CREM

Nivelles, le 31 août 2002

VERS UNE GÉOMÉTRIE NATURELLE

Recherche N^{o} 72/01 financée par le Ministère de la Communauté Française,
Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique,
Service général des Affaires générales, de la Recherche en Éducation
et du Pilotage interréseaux

Rapport de fin d'année, deuxième partie

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques a.s.b.l.

5 rue Émile Vandervelde B-1400 Nivelles Belgique

Tél. +32–(0)67 21.25.27 Fax. +32–(0)67 21.22.02 Cpte 068-2179326-54

rouche@amm.ucl.ac.be

9

Vers la théorie des groupes

Préambule

« . . . Les élèves doivent avoir toutes les occasions de se familiariser avec un matériel géométrique riche, d'acquérir une connaissance sensorielle multiple : visuelle, tactile, rythmique. »

Ainsi s'exprimait Paul Libois qui nous a montré comment travailler naturellement en compagnie de Thalès, d'Euclide et de Galilée (N. Lanciano et al. [1998]). La géométrie est une activité de la vie de tous les jours ; elle se perçoit en regardant, en observant, en touchant, en manipulant, . . .

Pourquoi parler de groupes dans une étude qui traite de géométrie naturelle ?

Dans l'esprit de Libois, la géométrie ne peut s'acquérir que de façon naturelle. Comme il nous l'a enseigné, nous allons tenter de montrer que même la notion de groupe, qui pourrait sembler abstraite, s'acquiert par la manipulation, le toucher, l'observation d'objets géométriques familiers.

Libois disait encore : « S'il est vrai que l'"espace" est une "figure géométrique", figure prolongée dans toute son étendue, il est également vrai que chaque figure – suffisamment harmonieuse – devient un espace, et que le nombre d'espaces devient infini. » C'est dans ce même sens, dans ce qui suit, que nous utiliserons le mot « figure », qu'elle soit polygone ou polyèdre ; c'est un espace au sens large, c'est-à-dire un ensemble concrétisé, organisé, structuré (P. Libois [1966]).

Et lorsque nous parlons, par exemple, des permutations qui conservent globalement un cube, nous entendons par là des permutations d'un ensemble structuré métriquement, c'est-à-dire des isométries.

Le lecteur trouvera peut-être la première activité proposée trop simple et trop longue. Or elle poursuit de multiples buts. Non seulement elle vise à familiariser l'élève avec le concept de groupe, mais surtout à le convaincre que l'ensemble de toutes les permutations qui conservent une structure possède naturellement les propriétés qui en font un groupe. Les groupes sont nés dans le contexte des permutations et c'est pour cela qu'ils sont définis avec les propriétés qu'on leur connaît. L'établissement de la table n'est pas une finalité en soi. Il est bien plus fondamental de réaliser qu'à un même ensemble de points du plan (ou de l'espace) sont associés des groupes différents selon la structure définie sur ces points. Ainsi, par exemple, le carré n'a pas le même groupe que le parallélogramme. Il est très important de se rendre compte que ce type d'étude rejoint celle proposée par Klein dans le *programme d'Erlangen* [1872], à savoir : « *Étant donnés une multiplicité*[1] *et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.* » C'est cela faire de la géométrie au sens moderne.

Cette première activité est aussi l'occasion de mettre en place des stratégies et une méthode qui vont permettre de découvrir des groupes d'isométries de figures plus complexes, pour lesquelles le risque est grand de ne pas recenser toutes les permutations voulues. Elle vise également à amener l'idée que c'est parce qu'il y a une structure de groupe qu'il est relativement simple d'opérer le recensement et d'être certain d'avoir identifié toutes les isométries cherchées. L'élève peut ainsi mesurer la puissance de l'outil groupe, qui devient alors tout autre chose qu'une simple définition dans un cahier.

1 Groupes diédriques

De quoi s'agit-il ?

À partir de manipulations de polygones (un carré, un pentagone, un hexagone), découvrir toutes les isométries qui conservent ces figures. Faire apparaître peu à peu une structure au sein de ces isométries.

Enjeux

Analyser en termes d'isométries des manipulations élémentaires de figures.

Faire émerger le concept de *groupe* de manière naturelle.

Compétences

Organiser des propriétés d'un ensemble de figures en termes de structure de groupe.

Intégrer le savoir dans une culture scientifique et humaniste : le rôle des structures dans l'élaboration théorique des mathématiques.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Du matériel de dessin.

Des photocopies sur transparents des documents fournis en annexe (fiches 15 à 19, aux pages 199 à 203).

Prérequis

Les notions de déplacement et d'antidéplacement, de symétrie orthogonale, de symétrie centrale et de rotation.

[1] C'est-à-dire un ensemble de points.

1.1 Les isométries du carré

Comment s'y prendre ?

Le professeur fournit à chaque groupe d'élèves deux transparents : le premier (figure 1) représente un vitrail où le même motif est reproduit toujours dans le même sens, mais dont le carreau du milieu est absent.

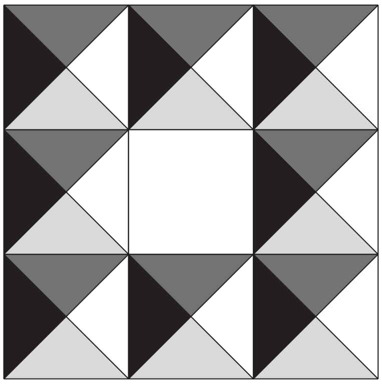

Fig. 1

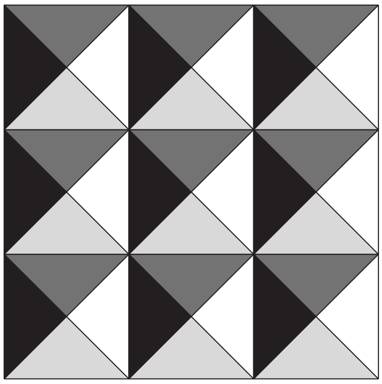

Fig. 2

Le carreau du milieu se trouve sur un autre transparent, ce qui permet de reconstituer le vitrail complet, comme le montre la figure 2.

Ce deuxième transparent, obtenu par photocopie de la fiche 17 à la page 201, doit être découpé de manière à ne faire apparaître que le dessin du carreau central, l'intitulé de la fiche devant être éliminé pour éviter qu'il ne serve de repère.

Placer le carreau central dans différentes positions de manière à constituer d'autres vitraux, et déterminer le nombre de possibilités.

En partant de la position initiale où le vitrail présente les neuf carreaux dans la même position (figure 2), on obtient trois autres figures en faisant subir au transparent du carreau central une rotation d'un quart de tour dans le sens trigonométrique ($\mathcal{R}\ \frac{1}{4}$), puis d'un demi-tour ($\mathcal{R}\ \frac{1}{2}$), et enfin de trois quarts de tour ($\mathcal{R}\ \frac{3}{4}$). Après quatre rotations d'un quart de tour, on a reconstitué la configuration initiale.

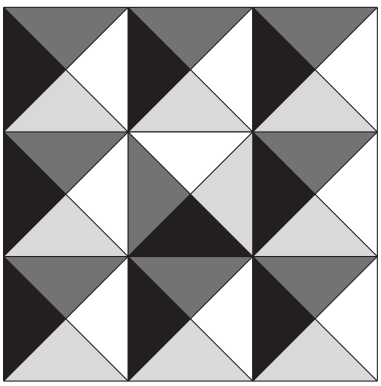

Fig. 3 : $\mathcal{R}\ \frac{1}{4}$

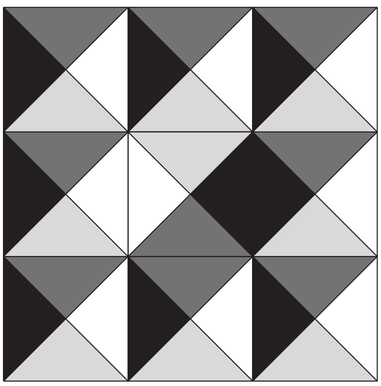

Fig. 4 : $\mathcal{R}\ \frac{1}{2}$

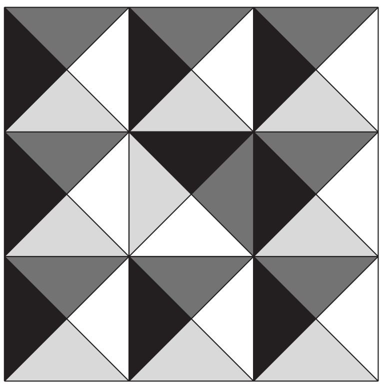

Fig. 5 : $\mathcal{R}\ \frac{3}{4}$

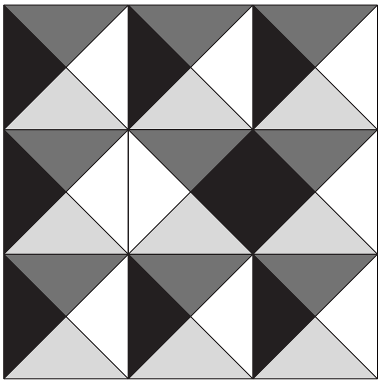

Fig. 6 : $\mathcal{S}_1$

Au départ de la même position initiale du vitrail mais en retournant le carreau central, on obtient une nouvelle configuration. Plaçons-nous dans l'hypothèse où ce retournement est celui qui produit le vitrail de la figure 6, il correspond à la symétrie par rapport à l'axe médian vertical (notée $\mathcal{S}_1$). Si les élèves n'évoquent pas spontanément la possibilité de retourner le carreau, et si le transparent n'est pas retourné de manière fortuite au cours des manipulations, le professeur peut relancer la discussion en montrant la figure 6 et en posant une question supplémentaire.

Par quel mouvement du transparent peut-on obtenir cette figure ?

Après avoir retourné le transparent, on peut encore lui faire subir les rotations d'un quart de tour, d'un demi-tour et de trois quarts de tour. Les vitraux ainsi obtenus sont illustrés par les figures 7, 8 et 9.

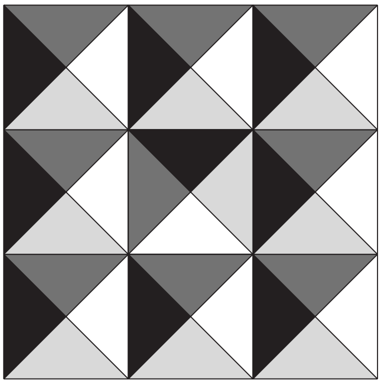

Fig. 7 : $\mathcal{R}\ \frac{1}{4} \circ \mathcal{S}_1$

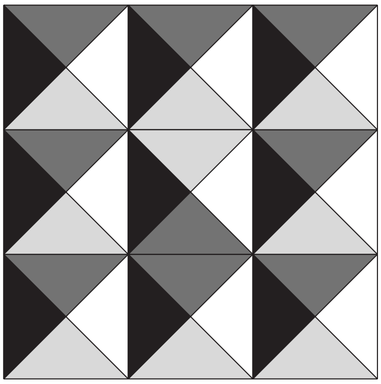

Fig. 8 : $\mathcal{R}\ \frac{1}{2} \circ \mathcal{S}_1$

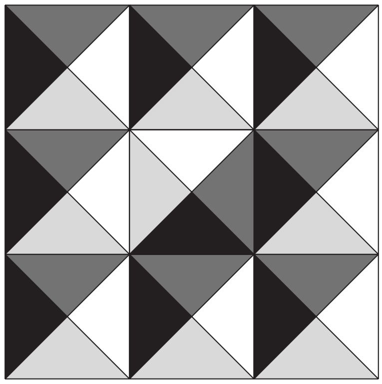

Fig. 9 : $\mathcal{R}\ \frac{3}{4} \circ \mathcal{S}_1$

Nous notons $\mathcal{R}\ \frac{1}{4} \circ \mathcal{S}_1$ le mouvement composé de la rotation d'un quart de tour effectuée après le retournement $\mathcal{S}_1$. D'une manière générale, le symbole « $\circ$ » est celui de la composition de deux transformations, $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ (« $\mathcal{T}_2$ après $\mathcal{T}_1$ ») étant le résultat de la composition[2] de la transformation $\mathcal{T}_1$ suivie de la transformation $\mathcal{T}_2$.

Pour faciliter le déroulement de la suite de l'activité, il est indispensable de garder dans la classe la trace de cette première expérience (figures 2 à 9). Ainsi, il sera toujours possible de comparer aisément les configurations obtenues par d'autres manipulations du carreau central avec les huit situations qui viennent d'être répertoriées.

[2] Les raisons qui font écrire la composition des transformations dans cet ordre sont analogues à celles qui dictent l'écriture de la composition des fonctions : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Récapitulons dans la figure 10 les huit façons de placer le carreau central du vitrail :

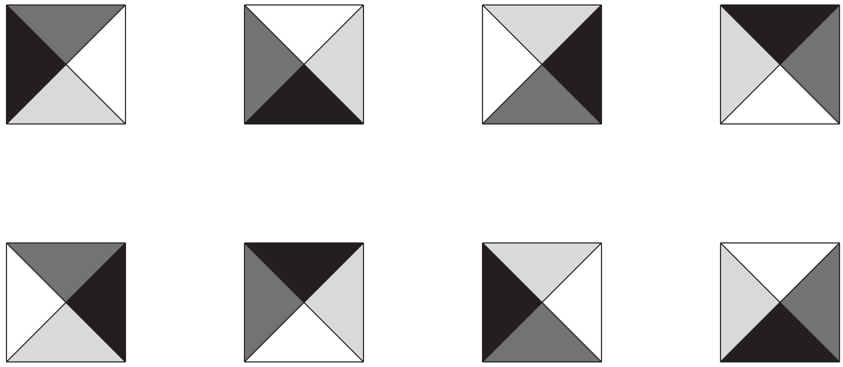

Fig. 10

Cette première approche met l'accent sur la comparaison entre la position initiale du carreau et sa position finale, celle dans laquelle il est replacé. Chacune des sept positions obtenues à partir de la position initiale correspond cependant à un mouvement du carreau central dont nous gardons la trace (figures 3 à 9 avec leur légende).

Les élèves essaieront probablement de retourner le transparent d'une autre manière. Ils constateront, par exemple, que le retournement qui correspond à la symétrie par rapport à l'axe médian horizontal du carreau central initial produit le même vitrail que celui de la figure 8. D'autres tentatives produiront toujours un vitrail déjà obtenu.

À ce stade de l'activité, les manipulations du carreau central conduiront sans doute les élèves à évoquer les symétries du carré. Le professeur relance alors la réflexion en posant la question suivante, qui a également pour but d'organiser les comparaisons.

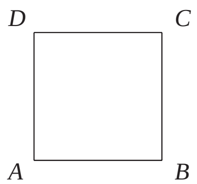

Fig. 11

Quelles sont les isométries qui appliquent le carré sur lui-même ? Peut-on établir une correspondance entre ces isométries et les positions du carreau central répertoriées ci-dessus ?

Le travail est de clarifier le lien entre les mouvements du carreau et les isométries du carré, sans les couleurs. Il s'agit donc bien d'un premier processus d'abstraction. Contrairement au carré, dont les sommets ne sont pas nommés, le carreau n'est jamais sa propre image par une des isométries répertoriées. Le rôle du carreau de vitrail est de permettre d'identifier les différents mouvements sans qu'il soit nécessaire de définir un codage pour désigner les sommets du carré.

Nous proposons de décrire chacune des isométries du carré, d'associer à chacune d'elles l'image du carré de la figure 11, et d'établir le lien avec les différentes façons de placer le carreau central du vitrail (figure 10).

Pour cela, notons

A le coin « noir, gris-clair »,

B le coin « gris-clair, blanc »,

C le coin « blanc, gris-foncé »,

D le coin « gris-foncé, noir »,

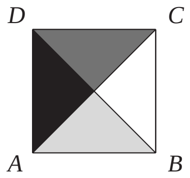

Fig. 12

du carreau du vitrail dans sa position initiale. Les élèves relèveront les rotations d'un quart de tour, d'un demi-tour et de trois quarts de tour ainsi que la symétrie d'axe médian vertical qui ont déjà été évoquées lors des manipulations du carreau de vitrail.

Les figures 13 à 15 montrent, de gauche à droite, le carré dans sa position initiale avec son centre de rotation, l'image de ce carré par la rotation indiquée, le carreau de vitrail dans sa position initiale, et finalement l'image de ce carreau par cette même rotation.

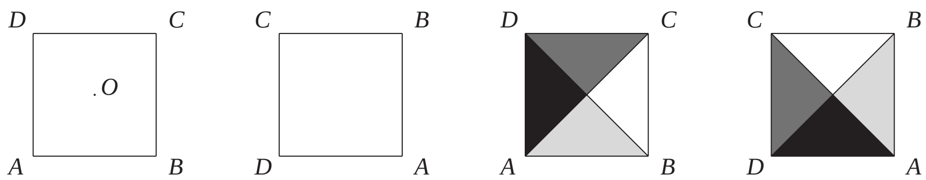

Fig. 13 : $\mathcal{R}\ \frac{1}{4}$

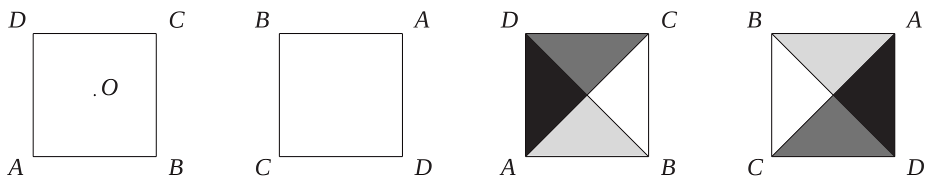

Fig. 14 : $\mathcal{R}\ \frac{1}{2}$

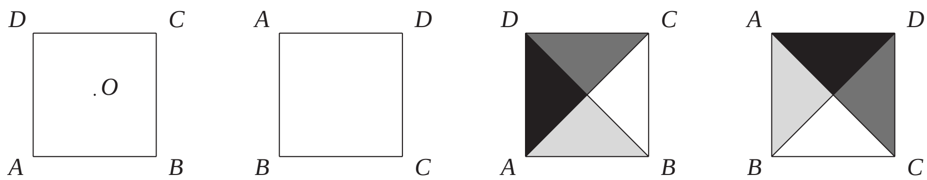

Fig. 15 : $\mathcal{R}\ \frac{3}{4}$

Le carré est une figure suffisamment familière aux élèves pour que les axes de symétries leur apparaissent clairement : il s'agit des médianes et des diagonales, notées respectivement m_1 et m_2, d_1 et d_2 (figure 16).

Il y a donc quatre symétries qui conservent le carré : en sélectionnant les axes à partir de m_1 dans l'ordre trigonométrique, nous notons :

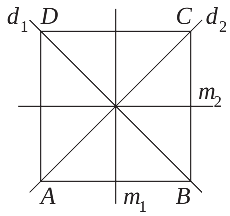

Fig. 16

$\mathcal{S}_1$ la symétrie d'axe m_1,
$\mathcal{S}_2$ la symétrie d'axe d_1,
$\mathcal{S}_3$ la symétrie d'axe m_2,
$\mathcal{S}_4$ la symétrie d'axe d_2.

Ces différentes symétries auront sans doute déjà été évoquées lors des manipulations du carreau transparent. Certains élèves relèveront peut-être la symétrie centrale par rapport au centre du carré, mais cette symétrie est identique à la rotation d'un demi-tour. Nous préférons nous exprimer en termes de rotation et privilégier la notation $\mathcal{R}\ \frac{1}{2}$ à $\mathcal{S}_O$ pour désigner cette isométrie, car elle correspond au mouvement effectué avec le transparent. Par ailleurs, l'emploi du terme « symétrie » nous paraît source de confusion dans ce contexte, car il s'agit bien d'une rotation et donc d'un déplacement, contrairement aux symétries axiales qui sont des retournements du plan.

Nous trouvons donc sept transformations qui conservent le carré.

Si la symétrie $\mathcal{S}_1$ celle dont nous avons supposé au départ qu'elle avait été utilisée par les élèves, est clairement identifiée au retournement du transparent, il n'est pas certain que tous les élèves soient convaincus que les autres symétries qui viennent d'être mises en évidence sont identiques à des transformations du carré déjà décrites précédemment. Il s'agit donc à présent d'identifier chacune de ces symétries avec l'un des mouvements du carreau de vitrail.

> Quels sont les mouvements du carreau de vitrail qui ont le même effet que les symétries $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{S}_4$?

Les figures 17 à 20 montrent, de gauche à droite, le carré dans sa position initiale avec un axe de symétrie, l'image de ce carré par la symétrie dont l'axe est représenté, le carreau de vitrail dans sa position initiale, et finalement l'image de ce carreau par cette même symétrie.

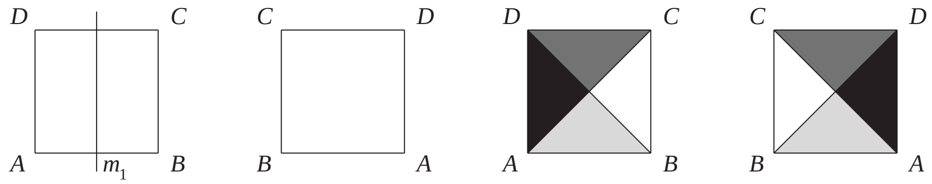

Fig. 17 : $\mathcal{S}_1$

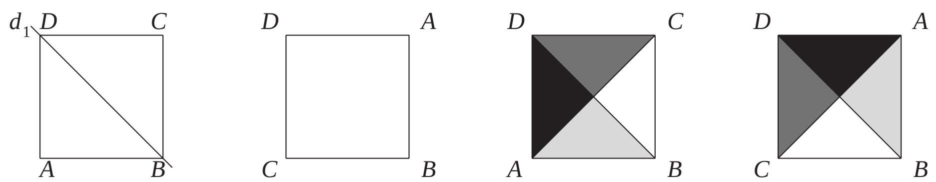

Fig. 18 : $\mathcal{S}_2 = \mathcal{R}\ \frac{1}{4} \circ \mathcal{S}_1$

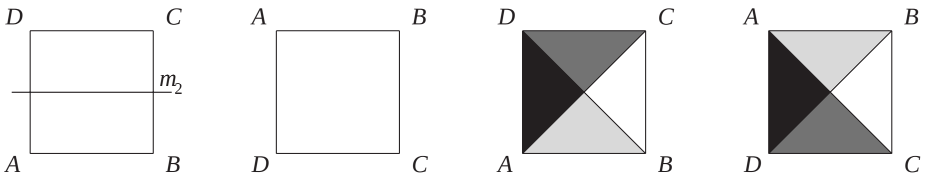

Fig. 19 : $\mathcal{S}_3 = \mathcal{R}\ \frac{1}{2} \circ \mathcal{S}_1$

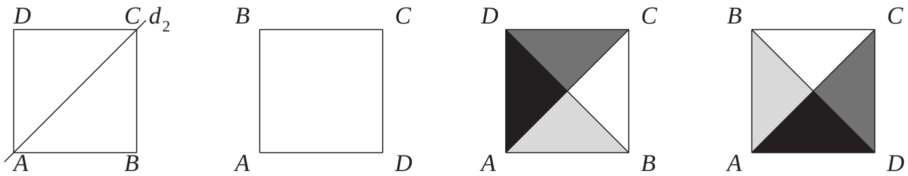

Fig. 20 : $\mathcal{S}_4 = \mathcal{R}\ \frac{3}{4} \circ \mathcal{S}_1$

La comparaison avec la position du carreau central dans les figures 7, 8 et 9 permet d'identifier les symétries d'axe d_1, m_2 et d_2 à des composées de $\mathcal{S}_1$ avec une rotation d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quarts de tour. Chacune des symétries est ainsi exprimée comme composée de la symétrie $\mathcal{S}_1$ avec une rotation.

Reprenons le transparent sur lequel figure le carreau central du vitrail et plaçons-le dans sa positon initiale. Au début de l'activité, nous avons tout d'abord fait tourner ce transparent (figures 3 à 5), puis nous l'avons retourné par un mouvement qui correspond à la symétrie $\mathcal{S}_1$, d'axe m_1 (figure 6). C'est en faisant tourner le transparent ainsi retourné d'un quart de tour, d'un demi-tour et de trois quarts de tour que nous avons obtenu les figures 7 à 9. Nous venons de montrer que par ce moyen, nous avons exhibé toutes les symétries opérées sur le carreau. Et si nous avions retourné le transparent par un mouvement correspondant à la symétrie d'axe m_2 (ou d_1, ou d_2) ?

Peut-on retrouver chacune des symétries comme composée de l'une quelconque d'entre elles avec une ou des rotations ?

Retournons le carreau central par la symétrie d'axe m_2, puis faisons le tourner d'un quart de tour, d'un demi-tour, puis de trois quarts de tour. Nous identifions ensuite les symétries obtenues par comparaison avec les figures 17 à 20.

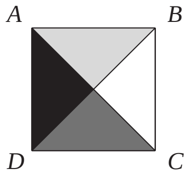

Fig. 21 : $\mathcal{S}_3$

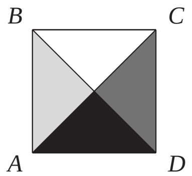

Fig. 22 : $\mathcal{R}\ \frac{1}{4} \circ \mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_4$

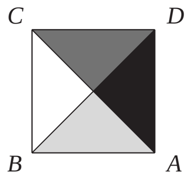

Fig. 23 : $\mathcal{R}\ \frac{1}{2} \circ \mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_1$

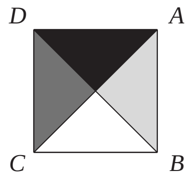

Fig. 24 : $\mathcal{R}\ \frac{3}{4} \circ \mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_2$

Même si le mouvement paraît moins naturel, on peut imaginer de retourner le carreau central par la symétrie d'axe d_1 ou d_2, puis de lui faire subir les trois rotations. Nous identifions également les symétries obtenues.

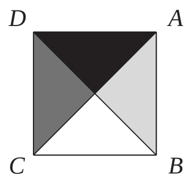

Fig. 25 : $\mathcal{S}_2$

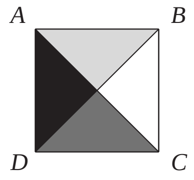

Fig. 26 : $\mathcal{R}\,\frac{1}{4} \circ \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3$

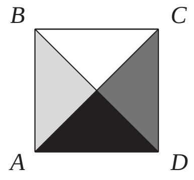

Fig. 27 : $\mathcal{R}\,\frac{1}{2} \circ \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_4$

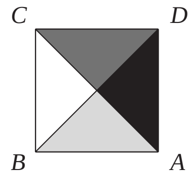

Fig. 28 : $\mathcal{R}\,\frac{3}{4} \circ \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1$

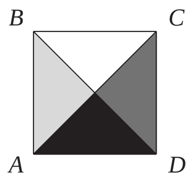

Fig. 29 : $\mathcal{S}_4$

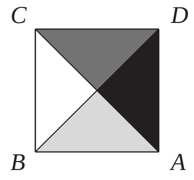

Fig. 30 : $\mathcal{R}\,\frac{1}{4} \circ \mathcal{S}_4 = \mathcal{S}_1$

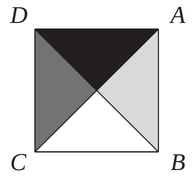

Fig. 31 : $\mathcal{R}\,\frac{1}{2} \circ \mathcal{S}_4 = \mathcal{S}_2$

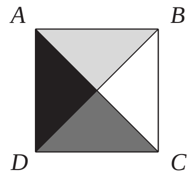

Fig. 32 : $\mathcal{R}\,\frac{3}{4} \circ \mathcal{S}_4 = \mathcal{S}_3$

Nous sommes à présent convaincus que toutes les symétries du carré peuvent être obtenues en composant l'une quelconque d'entre elles avec $\mathcal{R}\,\frac{1}{4}$, $\mathcal{R}\,\frac{1}{2}$ et $\mathcal{R}\,\frac{3}{4}$.

1.2 La table de composition et la structure de groupe

Comment s'y prendre ?

À ce stade de l'activité, le professeur peut demander de consigner les résultats obtenus dans un tableau à double entrée. Les transformations du plan qui conservent le carré, encore appelées *isométries* du carré, sont reprises en têtes de colonnes et en têtes de lignes.

> Dresser un tableau de composition des isométries du carré.

Une motivation à dresser ce tableau est de vérifier qu'il n'y a pas d'isométrie qui n'aurait pas été trouvée jusqu'à présent mais qu'on pourrait découvrir par composition. En effet, la composée de deux isométries du carré est évidemment une isométrie du carré (quand on effectue successivement deux mouvements qui appliquent le carré sur lui-même, le mouvement composé applique aussi le carré sur lui-même).

$\circ$	i_1
i_2	$i_2 \circ i_1$

Il s'agit de noter dans chaque case du tableau le résultat de la composée de l'isométrie notée en haut de la colonne suivie de celle notée au début de la ligne.

$\circ$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{4}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{2}$	$\mathcal{R}\,\frac{3}{4}$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$
$\mathcal{R}\,\frac{1}{4}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{2}$	$\mathcal{R}\,\frac{3}{4}$	?	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_1$

La première ligne du tableau ainsi présenté fait apparaître une « isométrie manquante » et permet d'introduire de manière naturelle la *transformation identique*, que l'on appelle encore *identité*. Elle apparaît ici comme la composée $\mathcal{R}\ \frac{1}{4} \circ \mathcal{R}\ \frac{3}{4}$, donc comme la rotation d'un tour. Cette tranformation ramène le carré dans sa position initiale. Si on ne considère que l'état initial et l'état final de la figure, elle consiste donc à « ne pas bouger ». Mais l'élaboration du tableau montre qu'elle doit être prise en compte en tant qu'isométrie du carré pour que la composée de deux isométries du carré soit toujours une isométrie du carré. On dit alors que l'ensemble des isométries du carré (ou de toute autre figure) est *stable pour la composition*. Il y a donc huit isométries du carré, correspondant chacune à une des huit positions du carreau de vitrail, l'identité étant celle qui correspond à la position initiale.

On recommence alors un nouveau tableau où l'identité, notée I, est ajoutée aux isométries en têtes de colonnes et en têtes de lignes.

On comprend facilement que l'identité joue un rôle particulier dans la composition, puisqu'en la composant avec une isométrie t quelconque, on a toujours $t \circ I = t = I \circ t$.

Les quatre premières lignes de ce tableau seront complétées sans peine, il suffit de reprendre tous les résultats des manipulations qui précèdent. Les quatre dernières lignes fourniront l'occasion d'une discussion sur la non-commutativité de la composition des isométries. Au moment de noter le résultat de la composée $\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{R}\ \frac{1}{4}$, certains élèves indiqueront spontanément $\mathcal{S}_2$ qui est le résultat connu de $\mathcal{R}\ \frac{1}{4} \circ \mathcal{S}_1$. Il convient alors de les inviter à s'interroger sur la validité de ce résultat.

Le résultat de la composition reste-t-il inchangé si on effectue d'abord la rotation, puis la symétrie ?

Un recours au transparent sera sans doute nécessaire pour clarifier cette question. Partons du carreau dans sa position initiale, faisons-le tourner d'un quart de tour, puis retournons le transparent par un mouvement qui correspond à la symétrie $\mathcal{S}_1$. La figure 33 montre la succession des images obtenues. Cette manipulation amène le carreau de vitrail dans la même position que celle obtenue en effectuant $\mathcal{S}_4$, c'est-à-dire $\mathcal{R}\ \frac{3}{4} \circ \mathcal{S}_1$ (figure 9). Ceci devrait suffire à convaincre chacun que la composition n'est pas commutative.

Fig. 33 : $\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{R}\ \frac{1}{4} = \mathcal{S}_4 = \mathcal{R}\ \frac{3}{4} \circ \mathcal{S}_1$

La question de la commutativité peut amener celle de l'associativité et celle de l'isométrie inverse.

La composition des isométries d'une figure est-elle associative ?

Autrement dit, quand on effectue successivement trois isométries d'une figure (ou plus), peut-on les associer de différentes manières ? En réalité, quand on effectue plusieurs isométries à la suite, on ne se préoccupe pas d'identifier les étapes intermédiaires. On compare la position initiale et la position finale de la figure, le résultat de la composition est l'isométrie qui applique l'une sur l'autre. Si on remplace deux isométries de la suite par leur composée, cela ne change évidemment rien au résultat final. Par exemple, en manipulant les transparents, on constate (figure 34) que, pour le carré,

$$\mathcal{R}\ \tfrac{1}{2} \circ \mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_4 = \mathcal{R}\ \tfrac{3}{4}.$$

Si on remplace les deux premières isométries par leur composée,

$$\mathcal{R}\ \tfrac{1}{2} \circ (\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_4) = \mathcal{R}\ \tfrac{1}{2} \circ \mathcal{R}\ \tfrac{1}{4} = \mathcal{R}\ \tfrac{3}{4},$$

on passe directement de la première image à la troisième.

Si on remplace les deux dernières isométries par leur composée,

$$(\mathcal{R}\ \tfrac{1}{2} \circ \mathcal{S}_1) \circ \mathcal{S}_4 = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_4 = \mathcal{R}\ \tfrac{3}{4},$$

on passe directement de la deuxième image à la quatrième.

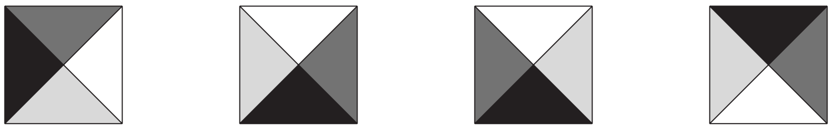

Fig. 34 : $\mathcal{R}\ \tfrac{1}{2} \circ \mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_4 = \mathcal{R}\ \tfrac{3}{4}$

Après avoir effectué une isométrie, peut-on en trouver une autre, appelée l'*inverse* de la première, qui ramène la figure dans sa position initiale ?

Il est facile de voir que

l'identité, les symétries et la rotation d'un demi-tour sont leur propre inverse ;

la rotation d'un quart de tour et la rotation de trois quarts de tour sont inverses l'une de l'autre ;

toute isométrie commute avec son inverse.

On tiendra compte de ces divers résultats pour dresser le tableau de composition des isométries du carré.

$\circ$	I	$\mathcal{R}\,\frac{1}{4}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{2}$	$\mathcal{R}\,\frac{3}{4}$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$
I	I	$\mathcal{R}\,\frac{1}{4}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{2}$	$\mathcal{R}\,\frac{3}{4}$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$
$\mathcal{R}\,\frac{1}{4}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{4}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{2}$	$\mathcal{R}\,\frac{3}{4}$	I	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_1$
$\mathcal{R}\,\frac{1}{2}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{2}$	$\mathcal{R}\,\frac{3}{4}$	I	$\mathcal{R}\,\frac{1}{4}$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$
$\mathcal{R}\,\frac{3}{4}$	$\mathcal{R}\,\frac{3}{4}$	I	$\mathcal{R}\,\frac{1}{4}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{2}$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$
$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_2$	I	$\mathcal{R}\,\frac{3}{4}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{2}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{4}$
$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{4}$	I	$\mathcal{R}\,\frac{3}{4}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{2}$
$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{2}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{4}$	I	$\mathcal{R}\,\frac{3}{4}$
$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{R}\,\frac{3}{4}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{2}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{4}$	I

La structure de ce tableau suscite de nombreuses observations. Lesquelles ? Comment les interpréter ?

On voit tout d'abord se dessiner quatre « blocs » :

$\circ$	I	$\mathcal{R}\,\frac{1}{4}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{2}$	$\mathcal{R}\,\frac{3}{4}$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$
I	I	$\mathcal{R}\,\frac{1}{4}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{2}$	$\mathcal{R}\,\frac{3}{4}$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$
$\mathcal{R}\,\frac{1}{4}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{4}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{2}$	$\mathcal{R}\,\frac{3}{4}$	I	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_1$
$\mathcal{R}\,\frac{1}{2}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{2}$	$\mathcal{R}\,\frac{3}{4}$	I	$\mathcal{R}\,\frac{1}{4}$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$
$\mathcal{R}\,\frac{3}{4}$	$\mathcal{R}\,\frac{3}{4}$	I	$\mathcal{R}\,\frac{1}{4}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{2}$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$
$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_2$	I	$\mathcal{R}\,\frac{3}{4}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{2}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{4}$
$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{4}$	I	$\mathcal{R}\,\frac{3}{4}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{2}$
$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{2}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{4}$	I	$\mathcal{R}\,\frac{3}{4}$
$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{R}\,\frac{3}{4}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{2}$	$\mathcal{R}\,\frac{1}{4}$	I

Schématisons le découpage en sous-tableaux de la manière suivante :

$\circ$	$\mathcal{R}$otations	$\mathcal{S}$ymétries
$\mathcal{R}$otations	I	II
$\mathcal{S}$ymétries	III	IV

I : Le sous-tableau I montre qu'en composant des rotations, on n'obtient que des rotations, l'identité étant assimilée à la rotation d'angle nul, ou à la rotation d'un tour. Ce résultat n'est pas étonnant, puisque les rotations sont obtenues sans retourner le transparent, alors que les symétries correspondent à un retournement du transparent.

II : Le sous-tableau II montre qu'en effectuant une rotation après une symétrie, on obtient toujours une symétrie (résultat attendu puisque le transparent a été retourné une fois).

Le fait que les quatre symétries apparaissent une seule fois dans chaque colonne de ce sous-tableau confirme le fait que toutes les symétries peuvent être obtenues en composant l'une quelconque d'entre elles avec les différentes rotations (la rotation après la symétrie).

Le fait que les quatre symétries apparaissent une fois dans chaque ligne de ce sous-tableau montre qu'il n'est pas possible de retrouver la même symétrie en effectuant une même rotation après des symétries différentes.

III : Le sous-tableau III s'étudie de manière analogue au tableau II. Il montre qu'en effectuant une symétrie après une rotation, on obtient toujours une symétrie (résultat également attendu pour la même raison).

Le fait que les quatre symétries apparaissent une fois dans chaque ligne de ce sous-tableau montre que toutes les symétries peuvent également être obtenues en effectuant l'une quelconque d'entre elles après les différentes rotations.

Le fait que les quatre symétries apparaissent une fois dans chaque colonne de ce sous-tableau montre qu'il n'est pas possible de retrouver la même symétrie en effectuant des symétries différentes après une même rotation.

IV : Le sous-tableau IV montre que la composée de deux symétries est toujours une rotation. La composée d'une symétrie avec elle-même est l'identité, la composée de deux symétries différentes est une autre rotation. Là encore, le résultat est attendu puisque chaque symétrie correspond à un retournement du transparent, et après avoir été retourné deux fois, celui-ci est revenu dans une position qu'il aurait pu atteindre sans avoir été retourné.

On peut encore commenter le fait que dans chaque ligne et dans chaque colonne de ce tableau, on ne trouve jamais deux fois la même isométrie.

De ce découpage de la table de composition en quatre sous-tableaux, il ressort que les isométries du carré se répartissent naturellement en deux sous-ensembles :

- l'identité et les rotations qui composent l'ensemble des déplacements, noté D,
- les symétries qui composent l'ensemble des antidéplacements, noté A.

Pour éviter toute ambiguïté, nous appelons « antidéplacements » plutôt que « retournements » les isométries qui changent l'orientation, tant dans le plan que dans l'espace. S'il est vrai que dans le plan, les antidéplacements coïncident avec les « retournements » de la figure, ce n'est plus le cas dans l'espace où le « retournement » correspond à la rotation de $\frac{1}{2}$ tour, c'est-à-dire à un déplacement.

En utilisant ces vocables, on peut énoncer :

> la composée de deux déplacements est un déplacement,
>
> la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement,
>
> la composée de deux antidéplacements est un déplacement.

Le fait que chacune des isométries apparaît une et une seule fois dans chaque ligne et dans chaque colonne peut être interprété comme suit : si on compose deux isométries différentes avec une même troisième isométrie, on obtient des résultats différents et réciproquement.

En géréral, pour trois transformations t, p et q :

$p \neq q \Rightarrow t \circ p \neq t \circ q$ mais aussi $t \circ p \neq t \circ q \Rightarrow p \neq q$ et $t \circ p = t \circ q \Rightarrow p = q$.

De même

$p \neq q \Rightarrow p \circ t \neq q \circ t$ mais aussi $p \circ t \neq q \circ t \Rightarrow p \neq q$ et $p \circ t = q \circ t \Rightarrow p = q$.

Ce tableau de composition des isométries du carré est encore appelé *table de groupe*. On y voit les propriétés de la composition des isométries du carré.

Propriétés de la composition des isométries du carré

1. La composée de deux isométries du carré est une isométrie du carré.
2. La composition des isométries du carré est associative. Cela signifie que, si on souhaite composer trois isométries, on peut les associer de manières différentes sans changer le résultat. En général, pour trois transformations t, p et q :

$$(p \circ q) \circ t = p \circ (q \circ t).$$

3. L'identité I est neutre pour la composition. Cela signifie que si on la compose avec n'importe quelle isométrie, le résultat est cette même isométrie :

$$t \circ I = t = I \circ t.$$

4. Chaque isométrie possède une inverse (notée t^{-1}), c'est l'isométrie avec laquelle il faut la composer pour obtenir l'identité :

$$t \circ t^{-1} = I = t^{-1} \circ t.$$

Ces quatre propriétés peuvent être résumées en disant que l'ensemble des isométries du carré forme un *groupe* pour la composition.

Les implications

$$t \circ p = t \circ q \Rightarrow p = q \quad \text{et} \quad p \circ t = q \circ t \Rightarrow p = q$$

évoquées ci-dessus et qui fournissent les règles de simplification sont une conséquence de la structure de groupe. On peut les démontrer de la manière suivante :

$$t \circ p = t \circ q \quad \Rightarrow \quad t^{-1} \circ t \circ p = t^{-1} \circ t \circ q \quad \Rightarrow \quad p = q,$$

$$p \circ t = q \circ t \quad \Rightarrow \quad p \circ t \circ t^{-1} = q \circ t \circ t^{-1} \quad \Rightarrow \quad p = q.$$

L'ensemble des rotations laissant le carré invariant forme aussi un groupe, puisque la composée de deux rotations est une rotation. On dit que c'est un *sous-groupe* du groupe des isométries du carré. Il est d'indice 2, car il contient la moitié des éléments du groupe. Notons qu'il suffit de vérifier que l'ensemble des rotations est stable pour la composition pour pouvoir déduire qu'il s'agit d'un sous-groupe.

La notion de groupe, née dans le contexte des groupes de permutations, est particulièrement claire dans le cadre des isométries d'une figure, puisque les propriétés qui caractérisent la structure sont évidentes de par la nature même des éléments (les isométries) et de la loi de composition. Une discussion avec les élèves sur la question suivante fera sans doute apparaître le caractère paradigmatique de l'exemple du carré.

Retrouve-t-on les mêmes propriétés (1 à 4) pour la composition des isométries d'une figure quelconque ?

On peut soumettre à la classe quelques figures simples comme celles présentées ci-dessous (en annexe à la page 202) et demander d'établir leurs tables de groupe. Les élèves seront sans doute étonnés de voir que deux figures aussi différentes que les figures 35 et 36 ont la même table de groupe. Le groupe de la figure 37 est identique au sous-groupe des rotations du carré. Quant à la figure 38, elle a le même groupe que le carré.

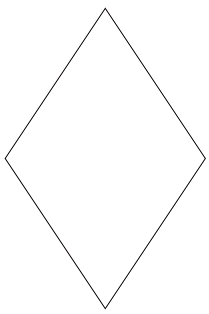

Fig. 35

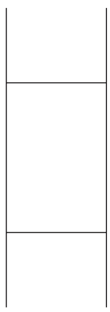

Fig. 36

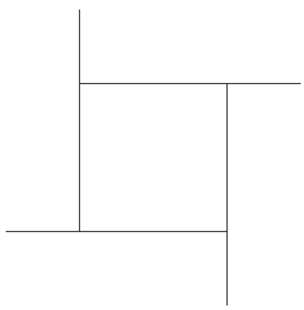

Fig. 37

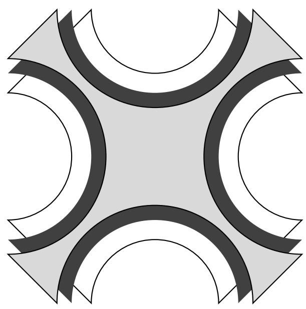

Fig. 38

L'étude des groupes du pentagone et de l'hexagone permettra au professeur qui le souhaite d'entreprendre une démarche de généralisation et d'aborder le groupe du n-gone.

Le pentagone et l'hexagone des figures 39 et 40 (en annexe à la page 203), photocopiés sur transparents, permettront les manipulations nécessaires.

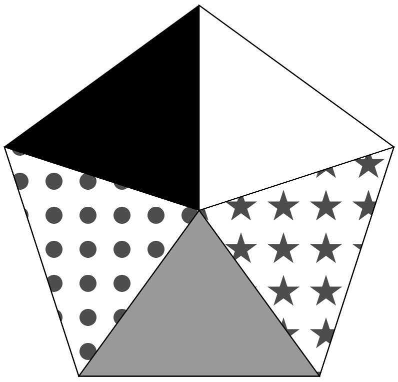

Fig. 39

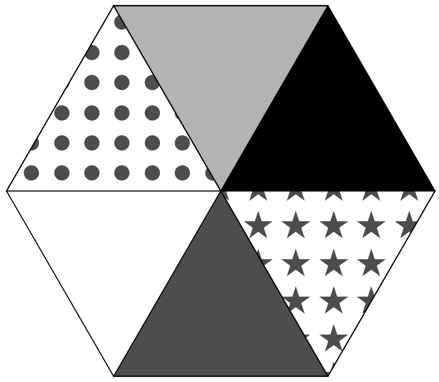

Fig. 40

Le pentagone

L'identité, les rotations de $\frac{1}{5}$ de tour, $\frac{2}{5}$ de tour, $\frac{3}{5}$ de tour, $\frac{4}{5}$ de tour sont les cinq déplacements qui conservent le pentagone. On dit qu'un pentagone est invariant pour une rotation d'ordre 5. Les antidéplacements sont les cinq symétries dont les axes sont les droites joignant un sommet au milieu du côté opposé. Le groupe des isométries du pentagone contient donc 10 éléments.

L'hexagone

L'identité, les rotations de $\frac{1}{6}$ de tour, $\frac{1}{3}$ de tour, $\frac{1}{2}$ tour, $\frac{2}{3}$ de tour et $\frac{5}{6}$ de tour sont les six déplacements qui conservent l'hexagone. On dit qu'un hexagone est invariant pour une rotation d'ordre 6. Les antidéplacements sont les six symétries dont les axes sont, soit les droites joignant deux sommets opposés, soit les milieux de deux côtés opposés. Le groupe des isométries de l'hexagone est donc un groupe à 12 éléments.

1.3 Dénombrement des isométries d'une figure

Comment s'y prendre ?

C'est notamment par un procédé de dénombrement qu'on peut acquérir la certitude qu'il n'y a que huit isométries qui conservent le carré.

Choisissons un sommet du carré, soit A. Il peut occuper *quatre* positions différentes.

Ayant décidé d'une position pour ce sommet A, considérons un de ses voisins, B par exemple. Ce dernier ne peut occuper que *deux* positions différentes pour rester voisin de A. En effet, s'il y a *a priori* trois emplacements possibles, il faut exclure de placer B de telle sorte que le côté AB devienne une diagonale du carré, AB doit rester un côté.

Faisons donc occuper au sommet B une des deux positions convenables et considérons à présent le voisin de B autre que A, soit C. Il est facile de se convaincre que C ne peut occuper qu'*une* seule position puisque AC doit rester une diagonale. La position du quatrième sommet D est dès lors fixée également.

Ainsi, il y a $4 \times 2 = 8$ isométries du carré. Un raisonnement similaire montre qu'il n'y a que 10 isométries qui conservent le pentagone, et 12 pour l'hexagone.

1.4 Les générateurs du groupe

Comment s'y prendre ?

Le groupe du carré

Nous avons vu que toutes les symétries du carré sont le résultat de la composition de l'une quelconque d'entre elles avec les différentes rotations. Cette considération amène la question suivante.

> Combien de transformations du carré sont nécessaires pour les obtenir toutes par composition ?

Après le travail effectué sur les symétries, la question se pose évidemment pour les rotations. Reprenons le transparent représentant le carreau de vitrail. Faisons-lui subir tout d'abord une rotation d'un quart de tour dans le sens trigonométrique. Si nous faisons suivre cette première rotation d'une seconde rotation, également d'un quart de tour, le carreau a tourné d'un demi-tour. Si une troisième rotation d'un quart de tour est effectuée ensuite, le carreau a effectué une rotation de trois quarts de tour. Après une quatrième rotation d'un quart de tour, le carreau est revenu dans sa position initiale.

Notons r la rotation d'un quart de tour dans le sens trigonométrique. Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned}
&r = \mathcal{R}\ \tfrac{1}{4},\\
&r \circ r = r^2 = \mathcal{R}\ \tfrac{1}{2},\\
&r \circ r \circ r = r^3 = \mathcal{R}\ \tfrac{3}{4},\\
&r \circ r \circ r \circ r = r^4 = I.
\end{aligned}$$

Nous avons encore $r^5 = r$, $r^6 = r^2$, ...

D'autre part, si nous effectuons une rotation d'un quart de tour dans le sens opposé au sens trigonométrique (nous noterons cette isométrie r^{-1}), nous remarquons que le résultat obtenu est le même que pour une rotation de trois quarts de tour. Nous écrivons donc $r^{-1} = r^3$ et nous pouvons encore constater que $r^{-2} = r^2$ et $r^{-3} = r$.

Notons s une quelconque symétrie. Les quatre symétries du carré sont alors

$$s,\ r \circ s,\ r^2 \circ s \ \text{ et } \ r^3 \circ s.$$

Ceci démontre que la rotation d'un quart de tour r et une symétrie s suffisent à engendrer toutes les isométries du carré. C'est pourquoi on les appelle *générateurs* du groupe Nous avons obtenu les différentes symétries en effectuant une, deux ou trois rotations r après la symétrie s.

À quelles isométries du carré correspondent $s \circ r$, $s \circ r^2$ et $s \circ r^3$?

Il s'agit évidemment de symétries, puisque ce sont des composées d'un déplacement et d'un antidéplacement. Les résultats du travail déjà effectué sur les transparents, consignés dans le tableau de la page 144 permettent de voir que toute symétrie qui conserve le carré vérifie les relations $s \circ r = r^3 \circ s$, $s \circ r^2 = r^2 \circ s$ et $s \circ r^3 = r \circ s$.

Notons encore que $s \circ s = I$, et qu'il en va de même pour toutes les symétries. On a donc aussi :

$$(r \circ s) \circ (r \circ s) = I,\ (r^2 \circ s) \circ (r^2 \circ s) = I,\ (r^3 \circ s) \circ (r^3 \circ s) = I.$$

Une telle isométrie, qui est sa propre inverse, est appelée *involution.* Outre les symétries, la rotation d'un demi-tour (r^2) est aussi une involution.

Les élèves sont à présent en mesure de calculer toutes les composées de deux isométries du carré.

Dresser la table de groupe des isométries du carré en fonction des générateurs.

$\circ$	i_1
i_2	$i_2 \circ i_1$

Les isométries du carré sont notées sous les formes I, r, r^2, r^3, s, $r \circ s$, $r^2 \circ s$ et $r^3 \circ s$. Les élèves préparent un tableau à double entrée qui reprend ces isométries horizontalement et verticalement. Chaque case contient le résultat de la composée de l'isométrie notée en haut de la colonne, suivie de celle notée au début de la ligne. Ces composées doivent être notées sous l'une des formes qui apparaissent dans les entrées du tableau. On peut le compléter en reprenant les résultats de la table de groupe de la page 144, ou encore en utilisant les propriétés qui viennent d'être établies. Par exemple

à la 6ème ligne, 2ème colonne :

$$r \circ s \circ r = r \circ r^3 \circ s = r^4 \circ s = I \circ s = s,$$

à la 8ème ligne, 6ème colonne :

$$r^3 \circ s \circ r \circ s = r^3 \circ s \circ s \circ r^3 = r^3 \circ I \circ r^3 = r^6 = r^2.$$

Voici le tableau complété :

$\circ$	I	r	r^2	r^3	s	$r \circ s$	$r^2 \circ s$	$r^3 \circ s$
I	I	r	r^2	r^3	s	$r \circ s$	$r^2 \circ s$	$r^3 \circ s$
r	r	r^2	r^3	I	$r \circ s$	$r^2 \circ s$	$r^3 \circ s$	s
r^2	r^2	r^3	I	r	$r^2 \circ s$	$r^3 \circ s$	s	$r \circ s$
r^3	r^3	I	r	r^2	$r^3 \circ s$	s	$r \circ s$	$r^2 \circ s$
s	s	$r^3 \circ s$	$r^2 \circ s$	$r \circ s$	I	r^3	r^2	r
$r \circ s$	$r \circ s$	s	$r^3 \circ s$	$r^2 \circ s$	r	I	r^3	r^2
$r^2 \circ s$	$r^2 \circ s$	$r \circ s$	s	$r^3 \circ s$	r^2	r	I	r^3
$r^3 \circ s$	$r^3 \circ s$	$r^2 \circ s$	$r \circ s$	s	r^3	r^2	r	I

C'est la table de groupe des isométries[3] du carré exprimées en fonction des générateurs.

Quels sont les générateurs des groupes du pentagone et de l'hexagone ?

Le groupe du pentagone

Par analogie avec le carré, on peut penser que la rotation r de $\frac{1}{5}$ de tour et une symétrie quelconque s sont les générateurs du groupe. Les élèves vérifieront que les cinq symétries sont s, $r \circ s$, $r^2 \circ s$, $r^3 \circ s$ et $r^4 \circ s$. Les relations $r^5 = I$, $r^6 = r$, … ainsi que $r \circ s = s \circ r^4$, $r^2 \circ s = s \circ r^3$, $r^3 \circ s = s \circ r^2$ et $r^4 \circ s = s \circ r$ (en général $r^i \circ s = s \circ r^{5-i}$) permettent d'établir la table du groupe, qui contient 10 éléments. On dit que le groupe du pentagone est d'ordre 10.

Le groupe de l'hexagone

La rotation r de $\frac{1}{6}$ de tour et une symétrie quelconque s sont les générateurs du groupe. Les élèves devront s'assurer que les six symétries sont s, $r \circ s$, $r^2 \circ s$, $r^3 \circ s$, $r^4 \circ s$ et $r^5 \circ s$. Les relations $r^6 = I$, $r^7 = r$, …ainsi que $r \circ s = s \circ r^5$, $r^2 \circ s = s \circ r^4$, $r^3 \circ s = s \circ r^3$, $r^4 \circ s = s \circ r^2$ et $r^5 \circ s = s \circ r$ (en général $r^i \circ s = s \circ r^{6-i}$) permettent à nouveau d'établir la table du groupe. Le groupe de l'hexagone est d'ordre 12.

Prolongement possible

Montrer que le groupe du carré est aussi engendré par deux involutions bien choisies, par exemple s et $r \circ s$.

1.5 Le groupe du n-gone ou groupe diédrique

Comment s'y prendre ?

On a pu constater que les groupes d'isométries de tous les polygones réguliers ont une structure similaire. Cette dernière activité de synthèse consiste à mettre cette structure en évidence. Le groupe du n-gone contient n déplacements, engendrés par une rotation r de $\frac{1}{n}$ de tour (dans un sens ou dans l'autre), et n symétries de la forme s, $r \circ s$, …, $r^i \circ s$, …, $r^{n-1} \circ s$. Le groupe du n-gone est donc d'ordre $2n$. Les relations $r^n = I$, $r^{n+1} = r$, … ainsi que $r \circ s = s \circ r^{n-1}$, $r^2 \circ s = s \circ r^{n-2}$, …, $r^i \circ s = s \circ r^{n-i}$, …, $r^{n-1} \circ s = s \circ r$ permettent d'établir la table de ce groupe, qu'on appelle *groupe diédrique*. Comme dans le groupe du carré, l'ensemble des déplacements forme un sous-groupe d'indice 2. Tout groupe diédrique peut également être engendré par deux involutions bien choisies, par exemple s et $r \circ s$.

[3] Les Anglo-Saxons parlent de « group of symmetries », donnant au vocable « symmetry » un sens plus large, incluant les rotations. Nous avons préféré le mot « isométrie » pour éviter toute confusion, le terme « symétrie » désignant dans ce texte une symétrie orthogonale.

2 Groupes de polyèdres

De quoi s'agit-il ?

À partir de manipulations de polyèdres (un tétraèdre, un cube, un dodécaèdre, un cuboctaèdre...), compter et découvrir des isométries qui conservent globalement ces solides, c'est-à-dire qui les laissent invariants. Utiliser la structure de groupe pour les découvrir toutes.

Enjeux

Analyser en termes d'isométries des manipulations élémentaires de solides.

Découvrir les propriétés de symétrie de quelques polyèdres réguliers et semi-réguliers tout en étudiant leurs *groupes d'isométries.*

Compétences

Organiser des propriétés d'un ensemble de figures en termes de structure de groupe.

Intégrer le savoir dans une culture scientifique et humaniste : le rôle des structures dans l'élaboration théorique des mathématiques.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Quelques polyèdres en tiges, en plexiglas ou en carton. Des développements de polyèdres, destinés à la construction de polyèdres en carton, sont fournis en annexe (fiches 22 à 27, aux pages 206 à 211).

Prérequis

La section 1 de ce chapitre, ou toute autre activité qui conduit à

- savoir que l'ensemble des isométries qui conservent une figure est un groupe pour la loi de composition ;
- connaître les propriétés d'un groupe.

Les isométries de l'espace ; les permutations d'un ensemble.

2.1 Les polyèdres réguliers

Comment s'y prendre ?

Nous n'envisagerons ici que des polyèdres convexes.

Un polyèdre régulier est un polyèdre dont toutes les faces sont des polygones convexes réguliers isométriques et qui a le même nombre de polygones autour de chaque sommet.

Combien y a-t-il de polyèdres réguliers ?

Une discussion au sein de la classe fera prendre conscience qu'en un sommet d'un polyèdre régulier, il y a au moins trois faces, nécessairement non coplanaires. Par conséquent, la somme des angles des différentes faces en ce sommet doit être strictement inférieure à 360°.

Les angles d'un triangle équilatéral mesurent 60°, ceux du carré 90°, ceux du pentagone 108° et ceux de l'hexagone 120°. Il est inutile d'aller au-delà de cette valeur puisque $3 \times 120° = 360°$; trois hexagones placés en un sommet sont coplanaires.

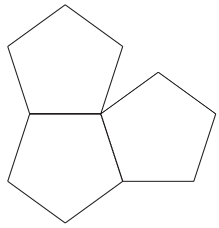

Fig. 41

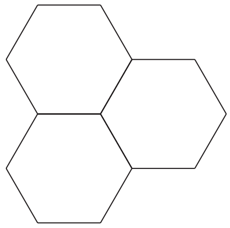

Fig. 42

Les figures 41 et 42 montrent bien qu'en plaçant trois pentagones en en sommet, on peut commencer à construire un polyèdre, tandis qu'avec trois hexagones, on amorce un pavage du plan. Les élèves passent en revue ces différents polygones réguliers et voient combien on peut en placer en chaque sommet. Le tableau ci-dessous répertorie de manière exhaustive les différents cas.

polygones en chaque sommet	somme des angles
3 triangles équilatéraux	$3 \times 60° = 180° < 360°$
4 triangles équilatéraux	$4 \times 60° = 240° < 360°$
5 triangles équilatéraux	$5 \times 60° = 300° < 360°$
6 triangles équilatéraux	$6 \times 60° = 360°$
3 carrés	$3 \times 90° = 270° < 360°$
4 carrés	$4 \times 90° = 360°$
3 pentagones	$3 \times 108° = 324° < 360°$
4 pentagones	$4 \times 108° = 432° > 360°$
3 hexagones	$3 \times 120° = 360°$

C'est d'une manière analogue que Luca Pacioli démontre dans la *Divine proportion* qu'il ne peut y avoir plus de cinq polyèdres réguliers. Nous reproduisons cette démonstration en annexe à la page 204.

Tous les polyèdres réguliers possibles existent ; on peut les construire à partir de leurs développements, fournis en annexe aux pages 206 à 210.

Avec trois triangles équilatéraux en chaque sommet, on obtient le *tétraèdre régulier* qui compte quatre faces.

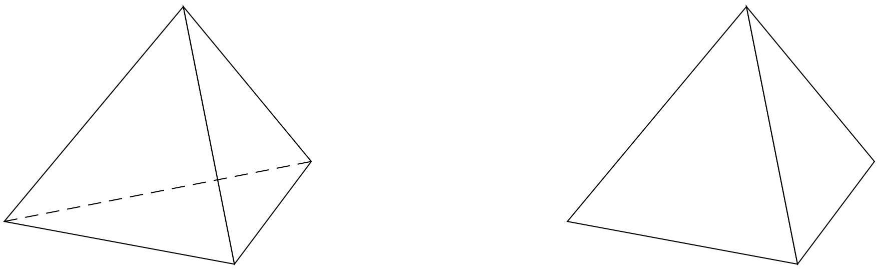

Fig. 43 : Le tétraèdre régulier

Le polyèdre construit en plaçant quatre triangles équilatéraux en chaque sommet est l'*octaèdre régulier*. Il comporte huit faces triangulaires. On peut le voir comme deux pyramides construites symétriquement par rapport à une même base carrée.

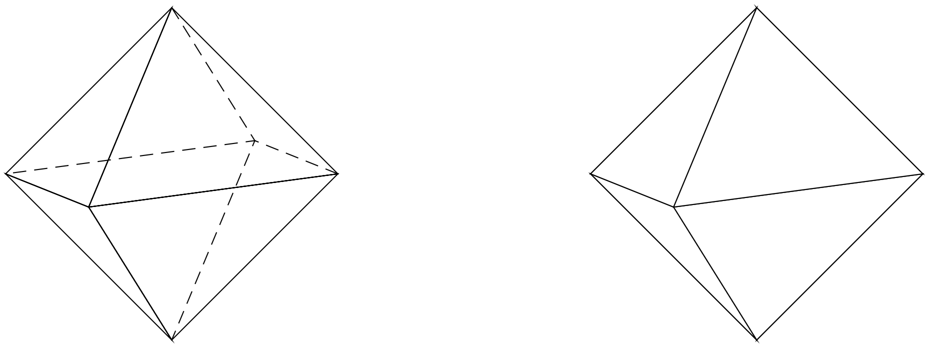

Fig. 44 : L'octaèdre régulier

Il y a cinq triangles équilatéraux en chaque sommet de l'*icosaèdre régulier*, qui comporte vingt faces.

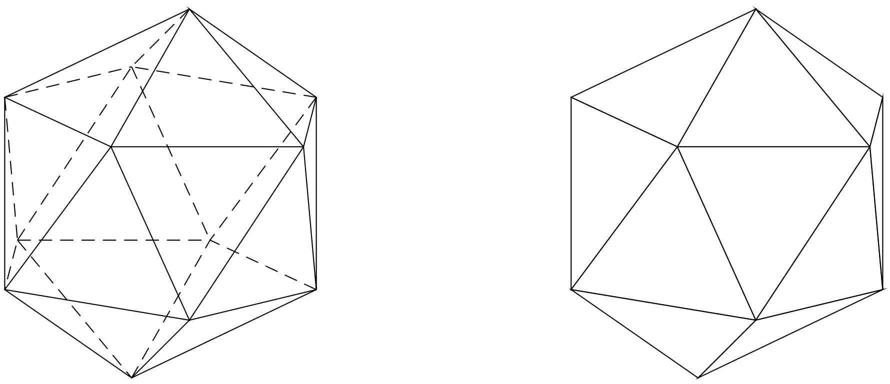

Fig. 45 : L'icosaèdre régulier

Avec trois faces carrées en chaque sommet, on obtient l'*hexaèdre régulier* qu'on appelle habituellement *cube*. Il compte six faces.

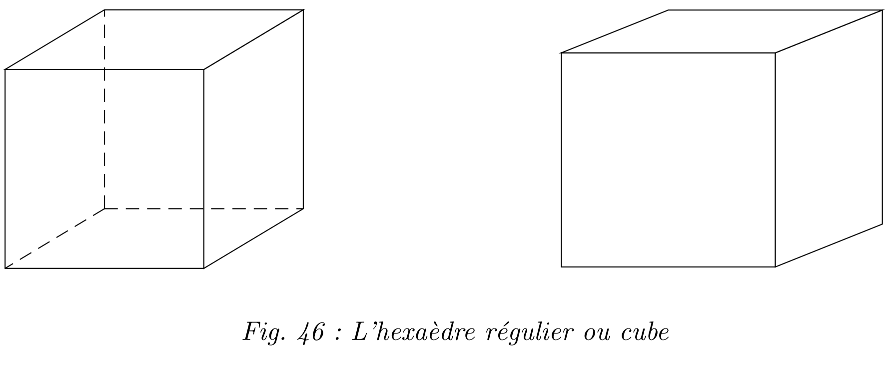

Fig. 46 : L'hexaèdre régulier ou cube

Le dodécaèdre régulier comporte douze faces pentagonales, trois en chaque sommet.

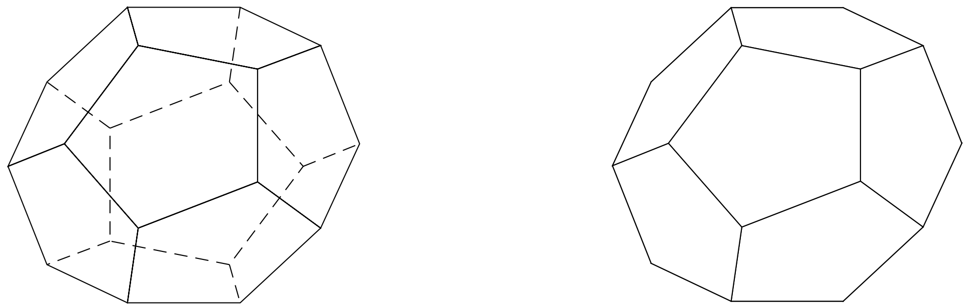

Fig. 47 : Le dodécaèdre régulier

Un peu d'histoire...

Platon

Ces cinq polyèdres réguliers sont aussi appelés *solides platoniciens.* PLATON (427-347 av. J.-C.) est né dans une famille distinguée d'Athènes. Il a eu très tôt des ambitions politiques, mais ce qui est arrivé à Socrate l'a convaincu qu'il n'y avait pas de place en politique pour un homme de conscience. Il a voyagé en Égypte et a rencontré les Pythagoriciens dans le sud de l'Italie. Ceux-ci l'ont fortement influencé. Vers 387, il fonde à Athènes son Académie qui, sous de multiples aspects ressemble à nos universités. PLATON et ses disciples ont étudié la géométrie des solides ; on pense même qu'ils ont démontré de nouveaux théorèmes. Ils savaient, entre autres, qu'il ne pouvait y avoir qu'au plus cinq polyèdres réguliers. Les Pythagoriciens n'ignoraient pas qu'on pouvait former trois de ces solides au moyen de 4, 8, 20 triangles équilatéraux, le cube avec des carrés et le dodécagone avec 12 pentagones mais la preuve qu'il ne pouvait pas y en avoir plus que cinq est probablement due à THÉÉTÈTE (env. 415 - env. 396 av. J.-C.) qui appartenait à l'école platonicienne.

Voici en quels termes PLATON décrit ces solides dans *Le Timée.*

... Quatre de ces triangles équilatéraux, réunis selon trois angles plans, donnent naissance à un seul et même angle solide qui a une valeur venant à la suite[4]de celle de l'angle plan le plus obtus. Et quand sont formés quatre angles de ce type, on a la première espèce de solide qui a la propriété de diviser en parties égales et congruentes la surface de la sphère dans laquelle elle est inscrite. La seconde espèce est composée des mêmes triangles. ... Ceux-ci forment un angle solide unique, fait de quatre angles plans. Quand on construit six angles solides de cette sorte, le corps de la deuxième espèce se trouve achevé. La troisième espèce est formée par le groupement ... de douze angles solides, dont chacun est compris entre cinq triangles plans équilatéraux, et elle a vingt bases qui sont vingt triangles équilatéraux. ... Six de ces figures[5], en s'accolant, donnent naissance à huit angles solides, dont chacun est constitué par l'union harmonique de trois angles plans. Et la figure ainsi obtenue est la figure cubique, laquelle a pour base six surfaces quadrangulaires à côtés égaux. Il restait encore une seule et dernière combinaison ; le Dieu s'en est servi pour le Tout, quand il en a dessiné l'arrangement final.

Cette description (reprise en annexe à la page 205) fait partie de la théorie atomiste platonicienne. Platon associe les quatre premiers polyèdres aux quatre éléments de l'univers dont ils constituent en quelque sorte les « atomes ». Le cube est attribué à la terre, le tétraèdre est le germe du feu, l'octaèdre est l'élément de l'air et l'icosaèdre celui de l'eau. Quant au dodécaèdre, il est le modèle pour l'univers tout entier.

L'une des œuvres, sans doute la plus connue, de Platon est *La république*, dans laquelle il insiste notamment sur l'importance des mathématiques. Voici ce qu'il écrit à ce sujet.

> … Il conviendrait donc de rendre cette science obligatoire et de persuader ceux qui sont destinés à remplir les plus hautes fonctions de l'État d'en entreprendre l'étude et de s'y appliquer…

2.2 Les isométries du tétraèdre régulier

Comment s'y prendre ?

Le professeur fournit à chaque groupe d'élèves un tétraèdre régulier, ou leur demande d'en fabriquer un, par exemple à partir d'un développement photocopié sur carton léger.

Quelles sont toutes les isométries qui conservent le tétraèdre régulier.

Détaillons quelque peu cette consigne très générale.

La structure de groupe

Tout comme pour le carré, que l'on a étudié à la section 1, l'ensemble des isométries qui conservent le tétraèdre régulier forme un groupe pour la composition. En effet, les propriétés qui caractérisent la structure de groupe se dégagent naturellement dès qu'on s'intéresse aux permutations qui conservent globalement une figure.

1. La composée de deux isométries qui conserve un tétraèdre est une isométrie qui conserve ce même tétraèdre.
2. Comme toutes les compositions de permutations, la composition des isométries du tétraèdre est associative.
3. L'identité I est neutre pour la composition.
4. Chaque isométrie possède naturellement une inverse.

Ces propriétés du groupe ne sont pas liées à la figure mais au contexte, celui des isométries qui conservent une figure. Ce qui dépend de la figure, ce sont les éléments du groupe, leur nombre, leur nature…

[4] L'angle plat n'était pas considéré comme un angle. Pour décrire l'« angle solide » de 180°, les Grecs parlaient donc de l'angle ayant une valeur immédiatement supérieure à celle de l'angle plan le plus obtus.

[5] Des carrés, que Platon appelle des figures quadrangulaires équilatérales.

Dénombrement

Lorsqu'on demande de répertorier les isométries du carré, il n'est pas très difficile de les trouver toutes et d'être convaincu qu'il n'y en a pas d'autres. Dès que le problème est plus compliqué, s'il s'agit comme ici de trouver celles qui conservent un tétraèdre régulier, il est très probable que les élèves ne les trouveront pas facilement toutes (bien que le nombre de sommets soit le même que dans le carré). Connaître à l'avance le nombre de ces isométries donnerait des indications précieuses pour les découvrir. En effet l'élève sait dès lors, à chaque étape du travail d'investigation, le nombre de celles qui lui manquent. En confrontant ce nombre avec le nombre de sommets, ou d'arêtes, ou de faces, il peut repérer des coïncidences qui guident sa recherche. De plus, dès qu'il aura identifié autant d'isométries que prévu, il sera certain d'avoir terminé. C'est pourquoi la première question est axée sur le nombre de ces isométries, indépendamment de leur nature.

Combien y a-t-il d'isométries qui conservent le tétraèdre régulier ?

Commençons le comptage comme nous l'avons fait pour le carré et choisissons un sommet du tétraèdre, soit A. Il peut occuper *quatre* positions différentes. Ayant décidé d'une position pour ce sommet A, considérons un de ses voisins, B par exemple. Ce dernier peut occuper n'importe laquelle des *trois* positions restantes, il sera toujours voisin de A. En effet, dans un tétraèdre régulier, chaque sommet est relié à chacun des autres sommets par une arête. Chaque paire de sommets détermine une arête, il n'y a pas de diagonale comme dans le carré. Le point C, voisin de A et B, peut occuper n'importe laquelle des *deux* positions restantes puisque chacune de ces deux positions est le sommet d'un triangle équilatéral construit sur l'arête AB. Le sommet D occupe alors la seule place qui est encore libre.

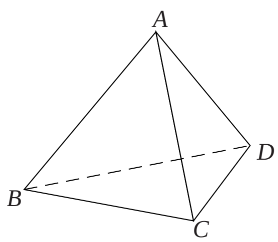

Fig. 48

Il y a donc $4 \times 3 \times 2 = 24$ isométries qui conservent le tétraèdre régulier, c'est-à-dire autant que de permutations des sommets $ABCD$. Rappelons qu'une *permutation* des sommets A, B, C et D est une application qui envoie tout sommet sur un sommet, de telle manière qu'aucun sommet ne soit jamais l'image de deux sommets différents. Il s'agit donc d'une bijection de l'ensemble des sommets sur lui-même.

Déplacements et antidéplacements

Le travail effectué sur les polygones peut amener l'idée que, parmi ces 24 isométries, il y a des déplacements et des antidéplacements. Encore faut-il que les élèves soient conscients qu'il existe des antidéplacements dans l'espace à trois dimensions. Le professeur peut provoquer cette prise de conscience par une question.

Voici deux trièdres isométriques (figure 49). Peut-on, en le déplaçant, faire coïncider celui de gauche avec celui de droite ?

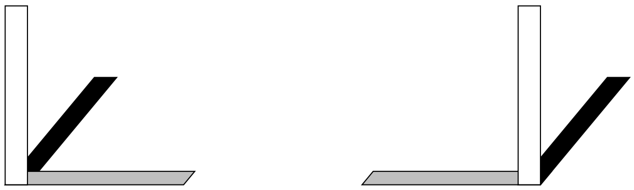

Fig. 49

On le voit, c'est impossible, l'un de ces trièdres est l'image de l'autre dans un miroir. Tout comme dans le plan, il y a dans l'espace des figures isométriques qui n'ont pas la même orientation[6]. Le professeur peut évoquer à ce propos la règle du tire-bouchon.

Rappelons que, si l'image d'une figure par une isométrie est une figure de même orientation, on dit que cette isométrie est un *déplacement* ; sinon on dit qu'il s'agit d'un *antidéplacement*.

Les translations et les rotations sont des déplacements dans le plan comme dans l'espace.

Dans le plan, nous avons vu que les symétries orthogonales, par rapport à un axe, sont des antidéplacements, tandis que la symétrie centrale, qui correspond à la rotation d'un demi-tour, est un déplacement. Qu'en est-il des antidéplacements de l'espace ? Le travail de recherche des isométries des polyèdres va nous les faire découvrir peu à peu.

De par la définition même des déplacements et antidéplacements, on peut dire que

la composée de deux déplacements est un déplacement (la composée de deux isométries qui conservent l'orientation conserve l'orientation) ;

la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement (la composée d'une isométrie qui conserve l'orientation avec une isométrie qui change l'orientation change l'orientation) ;

la composée de deux antidéplacements est un déplacement (la composée de deux isométries qui changent l'orientation conserve l'orientation) ;

Comme l'ensemble des isométries qui conservent globalement une figure forme groupe, il suffit de mettre en évidence un seul antidéplacement pour pouvoir affirmer qu'il y a autant d'antidéplacements que de déplacements. En effet, en composant chacun des déplacements avec ce même antidéplacement, on obtient chaque fois un antidéplacement différent.

Revenons au groupe des isométries qui conservent le tétraèdre régulier. Dans un premier temps, essayons d'identifier 12 déplacements. Ensuite, si nous trouvons un antidéplacement, nous découvrirons les 12 antidéplacements par composition de cet antidéplacement avec les 12 déplacements.

Déplacements

Quelles sont les rotations qui conservent le tétraèdre régulier ?

[6] Pour plus de précision sur les problèmes d'orientation, voir CREM [2001a], sixième partie.

Chaque élève doit manipuler le tétraèdre de manière à l'amener dans diverses positions particulières par rapport à lui-même, de façon à mieux percevoir les différents axes de rotations. Chacun effectue librement ces observations, mais, si nécessaire, le professeur peut suggérer quelques mouvements adéquats pour guider la recherche.

Nous avons coloré différemment chacune des faces du tétraèdre pour mieux visualiser les mouvements et mettre en évidence les problèmes liés à l'orientation. La couleur des faces ne doit évidemment pas être prise en compte quand on parle des isométries qui conservent globalement le tétraèdre (seule l'identité conserve le tétraèdre coloré).

Au départ, le tétraèdre est déposé sur la table. En faisant bouger lentement le sommet du dessus vers l'avant, de manière à amener la hauteur issue de ce sommet dans l'axe du regard, on voit apparaître clairement un axe de rotation d'ordre 3.

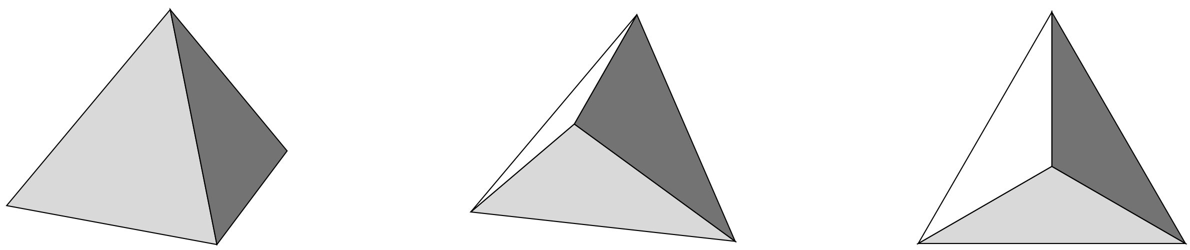

Fig. 50 : Rotations d'ordre 3

Combien y a-t-il d'axes de rotation d'ordre 3 ?

Ces axes, qui joignent un sommet au centre de la face opposée, sont en même nombre que les sommets. Il y en a donc quatre. Pour chaque axe, il faut compter la rotation de $\frac{1}{3}$ de tour et celle de $\frac{2}{3}$ de tour ; la rotation d'un tour complet qui est la transformation identique ne devra être comptée qu'une seule fois. Nous avons donc identifié $4 \times 2 = 8$ rotations de $\frac{1}{3}$ ou de $\frac{2}{3}$ de tour, et en ajoutant l'identité, nous avons 9 déplacements.

Il faut donc en trouver encore 3. Or, dans un tétraèdre, il y a 4 sommets, 4 faces et 6 arêtes. Les axes de rotation que nous cherchons seraient donc plutôt liés aux arêtes, ou aux paires d'arêtes. Faisons tourner le tétraèdre à partir de sa position initiale, de manière à amener une arête vers soi et faisons le basculer légèrement pour positionner dans l'axe du regard la droite joignant le milieu de cette arête avec le milieu de l'arête située à l'arrière et qui lui est gauche. On voit alors apparaître un axe d'ordre 2.

Une autre façon de faire découvrir les rotations d'ordre 2 est de les obtenir en composant deux rotations de $\frac{1}{3}$ de tour d'axes différents.

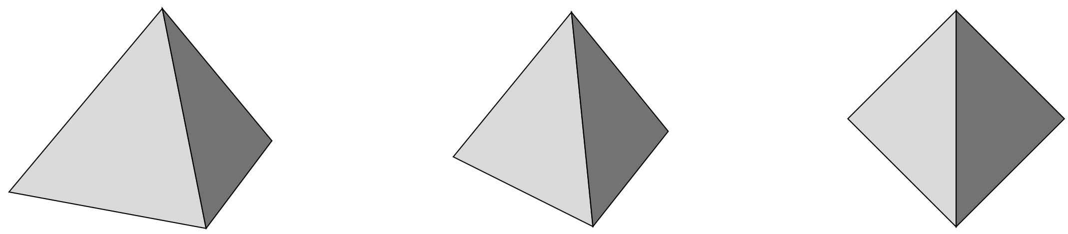

Fig. 51 : Rotations d'ordre 2

Combien y a-t-il d'axes de rotation d'ordre 2 ?

Il y a 3 axes de ce type, autant que de paires d'arêtes gauches. Pour chaque axe, il faut compter la rotation de $\frac{1}{2}$ tour. Les élèves remarqueront peut-être que ce demi-tour a le même effet que la symétrie orthogonale par rapport à l'axe de la rotation. Ceci montre que, dans l'espace, contrairement à ce qui se passe dans le plan, une symétrie orthogonale par rapport à une droite est un déplacement.

Nous avons ainsi identifié 12 déplacements qui conservent le tétraèdre régulier.

Antidéplacements

Quels sont les antidéplacements qui conservent le tétraèdre régulier ?

En plaçant le tétraèdre dans la position de la figure 52, on perçoit clairement que le plan ADM, contenant l'arête AD et le milieu M de l'arête BC, est un plan de symétrie. C'est le plan médiateur de l'arête BC, puisque les points A, D et M sont équidistants des sommets B et C.

Observons l'image du tétraèdre $ABCD$ par la symétrie $\mathcal{S}_{ADM}$ par rapport au plan ADM.

$\mathcal{S}_{ADM}$
$A \longrightarrow A$
$B \longrightarrow C$
$C \longrightarrow B$
$D \longrightarrow D$

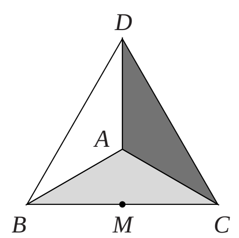

Fig. 52

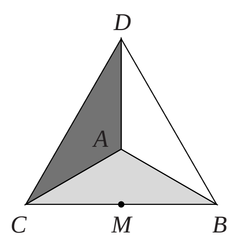

Fig. 53

Le tétraèdre $ABCD$ ne peut être amené à coïncider avec son image $ACBD$ par un déplacement, les deux tétraèdres n'ont pas la même orientation. En effet, si on le regarde avec le sommet A vers soi, on parcourt le triangle BCD du tétraèdre initial dans le sens trigonométrique (figure 52), tandis que dans le tétraèdre image, le triangle BCD est parcouru dans le sens contraire (figure 53). La symétrie $\mathcal{S}_{ADM}$ est bien un antidéplacement. Les 12 antidéplacements du tétraèdre réguliers sont dès lors connus. Il suffit de composer $\mathcal{S}_{ADM}$ avec chacune des rotations précédemment décrites pour les obtenir. Étudions-les de plus près.

Nous venons d'identifier la symétrie $\mathcal{S}_{ADM}$; il y en a d'autres du même type. On peut se demander si les symétries orthogonales par rapport à un plan constituent l'ensemble des antidéplacements qui conservent globalement le tétraèdre régulier.

Combien y a-t-il de plans de symétrie dans le tétraèdre régulier ?

Il y en a autant que d'arêtes, donc 6.

Or, il y a 12 antidéplacements qui conservent le tétraèdre. On peut en déduire que parmi les 12 composées de $\mathcal{S}_{ADM}$ avec chacune des rotations, on en trouve 6 qui sont des symétries planes, et 6 qui sont d'un autre type.

Examinons quelques cas.

Le professeur peut suggérer aux élèves de travailler avec plusieurs tétraèdres dont les faces sont colorées, quelques-uns identiques au tétraèdre de départ (figure 54), et d'autres avec l'autre orientation (figure 55).

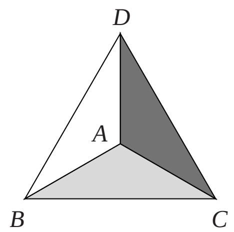

Fig. 54

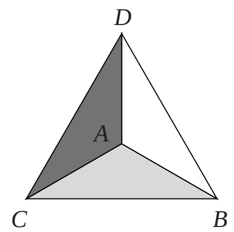

Fig. 55

Grâce à ce matériel, les élèves pourront toujours disposer devant eux le tétraèdre initial, ainsi que ses images successives par les différentes isométries dont nous étudions la composée. Cette manière de procéder permet d'avoir sous les yeux à la fois le tétraèdre initial et le tétraèdre final, et donc de comparer leurs orientations et d'identifier la composée.

Effectuons tout d'abord la composée de la symétrie $\mathcal{S}_{ADM}$ suivie de la rotation $\mathcal{R}_{A,\frac{1}{3}}$, rotation de $\frac{1}{3}$ de tour d'axe vertical AA', où A' est le centre de la face BCD.

$\mathcal{S}_{ADM}$
$A \longrightarrow A$
$B \longrightarrow C$
$C \longrightarrow B$
$D \longrightarrow D$

$\mathcal{R}_{A,\frac{1}{3}}$
$A \longrightarrow A$
$C \longrightarrow D$
$B \longrightarrow C$
$D \longrightarrow B$

$\mathcal{R}_{A,\frac{1}{3}} \circ \mathcal{S}_{ADM}$
$A \longrightarrow A$
$B \longrightarrow D$
$C \longrightarrow C$
$D \longrightarrow B$

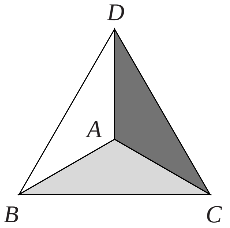

Fig. 56

$$\xrightarrow{\mathcal{R}_{A,\frac{1}{3}} \circ \mathcal{S}_{ADM}}$$

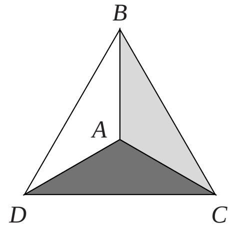

Fig. 57

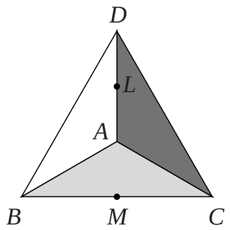

Fig. 58

On constate que la composée $\mathcal{R}_{A,\frac{1}{3}} \circ \mathcal{S}_{ADM}$ laisse fixes les sommets A et C, et qu'elle échange les sommets B et D. Il s'agit donc de la symétrie par rapport au plan contenant l'arête AC et le milieu de BD. On peut retrouver les symétries en composant $\mathcal{S}_{ADM}$ avec l'identité, avec les deux rotations de $\frac{1}{3}$ et de $\frac{2}{3}$ de tour d'axe AA' (à savoir $\mathcal{R}_{A,\frac{1}{3}}$ et $\mathcal{R}_{A,\frac{2}{3}}$), avec les deux rotations d'axe DD' (à savoir $\mathcal{R}_{D,\frac{1}{3}}$ et $\mathcal{R}_{D,\frac{2}{3}}$) et avec la rotation de $\frac{1}{2}$ tour d'axe ML (notée $\mathcal{R}_{ML,\frac{1}{2}}$). En effet, $\mathcal{R}_{ML,\frac{1}{2}}$ et $\mathcal{S}_{ADM}$ échangent les positions B et C et donc leur composée maintient fixe cette arête BC.

$\mathcal{S}_{ADM}$
$A \longrightarrow A$
$B \longrightarrow C$
$C \longrightarrow B$
$D \longrightarrow D$

$\mathcal{R}_{ML,\frac{1}{2}}$
$A \longrightarrow D$
$C \longrightarrow B$
$B \longrightarrow C$
$D \longrightarrow A$

$\mathcal{R}_{ML,\frac{1}{2}} \circ \mathcal{S}_{ADM} = \mathcal{S}_{BCL}$
$A \longrightarrow D$
$B \longrightarrow B$
$C \longrightarrow C$
$D \longrightarrow A$

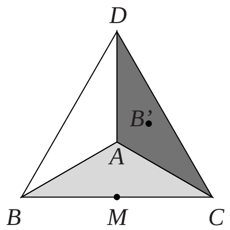

Fig. 59

Composons à présent la même symétrie $\mathcal{S}_{ADM}$ avec une autre rotation de $\frac{1}{3}$ de tour, dont l'axe ne passe par aucun des deux points fixes de la symétrie, c'est-à-dire ni par A, ni par D. Prenons par exemple la rotation $\mathcal{R}_{B,\frac{1}{3}}$ de $\frac{1}{3}$ de tour d'axe BB', où B' est le centre de la face ACD. Il s'agit de la rotation autour de l'axe d'ordre 3 issu du sommet qui est noté B dans la position intiale du tétraèdre, c'est-à-dire le sommet en bas à gauche.

$\mathcal{S}_{ADM}$
$A \longrightarrow A$
$B \longrightarrow C$
$C \longrightarrow B$
$D \longrightarrow D$

$\mathcal{R}_{B,\frac{1}{3}}$
$A \longrightarrow D$
$C \longrightarrow A$
$B \longrightarrow B$
$D \longrightarrow C$

$\mathcal{R}_{B,\frac{1}{3}} \circ \mathcal{S}_{ADM}$
$A \longrightarrow D$
$B \longrightarrow A$
$C \longrightarrow B$
$D \longrightarrow C$

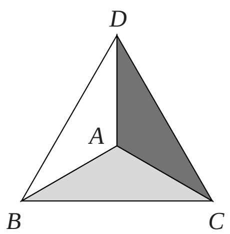

Fig. 60

$$\xrightarrow{\mathcal{R}_{B,\frac{1}{3}} \circ \mathcal{S}_{ADM}}$$

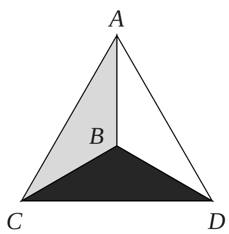

Fig. 61

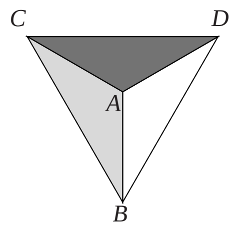

Fig. 62

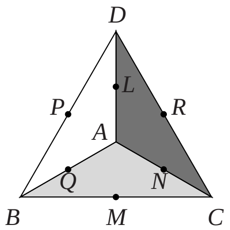

Fig. 63

En faisant ensuite basculer le tétraèdre vers soi, de manière à ramener le sommet A au-dessus, on obtient le tétraèdre de la figure 62, dont l'orientation n'est pas celle du tétraèdre de départ.

La composée $\mathcal{R}_{B,\frac{1}{3}} \circ \mathcal{S}_{ADM}$ est donc un antidéplacement bien qu'il ne s'agisse pas d'une symétrie plane. Un antidéplacement de ce type, sans point fixe, est appelé *antirotation*. On en trouve 4 en composant $\mathcal{S}_{ADM}$ avec les rotations de $\frac{1}{3}$ et de $\frac{2}{3}$ de tour autour des axes passant par B et C, notées $\mathcal{R}_{B,\frac{1}{3}}$, $\mathcal{R}_{B,\frac{2}{3}}$, $\mathcal{R}_{C,\frac{1}{3}}$ et $\mathcal{R}_{C,\frac{2}{3}}$.

On peut en trouver également en composant une symétrie avec une rotation d'ordre 2. Composons par exemple la symétrie $\mathcal{S}_{ADM}$ avec la rotation $\mathcal{R}_{NP,\frac{1}{2}}$ de $\frac{1}{2}$ tour autour de l'axe passant par les milieux des arêtes AC et BD.

$\mathcal{S}_{ADM}$
$A \longrightarrow A$
$B \longrightarrow C$
$C \longrightarrow B$
$D \longrightarrow D$

$\mathcal{R}_{NP,\frac{1}{2}}$
$A \longrightarrow C$
$C \longrightarrow A$
$B \longrightarrow D$
$D \longrightarrow B$

$\mathcal{R}_{NP,\frac{1}{2}} \circ \mathcal{S}_{ADM}$
$A \longrightarrow C$
$B \longrightarrow A$
$C \longrightarrow D$
$D \longrightarrow B$

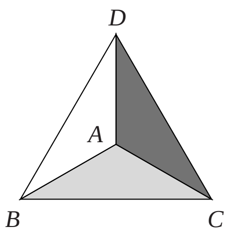

Fig. 64

$$\xrightarrow{\mathcal{R}_{NP,\frac{1}{2}} \circ \mathcal{S}_{ADM}}$$

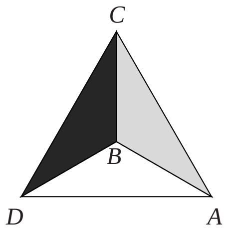

Fig. 65

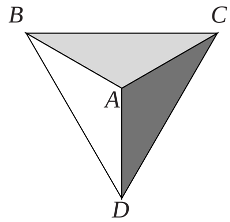

Fig. 66

En faisant ensuite basculer le tétraèdre le long de l'arête CD , de manière à ramener le sommet A au-dessus, on retrouve le tétraèdre de la figure 66, qui n'est pas orienté comme le tétraèdre de départ. La composée $\mathcal{R}_{NP,\frac{1}{2}} \circ \mathcal{S}_{ADM}$ est également une *antirotation*.

Il en va de même pour la composée $\mathcal{R}_{QR,\frac{1}{2}} \circ \mathcal{S}_{ADM}$, tandis que $\mathcal{R}_{ML,\frac{1}{2}} \circ \mathcal{S}_{ADM}$ est la symétrie par rapport au plan BCL.

Les 2 antirotations obtenues par composition avec les rotations de $\frac{1}{2}$ tour portent à 6 le nombre des antirotations et à 12 le nombre des antidéplacements. Nous sommes dès lors convaincus d'avoir identifié toutes les isométries du tétraèdre.

Le groupe du tétraèdre

Les 24 isométries conservant le tétraèdre ont été recensées : 12 rotations et 12 antidéplacements, obtenus en composant une symétrie par rapport à un plan avec les 12 rotations. L'ensemble des 12 rotations qui conservent le tétraèdre est stable pour la composition et forme donc un sous-groupe.

Le groupe des isométries du tétraèdre est identique au groupe des permutations de quatre éléments, par exemple des quatre lettres A, B, C, D. En effet, il y a 24 permutations des lettres A, B, C, D, correspondant chacune à une isométrie du tétraèdre. Le fait que les lettres A, B, C, D désignent les sommets d'un tétraèdre ne modifie en rien la structure de l'ensemble, puisque dans un tétraèdre, deux sommets déterminent toujours une arête et trois sommets déterminent toujours une face.

On peut se demander si tous les groupes de 24 éléments sont identiques. Les élèves en connaissent déjà un autre : le groupe diédrique du dodécagone.

Comparer le groupe du tétraèdre régulier et celui du dodécagone.

On peut voir facilement que ces deux groupes diffèrent. Par exemple, le groupe du dodécagone contient une rotation d'ordre 12, ce qui n'est pas le cas du groupe du tétraèdre régulier.

2.3 Les isométries du cube

Comment s'y prendre ?

Le professeur fournit à chaque groupe d'élèves un cube, ou leur demande d'en fabriquer un à partir d'un développement photocopié sur carton léger.

Déterminer toutes les isométries qui conservent le cube.

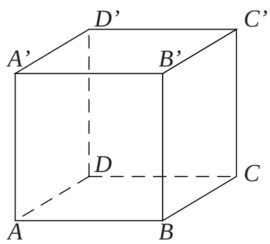

Fig. 67

Dénombrement

Combien y a-t-il d'isométries qui conservent le cube ?

Commençons le raisonnement en choisissant un sommet du cube, soit A. Il peut occuper *huit* positions différentes.

Ayant décidé d'une position pour ce sommet A, considérons un de ses voisins, B par exemple. Ce dernier peut occuper n'importe laquelle des *trois* positions voisines de A, à savoir B, D ou A'. Plaçons-le en B. Le point C, voisin de B, peut occuper l'une des *deux* positions voisines de B qui sont encore libres c'est-à-dire C ou B'. Plaçons-le en C. La position du sommet D est alors déterminée par le fait que $ABCD$ est une face du cube. La sommet A' doit occuper la seule place voisine de A qui est encore libre, et de proche en proche, on constate que la position des sommets restants est déterminée.

Il y a donc $8 \times 3 \times 2 = 48$ isométries qui conservent le cube.

Parmi ces 48 isométries, on peut conjecturer qu'il y a 24 déplacements (24 rotations) et 24 antidéplacements, et que les 24 antidéplacements sont obtenus en composant chacune des rotations avec une symétrie plane, par exemple. Cette conjecture devient vite une certitude car il est aisé d'exhiber une symétrie plane dans le cube.

Déplacements

Quelles sont les rotations qui conservent le cube ?

Les axes d'ordre 4 sont les plus évidents. Il suffit d'amener le cube devant soi, de manière à ne voir qu'une seule face. On constate alors que la droite qui joint le centre de cette face au centre de la face qui lui est opposée est un axe de rotation d'ordre 4.

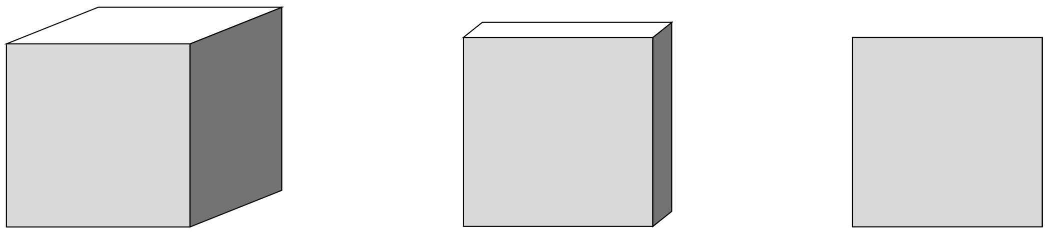

Fig. 68 : Rotations d'ordre 4

Combien y a-t-il d'axes de rotation d'ordre 4 ?

Il y en a autant que de paires de faces opposées, donc 3. Pour chaque axe, il faut compter la rotation de $\frac{1}{4}$ de tour, de $\frac{1}{2}$ tour et celle de $\frac{3}{4}$ de tour ; la rotation d'un tour complet étant la transformation identique ne devra être comptée qu'une seule fois. Nous avons donc identifié $3 \times 3 = 9$ rotations de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{4}$ de tour, et en ajoutant l'identité, nous avons 10 déplacements.

En amenant une arête face à soi, on voit apparaître un axe d'ordre 2, joignant les milieux de deux arêtes opposées.

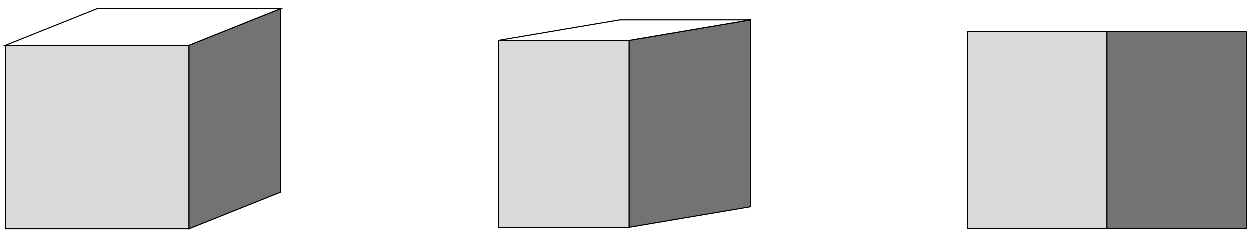

Fig. 69 : Rotations d'ordre 2

Combien y a-t-il d'axes de rotation d'ordre 2 ?

Il y en a autant que de paires d'arêtes opposées, donc 6. Les 6 rotations de $\frac{1}{2}$ tour de ce type porte à 16 le nombre des déplacements déjà répertoriés. Il faut encore en trouver 8.

Ce nombre 8, égal au nombre des sommets, suggère d'amener un sommet face à soi.

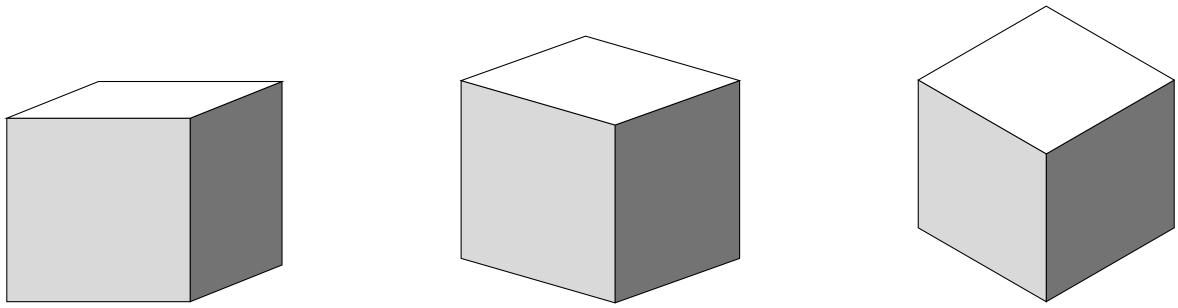

Fig. 70 : Rotations d'ordre 3

C'est ainsi qu'on voit apparaître un axe d'ordre 3.

Une autre façon de découvrir les rotations d'ordre 3 est de les obtenir en composant deux rotations de $\frac{1}{4}$ de tour d'axes différents.

Combien y a-t-il d'axes de rotation d'ordre 3 ?

Il y en a 4, autant que de paires de sommets diamétralement opposés et pour chaque axe, il faut compter la rotation de $\frac{1}{3}$ de tour et celle de $\frac{2}{3}$ de tour, ce qui nous donne $4 \times 2 = 8$ rotations supplémentaires. Nous avons ainsi obtenus les 24 déplacements prévus.

Antidéplacements

Il y a 24 antidéplacements qui conservent le cube. On peut distinguer

- des symétries bilatérales par rapport aux plans « médiateurs » des quatre arêtes d'une direction et parallèles à deux faces opposées, il y en a 3 (autant que de directions de face) ;
- des symétries bilatérales par rapport à des plans « diagonaux » contenant deux arêtes opposées, il y en a 6 (autant que de paires d'arêtes opposées) ;
- la symétrie centrale.

On obtient ainsi 10 symétries, les 14 autres antidéplacements sont des antirotations.

Remarque. – Dans l'espace, la symétrie centrale est un antidéplacement, comme le montre l'image du trièdre de la figure 71.

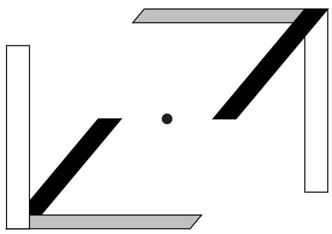

Fig. 71

Prolongements Possibles

Les groupes de déplacements des autres polyèdres réguliers, ou d'un semi-régulier, comme le cuboctaèdre.

L'octaèdre, le dodécaèdre, l'icosaèdre

Leurs groupes d'isométries comportent respectivement 48, 120 et 120 éléments.

Le cube et l'octaèdre ont le même groupe d'isométries. On peut expliquer cela en remarquant que le cube et l'octaèdre sont des polyèdres duaux c'est-à-dire que l'un est obtenu en joignant les centres des faces de l'autre.

Il en va de même pour le dodécaèdre et l'icosaèdre ; quant au tétraèdre, il est son propre dual.

Le cuboctaèdre

Le cuboctaèdre est obtenu à partir du cube en joignant les milieux des arêtes d'une même face, on obtient ainsi en chaque sommet un tétraèdre que l'on enlève du cube initial. Le polyèdre obtenu comporte six faces carrées (ce qui reste des six faces carrées du cube) et huit faces triangulaires (obtenues par troncature).

Le cuboctaèdre de la figure 72 a été dessiné par Leonardo DA VINCI pour illustrer la *Divine proportion* de Luca PACIOLI.

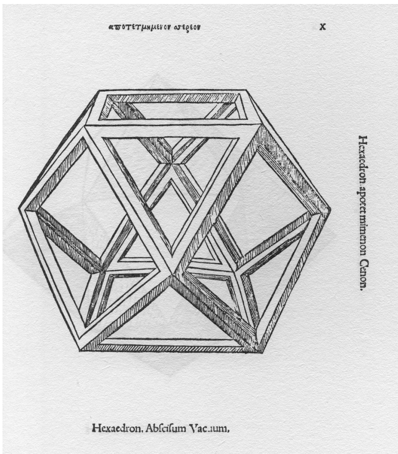

Fig. 72

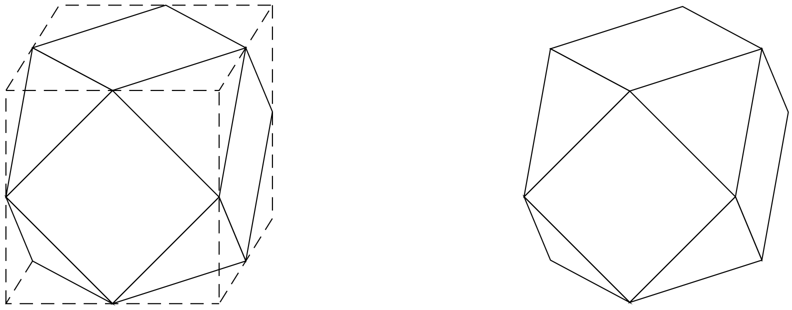

Fig. 73 : Le cuboctaèdre

La figure 73 permet d'imaginer un axe d'ordre 4, les figures 74 et 75 montrent les axes d'ordre 2 et 3.

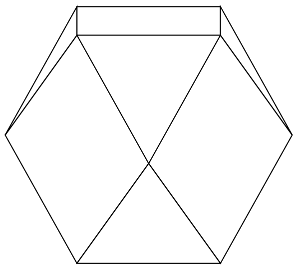

Fig. 74

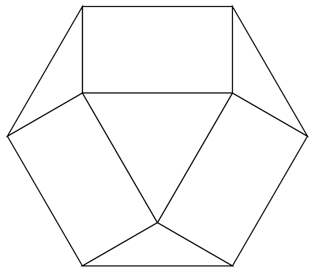

Fig. 75

Les élèves ne seront sans doute pas surpris de constater que le groupe du cuboctaèdre est le même que celui du cube.

Déplacements-antidéplacements

De par la nature même des solides étudiés, tous des polyèdres réguliers ou semi-réguliers, les groupes d'isométries rencontrés jusqu'ici comportent autant de déplacements que d'antidéplacements. Il peut être intéressant de susciter une discussion dans la classe pour savoir s'il en est ainsi pour tous les groupes d'isométries qui conservent un solide de l'espace.

Une manière de répondre à cette question est d'exhiber un solide dont le groupe d'isométries ne comporte que des déplacements. Le cas le plus simple est sans doute la pyramide droite dont la base est un parallélogramme, dont le groupe ne comporte que 2 déplacements.

Quant au groupe de la pyramide dont la base est un triangle isocèle, il est réduit à l'identité et un antidéplacement (une symétrie par rapport à un plan médian).

3 Des équations algébriques aux groupes : un survol historique

Dans les pages qui précèdent, nous avons vu naître la notion de groupe dans un contexte de transformations géométriques. Il est intéressant d'observer que cette notion est née historiquement dans un tout autre contexte, à savoir celui de la résolution par radicaux des équations algébriques. Les pages qui suivent esquissent la théorie correspondante, sans entrer dans les détails. Elles ont pour but principal d'attirer l'attention des lecteurs et peut-être d'éveiller leur intérêt. Pour plus de précisions sur ce que nous n'avons traité ci-après que par allusions, le lecteur pourra se reporter à la bibliographie.

Les problèmes liés aux solutions négatives ou imaginaires des équations sont simplement signalés au passage. Les deux problématiques sont fort liées, comme le montre un extrait de l'*Algèbre* de Wallis [1685] reproduit dans CREM [2002]. Nous n'aborderons rien de ce qui a trait au symbolisme mathématique.

Notre propos est simplement de montrer comment et dans quel contexte est née la théorie des groupes et cela, sans entrer dans des détails trop techniques.

3.1 Le problème

De l'époque mésopotamienne (1800 av. J.-C. environ) à la Renaissance, l'équation du deuxième degré apparaît sous les trois formes modernisées

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= c, \\ ax^2 &= bx + c, \\ ax^2 + c &= bx, \end{aligned}$$

où a, b et c sont tous positifs. Il ne manque évidemment que le cas $ax^2 + bx + c = 0$, a, b, c tous trois positifs, car une équation doit exprimer une égalité entre deux quantités positives. Durant cette période, il n'était pas concevable que quelque chose soit égal à « moins que rien » (voir par exemple l'extrait de WALLIS cité ci-dessus). Ce type d'équations se résout en utilisant la formule toujours d'actualité et qui « devrait » être connue de nos élèves.

Et au-delà du deuxième degré ?

'UMAR AL-ḪAYYĀM (env. 1048 – 1130) donne, dans son *Traité d'algèbre* (voir à ce sujet R. RASHED et B. VAHABZADEH [1999]), une classification complète de toutes les équations jusqu'au degré trois, ainsi qu'une solution générale géométrique des équations du troisième degré, par intersection de courbes coniques. Il avoue cependant

« ... Mais à la démonstration de ces espèces, lorsque l'objet du problème est un nombre absolu, ni moi, ni aucun des hommes de cet art, ne sommes parvenus – peut-être d'autres, qui nous succéderont, sauront-ils le faire – que pour les trois premiers degrés qui sont le nombre, la chose et le carré. »

On voit se développer, dans l'Europe médiévale, des tentatives pour trouver une formule de résolution de l'équation du troisième degré, chez Paolo GERARDI (1328), DARDI DE PISE (fin XIVème siècle), Luca PACIOLI (fin XVème siècle).

C'est vers 1510 que Scipione DAL FERRO (1465 – 1528), qui enseigne à l'Université de Bologne dès 1496, découvre la formule qui permet de résoudre l'équation $x^3 + px = q$ où p et q sont bien sûr positifs. Un peu avant sa mort, il confie cette formule à son élève Antonio Maria FIOR.

À l'époque, en Italie, l'obtention d'une « chaire » à l'université dépendait de concours ou « tournois » en l'occurrence ici, mathématiques. FIOR, en possession de la formule de son maître, imagina donc, afin d'assurer sa « carrière académique », de défier un mathématicien qui avait déjà une certaine renommée – et qui constituait ainsi un rival sérieux. Ce mathématicien s'appelait Nicolò FONTANA, plus connu sous le surnom de TARTAGLIA (env. 1500 – 1557). FIOR lui proposa trente problèmes dont six débouchaient évidemment sur une équation du type $x^3 + px = q$.

Piqué au vif, se consacrant à fond à la recherche des solutions demandées, TARTAGLIA finit par trouver, le 12 février 1535, c'est-à-dire huit jours avant l'échéance fixée, non seulement les réponses aux problèmes posés par FIOR, mais en plus, une extension de la formule de résolution au cas $x^3 = px + q$, ignoré par FIOR. Ceci mit définitivement fin aux prétentions de ce dernier. Mais, malheureusement pour lui, TARTAGLIA allait rencontrer Girolamo CARDANO (1501 – 1576).

Celui-ci est en fait un personnage fort bizarre : médecin, mécanicien, mathématicien, joueur, astrologue – il a même tenté de dresser l'horoscope de Jésus. Fâcheuse idée sous l'Inquisition, qui le fait incarcérer en 1570 ! Cependant sa réputation scientifique lui permet de se retrouver quelques mois plus tard à Rome, avec une pension papale !

CARDAN, ayant appris que TARTAGLIA connaissait les formules de résolution des cas $x^3 + px = q$ et $x^3 = px + q$, le pria de les lui communiquer. Après un premier refus, TARTAGLIA fut finalement contraint, par certaines circonstances, à confier les formules à CARDAN qui promit de les garder secrètes. Il les publiera pourtant en 1545, dans son *Ars Magna* [1545], en citant tout de même le nom de Tartaglia. Cela mit cependant fin aux « bonnes » relations entre les deux compères !

Cardan poursuivit ses recherches, aidé par son élève Ludovico Ferrari (1522 – 1565), ce qui aboutit à une formule pour résoudre l'équation du quatrième degré.

Dans la résolution de l'équation du troisième degré, il apparaissait parfois une racine carrée d'un nombre négatif, ce qui posait évidemment problème à l'époque. Ainsi, par exemple, pour résoudre l'équation $x^3 = 51x + 104$, dont une solution est $x = 8$, la formule dite « de Cardan » conduit à l'équation auxiliaire, en notation moderne, $u^2 - 104u + 17^3 = 0$. On constate que le degré de cette dernière équation n'est plus que deux ! On calcule le discriminant qui vaut $-2\,209$, ce qui conduit aux solutions (toujours en notation moderne) $u_1 = 52 + 47\imath$, $u_2 = 52 - 47\imath$. La formule de « Tartaglia–Cardan » nous enseigne alors qu'une solution de l'équation du troisième degré est $\sqrt[3]{u_1} + \sqrt[3]{u_2} = 4 + \imath + 4 - \imath = 8$. En fermant les yeux au bon moment, tout va pour le mieux ! C'est Raphaël Bombelli (1526 – 1572) qui le premier, donnera une définition des opérations (addition, soustraction, multiplication) sur ces quantités « imaginaires », sous une forme proche de celle que nous connaissons.

Et au-delà du quatrième degré ?

Les succès remportés durant la Renaissance ont incité les mathématiciens à rechercher des formules permettant de résoudre des équations de degré cinq ou plus. En fait, il est toujours possible de résoudre une équation de degré 2, 3 ou 4 en se ramenant, par un changement de variable, à une équation de degré moindre. Une idée assez naturelle est donc d'essayer d'appliquer cette même méthode aux équations de degrés 5, 6, ... Très vite, on s'aperçoit que pour résoudre de telles équations, les calculs intermédiaires semblent toujours faire appel à une équation de degré supérieur à celui de l'équation de départ.

L'italien P. Ruffini (1765 – 1822) démontre, de manière imparfaite, qu'on ne peut résoudre, à l'aide d'une formule, une équation de degré supérieur à quatre.

N. Abel (1802 – 1829), de nationalité norvégienne, pense avoir trouvé une solution générale de l'équation du cinquième degré. Mais il y a une erreur dans son raisonnement, erreur qu'il finit par déceler et qui le conduit à démontrer l'impossibilité de trouver une formule algébrique qui donne la solution générale de l'équation du cinquième degré.

3.2 La « solution » du problème

C'est Évariste Galois (1811 – 1832) qui, partant d'une idée de Lagrange, finit par régler définitivement ce problème en démontrant qu'il n'existe pas de formule algébrique donnant la solution générale d'une équation de degré n où $n > 4$. Ce faisant, il introduit la théorie des groupes (voir Galois [sans date]).

Nous nous étendrons peu sur la vie de Galois, ce mathématicien incompris de beaucoup de ses contemporains. La France, dans laquelle il a vécu, était fort bouleversée politiquement. Galois, au tempérament jeune et fougueux, eut sans doute le tort de se montrer trop contestataire, peut-être un brin « anarchiste »... Il finit par mourir à vingt-et-un ans dans un duel...

Nous préférons donner une idée de la façon dont il montre, grâce à la théorie des groupes, l'impossibilité de résoudre par une formule contenant des radicaux toute équation algébrique polynomiale de degré supérieur à quatre.

C'est dès 1829 que Galois présente à l'Académie Française des Sciences de Paris son *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux*. Il le représentera encore en 1830 et le 17 janvier 1831. Enfin, S. D. Poisson (1781 – 1840) et S. F. Lacroix (1765 – 1843) remettent un rapport en ces termes : « Quoi qu'il en soit, nous avons fait tous nos efforts pour comprendre la démonstration de M. Galois. Les raisonnements ne sont ni assez clairs ni assez développés pour que nous ayons pu juger de leur exactitude... » Heureusement, de nos jours, les idées de Galois sont tout à fait comprises par les mathématiciens.

Groupe

Galois a l'idée d'associer à une équation un ensemble de permutations de ses racines qui rend invariable – non seulement par la forme, mais aussi par la valeur – une certaine fonction de ces mêmes racines.

Les groupes sont nés ! En effet, si on considère deux permutations qui rendent cette fonction invariable, la composée rend également ladite fonction invariable (loi **interne**). La loi est **partout définie**, puisqu'on peut toujours composer deux permutations des racines de l'équation. La composée de permutations est naturellement **associative**. La permutation identique joue le rôle de **neutre**. Toute permutation étant une bijection, elle possède donc une **inverse**.

Ainsi, l'ensemble des permutations que Galois associe aux racines est un **groupe de permutations**, groupe avec le sens que nous donnons aujourd'hui à ce mot. On voit clairement que, dans un contexte de « permutations d'objets conservant quelque chose », la structure de groupe est naturelle. C'est parce que Galois s'est intéressé aux permutations dans ce contexte que le concept de groupe est né. Par la suite, on a retrouvé ces mêmes propriétés pour des ensembles de nombres munis d'une opération et la notion de « groupe abstrait », de « structure de groupe » s'est dégagée...

En fait, la proposition I du premier mémoire de Galois s'énonce comme suit

« Théorème. Soit une équation donnée dont a, b, c, ... sont les m racines. Il y aura toujours un groupe de permutations des lettres a, b, c, ... qui jouira de la propriété suivante :

1° Que toute fonction des racines, invariable [*] par les substitutions[7] de ce groupe, soit rationnellement connue ;

2° Réciproquement, que toute fonction des racines, déterminable rationnellement, soit invariable par les substitutions.

(Dans le cas des équations algébriques, ce groupe n'est autre chose que l'ensemble des $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m$ permutations possibles sur les m lettres, puisque, dans ce cas, les fonctions symétriques sont seules déterminables rationnellement.) »

Le symbole [*] renvoie à la note de bas de page ainsi libellée : « Nous appelons ici invariable non-seulement une fonction dont la forme est invariable par les substitutions des racines entre elles, mais encore celle dont la valeur numérique ne varierait pas par ces substitutions. Par exemple, si $\mathrm{F}x = 0$ est une équation, $\mathrm{F}x$ est une fonction des racines qui ne varie par aucune permutation.

Quand nous disons qu'une fonction est rationnellement connue, nous voulons dire que sa valeur numérique est exprimable en fonction rationnelle des coefficients de l'équation et des quantités adjointes. »

Lorsque Galois parle, comme ci-dessus, de quantités adjointes, il entend une ou toutes les racines d'une équation auxiliaire ou encore la valeur numérique d'une fonction des racines. Il examine alors comment évolue le groupe de permutations des racines, après adjonction de ces quantités, et constate que deux choses peuvent se produire, à savoir que le groupe de l'équation n'est pas changé ou qu'au contraire, il se partage en p groupes (que nous appellerions plutôt sous-groupes)...

[7] Galois utilise le mot *substitution* dans le sens actuel de *permutation*.

Permutations paires

Galois, dans le courant de son mémoire, constate qu'on peut ne considérer que des groupes qui ne contiennent que des **permutations paires**.

En fait, toute permutation peut se décomposer en cycles et tout cycle, en transpositions. Une transposition est une permutation qui « échange exactement deux objets et laisse fixes tous les autres ». La parité du nombre de transpositions ne dépend pas de la décomposition en question. Si ce nombre est pair, la permutation est dite paire, sinon, impaire. Ainsi, par exemple,

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & b \\ b & \longrightarrow & c \\ c & \longrightarrow & d \\ d & \longrightarrow & a \end{array}$$

peut encore s'écrire $(abcd)$ qui est un cycle. Ou encore,

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & b \\ b & \longrightarrow & c \\ c & \longrightarrow & a \\ d & \longrightarrow & d \end{array}$$

peut s'écrire $(abc)(d)$ ou, plus simplement (abc) ; on n'écrit pas les lettres qui ne « bougent » pas. Autre exemple :

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & b \\ b & \longrightarrow & c \\ c & \longrightarrow & a \\ d & \longrightarrow & e \\ e & \longrightarrow & f \\ f & \longrightarrow & g \\ g & \longrightarrow & d \end{array}$$

s'écrit $(abc)(defg)$; elle est ainsi composée de deux cycles.

On voit facilement que ces permutations peuvent alors se décomposer en transpositions, de la manière suivante

$$\begin{array}{lcll} (abcd) & = & (ad)\circ(ac)\circ(ab) & \text{3 transpositions : permutation impaire.} \\ (abc) & = & (ac)\circ(ab) & \text{2 transpositions : permutation paire.} \\ (abc)(defg) & = & (ac)\circ(ab)\circ(dg)\circ(df)\circ(de) & \text{5 transpositions : permutation impaire.} \end{array}$$

L'ensemble $\mathcal{S}ym(m)$ (*symétrique* m), qui comporte les $m!$ permutations de m lettres, comprend $\frac{m!}{2}$ permutations paires et autant de permutations impaires. L'ensemble des $\frac{m!}{2}$ permutations paires forme le sous-groupe (d'indice 2) de $\mathcal{S}ym(m)$, qu'on appelle sous-groupe *alterné* n, noté $\mathcal{A}lt(m)$.

Sous-groupe normal

Galois parle, lui, de *décomposition propre*. Écoutons-le.

« ... En d'autres termes, quand un groupe G en contient un autre H, le groupe G peut se partager en groupes[8], que l'on obtient chacun en opérant sur les permutations de H une même substitution[9] ;

[8] Nous dirions, nous, en langage moderne, en « éléments d'une partition ». Il s'agit évidemment de ce que nous appelons classes latérales gauches et droites, qui ne sont pas des groupes au sens moderne du terme.

[9] Voir une note précédente, en ce qui concerne le vocable « substitution ». Quant à la notation, nous écririons, de nos jours, $G = H + Hs + Hs' + \ldots$

en sorte que

$$G = H + HS + HS' + \cdots$$

Et aussi il peut se décomposer en groupes qui ont tous les mêmes substitutions, en sorte que

$$G = H + TH + T'H + \cdots$$

Ces deux groupes de décompositions ne coïncident pas ordinairement. Quand ils coïncident, la décomposition est dite *propre*. »

Nous disons également, de nos jours, que le sous-groupe H est alors un **sous-groupe normal**.

Groupe simple

Tout groupe qui n'a pas de sous-groupe normal, autre que l'identité et lui-même, est dit **simple**. Ces groupes ont acquis une grande importance en théorie des groupes. En effet, en 1854, Cayley, annonce, dans le *Philosophical Magazine*, vol. 7, son intention de classer tous les groupes abstraits d'ordres donnés. Au fur et à mesure que les travaux sur le sujet avancent, on se rend de plus en plus compte que le problème est pratiquement sans espoir. Certains mathématiciens, qui traitaient la question, ont alors l'idée de l'attaquer d'une autre manière en remarquant que les groupes simples sont fondamentaux pour aborder le problème de Cayley (M. Ballieu [1972]). On peut les voir comme le « matériau de base » qui va servir à construire n'importe quel groupe fini. Commence alors une tentative de classification de tous les groupes simples finis, tentative qui aboutit dans le courant des années dix-neuf cent quatre-vingt à ce qu'on nomme parfois le « *enormous theorem* », dont la démonstration est l'œuvre de nombreux mathématiciens et comporte plus de quinze mille pages. Voici son énoncé tel qu'on le trouve notamment dans R. Solomon [1995].

Soit G un groupe simple fini, alors G est l'un des groupes suivants :

1. un groupe cyclique d'ordre premier Z_p ;
2. un groupe alterné $A_n,\ n \geq 5$;
3. un groupe linéaire classique $\mathrm{PSL}(n, q)$, $\mathrm{PSU}(n, q)$, $\mathrm{PSp}(2n, q)$ ou $\mathrm{P}\Omega^{\varepsilon}(n, q)$;
4. un groupe *twisted* de type Lie (il y en a dix « familles ») ;
5. un groupe simple sporadique (Mathieu, Janko, Conway, ...)

Mais lisons encore un peu le texte de Galois,

« Il est aisé de voir que, quand le groupe d'une équation n'est susceptible d'aucune décomposition propre[10], on aura beau transformer cette équation, les groupes des équations transformées auront toujours le même nombre de permutations.

Au contraire, quand le groupe d'une équation est susceptible d'une décomposition propre[11], en sorte qu'il se partage en M groupes de N permutations, on pourra résoudre l'équation donnée au moyen de deux équations : l'une aura un groupe de M permutations, l'autre un de N permutations. »

C'est entre autres parce qu'à partir de $n = 5$, $\mathcal{A}lt(n)$ est un groupe simple, que la théorie de Galois règle définitivement, par la négative, le problème de la solution des équations algébriques par radicaux.

[10] Ce qui se traduit, en langage moderne, par « est un groupe simple ».
[11] C'est-à-dire « n'est pas un groupe simple ».