ACTES DU 1ER CONGRES DES CHERCHEURS EN EDUCATION

24-25 mai 2000, Bruxelles

UTILISER LES CONNAISSANCES ANTERIEURES DES ELEVES POUR CONSTRUIRE LES MATHEMATIQUES : QUELQUES REFLEXIONS SUR LES CALCULS RELATIONNELS AU PRIMAIRE ET SUR LES EQUATIONS AU SECONDAIRE

Annick FAGNANT, Joëlle VLASSIS
(respectivement : Aspirant du F.N.R.S. et Chargée de recherches)
SPE
(Service de Pédagogie Expérimentale) - ULg

Ministère de la Communauté française
Colloque organisé sous la présidence de Françoise DUPUIS,
Ministre de l'Enseignement supérieur
et de la Recherche scientifique

Introduction

Cet article est basé sur deux recherches relatives à la résolution de problèmes au primaire et au secondaire. Il pose la question d'une liaison possible entre les types de calculs utilisés au primaire et les démarches de résolution d'équations au secondaire. Les deux premières parties de cet exposé présentent quelques réflexions suscitées par les deux recherches. La troisième partie soulève des interrogations quant à une continuité entre les apprentissages arithmétiques et algébriques.

I. Quelques réflexions sur les calculs relationnels au primaire

Le projet de recherche : " Pour une amélioration des pratiques d'enseignement de la résolution de problèmes au deuxième degré de l'enseignement primaire. "

Le projet poursuit comme objectif principal de construire et d'expérimenter des séquences d'enseignement de la résolution de problèmes développant une démarche experte et réflexive de résolution. A cette fin, l'équipe de recherche (I. Demonty, A. Fagnant et M. Lejong) a développé de nombreuses activités portant sur l'apprentissage de différentes compétences utiles à la résolution de problèmes et sur le " désapprentissage " de certaines stratégies ou croyances peu aptes à promouvoir une démarche réflexive de résolution. Lors de la présentation des activités, les chercheurs tentent de faire prendre conscience aux enseignants de l'importance de respecter les différentes démarches " spontanées " des élèves. Les enseignants semblent d'emblée convaincus de l'importance de cette approche. Toutefois, on ne rencontre pas de consensus lorsqu'on aborde la question relative aux types de calculs à utiliser en résolution de problèmes. C'est sur ce dernier point que nous allons centrer la présente communication…

Quels types de calculs faut-il utiliser en résolution de problèmes ?

Au niveau des recherches en résolution de problèmes[1] dans l'enseignement primaire, on reconnaît généralement que les algorithmes de calcul peuvent remplir deux fonctions (De Corte & Verschaffel, 1985[2] ; voir aussi Vergnaud, 1982[3]) : (1) ils peuvent être utilisés comme une représentation mathématique formelle de la relation sémantique entre les quantités connues et inconnues impliquées dans le problème (**calculs relationnels**) ; (2) ils peuvent être utilisés comme une expression mathématique formelle de l'opération qui doit être effectuée (ou qui a été effectuée) avec les deux nombres pour trouver la solution du problème **(calculs canoniques,** présentant la solution derrière le signe d'égalité). Parfois, les calculs peuvent remplir les deux fonctions (c'est le cas dans les problèmes où l'inconnue porte sur la recherche de l'état final : a+b= ? ou a-b= ?) ; dans d'autres cas, les deux notations sont très différentes (par exemple, pour la recherche de l'état intermédiaire : a+?=b pour le calcul relationnel et b-a= ? pour le calcul canonique).

L'idée que nous défendons est que les élèves peuvent utiliser l'un ou l'autre type de calcul en vue de lier la formalisation mathématique à leurs démarches " spontanées " et variées de résolution. Au contraire, de nombreux enseignants estiment que les élèves doivent produire *un calcul présentant la solution du problème derrière le signe d'égalité* (autrement dit, qu'ils doivent utiliser des calculs canoniques pour tous les problèmes).

1 Les propos développés ici concernent les problèmes additifs et soustractifs à une opération.

2 De Corte, E. & Verschaffel, L. (1985). Writing number sentences to represent addition and substraction problems. In J.K. Damarin and M. Shelton (Eds), *Proceeding of the Seventh Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Columbus, OH : International Group for the Psychology of Mathematics Education, 50-56.

3 Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operation of thought involved in addition and subtraction problems. In T.P. Carpenter, J.M. Moser and T.A. Romberg (Eds). *Addition and Subtraction. A cognitive perspective*. Hillsdale, N.J. : Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 39-59.

Imposer des calculs canoniques pour tous les problèmes, c'est ne pas respecter les stratégies spontanées des élèves

Dans une étude réalisée en première année primaire[4], nous demandions aux élèves[5] de résoudre différents types de problèmes qui leur étaient lus oralement. Pour ce faire, les élèves disposaient de matériel qu'ils pouvaient manipuler en vue de découvrir la solution par comptage. Après cette étape de résolution, on demandait aux élèves d'écrire un calcul qui correspondait à l'histoire et à ce qu'ils avaient compté avec les blocs ou un calcul qu'ils auraient pu faire pour trouver la solution. Les données issues de cette étude montrent clairement que les élèves utilisent presque exclusivement des calculs relationnels. Pratiquement aucun élève ne propose de calculs canoniques dans les problèmes portant sur la recherche de l'état initial ou intermédiaire (problèmes pour lesquels calculs relationnels et calculs canoniques sont très différents – ex. 5+ ?=8 ou 8-5= ?).

Nous avons eu l'occasion de faire d'autres observations qui renforcent notre conviction selon laquelle l'imposition des calculs canoniques entre en conflit avec les stratégies spontanées

des élèves. Par exemple, dans toutes les classes de 3e et de 4e années où nous avons eu l'occasion de faire passer des tests ou d'observer des activités, on a pu noter une proportion appréciable de calculs relationnels. Un autre exemple plus précis concerne une classe de 4e année où l'enseignant défend explicitement l'idée selon laquelle les élèves doivent utiliser des calculs canoniques. Lors d'une activité observée dans cette classe, nous avons remarqué que plus de la moitié des élèves utilisaient des calculs relationnels alors que ceux-ci n'étaient nullement plébiscités par l'enseignant et qu'ils avaient déjà eu ce titulaire en 3e année. De plus, même si les élèves résolvaient le problème correctement, l'enseignant ne leur accordait pas la totalité des points dans une évaluation puisqu'il considérait les calculs relationnels comme incorrects.

Imposer des calculs canoniques pour tous les problèmes, c'est aussi renforcer une conception erronée du signé d'égalité

Généralement, les enseignants justifient leur conviction selon laquelle la solution doit se situer derrière le signe par deux arguments : (a) c'est pour qu'on puisse bien identifier la réponse et (b) de toute façon, lorsque l'élève écrit une addition à trou, il fait une soustraction dans sa tête pour résoudre le problème.

Le deuxième argument ne résiste pas à une analyse empirique. En effet, nous avons interviewé une dizaine d'élèves d'une classe de 4e année afin de comprendre leur démarche de résolution dans des calculs présentant des additions à trou (a+ ?=c) et des soustractions directes (a-b= ?). Les résultats montrent non seulement que la plupart des élèves résolvent les additions à trou par surcomptage, mais également que certains d'entre eux résolvent les soustractions de cette manière…

Le premier argument est critiquable intrinsèquement : dire *que la réponse doit se situer derrière le signe d'égalité pour qu'on puisse l'identifier*, c'est **renforcer** une conception erronée de ce signe d'égalité. En effet, on lui donne **explicitement** le statut incorrect d'indicateur de l'amorce d'un résultat.

4 Fagnant, A. (en préparation). Vers une compréhension des opérations additives et soustractives au travers de la résolution de problèmes arithmétique. Thèse de doctorat en préparation.

5 25 élèves (choisis au hasard dans 6 classes de 1re année) ont été interrogés individuellement lors d'interviews qui se sont déroulées au mois de janvier et en fin d'année.

II. Vers la mise en équation au secondaire

Le projet de recherche : “ Stratégies d’enseignement de l’algèbre ”

Dans le cadre de la recherche “ Stratégies d’enseignement de l’algèbre ” (J. Vlassis et I. Demonty), une séquence d’activités sur les équations a été construite et expérimentée dans quelques classes de 2e année du secondaire. Son objectif consistait essentiellement dans l’apprentissage des méthodes de résolution des équations du premier degré à une inconnue. La mise en équation proprement dite n’a donc pas été abordée même si une certaine modélisation devait intervenir pour résoudre les situations.

Cette séquence était composée de deux parties. La première se centrait sur les équations avec l’inconnue dans un seul membre, la seconde sur celles avec l’inconnue dans les deux membres.

Les activités de la première phase consistaient à soumettre aux élèves plusieurs petits problèmes de structure ax=c, a+x=b, ax±b=c (par exemple, retrouver les touches effacées dans une suite d’opérations à la calculatrice connaissant le résultat obtenu, chercher une dimension

inconnue connaissant l’aire et les autres dimensions d’une figure, etc.). Les élèves pouvaient résoudre ces problèmes avec leurs connaissances arithmétiques acquises à l’école primaire.

La deuxième partie des activités confrontait les élèves avec des problèmes conduisant à des équations où l’inconnue figurait dans les deux membres. A ce niveau, les démarches arithmétiques rendaient la recherche de la solution très fastidieuse; il était donc nécessaire d’envisager une autre méthode de résolution. C’était à ce moment qu’intervenait l’apprentissage de la méthode formelle basée sur le principe des propriétés de l’égalité (les balances). Cette manière d’envisager l’enseignement de la résolution des équations basée sur les connaissances arithmétiques des élèves, se distingue assez nettement des pratiques habituelles. Celles-ci consistent le plus souvent à présenter rapidement aux élèves la méthode formelle de transposition avec les fameuses règles “ tout terme qui change de membre change de signe ” et “ tout facteur qui change de membre est remplacé par son inverse ” et à la faire appliquer à tous les types d’équations.

Notre communication se propose de développer quelques résultats issus principalement des activités sur les équations avec l’inconnue dans un seul membre. Les démarches observées chez les élèves aux cours de ces situations ont en effet suscité plusieurs réflexions à propos d’une meilleure harmonisation arithmétique-algèbre.

Quelles démarches arithmétiques pour résoudre des problèmes modélisés par une équation avec l’inconnue dans un seul membre?

Dans le cadre de cet article, nous distinguerons deux démarches arithmétiques de résolution que nous préciserons à travers l’exemple suivant : “ Rechercher la largeur d’un rectangle dont l’aire vaut 24 et la longueur 6 ”. Pour trouver la solution, il est possible :

1. D’appliquer les **opérations inverses** et effectuer 24 : 6 = 4.
   Cette démarche consiste à dégager l’enchaînement des opérations réalisées à partir de l’inconnue pour obtenir l’équation donnée et ensuite à reproduire cet enchaînement en sens inverse afin de trouver la valeur de l’inconnue. La solution du problème se trouve donc derrière le signe d’égalité. Nous rapprochons les opérations inverses des calculs canoniques présentés précédemment.

2. De modéliser l’énoncé par 6 x ? = 24 et trouver la solution par **substitution**.
   Cette méthode représentant les relations entre données et inconnues correspond aux calculs relationnels identifiés dans la première partie. La substitution peut être réalisée de deux manières, soit par essais-erreurs (différentes valeurs sont alors substituées à l’inconnue jusqu’à trouver celle qui vérifiera l’égalité), soit par reconnaissance numérique directe, comme dans le cas de cet exemple, où la réponse 4 apparaît de manière assez évidente.

Comment les élèves résolvent-ils spontanément les équations?

Quel que soit le type d'équation envisagé, nos constats d'observations montrent que la plupart des élèves utilise ou tente d'utiliser les opérations inverses.

Celles-ci sont appliquées avec succès pour la résolution de problème de structure ax=b ou a±x=b. Dans ces situations, le recours à cette démarche se conçoit aisément lorsque les nombres présentent une certaine complexité (dans le cas d'un problème comme 12x?=252 par exemple) alors que dans des cas très simples (comme dans l'exemple, 6x?=24, cité précédemment), une reconnaissance numérique peut sembler plus efficace. On observe cependant que, même dans ce dernier type de situations, une majorité d'élèves rédige sa solution en utilisant les opérations inverses. Ces constats peuvent surprendre puisque la recherche présentée plus haut laissait entendre que jusqu'en 4e année de l'enseignement primaire, les élèves utilisaient spontanément la substitution (les calculs relationnels) dans la résolution de problèmes. Il semble donc qu'en 5e et 6e années du primaire, la démarche par opérations inverses se soit systématisée, à la fois à cause des nombres plus complexes présents dans les énoncés, mais également sous la pression des enseignants qui les imposent quelle que soit la situation.

Cette tendance à privilégier les opérations inverses chez les élèves de 2e année du secondaire se manifeste également, de manière cependant moins marquée, dans la résolution de problèmes de structure plus complexe (de type ax±b=c) impliquant un enchaînement de plusieurs opérations. Nous avons observé que le recours aux opérations inverses entraînait dans ce contexte, un certain nombre d'erreurs. La plupart du temps, les élèves se trompaient en effectuant les opérations dans le désordre.

Confronté à un problème impliquant une équation avec l'inconnue dans les deux membres, beaucoup d'élèves, armés de leurs seules connaissances arithmétiques, n'ont pu entamer de démarches de résolution. En effet, leur tentative d'appliquer les opérations inverses aboutissait à une impasse puisque la réponse finale n'était pas donnée. Cependant, nous avons pu constater que ceux qui travaillaient par substitution avaient rapidement construit une ébauche d'équation en deux étapes comme ax±b=y suivi de cx±d=y et amorcé une procédure par essais-erreurs pour trouver la solution.

III. Calculs relationnels et mise en équation : une continuité possible ?

Ces observations sur l'importance de l'utilisation des opérations inverses (calculs canoniques) soulèvent plusieurs questions. Les travaux présentés en première partie de cet article montrent que les élèves de l'école primaire choisissent spontanément la méthode par substitution (les calculs relationnels) pour résoudre des problèmes conduisant à des équations de type a + x = b. Or, les enseignants invitent très tôt, et non sans difficulté, leurs élèves à n'utiliser exclusivement que les calculs canoniques. Ce principe amène chez les élèves certaines représentations fausses comme l'idée que pour résoudre un problème, il faut effectuer une opération dont le résultat (derrière le signe d'égalité) correspond également à la solution du problème. En outre, cette démarche entraîne un certain nombre d'erreurs lorsque les élèves se trouvent en présence d'un enchaînement de plusieurs opérations.

Cette contrainte posée d'emblée est non seulement contre-intuitive mais évacue complètement de la panoplie des méthodes de résolution la démarche par substitution (calculs relationnels) dont le raisonnement est plus proche des apprentissages liés à la mise en équation au secondaire. En effet, selon Kieran (1990)[6], pour réaliser une mise en équation, les élèves doivent produire un raisonnement opposé à celui qu'ils utilisent pour élaborer les opérations inverses. Par exemple, un problème comme “ A un nombre on ajoute 4, on multiplie le résultat obtenu par 3, on obtient 31. Quel est ce nombre? ” sera modélisé par l'équation “ (x+4).3=30 ”. La résolution par opérations inverses amènerait l'expression “ 30:3-4=x ”.

6 Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. In Nescher et Kilpatrick (Eds). *Mathematics and Cognition.* Cambridge University Press, 96-102.

Nous pensons donc que la démarche par substitution peut aider les élèves à mieux conceptualiser les notions impliquées dans les processus de mise en équation et de résolution. De plus, Kieran (1988)[7] montre que ceux qui fonctionnent de cette manière envisagent plus volontiers la lettre comme un nombre inconnu, faisant partie d'une relation numérique de l'équation, tandis que les autres l'envisagent comme le nombre, résultat de l'opération inverse. Cette idée peut les conduire à envisager la lettre de l'équation comme le résultat d'un ensemble d'opérations inverses et n'ayant pas d'existence propre dans l'équation donnée.

En conclusion, il semblerait donc que les calculs relationnels aient leur place parmi les méthodes de résolution de problèmes au primaire, non seulement parce qu'ils font partie des savoirs spontanés des élèves, mais aussi parce qu'ils impliquent des structures de pensée qui pourraient favoriser certains apprentissages algébriques du secondaire. En effet, avec les calculs relationnels, on éviterait de se trouver dans une situation où la démarche arithmétique (liée généralement aux calculs canoniques) entre en opposition avec la mise en équation.

7 Kieran, C. (1988). Two different approaches among algebra learner. In A.F. Coxford (Ed). *The Ideas of algebra K-12*. Reston, VA: National Council of teachers of Mathematics, 91-96