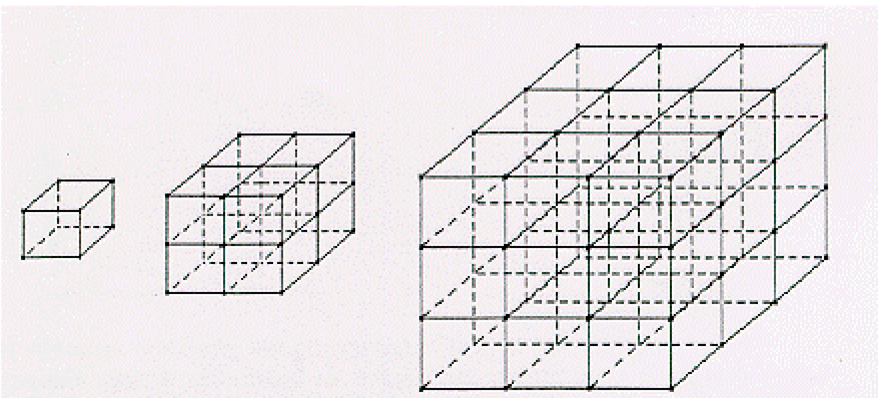
Elles constituent plus de la moitié du rapport, des pp. 49 à 188.

Deux exemples d'applications ont aussi été joints au rapport. L'un concerne une première étude de la stabilité électrostatique du réseau cristallin de NaCl (le sel de cuisine). L'autre est centré sur le calcul de la trajectoire de l'ombre de l'extrémité du style d'un cadran solaire (horizontal). On les trouve dans les pp. 192 à 220.

Enfin, diverses annexes clôturent le rapport. La plus importante est consacrée à la description d'un logiciel destiné à permettre aux enseignants de concevoir et d'imprimer les figures utiles à l'illustration et aux exercices des premières fiches des séquences d'enseignement (cfr. Pp. 224-245). Les autres annexes concernent des études bibliographiques (cfr. Pp. 248-262).

4. UN EXEMPLE : LES RESEAUX CUBIQUES

4.1. QU'EST-CE QU'UN RESEAU CUBIQUE ?

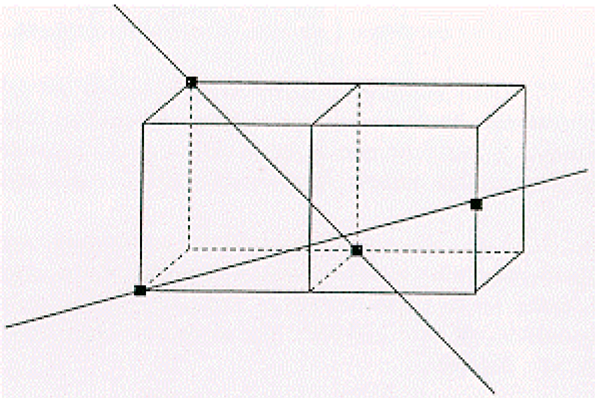


Une définition possible est de considérer un tel objet mathématique comme une figure géométrique infinie obtenue en translatant un cube donné par les trois translations associées à chacune de ses arêtes.

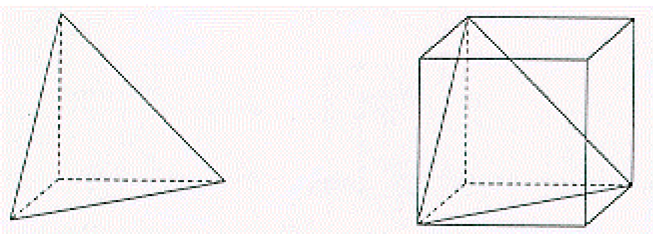
Le réseau cubique a l'avantage d'être ancré intuitivement dans les esprits. Des cubes colorés de l'enfance jusqu'aux cités HLM, c'est une référence familière à tous les étudiants, et qui, en tant que telle, est d'un maniement plus immédiat que bien d'autres objets.

4.2. POURQUOI S'Y INTERESSER ?

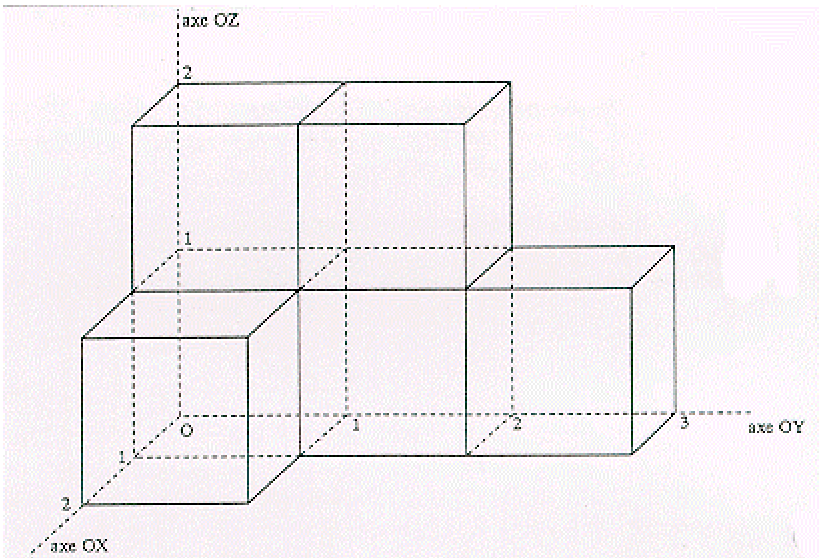
En choisissant bien un réseau cubique, on peut aider à favoriser la vision dans l'espace, ce qui n'est pas toujours chose aisée. Couchons deux droites de l'espace sur le papier. Sont-elles gauches ou se coupent-elles ? Impossible à deviner. Représenter ces droites dans le cadre d'un réseau cubique éclaircit la situation.



Le cube est très souvent, dans les cours de mathématique, représenté en perspective cavalière. Un réseau cubique peut faire office de figure de référence pour d'autres objets en perspective cavalière.



La structure des réseaux cubiques prépare géométriquement le travail en coordonnées spatiales en prolongeant l'esprit du quadrillage à deux dimensions que l'on rencontre dans les premières années du secondaire.

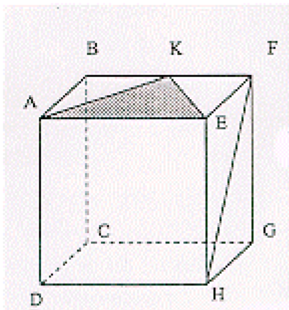


Cette structure permet également de suggérer des solutions à des problèmes de construction, comme nous allons le voir immédiatement dans des exemples tirés de nos fiches.

4.3. UNE APPLICATION EN GEOMETRIE SYNTHETIQUE

Considérons l'énoncé suivant :

Soit K le milieu de l'arête [BF]. Construire l'ombre projetée par le triangle AKE sur le plan CDGH, les rayons du soleil étant orientés dans la direction de la droite FH.



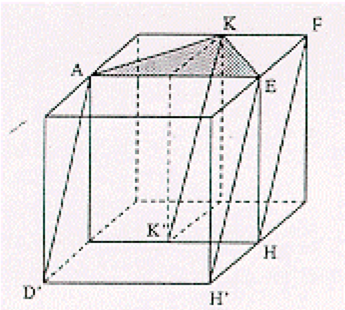
Nous construisons la solution en dessinant les ombres des points A, K et E, puis en les reliant pour connaître l'ombre du triangle AKE.

Les propriétés du réseau cubique sont ainsi utilisées de façon informelle.

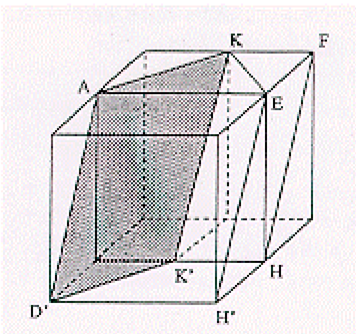
Créons un nouveau cube A'B'C'D'E'F'G'H' sur la face AEDH et notons K' le milieu du segment [DH] = [C'G'].

La construction enchaîne les étapes suivantes :

1. *Tracer les diagonales [AD'] et [EH']. Les droites AD', EH' et KK' sont parallèles à FH car elles se correspondent par translation au long d'arêtes du réseau cubique. Elles sont donc parallèles entre elles.*



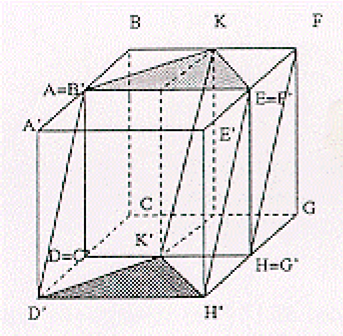
2. *L'ensemble des parallèles à FH passant par les points de AK constitue le plan AKK'D'. C'est le plan* PROJETANT *de AK.*



3. *La projection de la droite AK sur CGDH parallèlement à FH est la droite D'K' car c'est l'intersection des plans AKK'D' et CGDH.*

4. *La projection du segment [AK] sur CGDH parallèlement à FH est le segment [D'K']. En effet, dans le plan AKK'D' comme dans tout autre plan, la projection d'un segment sur une droite parallèlement à une autre droite est un segment.*

5. *De même, les projections des segments [KE] et [AE] sont les segments [K'H'] et [D'H'], et la projection du triangle AKE est le triangle D'K'H'.*



Et on répond ainsi à la question posée dans l'énoncé. Dans cette construction, nous avons utilisé des propriétés qui doivent être justifiées avec les élèves :

- *les droites KK', AD', EH' et FH sont deux à deux parallèles.*
- *les parallèles à FH passant par les points de AK constituent un plan.*

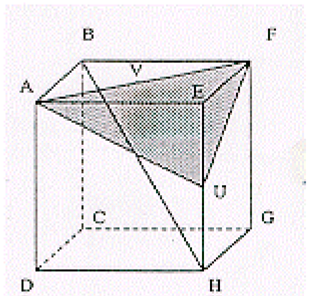
Ces justifications permettent d'introduire les premières propriétés de la géométrie d'incidence dans un contexte qui lui sied à merveille.

4.4. UNE AUTRE APPLICATION EN GEOMETRIE SYNTHETIQUE

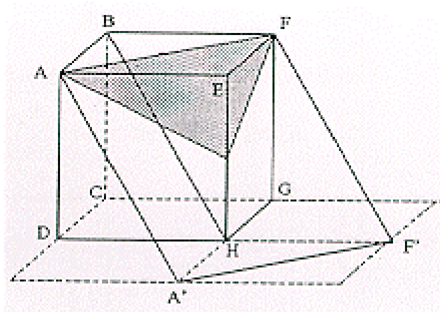
Il s'agit ici de construire l'ombre au soleil d'un triangle dont les sommets sont situés sur les faces d'un cube.

Projeter AFU et CDGH parallèlement à BH.

(U est le milieu du segment $[EH]$)



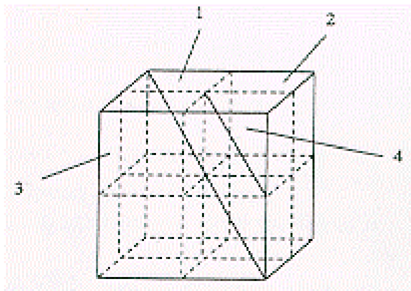
Nous allons faire jouer le rôle de B à A et F. Pour ce faire, nous allons construire de nouveaux cubes sur les faces AEDH et EFGH. Par translation, on trouvera les images des points A et F, donc l'ombre de [AF]. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire ici de dessiner l'entièreté des nouveaux cubes et que leurs traces au sol (des carrés) sont suffisantes.



Notons V le milieu de [AF] et remarquons, grâce au théorème de Thalès dans le plan BEH que la droite BH est parallèle à la droite UV.

Nous pouvons aussi visualiser ce résultat sur un réseau cubique plus fin que le premier, comme dans la figure ci-dessous à droite.

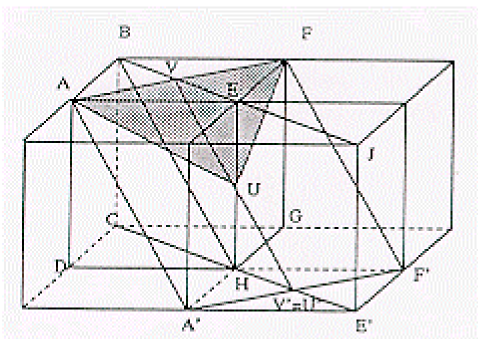
BH est la droite qui supporte la diagonale du petit cube 1. Par translation, cette diagonale est parallèle à la même diagonale du petit cube 4, qui n'est autre que UV.



Puisque UV // BH, les points U et V ont la même ombre.

Or l'ombre de V, qui est le centre du carré ABFE, est le point V', centre du carré A'HF'E'. Cette ombre appartient donc à [A'F'].

Il en résulte que l'ombre du triangle AFU est le segment [A'F'].



4.5. UNE APPLICATION EN CALCUL VECTORIEL

Nous allons à présent nous intéresser aux coordonnées des points que nous utilisons.

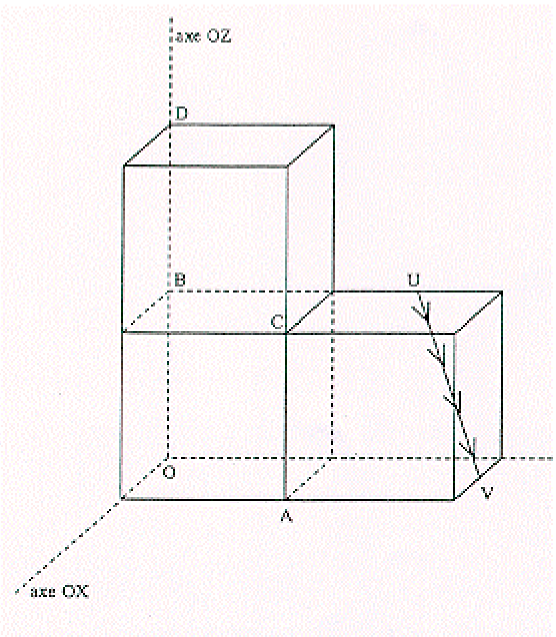
On donne les points $U = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Calculer les coordonnées des projections sur le plan OXY parallèlement au segment [UV] des points suivants:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En déduire une formule qui calcule les coordonnées de la projection d'un point quelconque.

Avant toute chose, visualisons la situation sur un réseau cubique.

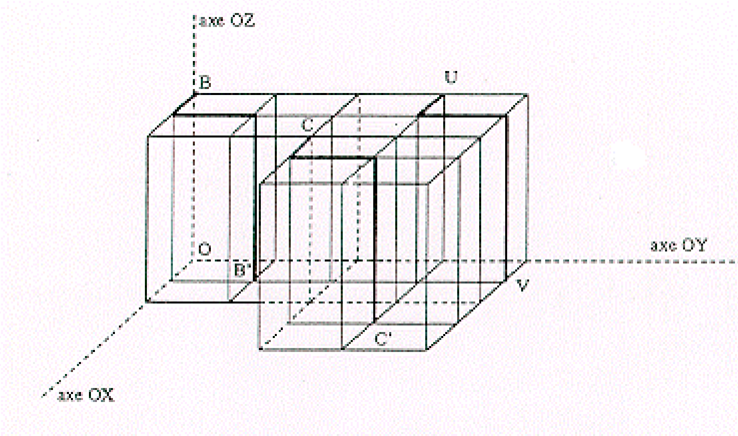


Le point A est confondu avec sa projection A' car il se trouve dans le plan OXY, donc

$$A' = A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

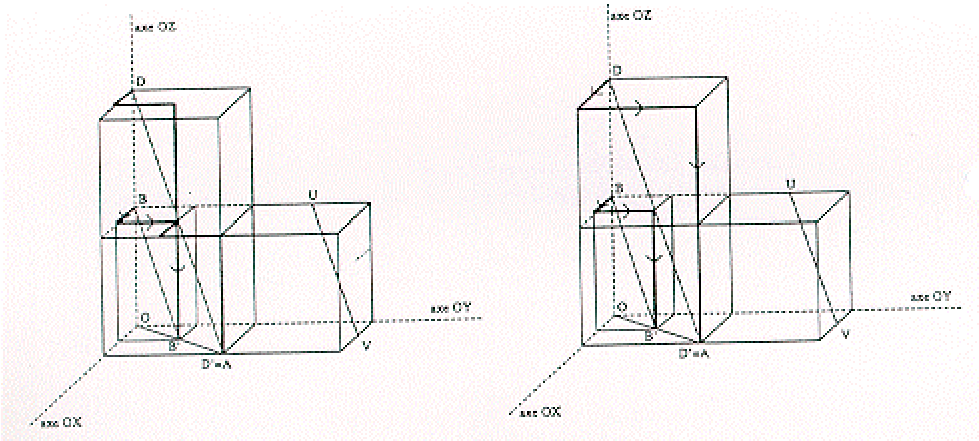
Les coordonnées des images des points de hauteur 1 (à savoir B, C et U) s'obtiennent à chaque fois en suivant un même chemin, encodé dans le prisme de diagonale [UV] :

- *avancer de 1/2 parallèlement à l'axe OX*
- *avancer de 1/2 parallèlement à l'axe OY*
- *descendre de 1 (c'est-à-dire avancer de -1) parallèlement à l'axe OZ*

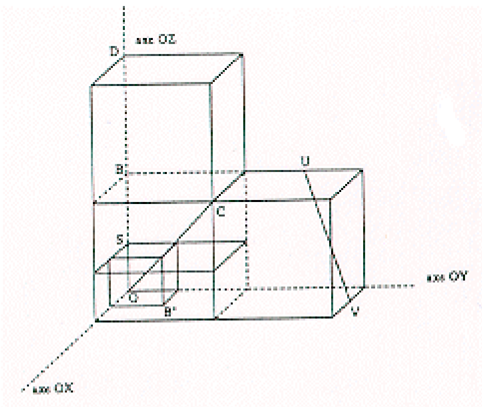


Ce procédé se généralise par homothétie à tous les points.

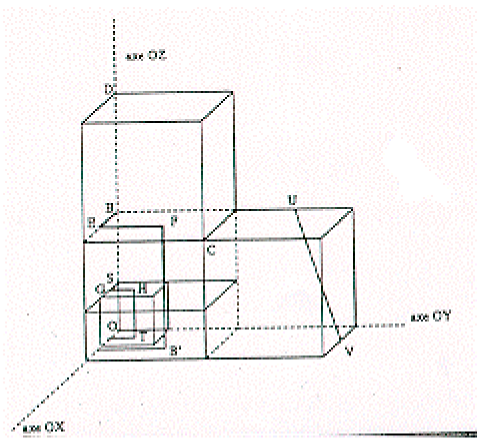
Regardons le point D. Puisque sa hauteur vaut 2, les coordonnées de sa projection sur le plan XOY s'obtiennent en effectuant deux fois le chemin précédent. Autrement dit, le chemin "parcouru par D" est l'image par une homothétie de rapport 2 de celui parcouru par B. (Remarquons que, en classe, des justifications sont utiles pour expliquer que le chemin agrandi deux fois mène au même point que le chemin original appliqué deux fois de suite).



Prenons à présent un point S de l'axe OZ ayant une hauteur quelconque z.



L'homothétie de centre O et de rapport z amène le cube unité de diagonale [OC] sur un cube dont S est un sommet.



Cette homothétie envoie le prisme de diagonale [BB'] sur le prisme de diagonale [ST]. La projection du point S est donc le point T.

On en déduit que la projection d'un point quelconque P de hauteur z s'obtient à partir de P par le même chemin que celui qui mène de S à T.

Des prolongements permettent d'obtenir en général les coordonnées de la projection parallèlement à UV du point P = (x y z) sur le plan OXY par la formule :

$$\boxed{proj_{OXY}^{//UV}(P) = P + z.(V - U)}$$

où z est la hauteur de P.

4.6. LE LOGICIEL "RESEAU"

Afin d'aider à la construction et la manipulation de réseaux cubiques, un logiciel a été développé.

Les professeurs peuvent grâce à ce logiciel produire aisément des dessins pouvant servir de support aux problèmes, ou aider à leur résolution.

En outre, ils peuvent faire subir aux constructions des rotations dans l'espace et ainsi présenter plusieurs points de vue de la même figure.

De plus, le choix de la représentation en perspective cavalière, centrale, ou en projection orthogonale est laissé à l'utilisateur.

5. QUEL ENSEIGNEMENT POUR L’ALGEBRE LINEAIRE ?

Comment les résultats de cette recherche peuvent-ils se traduire en propositions concrètes d'enseignement, et éventuellement, en termes de programmes ?

En réponse à cette question, une proposition a été esquissée, qui couvre le cours de mathématiques à 4 périodes/semaine des deux années du $3^{\text{ème}}$ degré de l'enseignement secondaire. L'idée qui est à la base de cette proposition est de mener de front les activités liées à l'algèbre linéaire et celles liées à la géométrie dans l'espace.

Pour l'essentiel, elle est construite comme suit.

- **Réseau cubique**

- *Situer des objets géométriques simples (points, droites, plans, triangles, …) dans un réseau cubique.*

- *Résoudre des problèmes d'incidence (intersection droite/plan,…) pour des objets géométriques donnés dans un réseau cubique.*
- *Résoudre des problèmes simples de mesures de distances ou d'angles dans des sections planes appropriées d'un réseau cubique.*

- **Calcul vectoriel et équations paramétriques d'une droite**

- *Exprimer les coordonnées d'un point dans un réseau cubique.*

- *Ecrire les équations paramétriques d'une droite donnée dans un réseau cubique en suivant le modèle de l'équation d'une droite dans un plan : droite passant par l'origine, parallélisme de deux droites, droite quelconque, …*

- *Déterminer l'intersection d'une droite avec les plans de coordonnées.*

- *Utiliser à ces occasions les notions de vecteurs (vecteurs-colonnes, vecteurs-points, …) ainsi que les opérations qui s'y rapportent, comme unification et abréviation des procédures de calcul sur les trois coordonnées.*

- **Equations cartésiennes d'un plan**

- *Ecrire l'équation cartésienne d'un plan (non vertical), contenant l'origine, à partir de ses intersections* $z = ax$ et $z = by$ *avec les plans de coordonnées Oxz et Oyz : interpréter* $z = ax + by$.

- *Ecrire une équation cartésienne d'un plan vertical passant par l'origine : interpréter* $ax + by = 0$ *dans un plan et dans l'espace.*

- *Ecrire l'équation cartésienne d'un plan quelconque.*

- *Caractériser le parallélisme de deux plans.*

- *Interpréter algébriquement les problèmes d'incidence (plans, droites, …) pour des objets géométriques donnés dans un réseau cubique.*

- **Produit scalaire**

- *Associer le produit scalaire de deux vecteurs à l'expression en coordonnées de la formule du cosinus (ou forme généralisée du théorème de Pythagore).*

- *Résoudre des problèmes simples de mesure de distances ou d'angles pour des objets géométriques donnés.*

- *Interpréter algébriquement des problèmes d'orthogonalité pour des objets géométriques donnés.*

- **Aire, volume et déterminant**

- *Associer un déterminant 2 x 2 à l'expression en coordonnées de l'aire d'un parallélogramme dans un plan.*

- *Déduire de la formule du produit scalaire l'expression en coordonnées de l'aire d'un parallélogramme dans l'espace.*

- *Associer un déterminant 3 x 3 à l'expression en coordonnées du volume d'un parallélipipède dans l'espace.*

- *Expliciter les propriétés usuelles des déterminants en termes d'aire ou de volume.*

- **Matrices de transformations linéaires**

- *Représenter une transformation linéaire de l'espace par l'action d'une matrice 3 x 3 sur un vecteur-colonne. Ecrire en particulier les matrices des transformations élémentaires suivantes, à partir de leur représentation dans un réseau cubique :*

❖ *homothéties,*
❖ *symétries centrales, axiales (axes de coordonnées), dans un plan (plans de coordonnées),*
❖ *symétries du cube, de l'octaèdre, du tétraèdre,*
❖ *projections orthogonales (sur les axes et plans de coordonnées).*

- *Associer à la composition de deux transformations linéaires le produit des matrices de représentation, à partir de l'action sur une vecteur-colonne.*

- *Associer l'inversion d'une matrice 3 x 3 à la résolution d'un système d'équations 3 x 3, ainsi qu'à l'expression de la transformation inverse d'une transformation donnée.*

- *Interpréter un système d'équations 3 x 3 en termes de combinaison linéaire de vecteurs-colonnes, en déduire les formules de Cramer à partir de l'interprétation du déterminant en termes de volume.*

Signalons encore que dans l'état actuel de rédaction des programmes (septembre 1997), la géométrie d'incidence de l'espace (qui est couverte ici dans le paragraphe consacré au réseau cubique) est étudiée en 4ème année de l'enseignement secondaire.