ACTES DU 1ER CONGRES DES CHERCHEURS EN EDUCATION

24-25 mai 2000, Bruxelles

DES PROBLEMES QUI DEBOUCHENT SUR DES SAVOIRS MATHEMATIQUES

M. SCHNEIDER
Département de mathématiques - FUNDP

Ministère de la Communauté française
Colloque organisé sous la présidence de Françoise DUPUIS,
Ministre de l'Enseignement supérieur
et de la Recherche scientifique

La réforme dite des compétences met la résolution de problèmes à l'honneur. Mais cette compétence globale entre toutes peut s'inscrire dans une perspective d'amorce aux apprentissages ou, au contraire, constituer un aboutissement de ceux-ci. Tout en estimant que ces deux optiques sont complémentaires, je souhaite aujourd'hui développer un exemple qui relève de la première parce qu'il est significatif d'un courant important en didactique des mathématiques et des sciences.

La première partie de mon exposé a trait à l'identification d'obstacles épistémologiques.

Partons d'une erreur assez classique. Soit un solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe Ox du graphique d'une fonction f(x) pris entre deux bornes. Le volume de ce solide est donné par l'intégrale de la fonction $\pi[f(x)]^2$, intégrale qui peut représenter la limite d'une somme de volumes de cylindres inscrits dans le solide. Plusieurs élèves qui maîtrisent ce résultat proposent d'intégrer la fonction $2\pi f(x)$ pour calculer l'aire latérale d'un tel solide. Une telle proposition, en contradiction avec la théorie de l'intégration, semble correspondre à une intuition forte et partagée par de nombreux individus à commencer par des étudiants en dernière année de licence en mathématiques. La manière dont les élèves argumentent cette réponse est significative : “ les cercles $2\pi f(x)$ remplissent la surface latérale tout comme les disques $\pi[f(x)]^2$ remplissent le solide ”. Cette erreur peut s'interpréter comme une manifestation de l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions que M. Schneider (1988) caractérise ainsi : une certaine perception mêlant des grandeurs de dimensions distinctes se traduit indûment en termes de mesures pour cause d'un glissement mental inconscient du domaine des grandeurs à celui de leurs mesures. Un tel glissement permet également d'interpréter d'autres erreurs comme celle qui consiste à égaler le rapport des volumes de deux solides de révolution à celui des aires des surfaces qui les engendrent ou d'expliquer pourquoi les élèves ne comprennent pas que la limite d'un suite de sommes d'aires de rectangles puisse donner la valeur exacte d'une aire curviligne. Les obstacles épistémologiques apparaissent ainsi comme des schémas d'interprétation globaux d'erreurs diverses, récurrentes, persistantes qui semblent indépendantes de la formation reçue et qui se sont manifestées dans l'histoire des mathématiques.

Une autre caractéristique des obstacles épistémologiques est qu'ils constituent des connaissances jusqu'à un certain point. Ainsi, si l'on ne peut comparer des solides par le biais de sections planes radiales, on peut le faire par le biais de sections planes parallèles, comme le fait Cavalieri, pour en conclure que deux prismes de même base et de même hauteur, l'un droit, l'autre oblique, ont le même volume car tout plan parallèle à leurs bases les sectionne l'un et l'autre en polygones de même aire. À partir de là, le concept d'obstacle épistémologique peut fonder des ingénieries didactiques dont le but est de permettre aux élèves de rencontrer ces obstacles afin de les franchir. Dans ces ingénieries, le concept de problème est central : il constitue un milieu à travers lequel l'élève met ses connaissances anciennes à l'épreuve pour les dépasser et construire des connaissances nouvelles qui lui permettent de résoudre le problème. Cette perspective s'inspire bien évidemment des théories constructivistes de l'apprentissage, en particulier celle de J. Piaget. Cependant, au-delà du cadre piagétien, les théories didactiques sous-jacentes à une telle approche manifestent une grande sensibilité aux différences de contenus (scolaires entre autres) et aux différences de “ situations-problèmes ” susceptibles de les induire dans le mental des élèves. J'illustrerai cette perspective en puisant deux extraits dans une approche heuristique de l'analyse destinée à des élèves du secondaire (projet AHA[1]).

Un cas précis d'aire curviligne, l'aire sous $y = x^3$, est traité au moyen d'encadrements par des sommes d'aires de rectangles, jusqu'au bout c'est-à-dire jusqu'au passage à la limite. Alors qu'en général le concept de limite est évoqué dans la théorie, à la suite seulement d'une expérimentation numérique. Cette variable didactique induit généralement un débat entre les élèves à propos de la " nature " du résultat de la limite, soit *1/4* : vaut-elle ou non la valeur exacte de l'aire cherchée ? En particulier, ils s'enferrent dans une impasse mentale qui peut se résumer ainsi : tant que les rectangles restent rectangles, ils ne comblent pas l'aire sous la courbe et quand ils deviennent segments, leur aire est nulle et l'on voit mal comment obtenir le résultat cherché en sommant des zéros. Ce débat débouche, avec l'aide du professeur, sur la preuve suivante : l'aire sous $y = x^3$ ne peut valoir $1/4+ \varepsilon$, aussi petit que soit ε , car en prenant suffisamment de rectangles, on peut intercaler entre $1/4$ et $1/4 + \varepsilon$, l'approximation par excès correspondante. D'où la contradiction : l'aire cherchée est supérieure à une de ses approximations par excès. De façon analogue, on montre que cette aire ne peut valoir $1/4 - \varepsilon$. Elle vaut donc *1/4.* À travers cette preuve se construit le concept formalisé de limite puisque, principalement, le raisonnement repose sur la possibilité de rendre les approximations aussi proches de *1/4* qu'on le souhaite pour autant qu'on prenne suffisamment de rectangles.

Cette approche des aires et des volumes par la limite est complétée par des comparaisons de surfaces ou de solides, ligne par ligne ou section plane par section plane. Au travers d'exercices liés à cette approche, les élèves ont l'occasion de mettre à l'épreuve leurs intuitions comme celle évoquée au début de ce texte qui conduit à une aire latérale de cône égale à εrh. On dessine alors sur la surface latérale d'un cône droit un ensemble de cercles (comme si c'était des bagues) que l'on projette sur la base parallèlement à l'axe du cône. On fait ensuite comparer aux élèves la surface latérale du cône et celle de sa base, par le biais des cercles qui y sont dessinés. Cette comparaison induit l'idée que les cercles sur la surface latérale sont plus " éloignés " les uns des autres que ne le sont les cercles homologues projetés sur la base et ce d'autant plus que la génératrice est grande par rapport au rayon. Cette perception leur fait comprendre leur erreur initiale et les conduit à l'idée correcte que l'aire de la surface latérale est à celle de la base ce que la génératrice est au rayon.

Une recherche-action a permis aux auteurs de ce projet d'analyser par quelles interventions le professeur peut faire fonctionner ces situations sans en dénaturer ni le sens, ni la portée constructiviste.

Plusieurs membres du groupe s'interrogent actuellement sur les savoirs mathématiques et didactiques nécessaires à " l'appropriation " par les enseignants de ce projet ou d'autres analogues et de leurs enjeux épistémologiques et didactiques. Mais ceci est une autre recherche...

Bibliographie succincte

M. Schneider, *Des objets mentaux 'aire' et 'volume' au calcul des primitives*, thèse de doctorat sous la direction de N. Rouche, Louvain-la-Neuve, 1988.

[1] Groupe AHA (P. Bolly, A. Chevalier, M. Citta. C. Hauchart, M. Krysinska, D. Legrand, N. Rouche, M. Schneider) , *Vers l'infini pas à pas*, manuel pour l'élève (418 pages); guide méthodologique (195 pages), De Boeck Wesmael, 1999.