Quatrième partie

Aspects historiques et épistémologiques des vecteurs

15

De la géométrie analytique aux vecteurs : essai d'analyse épistémologique

> Si donc il n'y avait pas de corps solide dans la nature, il n'y aurait pas de géométrie.
>
> H. Poincaré

> Faire progresser la pensée ne signifie pas nécessairement refuser le passé : c'est parfois le revisiter pour comprendre non seulement ce qui a été effectivement dit, mais aussi ce qui aurait pu être dit, ou du moins ce que l'on peut dire aujourd'hui (et peut-être aujourd'hui seulement) à partir de ce qui a été dit auparavant.
>
> U. Eco[1]

1 Pourquoi les vecteurs à la base de la géométrie ?

La géométrie analytique, inventée dans les années 1630 par Descartes et Fermat, a pour objectif de soumettre les problèmes géométriques au calcul, de les ramener à l'algèbre. Elle y arrrive, mais avec deux inconvénients. Tout d'abord le repère choisi pour passer d'une figure aux nombres (c.-à-d. aux coordonnées) est arbitraire. Bien entendu, dans chaque problème, on le situe au mieux pour simplifier les calculs, ce qui se fait en observant les symétries de la figure. Néanmoins, il est toujours quelque chose d'extérieur, ajouté à la figure. On exprime aussi cela en disant que le repère est *un élément extrinsèque* à la situation géométrique à l'étude.

Le second inconvénient de la géométrie analytique, c'est qu'une fois le problème mis en coordonnées, on cherche la solution par calcul et que bien souvent, en appliquant les règles de l'algèbre, on oublie la situation géométrique, on s'en écarte en imagination. Certes on n'applique pas n'importe quelles règles de calcul dans n'importe quel ordre. On cherche bien à aller vers le but proposé. Mais en cours de route, il est souvent impossible pratiquement de saisir le sens géométrique des expressions algébriques par lesquelles on passe. Le retour à la figure, évidemment nécessaire, se fait à la fin.

En 1679 déjà, Leibniz cherchait à établir un calcul opérant directement sur les figures, et qui par conséquent éviterait les deux inconvénients en question. Mais l'entreprise devait s'avérer longue et difficile, puisque elle n'a abouti que vers la fin du XIXe siècle, avec l'apparition des vecteurs tels que nous les connaissons aujourd'hui en géométrie élémentaire et en physique. Curieusement d'ailleurs, les vecteurs ne sont pas nés du seul souci de créer un calcul efficace en géométrie. En

[1] Cité par J. Bideaud.

effet, leur élaboration historique a été mêlée à des questions de nombres complexes, de rotations dans l'espace, d'aires et de volumes, de mécanique, d'électromagnétisme, ... Dans ce chapitre, nous ne nous occuperons que des vecteurs géométriques.

Les vecteurs constituent, en géométrie, un moyen de calcul différent du calcul en coordonnées. Ils évitent le plus souvent les deux inconvénients de ce dernier. En effet, pour traiter un problème de géométrie vectoriellement, on commence par choisir les vecteurs de départ sur la figure à l'étude (éventuellement en orientant certains segments). En ce sens les vecteurs sont *intrinsèques*, indépendants de tout cadre arbitraire tel qu'un repère.

Ensuite on calcule, mais comme les symboles que l'on combine ont un sens visible sur la figure et qu'en outre les formules sont compactes (une équation au lieu de deux ou trois, selon qu'on est dans le plan ou l'espace), on arrive souvent à reconnaître sur la figure les intermédiaires du calcul.

Bien entendu, dès que l'on veut soumettre la situation géométrique en cause au calcul numérique – ce qui n'est pas toujours nécessaire –, on doit revenir des vecteurs aux coordonnées et donc choisir un repère. Mais on peut ne le faire que tout à la fin.

Reprenons le fil de l'histoire. Une fois les vecteurs mis au point comme instruments de calcul commodes, ils ont dépassé ce rôle assez modeste et ont contribué à transformer profondément les mathématiques. Vers la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle et au début du XX$^{\text{e}}$, ils ont engendré les espaces vectoriels et l'algèbre linéaire. Celle-ci s'est développée surtout pour les besoins des équations différentielles et de l'analyse fonctionnelle, et non pour ceux de la géométrie élémentaire. Mais par un retour des choses, les espaces vectoriels ont fini par se retrouver aux fondements de la géométrie élémentaire. On peut aujourd'hui commencer l'exposé de la géométrie élémentaire en disant : « Soit un espace vectoriel sur le corps des réels. » Dans cette perspective, les notions de départ ne sont plus les points, les droites et les plans, mais les vecteurs et les nombres réels. Les droites et les plans sont alors des notions construites.

Ainsi, il a fallu quasiment trois siècles et de multiples recherches sur des questions dont beaucoup n'étaient pas géométriques, pour aboutir à ce renversement majeur : la possibilité de fonder la géométrie sur une toute autre base que les notions traditionnelles de point, droite et plan. D'où la question : peut-on expliquer simplement pourquoi les vecteurs ont fini par s'imposer avec une telle force ?

La réponse est nécessairement dans l'histoire. Mais comme nous l'avons vu, celle-ci est longue et touffue et nous n'essaierons pas ici de la suivre en détail. D'où la question : *y a-t-il moyen, en demeurant sur le terrain de la géométrie élémentaire, de montrer en peu de pages les arguments forts qui poussent à créer les vecteurs et à les mettre à la base de la géométrie ?*

Notre objectif dans ce chapitre est d'organiser un passage, le plus direct et le mieux motivé possible, entre la géométrie analytique et les vecteurs. Ce sera de l'histoire refaite et simplifiée, schématisée, une sorte d'accouchement provoqué, mais que l'on espère éclairant. Ce ne sera en tout cas pas un exposé purement déductif, mais bien l'élaboration argumentée d'une structure nouvelle à partir de la critique d'une structure familière. Nous supposons donc le lecteur familier de la géométrie analytique en axes orthonormés et de l'algèbre des premier et deuxième degrés telle qu'on l'enseigne dans les lycées. Et nous lui demandons de faire comme s'il ignorait les vecteurs.

Terminons cette introduction par deux indications pratiques. Tout notre exposé se situera dans le plan, mais uniquement par raison de simplicité : tout ce que nous ferons s'étend de manière naturelle à l'espace, moyennant des calculs un peu plus longs. Cet exposé devrait être accessible aux élèves motivés des sections scientifiques de la fin du secondaire et pourrait leur faciliter la transition vers des études supérieures. Il lève un petit coin du voile vers les géométries emboîtées du Programme d'Erlangen de F. Klein. À ce titre, il peut servir d'introduction à une lecture de ce programme.

Nos deux sources principales sont le volume consacré à la géométrie par F. Klein [1908] dans ses *Mathématiques élémentaires d'un point de vue avancé,* et le chapitre intitulé « Géométries abstraites » (rédigé par E. Lehman) dans l'ouvrage de B. Sénéchal [1979] intitulé *Groupes et géométries.* Nous renvoyons à celui-ci le lecteur qui souhaiterait situer notre exposé dans un contexte plus abstrait, où les groupes précèdent les vecteurs.

2 De la géométrie à l'algèbre et vice-versa

Dans un premier temps, demandons-nous quel est le principe même de la géométrie analytique. Autrement dit, comment passe-t-on sans ambiguïté des figures aux relations algébriques qui les représentent et inversement ? Voyons d'abord cela sur quelques exemples.

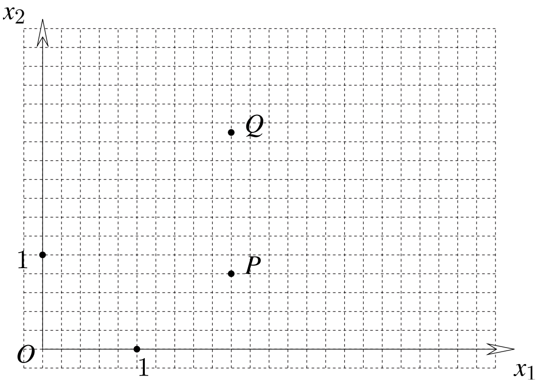


Fig. 1

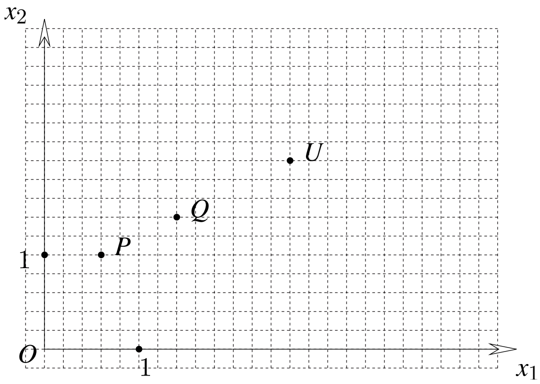


Fig. 2

Soit tout d'abord un repère orthonormé Ox_1x_2, comme celui de la figure 1. Et soient un point P de coordonnées (p_1, p_2) et un point Q de coordonnées (q_1, q_2). Imposons à ces deux points la propriété que la droite PQ soit parallèle à l'axe des x_2. Cette condition a pour expression algébrique

$$p_1 = q_1. \tag{1}$$

La figure formée des deux points P et Q satisfait à (1). Mais il y a une infinité de figures analogues qui satisfont à cette relation. En fait, toute figure formée de deux points situés sur une parallèle à l'axe des x_2 satisfait à (1), et toute figure formée de deux points satisfaisant à (1) est sur une parallèle à l'axe des x_2. Il revient exactement au même de se donner la relation (1) et de se donner l'ensemble de toutes les figures formées de deux points situés sur une parallèle à l'axe des x_2. Si on dessinait toutes ces figures, le plan serait noir de points et même chaque point appartiendrait à une infinité de figures. Le principe de la géométrie analytique est là : au lieu d'étudier une infinité de figures en regardant l'une d'elles (considérée comme typique), on étudie la relation algébrique qui représente fidèlement cet ensemble infini.

Ainsi d'un côté il y a une infinité de figures, et de l'autre seulement une égalité entre des symboles algébriques. Mais cette simplicité de l'algèbre ne doit pas faire illusion : en fait la relation (1) est équivalente à la donnée de l'ensemble infini de tous les quadruplets

$$(p_1, p_2, q_1, q_2)$$

satisfaisant à (1). La relation algébrique, dans sa concision, ne nous délivre pas entièrement de l'infinité de situations qu'elle recouvre.

Considérons un autre exemple où la correspondance entre figures et expression algébrique s'avérera un peu plus difficile à établir. Soit, comme sur la figure 2, trois points P, Q et U alignés, de coordonnées respectives (p_1, p_2), (q_1, q_2) et (u_1, u_2). Pour exprimer que ces points sont alignés, appliquons le théorème de Thalès, qui nous donne

$$\frac{q_1 - p_1}{q_2 - p_2} = \frac{u_1 - p_1}{u_2 - p_2}. \tag{2}$$

Mais une telle relation ne représente pas toutes les figures constituées de trois points alignés. Elle ne s'applique en effet pas aux cas où P et Q seraient confondus, aux cas où P et U seraient confondus, aux cas où les trois points seraient confondus, et non plus aux cas où les points se trouveraient sur une parallèle à l'axe des abscisses.

Toutefois, il n'est pas difficile de remplacer la relation (2) par une autre qui prenne en compte tous ces cas particuliers. C'est la relation

$$(q_1 - p_1)(u_2 - p_2) - (q_2 - p_2)(u_1 - p_1) = 0. \tag{3}$$

Tout triplet de points alignés a des coordonnées qui satisfont à (3), et si les coordonnées de trois points satisfont à (3), les points correspondants sont alignés. Nous avons ainsi une bonne correspondance entre la propriété géométrique d'alignement et son expression algébrique. Nous sommes donc sur une base saine pour commencer à étudier algébriquement la propriété géométrique d'alignement.

Les figures constituées de trois points alignés sont en nombre infini, et si on voulait les dessiner toutes, le plan serait ici aussi couvert de points. La relation (3) correspond à l'ensemble infini des sextuplets

$$(p_1, p_2, q_1, q_2, u_1, u_2)$$

de nombres réels qui satisfont à (3).

Voici un autre exemple de relation entre trois points :

$$(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 = (u_1 - q_1)^2 + (u_2 - q_2)^2 = (p_1 - u_1)^2 + (p_2 - u_2)^2. \tag{4}$$

Cette relation représente toutes les figures constituées par trois points occupant les sommets d'un triangle équilatéral.

Il serait peu utile de multiplier les exemples. Nous voyons en effet maintenant comment transposer en algèbre les situations que nous rencontrons en géométrie, et comment revenir de l'algèbre à la géométrie. En géométrie, on n'étudie pas les figures mais, dans chaque cas, l'ensemble des figures qui ont telles ou telles propriétés (il revient au même de dire que l'on étudie ces propriétés). Nous appellerons de tels ensembles de figures des *configurations*. Se donner une configuration, c'est comme de se donner un ensemble de propriétés, ou aussi de se donner une relation algébrique[2], et une relation algébrique c'est aussi un ensemble de n-uples de nombres réels, chaque n-uple correspondant à une figure.

La différence entre les deux points de vue, c'est qu'on ne sait pas calculer avec des figures, tandis qu'on sait le faire avec des relations algébriques. Celles-ci ont hérité des règles de calcul sur les nombres réels.

Puisque notre intention est de faire de la géométrie par calcul, installons-nous donc, au moins provisoirement, dans l'univers des relations algébriques. Mais alors nous devons tout de suite nous souvenir que chacune de ces relations s'établit relativement à un repère donné. Et pourtant nous aimerions faire une géométrie générale, indépendante du choix d'un repère. Notre expérience de la

[2] Une relation peut être donnée par plusieurs équations, des inéquations, ...

géométrie analytique nous apprend qu'une relation algébrique peut complètement changer de visage dans un changement de repère. Par exemple une parabole qui s'écrit $y = x^2$ dans un repère donné s'écrira de façon plus compliquée dans un autre. Si nous découvrons des propriétés en raisonnant sur l'équation $y = x^2$, comment seront nous sûrs que ces propriétés seront celles de la configuration géométrique elle-même ?

Avant d'étudier cette question, rappelons comment on fait pour changer de repère. C'est l'objet de la section suivante.

3 Changer de repère

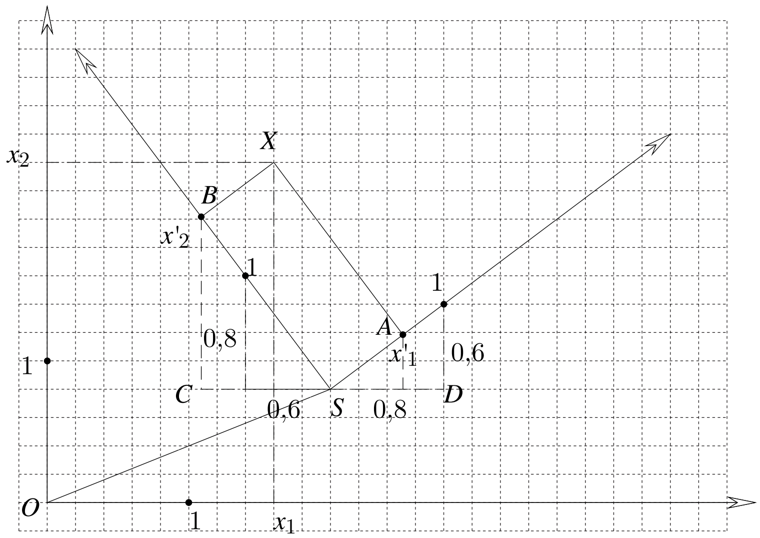


Fig. 3

La figure 3 montre deux repères orthonormés, l'un Ox_1x_2 et l'autre $Sx'_1x'_2$, muni des mêmes unités que le premier. Soit X un point quelconque de coordonnées (x_1, x_2) dans le premier repère et (x'_1, x'_2) dans le second.

Considérons d'abord la ligne brisée $OSAX$ que la figure suffit à définir, les points A et S ayant respectivement pour coordonnées dans le premier repère (a_1, a_2) et (s_1, s_2). Projetée sur l'axe des abscisses du premier repère, cette ligne brisée nous donne

$$x_1 = s_1 + (a_1 - s_1) + (x_1 - a_1). \tag{5}$$

Dans le cas de la figure 3, on a :

$$s_1 = 2. \tag{6}$$

D'autre part, en exprimant que deux triangles appropriés sont semblables, nous obtenons

$$\frac{x'_1}{1} = \frac{a_1 - s_1}{0,8}. \tag{7}$$

Et de même

$$\frac{x'_2}{1} = \frac{s_1 - c_1}{0,6} = \frac{a_1 - x_1}{0,6}. \tag{8}$$

En transformant le second membre de (5) grâce à (6), (7) et (8), nous obtenons que

$$x_1 = 2 + 0,8x'_1 - 0,6x'_2. \tag{9}$$

En partant ensuite de la ligne brisée $OSBX$, nous obtenons par des considérations analogues que

$$x_2 = 0,8 + 0,6x'_1 + 0,8x'_2. \tag{10}$$

Les formules (9) et (10) nous permettent de passer d'un repère à l'autre. D'autre part, le retour du second repère au premier est possible, puisque les équations (9) et (10) sont solubles pour x'_1 et x'_2. En effet, le déterminant formé par les coefficients de x'_1 et x'_2 est différent de 0. Il vaut $(0,8)^2 + (0,6)^2 = 1$.

Dans le cas général, et en nous aidant de la figure 4, nous voyons que les formules sont de la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= r_{11}x'_1 + r_{12}x'_2 + s_1, \\ x_2 &= r_{21}x'_1 + r_{22}x'_2 + s_2. \end{aligned} \tag{11}$$

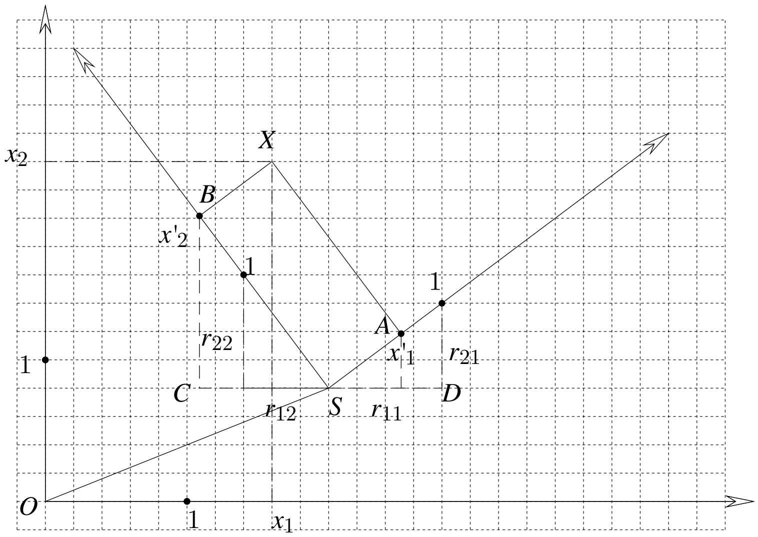


Fig. 4

Dans celles-ci (r_{11}, r_{21}) sont les projections dans le premier repère du segment orienté unitaire porté par Sx'_1 et (r_{12}, r_{22}) sont les projections dans ce repère du segment orienté unitaire porté par Sx'_2. Dans ces formules nous avons, selon l'usage, placé en dernier lieu les termes indépendants des coordonnées. Ici aussi, le déterminant des coefficients de x'_1 et x'_2 est différent de 0. En d'autres termes, nous avons

$$r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} \neq 0. \tag{12}$$

En effet, en examinant les signes de r_{11}, r_{12}, r_{21} et r_{22} pour toutes les directions possibles du repère, nous réalisons que les deux produits $r_{11}r_{22}$ et $r_{12}r_{21}$ ne sont jamais tous les deux nuls, et s'ils sont tous deux non nuls, ils sont de signes opposés.

Bien que nous ne nous en servirons pas dans l'immédiat, exprimons algébriquement l'orthogonalité des axes. La figure 4 fait voir deux triangles rectangles isométriques qui nous permettent d'écrire que

$$\frac{r_{11}}{r_{21}} = -\frac{r_{22}}{r_{12}},$$

ou encore que

$$r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} = 0. \tag{13}$$

On vérifie que, sous cette dernière forme, cette équation exprime encore l'orthogonalité des axes $O'x'_1$ et $O'x'_2$, même si ceux-ci sont parallèles aux axes du premier repère.

Exprimons enfin, quitte à ne nous en servir que plus tard, le fait que les unités sont les mêmes sur les nouveaux axes que sur les anciens. Nous obtenons

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 = 1 \tag{14}$$

$$\text{et} \quad r_{12}^2 + r_{22}^2 = 1. \tag{15}$$

4 Des relations intrinsèques

Maintenant que nous disposons de la formule de changement de repère, revenons à notre propos qui était de voir comment les relations algébriques se comportent dans un tel changement. Et donc, pendant un bref moment, concentrons-nous davantage sur la forme algébrique des relations que sur leur signification géométrique.

Commençons par des exemples très simples. Et d'abord la relation (1), à savoir

$$p_1 = q_1. \tag{1}$$

En lui appliquant la formule (11) de changement de repère, nous obtenons

$$r_{11}p'_1 + r_{12}p'_2 = r_{11}q'_1 + r_{12}q'_2. \tag{16}$$

Cette relation est d'une toute autre forme que (1). Nous n'en tirerons sans doute pas grand chose.

Essayons

$$p_1 = p_2. \tag{17}$$

Nous obtenons de la même façon

$$r_{11}p'_1 + r_{12}p'_2 + s_1 = r_{21}p'_1 + r_{22}p'_2 + s_2,$$

ce qui s'écrit encore

$$(r_{11} - r_{21})p'_1 + (r_{12} - r_{22})p'_2 = s_2 - s_1. \tag{18}$$

Cette relation ne ressemble pas à (17) et ne nous inspire pas beaucoup. Essayons la relation (3), à savoir

$$(q_1 - p_1)(u_2 - p_2) - (q_2 - p_2)(u_1 - p_1) = 0. \tag{3}$$

Pour y remplacer les anciennes coordonnées par les nouvelles, commençons par calculer

$$\begin{aligned} q_1 - p_1 &= (r_{11}q'_1 + r_{12}q'_2 + s_1) - (r_{11}p'_1 + r_{12}p'_2 + s_1) \\ &= r_{11}(q'_1 - p'_1) + r_{12}(q'_2 - p'_2), \end{aligned}$$

ainsi que les expressions analogues pour $u_2 - p_2$, $q_2 - p_2$ et $u_1 - p_1$. Substituons ensuite ces expressions dans (3), ce qui donne

$$\begin{aligned} &[r_{11}(q'_1 - p'_1) + r_{12}(q'_2 - p'_2)][r_{21}(u'_1 - p'_1) + r_{22}(u'_2 - p'_2)] - \\ &[r_{21}(q'_1 - p'_1) + r_{22}(q'_2 - p'_2)][r_{11}(u'_1 - p'_1) + r_{12}(u'_2 - p'_2)] = 0. \end{aligned}$$

Cette équation devient après calcul

$$(r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21})[(q'_1 - p'_1)(u'_2 - p'_2) - (q'_2 - p'_2)(u'_1 - p'_1)] = 0,$$

et ensuite, grâce à (12),

$$(q'_1 - p'_1)(u'_2 - p'_2) - (q'_2 - p'_2)(u'_1 - p'_1) = 0. \tag{19}$$

La relation (19) a la même forme que (3). Elle s'exprime de la même façon dans tous les repères. D'une relation qui possède cette propriété, on dit qu'elle est *intrinsèque.*

Cette définition est de nature algébrique. Examinons-la maintenant d'un point de vue géométrique, en considérant à nouveau l'exemple de la relation (3).

Plaçons-nous dans le premier repère et pensons à tous les triplets satisfaisant à cette relation, c'est-à-dire à tous les triplets de points alignés. Bien sûr ils remplissent tout le plan, et même chaque point du plan appartient à une infinité de triplets. N'empêche, par un effort d'imagination, nous voyons que le plan est rempli de triplets de manière homogène et isotrope[3]. Aucune région du plan n'est privilégiée. On comprend alors pourquoi, si on recommence à construire les triplets à partir du second repère, on retombe sur les mêmes. C'est là ce qui caractérise une relation intrinsèque.

Éclairons encore davantage la définition en regardant comme contre-exemple la relation (1). Géométriquement, elle exprime que les couples de points P et Q sont sur une parallèle à l'axe des x_2. Ces couples en nombre infini noircissent aussi tout le plan, dans lequel ils sont répartis de manière homogène. Ceci explique qu'une translation du repère n'affecterait pas cette relation. On ne retrouve d'ailleurs ni s_1 ni s_2 dans (16). Mais les couples de points ne sont pas disposés dans le plan de manière isotrope. Ils appartiennent tous à la même direction. Ceci explique qu'une rotation des axes affecte la relation (1). Et de fait, dans (16) on retrouve les coefficients r_{11}, r_{12}, r_{21} et r_{22}.

La relation (17) est instructive aussi. Quand on la transforme, on trouve dans la relation transformée aussi bien r_{11}, r_{12}, r_{21} et r_{22} que s_1 et s_2. C'est que les points qui satisfont à (17) sont sur une bissectrice du premier repère, et que, dans la plupart des changements de repère que l'on peut envisager, cette droite n'est plus bissectrice du repère à l'arrivée.

Exercice. Imaginer une nouvelle relation qui ne change pas dans une rotation des axes autour de l'origine. Interpréter géométriquement le résultat. Réponse possible : $p_1q_2 - p_2q_1 = 0$.

D'un certain point de vue, on peut considérer un repère comme un poste d'observation. Les relations intrinsèques sont celles qui définissent des configurations (des ensembles de n-uples de points) que l'on voit de la même façon – que l'on ne peut pas discerner –, quel que soit le poste d'observation que l'on choisisse. Ces configurations sont proprement géométriques, au sens où la géométrie est la même dans tous les patelins du monde. Les relations non intrinsèques par contre définissent des configurations qui sont liées à un lieu donné, que l'on voit différemment lorsqu'on change de poste d'observation. On pourrait dire que ces configurations relèvent plutôt de la géographie que de la géométrie. Le mot est de F. Klein, mais il s'agit bien entendu d'une géographie quelque peu théorique, où les accidents de terrain ne sont ni des montagnes, ni des villes.

Pour en finir avec l'idée des relations intrinsèques, notons que le recours aux relations en géométrie nous a amenés à changer profondément notre perception des figures. En géométrie synthétique, on raisonne sur une figure typique, c'est-à-dire sur une figure qui représente toutes les figures répondant aux hypothèses que l'on s'est fixées. Mais souvent ces autres figures, dont l'ensemble constitue ce que nous avons appelé une configuration, se trouvent quelque peu reléguées dans notre subconscient.

[3] *Isotrope* veut dire qu'aucune direction du plan n'est privilégiée.

Au contraire, en regardant une configuration comme définie par une relation algébrique, nous sommes poussés à donner aux variables toutes les valeurs possibles, ne serait-ce qu'en imagination (c'est un infini potentiel) et à imaginer de ce fait toutes les figures possibles, quelle que soit leur situation dans le plan. Notre analyse des changements de coordonnées et des relations intrinsèques a amené dans le champ de la géométrie une chose qui ne s'y trouvait auparavant que de manière plus implicite : par delà les propriétés données, l'ensemble de toutes les figures possédant ces propriétés. On a souvent observé que la notion d'espace n'apparaissait pas dans EUCLIDE. Au point où nous en sommes, l'espace (en l'occurrence le plan) est bien là et il est bien occupé.

5 Naissance des vecteurs

Nous savons maintenant qu'il est équivalent de se donner une relation algébrique intrinsèque ou une configuration possédant les propriétés géométriques correspondantes. Une différence importante demeure pourtant : avec la relation algébrique, on peut calculer, avec la figure non. Mais notre propos est toujours d'introduire un calcul sur les figures, pas sur les coordonnées.

Nous ne pouvons pas espérer calculer avec toutes espèces de figures. Pour trouver celles qui nous permettront de fonder un calcul commode et de portée générale, cherchons des relations algébriques simples et intrinsèques.

5.1 Deux segments orientés équipollents

Prenons par exemple quatre points P, Q, U et V, tels que le segment orienté $[PQ]$ soit parallèle[4] au segment orienté $[UV]$ et de même sens et de même longueur que lui (figure 5). Cette propriété est exprimée par les deux équations

$$\begin{aligned} q_1 - p_1 &= v_1 - u_1, \\ q_2 - p_2 &= v_2 - u_2. \end{aligned} \tag{20}$$

Celles-ci ne contiennent que des différences de coordonnées, ce qui nous laisse espérer que dans le changement de repère, au moins s_1 et s_2 disparaîtront.

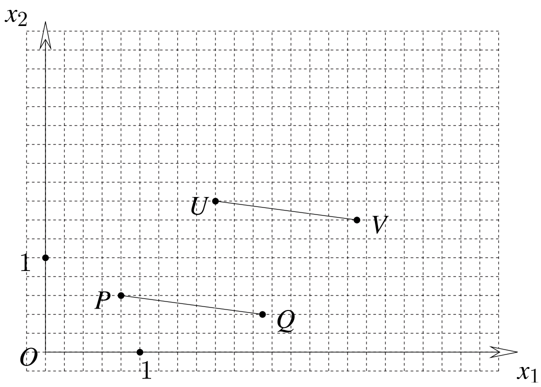


Fig. 5

[4] Abus de langage : ce sont les droites portant les deux segments qui sont parallèles.

De fait si on applique à (20) le changement de repère (11), on obtient

$$\begin{aligned} q'_1 - p'_1 &= v'_1 - u'_1, \\ q'_2 - p'_2 &= v'_2 - u'_2. \end{aligned} \tag{21}$$

Par conséquent la relation est intrinsèque. Elle porte un nom : on dit que le segment orienté $[PQ]$ est *équipollent* au segment orienté $[UV]$.

5.2 Allonger ou raccourcir un segment orienté

Soient maintenant trois points P, Q et U tels que

$$\begin{aligned} u_1 - p_1 &= \lambda(q_1 - p_1), \\ u_2 - p_2 &= \lambda(q_2 - p_2), \end{aligned} \tag{22}$$

où λ est un nombre réel quelconque (égal à 4/3 sur la figure 6).

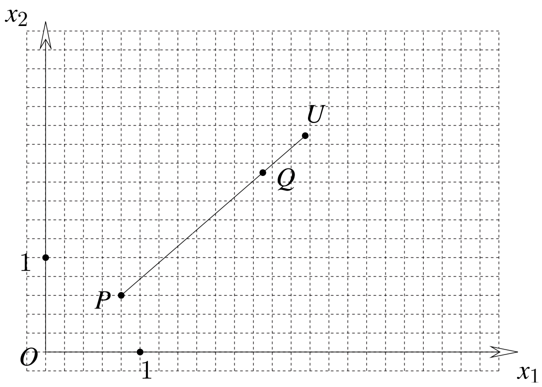


Fig. 6

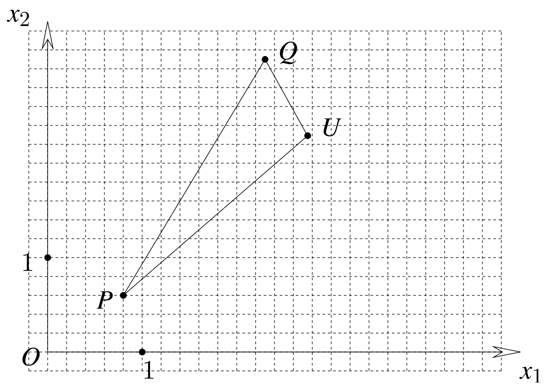


Fig. 7

Après changement de repère, on obtient

$$\begin{aligned} u'_1 - p'_1 &= \lambda(q'_1 - p'_1), \\ u'_2 - p'_2 &= \lambda(q'_2 - p'_2). \end{aligned} \tag{23}$$

Donc ici aussi, la relation est intrinsèque. C'est en fait une relation du premier degré qui exprime l'alignement des points P, Q et U.

5.3 Trois points

Soient P, Q et U trois points situés de façon quelconque (figure 7). Leurs coordonnées satisfont aux deux équations

$$\begin{aligned} (q_1 - p_1) + (u_1 - q_1) + (p_1 - u_1) &= 0, \\ (q_2 - p_2) + (u_2 - q_2) + (p_2 - u_2) &= 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Ce sont des identités. La relation qu'elles déterminent est $\mathbb{R}^6$ tout entier. Il n'est pas besoin de leur appliquer explicitement le changement de repère pour savoir que l'on a aussi

$$\begin{aligned} (q'_1 - p'_1) + (u'_1 - q'_1) + (p'_1 - u'_1) &= 0, \\ (q'_2 - p'_2) + (u'_2 - q'_2) + (p'_2 - u'_2) &= 0. \end{aligned} \tag{25}$$

La relation correspondante dans Π^3 n'est autre que Π^3 tout entier. Elle comprend tous les triplets de points possibles et imaginables.

On pensera peut-être qu'autant vaudrait ne pas parler d'une relation aussi triviale. Quoiqu'il en soit, nous verrons sous peu – chose étonnante – que les équations (24) récrites sous la forme

$$\begin{aligned}(u_1 - p_1) &= (q_1 - p_1) + (u_1 - q_1),\\ (u_2 - p_2) &= (q_2 - p_2) + (u_2 - q_2),\end{aligned} \tag{26}$$

nous seront fort utiles.

5.4 Se débarrasser des repères

Arrivés à ce stade de notre étude, nous savons qu'il existe des relations géométriques élémentaires qui, étant intrinsèques, s'écrivent de la même manière dans tous les repères orthonormés. D'où la question : pourquoi continuer à particulariser les notations, à écrire p_1 et p_2 si on est dans un premier repère, p'_1 et p'_2 si on est dans un autre, etc. ?

Par ailleurs, ce sont les points qui sont intéressants, pas les coordonnées. Celles-ci ne sont qu'un instrument pour accéder aux points, puisque ce que nous voulons, c'est faire de la géométrie. Essayons donc de privilégier les points par rapport aux coordonnées.

Récrivons nos trois relations (22), (24) et (26) dans la première colonne d'un tableau.

$q_1 - p_1 = v_1 - u_1$ $q_2 - p_2 = v_2 - u_2$	$Q - P = V - U$
$u_1 - p_1 = \lambda(q_1 - p_1)$ $u_2 - p_2 = \lambda(q_2 - p_2)$	$U - P = \lambda(Q - P)$
$u_1 - p_1 = (q_1 - p_1) + (u_1 - q_1)$ $u_2 - p_2 = (q_2 - p_2) + (u_2 - q_2)$	$U - P = (Q - P) + (U - Q)$

En nous laissant guider par l'analogie des formes, tentons dans la deuxième colonne une écriture en termes de points. Il s'agit d'une transposition d'écritures, sans aucune justification mathématique a priori. Pour nous rassurer, observons que les règles de passage sont bien définies et claires et que, par convention, ce que nous avons écrit dans la deuxième colonne ne veut rien dire d'autre que ce qui est écrit dans la première. Il ne s'agit dans ces conditions que d'une sténographie, une abréviation d'écriture.

Mais ce n'est pas là se débarrasser franchement des coordonnées, puisque l'on ne donne ainsi un sens à la colonne de droite qu'en retournant à celle de gauche. Essayons donc maintenant de donner aux formules exprimées en termes de points un sens mathématique autonome, c'est-à-dire qui s'exprime en termes de points. Pour cela, il faut accepter que les symboles

« = », « · » (ou l'absence de symbole) et « + »

changent de sens lorsque l'on passe d'une colonne à l'autre. Nous devrons redéfinir ces symboles pour l'usage que nous voulons en faire lorsque nous parlons non plus de coordonnées mais de points.

Revenons à la relation d'équipollence. Elle nous a suggéré d'écrire

$$Q - P = V - U.$$

Bien entendu, nous voulons maintenir au signe « = » sa valeur universelle en mathématiques, qui est de *désigner deux écritures distinctes pour un même objet*. Il faut donc que $Q - P$ soit la même chose que $V - U$. Et même que $Q - P$ soit la même chose que $Y - X$, où X et Y sont des points quelconques tels que le segment orienté $Y - X$ soit équipollent à $Q - P$. Une solution audacieuse (y en a-t-il d'autres ?) consiste à dire que les écritures $Q - P$, $V - U$ et $Y - X$ renvoient toutes trois à *l'ensemble de tous les segments équipollents à* $Q - P$. Solution audacieuse, peu naturelle, car elle consiste à remplacer l'objet géométrique élémentaire que constitue le segment orienté par un objet multiple, infini, aussi peu quotidien que possible...

On appelle *vecteur libre* l'ensemble de tous les segments orientés équipollents à un segment orienté donné. Si un segment appartient à un vecteur libre, on dit qu'il le *représente*, qu'il en est un *représentant*. Ainsi la définition de vecteur nous permet d'évoquer la figure 5 dans des termes nouveaux : au lieu de dire qu'elle représente deux segments orientés équipollents, nous pouvons dire qu'elle montre deux représentants d'un même vecteur libre. Et effectivement, pour connaître un vecteur libre, il suffit de connaître un quelconque de ses représentants. Par abus de langage, nous dirons le plus souvent *vecteur* au lieu de *vecteur libre*.

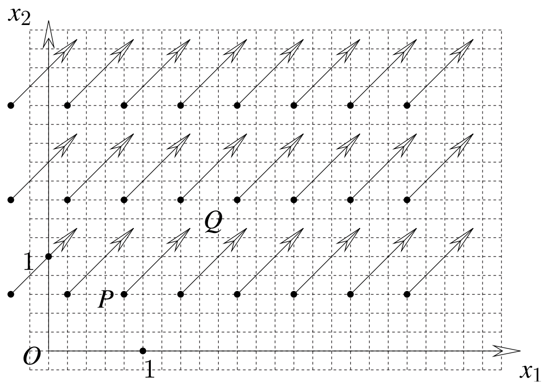


Fig. 8

La figure 8 montre quelques représentants d'un vecteur libre. Pour la facilité, nous avons dessiné une pointe de flèche à l'extrémité de chacun des segments orientés. Il va de soi que nous ne pouvons pas dessiner tous les représentants du vecteur, car alors le plan serait tout noir.

Comme nous l'avons vu, les notations $Q - P$, $Q' - P'$, ... désignent toutes le même vecteur. Chacune de ces notations a l'avantage de désigner un représentant du vecteur, mais elle a l'inconvénient de lier fortement celui-ci à l'un de ses représentants. Lorsqu'on rencontre une expression telle que $Q - P$, il faut donc bien se souvenir que le vecteur $Q - P$ n'est lié à aucun point du plan, et qu'en particulier il n'a aucune relation privilégiée avec Q, non plus qu'avec P.

Un vecteur étant par ailleurs un objet mathématique à part entière, rien n'empêche de le désigner par un symbole qui ne rappelle aucun point ni aucun segment particulier. La convention est d'utiliser une lettre surmontée d'une flèche, comme par exemple $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, ... Notons aussi que l'on écrit souvent $\overrightarrow{PQ}$ au lieu de $Q - P$.

Passons ensuite à la deuxième ligne du tableau et à la figure 6. Sur cette dernière nous discernons maintenant les vecteurs $Q - P$ et $U - P$, que nous pouvons appeler $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$. L'égalité

$$U - P = \lambda(Q - P) \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a},$$

définit ce que nous appellerons le *produit d'un vecteur par un réel* (on dit aussi par un *scalaire*). La définition de cette opération s'obtient, en termes de coordonnées, en retournant à la partie gauche du tableau. Et puisque nous savons que ce que nous y lisons, à savoir

$$\begin{aligned} u_1 - p_1 &= \lambda(q_1 - p_1), \\ u_2 - p_2 &= \lambda(q_2 - p_2), \end{aligned}$$

est indépendant du repère choisi, nous sommes assurés que notre définition n'est pas ambiguë.

Mais nous pouvons aussi *définir géométriquement* le produit d'un vecteur par un réel. Soit le vecteur $\overrightarrow{a} = Q - P$. Multiplions la longueur du segment $[PQ]$ par λ et considérons le segment $[PU]$ ayant cette nouvelle longueur, et ayant le sens de $[PQ]$ ou le sens opposé selon que λ est > 0 ou < 0. Alors le segment $[PU]$ est un représentant de $\lambda\overrightarrow{a} = \lambda(Q - P)$.

Enfin considérons la dernière ligne du tableau et la figure 7. Sur celle-ci nous voyons maintenant les trois vecteurs $Q - P$, $U - Q$ et $U - P$, que nous pouvons aussi appeler $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$. L'égalité

$$U - P = (Q - P) + (U - Q) \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$$

nous conduit à ce que nous appellerons naturellement la *somme* de deux vecteurs.

La définition de cette opération s'obtient, en termes de coordonnées, en retournant à la partie gauche du tableau. Et puisque nous savons que ce que nous y lisons, à savoir

$$\begin{aligned} u_1 - p_1 &= (q_1 - p_1) + (u_1 - q_1), \\ u_2 - p_2 &= (q_2 - p_2) + (u_2 - q_2), \end{aligned}$$

est indépendant du repère choisi, nous sommes assurés que notre définition n'est pas ambiguë.

Mais nous pouvons aussi *définir géométriquement* la somme de deux vecteurs. Supposons que $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ aient des représentants $[AA']$ et $[BB']$ situés n'importe où dans le plan. Considérons alors un représentant $[A'B]$ de $\overrightarrow{b}$ qui s'enchaîne avec $[AA']$. Alors le segment $[AB]$ est un représentant de la somme $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ (voir figure 9).

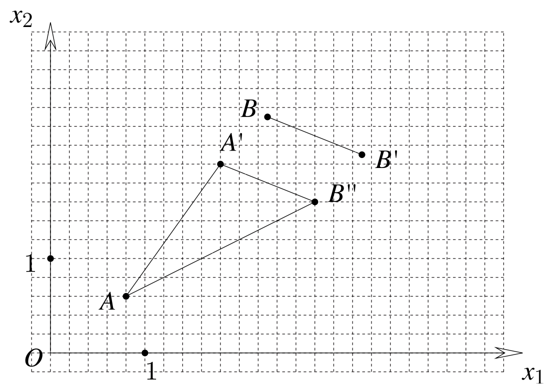


Fig. 9

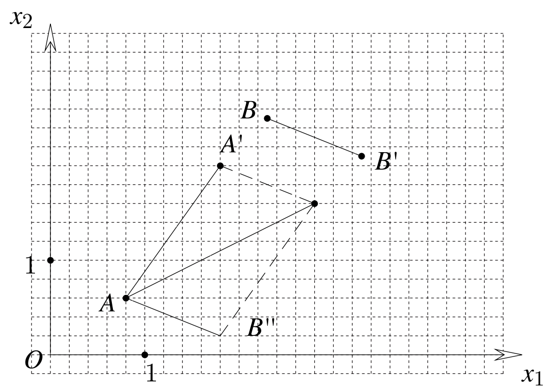


Fig. 10

Pour obtenir la somme $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ à partir des deux représentants $[AA']$ et $[BB']$, nous aurions pu aussi considérer un représentant $[AB]$ de $\overrightarrow{b}$ issu de l'origine de $[AA']$, et ensuite construire la somme selon la diagonale du parallélogramme dont trois sommets consécutifs sont A, A' et B (voir figure 10). Cette façon d'engendrer la somme de deux vecteurs s'appelle *règle du parallélogramme*.

5.5 Des règles de calcul

Nous venons de définir les vecteurs et les deux premières opérations qu'on leur applique. On aura compris qu'il ne s'agit pas là d'un épisode banal de notre étude, mais bien d'un *véritable accouchement*. Toutefois nous ne sommes pas au bout de nos peines, car maintenant que nous avons deux opérations nouvelles, nous devons encore nous assurer qu'elles obéissent à des règles de calcul qui nous conviennent.

Nous n'avons plus vraiment le choix de ces règles, car elles découlent des définitions du vecteur et des deux opérations[5]. Ce sont celles qui constituent les axiomes d'un *espace vectoriel.* Rappelons-les.

(I) *L'addition des vecteurs est commutative :* $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$ *;*

(II) *l'addition est associative :* $\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c}$ *;*

(III) *il existe un unique vecteur* $\overrightarrow{0}$ *tel que* $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$ *pour tout* $\overrightarrow{a}$ *;*

(IV) *à tout vecteur* $\overrightarrow{a}$ *correspond un unique vecteur* $-\overrightarrow{a}$ *tel que* $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$ *;*

(V) *la multiplication par un scalaire est associative :* $\alpha(\beta\overrightarrow{a}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{a}$ *;*

(VI) $1\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$ *pour tout* $\overrightarrow{a}$ *;*

(VII) *la multiplication par un scalaire est distributive par rapport à l'addition des vecteurs :* $\alpha(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \alpha\overrightarrow{a} + \alpha\overrightarrow{b}$ *;*

(VIII) *la multiplication par un scalaire est distributive par rapport à l'addition des vecteurs :* $(\alpha + \beta)\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{a}$.

On trouve les démonstrations de ces propriétés, par la voie des coordonnées ou par raisonnement géométrique direct, dans beaucoup d'introductions au calcul vectoriel : voir par exemple le chapitre 8 du présent ouvrage.

Ces règles de calcul sont satisfaisantes dans la mesure où elles ne nous obligent pas, lorsque nous en arrivons aux vecteurs, à changer trop les habitudes de calcul que nous avons acquises dans le champ des nombres.

Montrons maintenant a contrario que ces règles commodes, *qui découlent du tableau ci-dessus* (voir section 5.4), n'étaient pas acquises d'avance. Reprenons en effet notre projet à son début. Nous souhaitions introduire en géométrie un calcul intrinsèque, c'est-à-dire indépendant de tout système de coordonnées. Une idée qui aurait pu s'imposer à nous aurait été d'adopter directement les segments orientés comme objets géométriques élémentaires à soumettre au calcul. Ils sont des figures simples et commodes, moins compliquées que les classes d'équivalence de tels segments. Un regard sur les vitesses et les forces nous aurait aussi quelque peu poussés dans cette voie. Et nous aurions alors pu définir leur addition de deux façons. Soit deux segments $[AB]$ et $[BC]$ sont enchaînés et nous convenons que leur somme sera $[AC]$, mais alors la somme ne sera définie que pour des segments enchaînés ; soit deux segments $[AB]$ et $[AC]$ sont issus d'un même point A, et

[5] Dans le présent exposé, nous *constatons* que les règles de calcul se maintiennent pour l'essentiel. D'autres exposés aboutissent aux vecteurs en partant de l'*objectif* que les règles de calcul soient conservées. Un tel objectif correspond à ce que FREUDENTHAL appelle le *principe de permanence algébrique* (voir par exemple FREUDENTHAL [1973]).

nous définissons leur somme par la règle du parallélogramme, mais alors la somme n'est définie que pour les segments ayant même origine. Nous voyons que, dans l'un et l'autre cas, l'addition n'est pas définie sur l'ensemble des segments, ce qui est un désavantage évident.

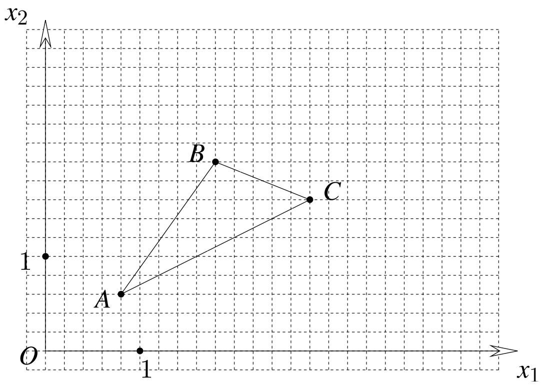


Fig. 11

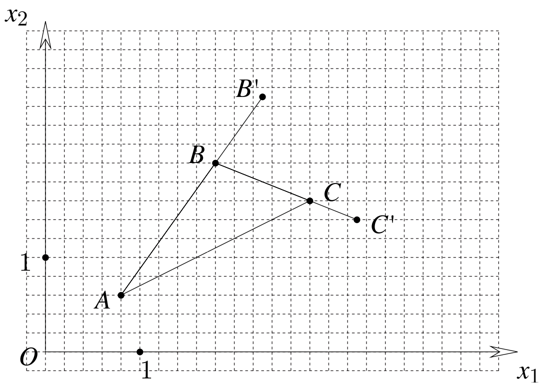


Fig. 12

D'autre part, si nous adoptons l'addition par enchaînement, nous observons que certaines des règles (I) à (VIII) ci-dessus ne sont pas satisfaites.

Par exemple, partons des deux segments $[AB]$ et $[BC]$ et de leur somme $[AB]+[BC]=[AC]$ (voir figure 11). Nous voudrions commuter cette somme et donc la remplacer par $[BC]+[AB]$. Mais ce n'est pas possible, parce que $[BC]$ et $[AB]$ (pris dans cet ordre bien entendu) n'étant pas enchaînés, leur somme n'est pas définie.

Autre exemple : soit comme sur la figure 12, les segments enchaînés $[AB]$ et $[BC]$ et leur somme $[AC]$. Multiplions les deux premiers par un scalaire λ, par exemple $\lambda = 1,5$. Nous obtenons ainsi $\lambda[AB] = [AB']$ et $\lambda[BC] = [BC']$. Nous voudrions pouvoir appliquer la règle de la distributivité sous la forme

$$\lambda([AB]+[BC]) = \lambda[AB] + \lambda[BC].$$

Mais malheureusement $[AB']$ et $[BC']$ ne sont plus enchaînés, et nous ne pouvons par conséquent pas les additionner.

Peut-être alors aurions nous plus de chance en considérant la somme tirée de la règle du parallélogramme. Dans cette hypothèse, considérons tous les segments orientés issus d'un seul point, de manière que la somme soit définie pour tout couple d'entre eux. On vérifie alors facilement que toutes les règles (I) à (VIII) sont satisfaites.

C'est un résultat intéressant. Ce qui est dommage par contre, c'est qu'au passage nous avons privilégié un point, à savoir l'origine commune de tous les segments. Nous nous interdisons de considérer a priori un segment situé n'importe où dans le plan, ce qui est une décision désagréable pour celui qui cherche à faire de la géométrie en un sens ordinaire, c'est-à-dire dans un espace homogène.

Exercice. Établir quelles sont les règles de calcul (I) à (VIII) que l'on peut transposer aux segments orientés additionnés par enchaînement, et quelles sont celles que l'on ne peut pas transposer.

Exercice. Vérifier explicitement que tous les segments orientés issus d'un point donné et additionnés par la règle du parallélogramme vérifient les règles (I) à (VIII).

6 Les géométries affine, euclidienne et métrique

6.1 La perpendicularité

Dans cette étude, nous n'avons pas encore abordé la propriété de perpendicularité. Rappelons donc d'abord comment elle s'exprime dans un système de coordonnées, et voyons ensuite comment elle se comporte dans un changement de repère. Soit donc, comme toujours jusqu'ici, un repère orthogonal muni de la même unité sur chacun des deux axes. Et soient deux segments orthogonaux $[PQ]$ et $[PU]$ (voir figure 13). À cause de la perpendicularité, les deux triangles rectangles PAQ et PBU sont semblables.

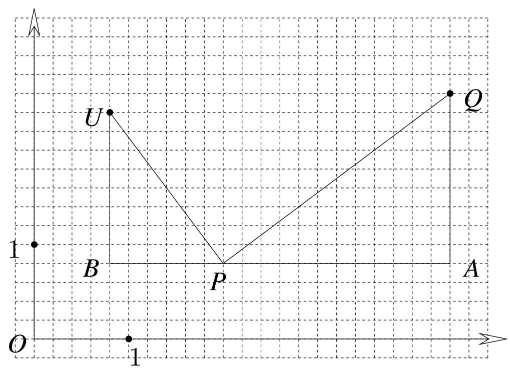


Fig. 13

Cette propriété s'exprime comme ceci

$$\frac{q_1 - p_1}{q_2 - p_2} = \frac{u_2 - p_2}{p_1 - u_1}.$$

Cette relation n'est évidemment valable que si les segments ne sont pas parallèles aux axes. Pour obtenir une expression générale de la perpendicularité, nous la remplacerons par

$$(q_1 - p_1)(u_1 - p_1) = -(q_2 - p_2)(u_2 - p_2),$$

que nous écrirons plus volontiers sous la forme

$$(q_1 - p_1)(u_1 - p_1) + (q_2 - p_2)(u_2 - p_2) = 0. \tag{27}$$

Par définition, nous comprendrons même, dans la propriété en question, les cas extrêmes où deux des points P, Q ou U sont confondus, et aussi le cas où les trois points sont confondus.

Il nous reste à voir maintenant ce que devient cette relation dans un changement de repère du type (11). Après calcul, nous obtenons

$$\begin{aligned}&(q_1' - p_1')(u_1' - p_1')(r_{11}^2 + r_{21}^2) + (q_2' - p_2')\,(u_2' - p_2')(r_{12}^2 + r_{22}^2)\\ &+(q_1' - p_1')(u_2' - p_2') + (q_2' - p_2')(u_1' - p_1'\,)\,](r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22}) = 0.\end{aligned} \tag{28}$$

Souvenons-nous alors que nos axes sont orthogonaux et sont tous munis de la même unité. Nous pouvons donc appliquer les formules (13) à (15), ce qui nous donne au lieu de (28) la formule simplifiée

$$(q_1' - p_1')(u_1' - p_1') + (q_2' - p_2')(u_2' - p_2') = 0. \tag{29}$$

Ainsi, la relation de perpendicularité est intrinsèque.

Remarquons toutefois que, par comparaison avec les autres relations étudiées jusqu'à présent, pour établir que la relation de perpendicularité est intrinsèque, nous nous sommes appuyés sur la condition (13) d'orthogonalité des axes et sur les conditions (14) et (15) exprimant que l'unité choisie est la même sur tous les axes.

Mais regardons d'un peu plus près le passage de (28) à (29). En fait, au lieu de (14) et (15), nous aurions pu dans le calcul utiliser la condition moins restrictive qui s'écrit

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 = r_{12}^2 + r_{22}^2. \tag{30}$$

Celle-ci exprime que l'unité est la même sur les deux axes Sx_1' et Sx_2', mais pas forcément égale à celle choisie sur Ox_1 et Ox_2. Nous pourrions donc, en ce qui concerne la perpendicularité, recommencer la théorie en vérifiant que, lorsqu'on passe d'un repère orthonormé à un autre avec un éventuel changement d'unité, on a encore les relations (11), (12) et (13), et que l'on a en outre (30).

Ceci fait, on aurait montré que la relation de perpendicularité (17) est intrinsèque pour une classe de repères plus grande que celle considérée jusqu'ici, à savoir la classe de tous les repères ayant des unités identiques sur les deux axes, même si cette unité varie d'un repère à l'autre.

Notons enfin que, la relation d'orthogonalité ne dépendant que des projections des segments orientés, elle s'étend naturellement de ces derniers aux vecteurs. Et donc, si nous considérons que $[PQ]$ et $[PU]$ représentent respectivement deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, nous pouvons dire que $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont orthogonaux si et seulement si on a la condition (27).

6.2 La distance

Soient P et Q deux points. Grâce au théorème de Pythagore, nous pouvons écrire pour le carré de la distance qui les sépare

$$d^2(P,Q) = (q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2. \tag{31}$$

Vient ensuite bien entendu la question de savoir comment cette expression se transforme dans le changement de repère. Après calcul, nous obtenons

$$d(P,Q) = (q_1' - p_1')^2(r_{11}^2 + r_{21}^2) + (q_2' - p_2')^2(r_{12}^2 + r_{22}^2) + 2(q_1' - p_1')(q_2' - p_2')(r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22}).$$

Mais en vertu de (13) à (15), nous obtenons aussi

$$d^2(P,Q) = (q_1' - p_1')^2 + (q_2' - p_2')^2. \tag{32}$$

Ce que nous observons ici est non plus seulement une relation intrinsèque, mais une *fonction intrinsèque*. Nous pouvons la qualifier d'intrinsèque, car elle a la même expression dans tous les repères (orthogonaux et munis cette fois d'unités identiques sur tous les axes).

6.3 Trois ensembles de repères

Jetons un regard en arrière sur les repères que nous avons envisagés jusqu'ici. À la section 3, nous sommes partis avec des repères orthonormés et la même unité dans tous les repères. Comme nous venons de le voir, c'est par rapport à cette classe de repères que la distance est intrinsèque.

Nous avons montré par ailleurs que la perpendicularité était intrinsèque par rapport à la classe des repères orthonormés munis d'unités éventuellement différentes d'un repère à l'autre.

Mais tous comptes faits, pour prouver le caractère intrinsèque des relations (20), (22) et (24) qui fondent le calcul vectoriel, nous ne nous sommes appuyés sur aucune des conditions (13) à (15). D'où l'idée que, sans doute, les vecteurs et le calcul vectoriel sont intrinsèques par rapport à la classe de tous les repères, sans condition d'orthogonalité et sans qu'on exige rien des unités.

Pour s'assurer de cela, il suffit de vérifier que les formules (11) et (12) de changement de repère sont applicables dans cette classe de repères beaucoup plus générale. Nous laissons cette preuve en exercice.

Nous aboutissons ainsi à une conclusion importante : toutes les propriétés géométriques qui ne dépendent que de la somme des vecteurs et du produit d'un vecteur par un nombre sont intrinsèques dans la classe des repères les plus généraux. Ces propriétés sont regroupées sous la dénomination de *géométrie affine.*

Les propriétés qui sont intrinsèques pour la classe des repères satisfaisant à la condition (13) d'orthogonalité et à la condition (30) d'égalité des unités dans un même repère, sont connues comme formant la *géométrie euclidienne* ou *géométrie de la similitude.*

Enfin les propriétés qui sont intrinsèques pour la classe de repères la plus restreinte, celle qui exige les conditions (13) à (15), forment la *géométrie métrique.*

On dit que ces trois géométries sont *emboîtées*, car tout ce qui est affine est vérifié dans les géométries euclidienne et métrique, et tout ce qui est affine et euclidien est vérifié dans la géométrie métrique.

6.4 Des axes obliques

Pour illustrer ces résultats, donnons-nous deux repères non orthogonaux avec des unités différentes sur chaque axe. Une manière simple pour obtenir cela consiste à modifier la figure 3 pour remplacer le réseau de carrés par un réseau de parallélogrammes, ce qui est simple à faire à l'ordinateur. À ceci près, aucune des notations de la figure ne doit être changée.

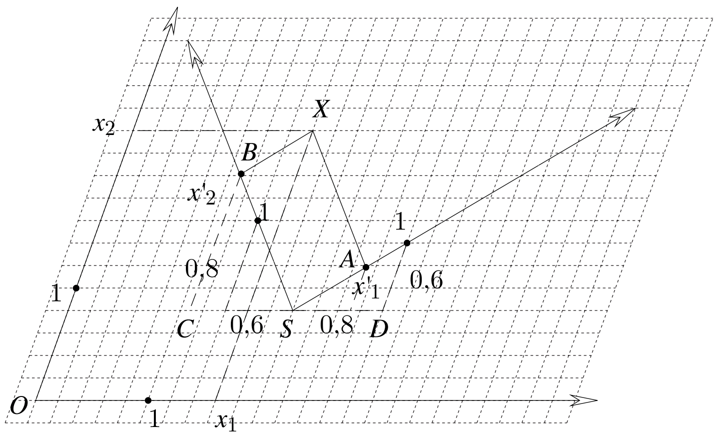


Fig. 14

Mais ceci nous amène une surprise. Aucun des points de la figure n'a changé de coordonnées. Les formules (11)

$$\begin{aligned} x_1 &= r_{11}x'_1 + r_{12}x'_2 + s_1, \\ x_2 &= r_{21}x'_1 + r_{22}x'_2 + s_2. \end{aligned} \tag{11}$$

sont bien entendu toujours valables. Elles se particularisent en

$$x_1 = 2 + 0,8x'_1 - 0,6x'_2, \tag{9}$$

$$x_2 = 0,8 + 0,6x'_1 + 0,8x'_2. \tag{10}$$

Mais les formules (13) à (15), à savoir

$$r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} = 0, \tag{13}$$

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 = 1, \tag{14}$$

$$r_{11}^2 + r_{22}^2 = 1, \tag{15}$$

sont, elles aussi, encore satisfaites !

Que se passe-t-il ? Nous voulions des repères non orthonormés et voilà que la relation d'orthogonalité et celle qui exprime l'égalité des unités sur tous les axes sont encore vérifiées. C'est choquant !

Il ne faut pas chercher l'explication trop loin. Ce qui diffère principalement d'un cas à l'autre, c'est qu'aux figures 3 et 4 le repère *de départ* était orthonormé. C'est donc dans un tel repère que les conditions (13) à (15) expriment l'orthogonalité des axes et l'égalité des unités dans les deux repères.

Dès que l'on passe à des axes obliques munis d'unités quelconques, les conditions (13) à (15) peuvent être satisfaites, mais peuvent aussi ne pas l'être, comme le montre la figure 15.

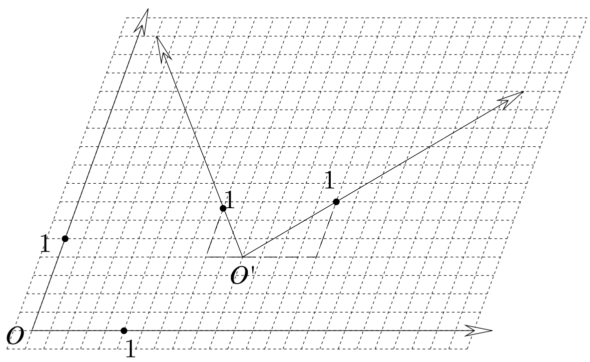


Fig. 15

Que conclure de cette situation intrigante ? Devant la difficulté que nous avons mise en évidence, nous pouvons prendre deux positions très différentes.

Première position. – Les axes des figures 3 et 4 sont perpendiculaires et portent tous les quatre la même unité. Mais d'abord, de quelle perpendicularité s'agit-il ? En regardant nos figures, nous voyons tout de suite qu'il s'agit de l'angle droit physique : c'est celui que l'on trouve en un lieu donné entre une verticale et une horizontale qui la coupe. C'est aussi celui que l'on obtient en pliant soigneusement une feuille de papier en quatre. Nous avons des raisons de souhaiter que les angles droits soient ceux-là et seulement ceux-là.

Il en va de même pour l'égalité des unités portées sur les différents axes. Ces unités sont égales au sens où, si on porte physiquement le segment qui représente l'une d'elles sur chacune des autres, on arrive dans chaque cas à les faire coïncider.

Si nous *décidons* que, pour nous, la perpendicularité et l'isométrie des segments c'est cela, alors forcément, les conditions (13) à (15) n'expriment ces deux propriétés que si on les applique dans des axes de départ déjà orthonormés (au sens physique). Et si nos axes de départ sont autres, les conditions (13) à (15) expriment d'autres propriétés, qui resteraient à interpréter.

Deuxième position. – Mais nous pourrions prendre une autre décision : celle que, quel que soit le système d'axes de départ, les conditions (13) à (15) *définissent* la première la perpendicularité des nouveaux axes et les deux autres l'égalité des unités sur tous les axes. Dans cette perspective, on ne peut plus dire qu'un repère est orthonormé *absolument parlant*. Il faut dire au contraire qu'un repère est *orthonormé par rapport à un autre*. L'orthonormalité devient une propriété des couples de repères. Et en particulier alors, tout repère est orthonormé par rapport à lui-même, puisque les équations de passage sont du type

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1', \\ x_2 &= x_2', \end{aligned}$$

et qu'elles satisfont aux conditions d'orthonormalité (13) à (15).

Nous venons de voir que la relation « un repère est orthonormé par rapport à un autre » est réflexive. Elle est aussi symétrique et transitive. Donc c'est une équivalence.

Par conséquent, l'ensemble de tous les repères se répartit en classes d'équivalence, et au départ d'un repère quelconque, quelle que soit l'inclinaison (physique) de ses axes et les unités portées par ceux-ci, on peut définir une géométrie qui conserve entre autres les perpendiculaires et les distances. Bien entendu, il ne faut pas entendre par là les perpendiculaires et les distances au sens familier (ou physique), mais bien les perpendiculaires et les distances définies respectivement par les relations (27) et (30).

Éclairons ces constatations d'une autre manière. Ne parlons plus pendant un moment ni de plan, ni de droites, ni de points, et ne considérons plus que l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples (x_1, x_2) de nombres réels. Installons-nous donc dans l'univers (l'espace ?) des nombres. Considérons ensuite tous les changements de variables définis par des équations du type (11), à savoir

$$\begin{aligned} x_1 &= r_{11}x_1' + r_{12}x_2' + s_1, \\ x_2 &= r_{21}x_1' + r_{22}x_2' + s_2. \end{aligned} \tag{11}$$

avec la condition $$r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} \neq 0.$$

Les relations intrinsèques pour ces changements seront dites *affines*. Nous avons ainsi défini une géométrie affine sans sortir du domaine des nombres.

Considérons maintenant l'ensemble des changements du même type, mais qui satisfont en outre aux conditions (13) à (15), à savoir

$$r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} = 0, \tag{13}$$

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 = 1, \tag{14}$$

$$r_{12}^2 + r_{22}^2 = 1. \tag{15}$$

Ces changements de variables ne se mélangent pas aux autres : si on en compose deux, on obtient encore un changement du même type. Les relations et fonctions intrinsèques par ces changements moins généraux seront dites *métriques.* Nous avons ainsi défini une géométrie métrique sans sortir du domaine des nombres, et cette géométrie résulte d'une particularisation de la géométrie affine.

Le fond de l'histoire – mais nous ne développerons pas cette considération ici –, c'est que les changements de variables affines forment un groupe pour l'opération de composition, et que les changements de variables métriques forment un sous-groupe de ce groupe.

Là où les choses se compliquent, c'est lorsqu'on veut mettre ces changements de variables et ces relations en correspondance avec le plan Π de la géométrie ordinaire, celle où on parle de points et non plus de couples de nombres réels. Le fait est, comme nous l'avons vu, que la correspondance peut s'établir au moyen d'un repère de départ quelconque, et que tous les repères sont équivalents à cet égard. Il s'agit-là d'un authentique *principe de relativité.*

Il existe une infinité de géométries métriques, chacune définie par une classe de repères orthonormés les uns par rapport aux autres et tous munis de la même unité. Si on revient à l'univers physique, on retrouve les repères orthonormés au sens familier.

Une géométrie métrique construite au départ d'un repère non orthonormé au sens familier fournit des résultats assez étonnants pour le sens commun. C'est ainsi que la figure 16 montre deux triangles isométriques. Quant à la figure 17, elle exprime graphiquement le théorème de Pythagore.

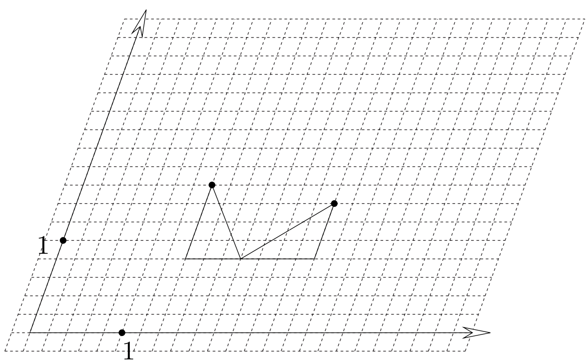


Fig. 16

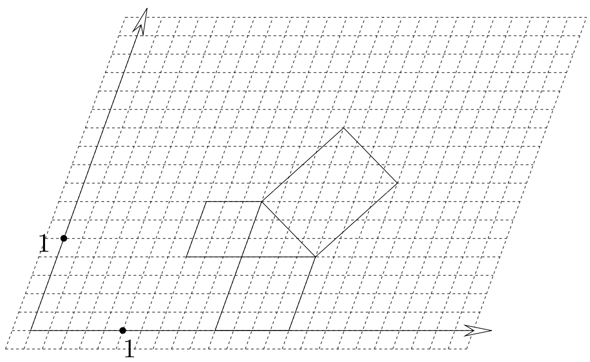


Fig. 17

Ces conclusions étonnantes s'éclairent si on se souvient de ce qui se passe à une dimension. Pour fixer un repère sur une droite, on peut choisir une unité arbitraire. Une fois ce choix fait, tout autre repère sera réputé normé s'il est construit sur la même unité. Bien entendu, à une dimension, les angles n'interviennent pas. Ce que nous avons découvert ci-dessus, c'est qu'à deux dimensions comme à une, les repères sont relatifs. Mais à deux dimensions, les angles interviennent. Et la grande différence, c'est que la nature ne nous a pas donné une unité de longueur naturelle, qui s'impose plutôt que tout autre, tandis qu'elle nous a donné l'angle droit physique auquel notre imagination est très attachée.

Exercices.

1) Considérons quatre points P, Q, U, V disposés en parallélogramme comme à la figure 18, autrement dit les points P, Q, U, V vérifient la relation algébrique

$$\begin{aligned}(q_1 - p_1) + (u_1 - p_1) &= v_1 - p_1,\\ (q_2 - p_2) + (u_2 - p_2) &= v_2 - p_2.\end{aligned}$$

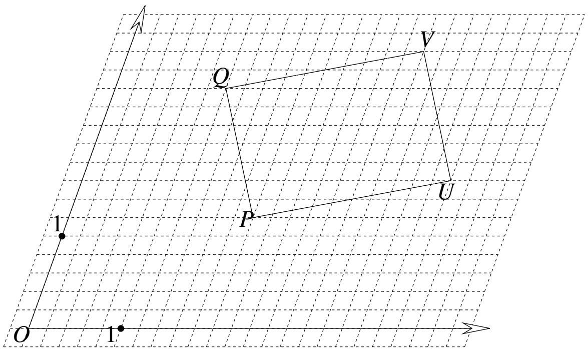


Fig. 18

Montrer que cette relation est intrinsèque pour n'importe quel changement de repère, autrement dit qu'elle relève de la géométrie affine.

2) Soient trois points P, Q, U vérifiant la relation algébrique

$$\begin{aligned}p_1 + q_1 &= u_1,\\ p_2 + q_2 &= u_2.\end{aligned}$$

Pour quel type de changement de repère cette relation est-elle intrinsèque ? Donner une interprétation géométrique du résultat.

7 Commentaires

7.1 Regard en arrière sur notre parcours

Pour apprendre ou enseigner les vecteurs, on peut songer à en parcourir la genèse historique. Mais on sait que celle-ci, à laquelle sont associés les noms d'Argand, Grassmann, Hamilton, Heaviside et beaucoup d'autres, a été extraordinairement longue et tortueuse. Les pionniers des vecteurs ont avancé sur un terrain accidenté, et l'historien ne peut qu'essayer de comprendre leur difficile progression, en s'interdisant tous les raccourcis que pourrait suggérer la théorie actuellement connue, mais inexistante alors. Ceci fait qu'en l'occurence l'histoire fidèlement relatée n'est pas appropriée à un premier enseignement.

Les exposés axiomatiques d'autre part, en s'accrochant à un petit nombre de propriétés de départ et en procédant par la seule déduction, occultent les questions qui ont engendré la théorie et les difficultés essentielles qu'elle permet de vaincre. La pureté d'une théorie radicalement déductive est souvent aveuglante. Elle appelle un discours interprétatif laborieux.

Dans notre introduction aux vecteurs, nous n'avons suivi ni la voie de l'histoire fidèle, ni celle de l'axiomatique pure. Nous avons cherché une voie concise qui réponde au besoin de sens, qui montre à chaque étape, à chaque carrefour, les raisons qui l'ont fait choisir. S'agissant des vecteurs, on peut dire en schématisant quelque peu, que l'histoire est obscure mais pleine de sens, et que les exposés axiomatiques sont clairs mais souffrent d'une insuffisance de sens. Nous avons cherché ici à construire un exposé qui soit à la fois pourvu de sens et clair. Pourvu de sens parce qu'il évoque les questions motivantes et mobilise les démarches heuristiques autant que les preuves et les calculs, – et sur ce point il ressemble à l'histoire –, clair parce qu'il emprunte les chemins raccourcis qu'on peut aujourd'hui discerner dans l'histoire décantée.

Avons-nous réussi cette entreprise ? Le lecteur en jugera. Quoiqu'il en soit, pour approfondir notre réflexion sur les vecteurs tout en réfléchissant sur notre type de démarche, rappelons les épisodes principaux du parcours, en en soulignant au passage les significations heuristiques et théoriques.

Notre point de départ a été la géométrie analytique naïve en axes orthonormés. Cette géométrie répond au besoin d'étudier les figures par calcul. Mais elle impose l'usage d'un repère, en principe arbitraire.

Les figures géométriques que l'on veut étudier sont là avant qu'on introduise le repère. Pour les étudier analytiquement, on les représente par des relations algébriques. Mais une fois qu'elles sont ainsi représentées en coordonnées, à quoi voit-on encore qu'elles sont indépendantes du repère ? C'est là *une première question*.

Ensuite, après avoir représenté algébriquement des figures familières, connues au préalable, on peut partir de relations algébriques quelconques (et c'est bien une *curiosité* qui est apparue dans l'histoire). Chacune représente une figure. Mais parmi cette foule de figures, n'y en a-t-il pas qui changent quand le repère change ? C'est une *deuxième question*.

À ces questions répond la distinction entre relations intrinsèques ou non. Il existe des relations non intrinsèques (et c'est sans doute une *surprise*). Nous avons dit qu'elles étaient plutôt géographiques que géométriques. Elles sont attachées à un repère, à un lieu donné.

On compare volontiers le repère à un observateur, ou plus modestement à un instrument d'observation (muni de deux échelles de mesure). Il est naturel de chercher, comme nous venons de l'évoquer, quelles sont les propriétés géométriques qui ne dépendent pas du repère, celles qui ont de ce fait une valeur universelle[6].

Nous avons testé quelques figures élémentaires – quelques relations algébriques simples –, pour leur caractère intrinsèque. C'étaient les couples de points équipollents, puis un segment et un autre de même origine et même direction mais de longueur différente, et troisièmement la configuration triangulaire.

Ceci fait, la reconnaissance du caractère intrinsèque nous *poussait* à échapper aux coordonnées pour ne plus calculer qu'avec des points, éléments géométriques indépendants du repère. Pour y arriver, nous avons introduit *un calcul purement formel*, en nous réservant la possibilité de le justifier pleinement plus tard. C'est là une démarche heuristique, injustifiée sur le plan déductif, mais qu'on trouve plusieurs fois dans l'histoire des mathématiques[7].

La seule exigence de maintenir le sens du signe égal nous a alors conduits aux vecteurs libres. Nous avons été *forcés* d'accepter cet objet insolite. Ceci fait, le symbole pour le produit d'un

[6] Par raison de simplicité, nous n'avons pas évoqué la question de l'orientation des repères.

[7] Par exemple lors de l'introduction des nombres négatifs, des nombres complexes, du calcul symbolique de Heaviside.

vecteur par un nombre (en l'occurrence l'absence de symbole) et le symbole pour la somme, non seulement prenaient d'office une signification nouvelle parce qu'ils étaient appliqués à des objets nouveaux, mais cette signification nous était imposée, et nous arrivions à décrire ces opérations géométriquement (c'est-à-dire sans plus retourner aux repères). Et pour la somme, nous avions même deux constructions équivalentes. Nous tenions donc les éléments d'un calcul intrinsèque appliqué aux vecteurs libres.

Le pas suivant a consisté à *nous libérer*, dans la notation adoptée pour les vecteurs, de toute référence à un couple de points représentant celui-ci. Le vecteur, ensemble infini de couples de points équipollents, se voyait ainsi attribuer un symbole simple, reconnaissant son existence d'objet mathématique indépendant.

Bien entendu, nous devions alors nous poser la *question* des règles de ce nouveau calcul. Heureuse *surprise*, toutes les règles que nous espérions (parce qu'elles nous étaient familières dans le cas des nombres) se trouvent d'office vérifiées. Elle sont démontrables par retour aux coordonnées, mais aussi directement par la géométrie élémentaire. Pour ceux qui le connaissaient déjà, un espace vectoriel était ainsi reconstruit.

Tout cela par la vertu du seul signe « = ». Mais le vecteur libre avec son infinité de segments est un monstre. D'où la *question* : pourquoi ne pas chercher à construire un calcul géométrique au départ des seuls segments ? Cette idée nous a conduits à une première *déconvenue* : avec la somme des segments par enchaînement, on n'obtient pas de règles de calcul commodes, car la somme n'est pas définie assez souvent. Par contre une *bonne surprise* avec la somme par la règle du parallélogramme : si on ne considère que les segments issus d'un seul point, toutes les règles de calcul sont réalisées. On retrouve un autre espace vectoriel. *Malheureusement*, pour faire de la géométrie, le lien obligé à un point est une contrainte gênante.

Ceci fait, nous voyions comment se comportent quelques relations simples dans des changements de repère. Mais certaines propriétés géométriques, par exemple la perpendicularité et la distance, s'expriment par des relations ou des fonctions que nous n'avions pas encore examinées. D'où la *question* du caractère intrinsèque de ces dernières.

Or nous nous sommes aperçus que la perpendicularité et la distance étaient bien intrinsèques pour la catégorie de repères que nous avions choisie, à savoir celle des repères orthonormés munis d'une même unité de longueur. Mais *notre attention était attirée* sur le fait que, pour établir ce caractère intrinsèque, nous devions nous appuyer sur les conditions d'orthonormalité. *Observation curieuse*, car pour les relations étudiées jusque-là, il n'en avait rien été.

D'où une *nouvelle question* : ne pouvions-nous pas nous attendre à ce que l'équipollence des segments, la multiplication des segments par un nombre et la configuration triangulaire, soient intrinsèques pour des changements de repères non orthonormés ? Et supposons même que nous n'ayons pas fait cette observation sur le rôle des conditions d'orthonormalité. Après tout, pour donner des coordonnées aux points, un repère oblique muni d'unités quelconques fait aussi bien l'affaire qu'un repère orthonormé. Et donc il est assez *naturel* de *se demander* jusqu'où on peut fonder la géométrie si on considère d'emblée tous ces repères.

La réponse à cette question ne nous demandait pour commencer qu'un *simple travail de vérification*. Et nous avons eu la *satisfaction* de constater que tout ce que nous avions démontré et défini pour des relations du premier degré pouvait être conservé sans changement.

Mais une *grosse surprise* nous attendait. En effet, pour le premier exemple que nous avions choisi montrant le passage d'un repère oblique à un autre, celui de la figure 14, nous constations que les conditions d'orthonormalité étaient vérifiées. D'où *une véritable (re)découverte*, à savoir que l'orthonormalité n'est la propriété d'aucun repère particulier, mais bien qu'elle est une relation entre deux repères. L'angle droit n'était-il donc pas ce que nous pensions ? C'était une nouvelle *question.*

Enfin, voyant que certaines relations algébriques (certaines propriétés) résistaient à certains changements de repère, mais non à tous, nous avons cherché pour chacune des propriétés de base étudiées jusque-là, à quelle classe de changements de repère elle résistait. Cela nous a permis de définir la géométrie affine, la géométrie des similitudes et la géométrie métrique.

Nous pouvons certes conclure qu'aller à la recherche des vecteurs n'était ni un cheminement déductif, ni une démarche de routine.

7.2 Le vecteur : un monstre commode !

Lorsque nous pensons à la géométrie au sens le plus ordinaire, nous voyons au départ des points, des droites (et des plans si nous considérons la troisième dimension). Or dans notre exposé, il y avait bien des points au départ, mais nous n'avons pas évoqué les droites. Même la condition d'alignement concernait une relation entre trois points et ne s'appuyait pas sur la connaissance des droites. Ce n'est pas un mal car on peut considérer, du point de vue du bon sens, que la droite est un monstre tellement grand qu'il est difficile à imaginer. Qui plus est, au fur et à mesure de notre exposé, les points sont passés au deuxième plan, et ont cédé la place aux vecteurs libres[8].

D'un certain point de vue, les vecteurs libres sont moins monstrueux que les droites, car on les construit avec des segments, qui sont des figures bornées. Encore qu'il existe des segments aussi grands que l'on veut... Mais si le vecteur échappe jusqu'à un certain point au handicap de la longueur infinie, par contre il est monstrueux parce qu'il est infini du côté des nombres : chaque vecteur libre est un ensemble infini de segments. Que gagne-t-on à passer ainsi d'une monstruosité à une autre ?

Un élément de réponse est assez clair : avec les vecteurs on peut calculer, avec les droites non. Avec les points représentés par des coordonnées on peut aussi calculer, mais les coordonnées ne sont pas intrinsèques, et la géométrie analytique conduit souvent à calculer en aveugle. Le vecteur est libre d'abord parce qu'en le créant, on l'a libéré des coordonnées. Mais il est doublement libre, parce qu'on l'a aussi libéré des couples de points. En fait – nous l'avons dit à suffisance –, si on devait le voir strictement comme l'ensemble de tous les couples de points équipollents à un couple donné, un seul vecteur noircirait tout le plan et on n'y verrait rien du tout. Mais l'imagination de l'être humain a des ressources indispensables à la pensée mathématique. On peut voir le vecteur comme une infinité seulement potentielle de couples de points, se dire qu'*on peut* représenter un tel couple n'importe où, mais qu'on n'est pas obligé de le faire. Le vecteur libre est partout, il a le don d'ubiquité, mais on le manifeste où on veut. Le plus intéressant est de le voir au bon endroit dans la figure que l'on étudie. Il y *apparaît* comme un segment orienté, une flèche que l'on combine à d'autres flèches, en général sans perdre de vue ce que l'on fait, ni ce que l'on veut faire. Et on conserve par devers soi la certitude que ces pseudo-flèches ont un statut théorique qui légitime ce que l'on fait. Mais on sait que dans beaucoup de cas, à la fin il va falloir revenir aux nombres. Face à une situation géométrique donnée, et comme l'écrivent G. Noël *et al.* [1998], on réalise un *véritable plan de calcul* en allant placer les vecteurs là où ils manifestent le plus clairement les propriétés données, en les combinant par calcul pour arriver au résultat escompté, et finalement en les projetant dans un repère choisi de façon à minimiser les calculs lors du nécessaire retour au numérique.

[8] Les vecteurs ont la vocation de se substituer totalement aux points comme termes de base de la géométrie. En effet, les exposés modernes de la géométrie commencent souvent comme ceci : soit un espace vectoriel sur un corps. Et à partir de là, on construit la notion d'espace affine, ce qui ramène l'imagination vers les points. Pour un bel exemple de cela, proposé pour les classes avancées du secondaire, voir E. Artin [1960].

Tant qu'à parler du vecteur tel que nous le percevons maintenant, notons enfin qu'il n'est pas un concept isolé, et c'est là sans doute une observation d'une grande portée pour l'enseignement. Nous l'avons vu : le vecteur est né dans le champ des coordonnées, des changements de repère, de la recherche du caractère intrinsèque, des géométries affine, euclidienne et métrique. Il est vrai que face à un problème géométrique, on peut choisir de le traiter, selon l'avantage que l'on y voit, analytiquement, vectoriellement, par transformations... Mais d'après ce que nous avons vu, il y aurait une perte de sens à décider que, dans l'apprentissage de la géométrie, on privilégiera l'analytique, ou les transformations, ou les vecteurs.

7.3 Et sur le plan philosophique ?

Notre étude a abouti à des conclusions mathématiques précises. Mais elle provoque aussi au passage plusieurs questions de nature philosophique. En voici deux, parmi les plus visibles. Le lecteur que la philosophie ennuie peut sauter cette section.

Premièrement, nous avons importé un calcul formel *dans l'univers des différences de points* : c'était un parachutage de symboles sur des choses dont nous ne savions pas a priori si elles pouvaient accepter cette violence. Or elles ne l'acceptaient pas. Le signe « = » était immédiatement mis en cause. Ou bien nous maintenions que notre calcul portait sur des différences de points, mais alors le signe « = » tel que nous l'avions introduit était absurde ; ou bien nous maintenions le sens habituel du signe « = », mais alors il nous fallait redéfinir ce sur quoi portait notre calcul. C'est ce que nous avons fait. Un *être* nouveau est né là. Lorsque le signe « = » est en cause, on touche à une question ontologique.

Et quelle est la nature de cet être nouveau ? C'est un être collectif, une collection infinie des choses de départ (les couples de points). Pourquoi ? C'est étrange, mais cela s'explique sans doute. Un couple de points est une chose particulière, trop particulière. On voudrait qu'il demeure lui-même quand on le déplace (par équipollence), comme une chaise ne cesse pas d'être elle-même lorsqu'on la déplace. Mais un couple de points déplacé est un *autre* couple de points. Notre géométrie familière ne nous permet pas de telles identifications. Des points distincts sont des points distincts. Quelle est la solution ? C'est de dire que notre nouvel objet sera, non pas un couple de points déplaçable à gré, puisque nous ne pouvons pas faire cela, mais l'ensemble de tous les couples de points équipollents à un couple donné. L'objectivation, la fabrication du nouvel objet est une *collectivisation*. Le sens commun en prend un coup. Tant pis s'il s'y trouve assez d'avantages par ailleurs[9].

Un autre point intrigant de notre étude concerne les repères orthonormés, et plus généralement la géométrie métrique. Nous vivons dans un monde où les angles droits sont aisément reconnaissables et où nous pouvons aller mesurer des longueurs n'importe où et dans n'importe quelle direction, à l'aide d'une règle graduée indéformable. Mais réfléchissons un moment : comment savons-nous que notre règle est indéformable ? Est-ce parce que nous pouvons vérifier qu'elle ne change pas de longueur, en nous servant d'une *autre règle* ? Mais alors, comment vérifier cette dernière ? Nous sommes dans l'impasse. De deux choses l'une : ou bien notre règle change de longueur, mais nous ne pourrons jamais le vérifier, ou bien la question n'a pas de sens.

[9] Ce procédé de collectivisation n'est pas propre aux mathématiques. Par exemple, M. Merleau-Ponty [1945] observe que notre perception visuelle ou tactile d'un objet quelconque est essentiellement variable, instable, et qu'elle dépend des situations de l'objet par rapport à nous. Il se demande alors ce qui en fonde le caractère objectif, quelle est cette chose stable, invariable, à laquelle nous identifions l'objet. Et sa réponse est qu'il s'agit de *l'ensemble structuré de ses apparences possibles*. En passant des apparences particulières et fortuites à l'ensemble des apparences connues par l'expérience, il échappe au caractère particulier et fortuit. Cet ensemble d'apparences est partagé (ou au moins partageable) par tous les êtres humains. Il est objectif. Il s'agit bien ici aussi d'un procédé de collectivisation. Pour échapper au particulier, on regroupe adéquatement assez de choses particulières.

Examinons les choses un peu autrement. Dans le plan qui nous est familier, à chaque repère même oblique et muni d'unités quelconques, nous pouvons faire correspondre un modèle de la géométrie métrique. Dans un tel modèle, tous les repères sont orthogonaux les uns par rapport aux autres, bien que nous ne leur trouvions, *par rapport à nos critères familiers*, ni angles droits, ni mêmes unités sur les axes. Mais supposons que débarque chez nous un arpenteur venu d'ailleurs avec ses instruments. Et supposons que son équerre – vue par nous –, change son angle principal de sorte qu'il déclare droits certains angles que nous ne voyons pas tels. Et supposons que sa règle graduée – vue par nous –, change de longueur lorsqu'il la tourne, de sorte en particulier qu'il vérifie l'égalité des unités sur ses deux axes. Cet arpenteur estimera que nos repères orthonormés ne le sont pas. Aura-t-il raison ? Une commission d'enquête de l'Académie des Sciences pourra-t-elle trancher ? Qui nous dit qu'il existe bien dans la nature un prototype d'angle droit différent de tous les autres ? Un angle qui serait droit par essence ? Et non pas par rapport à d'autres ? Nous croyons volontiers que les choses existent par elle-mêmes avec leurs propriétés familières, et que nous les *percevons* objectivement. Le malheur veut que, dès que nous voulons les *penser*, nous sommes obligés de les penser par rapport à d'autres, de les expliquer en nous appuyant sur d'autres. Mais est-ce bien un malheur ? Ou est-ce seulement la nature de l'esprit qui veut que l'on pense non les choses, mais les relations ? PLATON pensait que les choses existaient dans un paradis des idées, lieu de la réalité éternelle. Mais au cours des siècles, les mathématiques ont dit de moins en moins ce qu'étaient les choses, pour se concentrer sur leurs relations, pour étudier des structures. Elles ont en outre contribué, au cours du XX^{e} siècle, à l'émergence d'un courant structuraliste dans des disciplines aussi diverses que la linguistique, l'anthropologie et l'analyse de textes en littérature.

8 Appendice : les transformations

Nous avons introduit les géométries affine, euclidienne et métrique par le truchement des changements de repère et des relations intrinsèques. Or souvent on aborde ces mêmes théories en parlant de transformations du plan et de relations ou de propriétés invariantes pour des tranformations. Montrons maintenant que les deux approches sont équivalentes. En fait, même si changer de repère et transformer le plan sont deux opérations très différentes dans la pratique et pour l'intuition, elles se correspondent parfaitement, comme nous allons le montrer.

Reprenons le changement de repère illustré par la figure 3 et exprimé par les équations (9) et (10). Dans cette situation, il y a *un* plan (et *un seul*) et deux façons d'en coder les points.

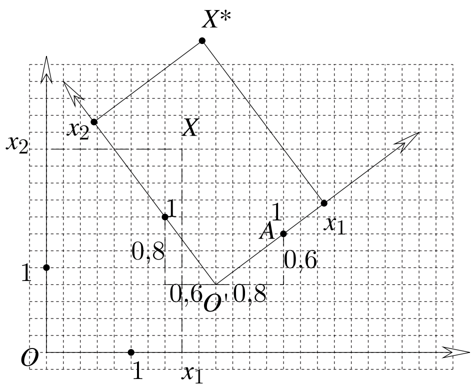


Fig. 19

Regardons maintenant la figure autrement (cf. figure 19). Imaginons que nous fassions bouger le premier repère et qu'il entraîne avec lui tous les points du plan. Envoyons le sur le second repère.

Ainsi tout le plan est déplacé. Et un point X de coordonnées (x_1, x_2) dans le premier repère est envoyé sur le point X^* de coordonnées également (x_1, x_2) dans le second (qui coïncide avec le premier déplacé). Nous venons de définir ce que l'on appelle techniquement un *déplacement* du plan.

Exprimons maintenant, dans le premier repère, les coordonnées (x_1^*, x_2^*) de X^* en fonction de celles (x_1, x_2) de X. En considérant tout d'abord les abscisses, nous voyons que

$$x_1^* = s_1 + (a_1 - s_1) + (x_1^* - a_1). \tag{34}$$

En remplaçant s_1 ainsi que les différences $(a_1 - s_1)$ et $(x_1^* - a_1)$ par leurs valeurs calculées de la même façon qu'à la section 3, nous obtenons

$$x_1^* = 2 + 0,8x_1 - 0,6x_2. \tag{35}$$

Et nous obtenons de même pour les ordonnées

$$x_2^* = 0,8 + 0,6x_1 + 0,8x_2. \tag{36}$$

De manière générale, les formules qui traduisent un tel déplacement s'écrivent

$$\begin{aligned} x_1^* &= r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + s_1, \\ x_2^* &= r_{21}x_1 + r_{22}x_2 + s_2. \end{aligned} \tag{37}$$

Ces égalités sont de la même forme que (11), à ceci près qu'on y trouve aux premiers membres les coordonnées (dans le premier repère) du point image X^*, et aux seconds membres celles du point X de départ.

Nous appellerons le déplacement du plan que nous venons de définir ainsi *déplacement associé au changement de repère*.

Démontrons maintenant de manière générale l'identité de forme des équations de changement de repère et des équations du déplacement associé.

Pour cela considérons d'abord le changement de repère. On part d'un point quelconque P du plan. Soient $r(P)$ ses coordonnées dans le premier repère et $r'(P)$ ses coordonnées dans le second. Comment passe-t-on de $r'(P)$ à $r(P)$? On a

$$r(P) = r \circ r'^{-1} \circ r'(P)$$

et donc la fonction qui envoie $r'(P)$ sur $r(P)$ est $r \circ r'^{-1}$. Nous savons par ailleurs que cette fonction est décrite par les équations (6), mais en l'occurrence, cela n'a pas d'importance.

Regardons maintenant le déplacement. On part d'un point P. Ses coordonnées dans le premier repère sont $r(P)$. Mais, par définition même du déplacement, l'image P^* de P est le point qui a $r(P)$ pour coordonnées dans le deuxième repère. Donc on a

$$P^* = r'^{-1} \circ r(P).$$

Prenons l'image de chacun des deux membres de cette équation par la fonction r ou, en d'autres termes, passons aux coordonnées dans le premier repère. Il vient

$$r(P^*) = r \circ r'^{-1} \circ r(P),$$

ou encore

$$r(P^*) = (r \circ r'^{-1}) \circ r(P).$$

Ainsi, la fonction qui envoie $r(P)$ sur $r(P^*)$ est bien également $r \circ r'^{-1}$.

Pour expliquer la notion de relation invariante, partons de l'exemple de la relation (3), à savoir

$$(q_1 - p_1)(u_2 - p_2) - (q_2 - p_2)(u_1 - p_1) = 0. \tag{3}$$

En nous plaçant dans le *premier* repère, nous avons construit les triplets de points satisfaisant à cette relation (voir figure 2). En nous plaçant dans le *second*, nous pouvons construire les triplets satisfaisant à (19). Mais comme (3) et (19) sont de la même forme, ces triplets ne seront rien d'autre que les triplets associés au premier repère, mais transportés un peu plus loin, entrainés dans le déplacement qui a porté le premier repère sur le second (voir figure 20).

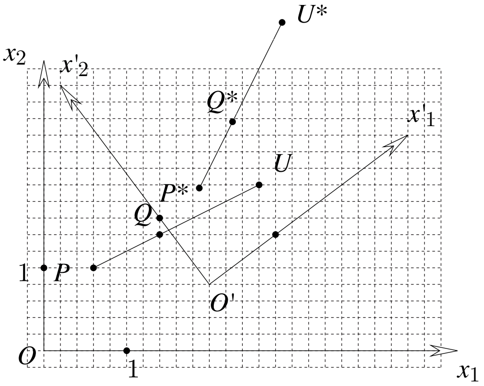


Fig. 20

D'autre part, nous savons aussi que les triplets de points satisfaisant à (19) sont les triplets construits dans le premier repère, mais vus du second, c'est-à-dire exprimés au moyen des coordonnées dans le second repère. Et par conséquent, l'ensemble des triplets transportés est identique à l'ensemble des triplets de départ. Nous pouvons donc remplacer dans (3) les coordonnées de départ par les coordonnées des points déplacés, ce qui nous donne

$$(q_1^* - p_1^*)(u_2^* - p_2^*) - (q_2^* - p_2^*)(u_1^* - p_1^*) = 0. \tag{38}$$

Nous pouvons confirmer ce résultat de la manière suivante. Passons dans (3) des coordonnées de départ aux coordonnées des points déplacés, ce qui se fait grâce aux équations (37). Nous retrouvons l'égalité (38). Celle-ci montre donc bien que les points déplacés satisfont à la même relation que les points de départ. D'une telle relation, on dit qu'elle est *invariante*.

Le type de raisonnement que nous venons de faire peut être appliqué à une relation quelconque. Et donc nous avons montré qu'*une relation est invariante si et seulement si elle est intrinsèque*.

À un changement de repère tout à fait général (avec des axes obliques) caractérisé par les équations (11), est associé une transformation du plan caractérisée par les mêmes équations. Une telle transformation est dite *affine*. Les relations intrinsèques par les changements de repère quelconques sont donc des invariants pour les transformations affines. Par exemple, on dira que les transformations affines conservent l'alignement de trois points, l'équipollence de deux segments orientés, ou le rapport des longeurs de deux segments orientés parallèles.

Si par contre l'on passe d'un repère orthonormé à un autre en gardant la même unité de longueur, les déplacements associés sont des isométries. Nous avons donc vu que la distance entre deux points est conservée par isométrie. À la section 6.4, nous avons également remarqué que la perpendicularité occupait une position inermédiaire, puisqu'elle est intrinsèque pour une classe de changements de repère correspondant à la géométrie euclidienne. Les transformations associées à ces changements de repère sont des similitudes, et la perpendicularité est donc un invariant des similitudes.

Annexe VII

Extraits de textes originaux

CHAP. LXVI.

Of NEGATIVE SQUARES, *and their* IMAGINARY ROOTS *in Algebra.*

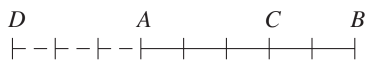
...

These *Imaginary* Quantities (as they are commonly called) arising from the *Supposed* Root of a Negative Square, (when they happen,) are reputed to imply that the Case proposed is Impossible. And so indeed it is, as to the first and strict notion of what is proposed. For it is not possible, that any Number (Negative or Affirmative) Multiplied into itself, can produce, (for instance) -4. Since that Like Signs (whether $+$ or $-$) will produce $+$; and therefore not -4.

But it is also Impossible, that any Quantity (though not a Supposed Square) can be *Negative*. Since that it is not possible that any *Magnitude* can be *Less than Nothing*, or any *Number Fewer than None*.

Yet is not that Supposition (of Negative Quantities,) either Unuseful or Absurd; when rightly understood. And though, as to the bare Algebraick Notation, it import a Quantity less than nothing: Yet, when it comes to a Physical Application, it denotes as Real a Quantity as if the Sign were $+$; but to be interpreted in a contrary sense.

As for instance: Supposing a man to have advanced or moved forward, (from A to B,) 5 Yards; and than to retreat (from B to C) 2 Yards: If it be asked, how much he had Advanced (upon the whole march) when at C? I find (by Subducting 2 from 5,) that he is Advanced 3 Yards. (Because $+5-2=+3$.)



But if, having Advanced 5 Yards to B, he thence Retreat 8 Yards to D; and it be then asked How much he is Advanced when at D, or how much Forwarder then when he was at A: I say -3 Yards. (Because $+5-8=-3$.) That is to say, he is advanced 3 Yards less than nothing.

Which in propriety of Speech, cannot be, (thince there cannot be less than nothing.) And therefore as to the Line AB *Forward*, the case is Impossible.

But if (contrary to the Supposition,) the Line from A, be continued *Backward*, we shall find D, 3 Yards *Behind* A. (Which was presumed to be *Before* it.)

And thus to say, he is *Advanced* -3 Yards; is but what we should say (in ordinary form of Speech), he is *Retreated* 3 Yards; or he wants 3 Yards of being so Forward as he was at A.

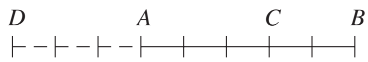
Which doth not only answer Negatively to the Question asked. That he is not (as was supposed,) Advanced at all: But tells moreover, he is so far from being advanced, (as was supposed) that he is Retreated 3 Yards; or that he is at D, more Backward by 3 Yards, than he was at A.

And consequently -3, doth as truly design the Point D; as $+3$ designed the Point C. Not Forward, as was supposed; But Backward from A.

So that $+3$, signifies 3 Yards Forward; and -3, signifies 3 Yards Backward: But still in the same Streight Line. And each designs (at least in the same Infinite Line,) one Single Point: And but one. And thus it is in all Lateral Equations; as having but one Single Root.

Now what is admitted in Lines, must on the same Reason, be allowed in Plains also.
As for instance: Supposing that in one Place, we Gain from the Sea, 30 Acres, but Lose in another Place, 20 Acres: If it be now asked, How many Acres we have gained upon the whole: The Answer is, 10 Acres, or $+10$. (Because of $30 - 20 = 10$.) Or, which is all one 1600 Square Perches. (For the *English* Acre being Equal to a Plain of 40 Perches in length, and 4 in breadth, whose Area is 160; 10 Acres will be 1600 Square Perches.) Which if it lye in a Square Form, the Side of that Square will be 40 Perches in length; or (admitting of a Negative Root,) -40.
But if then in a third Place, we lose 20 Acres more; and the same Question be again asked, How much we have gained in the whole; the Answer must be -10 Acres. (Because $30-20-20 = -10$.) That is to say, The Gain is 10 Acres less than nothing. Which is the same as to say, there is a Loss of 10 Acres: or of 1600 Square Perches.
Anf hitherto, there is now new Difficulty arising, nor any other Impossibility than what we met with before, (in supposing a Negative Quantity, or somewhat Less than nothing:) Save only that $\sqrt{}1600$ is ambiguous; and may be $+40$, or -40. And from such Ambiguity it is, that Quadratick Equations admit of Two Roots.
But now (supposing this Negative Plain, -1600 Perches, to be in the form of a Square;) must not this Supposed Square be supposed to have a Side? Anf if so, What shall this Side be?
We cannot say it is 40, nor that it is -40. (Because either of these Multiplyed into itself, will make $+1600$; not -1600).
But thus rather, that it is $\sqrt{} - 1600$, (the Supposed Root of a Negative Square;) or (which is Equivalent thereunto) $10\sqrt{} - 16$, or $20\sqrt{} - 4$, or $40\sqrt{} - 1$.
Where $\sqrt{}$ implies a Mean Proportional between a Positive and a Negative Quantity. For like as $\sqrt{}b\,c$ signifies a Mean Proportional between $+b$ and $+c$; or between $-b$, and $-c$; either of which, by Multiplication, makes $+bc$:) So doth $\sqrt{}-b\,c$ signify a Mean Proportional between $+b$ and $-c$, or between $-b$ and $+c$; either of which being Multiplied, make $-bc$. And this as to Algebraick consideration, is the true notion of such Imaginary Root, $\sqrt{} - bc$.

Ces quantités, dites *imaginaires*, provenant des racines supposées de carrés négatifs, sont censées impliquer que la situation est impossible. Et il en est effectivement ainsi si l'on s'en tient strictement à ce qui est communément admis. Car il est impossible qu'un nombre (négatif ou positif), multiplié par lui-même puisse produire (par exemple) -4, en vertu de la règle des signes. Mais il est tout aussi impossible qu'une quantité quelconque, même non supposée carrée, puisse être négative. En effet, il n'est pas possible qu'une grandeur puisse être *moindre que rien*, ou qu'un nombre soit *plus petit que zéro*.
Mais cette supposition (de l'existence de quantités négatives) n'est ni inutile, ni absurde, lorsqu'elle est bien comprise. Et si, du point de vue de la notation algébrique pure, cela amène une quantité inférieure à zéro, lorsqu'on l'applique à la physique, elle représente une quantité tout aussi réelle que si le signe était $+$, mais il faut l'interpréter en sens contraire.
Ainsi, par exemple : supposons qu'un homme ait avancé (de A vers B) de 5 yards, et qu'ensuite, il ait reculé (de B vers C) de 2 yards. Si on demande de combien il a avancé (quand il est en C), ou à combien de yards il est devant A, je trouve (en soustrayant 2 de 5) qu'il a avancé de 3 yards (parce que $5 - 2 = 3$).



Mais si, ayant avancé de 5 yards vers B, il recule ensuite de 8 yards vers D, et qu'on demande de combien il a avancé quand il est en D, ou combien plus en avant il est de A, je dis -3 yards (parce que $5 - 8 = -3$). C'est-à-dire qu'il a avancé de 3 yards de moins que rien.
Ce qui, du point de vue de la justesse de l'expression ne peut être, puisqu'il ne peut exister moins que rien. Ainsi, si on se limite à la ligne AB vers l'*avant*, la situation est impossible.
Mais si (contrairement à notre supposition) la ligne partant de A peut être prolongée vers l'arrière, nous trouverons D 3 yards derrière A (ce qui est supposé être avant lui).
Et donc, dire qu'il a *avancé* de -3 yards représente ce que nous exprimerions, en langage ordinaire, par : il a reculé de 3 yards, ou il manque 3 yards pour être aussi en avant qu'il l'était en A.
Ceci ne répond pas seulement par un nombre négatif à la question posée, car il n'a pas (comme on l'avait supposé) avancé du tout, mais au contraire, il est si loin d'avoir avancé, qu'il a reculé de 3 yards, et qu'il est en D, 3 yards plus en arrière que lorsqu'il était en A.
Et, par conséquent, -3 désigne le point D aussi réellement que $+3$ désigne le point C. Non pas en avant, comme on l'avait supposé, mais en arrière de A. Ainsi, $+3$ signifie 3 yards en avant et -3, 3 yards en arrière, mais toujours sur la même ligne droite. Et chacun désigne (en tout cas sur la même ligne droite infinie) un et un seul point. Et il en va ainsi pour toute équation du premier degré qui n'admet qu'une seule racine.

Maintenant, ce qu'on admet sur les droites doit, pour la même raison, être admis dans les plans. Et par exemple, supposons qu'en un endroit, nous gagnons 30 acres sur la mer, mais que nous en perdons 20 en un autre lieu, et qu'on demande combien d'acres nous avons gagné en tout ; la réponse est 10 acres ou $+10$ (parce que $30 - 20 = 10$). Ceci représente aussi 1600 perches carrées (car l'acre anglais est une surface rectangulaire de 40 perches de longueur sur 4 perches de largeur dont l'aire est 160 ; 10 acres valent donc 1600 perches carrées).
Si cette surface est un carré, son côté sera long de 40 perches ou (si on admet la racine négative) -40. Mais si en un troisième endroit, on perd 20 acres de plus, et qu'on pose la même question : combien avons nous gagné en tout ? La réponse doit être -10 acres (car $30 - 20 - 20 = -10$) c'est-à-dire que le gain est de 10 acres moins que rien. Ce qui revient à dire qu'il y a une perte de 10 acres ou de 1600 perches carrées.
Et de là naît une nouvelle difficulté, qui n'est pas plus une impossibilité que celle que nous avons rencontrée précédemment (en supposant une quantité négative ou moindre que rien). Ne considérer que $\sqrt{1600}$ est ambigu, cela peut être 40 ou -40. Et de cette ambiguïté, il ressort que les équations quadratiques ont deux racines.
Maintenant (en supposant que cette surface négative -1600 perches a la forme d'un carré), ne doit-on pas admettre que ce supposé carré possède un côté ? Et si oui, que sera ce côté ?
Nous ne pouvons pas dire qu'il vaut 40, ni -40 (parce que l'une ou l'autre de ces valeurs, multipliée par elle-même, donnera $+1600$, pas -1600). Mais plus vraisemblablement, sa valeur est $\sqrt{-1600}$ (la supposée racine d'un carré négatif) ou (ce qui est équivalent) $10\sqrt{-16}$ ou $20\sqrt{-4}$ ou $40\sqrt{-1}$. Le symbole $\sqrt{}$ suggère une moyenne proportionnelle entre une quantité positive et une quantité négative. Car, de la même manière que $\sqrt{bc}$ représente une moyenne proportionnelle entre $+b$ et $+c$, ou entre $-b$ et $-c$ (dont le produit vaut bc dans les deux cas), $\sqrt{-bc}$ indique une moyenne proportionnelle entre $+b$ et $-c$, ou entre $-b$ et $+c$ (dont le produit vaut $-bc$). Et ceci, sur le plan algébrique, fournit la véritable interprétation d'une telle racine imaginaire $\sqrt{-bc}$.

6. Si l'on opère sur le symbole $a+b\sqrt{-1}$ par le moyen du facteur $\sqrt{-1}$, on obtient $-b+a\sqrt{-1}$; ce résultat établit que les coordonnées x, y du point représenté sont respectivement $-b$ et a ; mais, d'après la seconde manière de voir, $-b+a\sqrt{-1}$ représente la droite menée de l'origine au point $(-b, a)$. La longueur de cette droite est demeurée égale à $\sqrt{a^2+b^2}$, mais la direction de la droite fait avec l'axe des x un angle égal à $\operatorname{tang}^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)$, angle qui dépasse de 90° l'angle $\operatorname{tang}^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$, comme il est facile de s'en assurer.

7. Le théorème de Moivre nous aidera à avancer d'un pas de plus en avant dans la voie. En effet, si nous multiplions, non plus par $\sqrt{-1}$ mais par un facteur plus général égal à $\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha$, ce facteur, opérant sur une droite quelconque dans le plan des xy, aura pour effet de la faire tourner, dans le sens positif, d'un angle égal à α. [On s'aperçoit du reste que le facteur $\sqrt{-1}$ employé en premier lieu ne représente qu'un cas particulier de $\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha$, correspondant à $\alpha=\frac{1}{2}\pi$.]

Nous aurons ainsi, en effectuant la multiplication d'après les règles ordinaires,

$$(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)(a+b\sqrt{-1}) = a\cos\alpha - b\sin\alpha + \sqrt{-1}(a\sin\alpha+b\cos\alpha).$$

On s'aperçoit, par la forme même du résultat, que le produit indique l'effet de la rotation d'un angle α, et l'on peut vérifier le fait en faisant tourner les axes de coordonnées d'un angle α (mais dans le sens contraire), à l'aide des formules connues pour le changement d'axes. Nous pouvons aussi vérifier le fait de la rotation de la manière suivante : en premier lieu, la longueur sera

$$[(a\cos\alpha-b\sin\alpha)^2+(a\sin\alpha+b\cos\alpha)^2]^{\frac{1}{2}} = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}},$$

ce qu'elle était auparavant ; en second lieu, l'inclinaison sur l'axe des Ox est égale à

$$\operatorname{tang}^{-1}\left(\frac{a\sin\alpha+b\cos\alpha}{a\cos\alpha-b\sin\alpha}\right) = \operatorname{tang}^{-1}\frac{(\operatorname{tang}\alpha+\frac{b}{a})}{(1-\frac{b}{a}\operatorname{tang}\alpha)} = \alpha+\operatorname{tang}^{-1}\left(\frac{b}{a}\right).$$

8. Par ce qui précède nous pouvons maintenant nous rendre compte du sens de la formule

$$(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)^m = \cos m\alpha+\sqrt{-1}\sin m\alpha.$$

En effet, le premier membre représente un opérateur qui produit m rotations successives, d'un angle α chacune ; le second membre exprime l'opérateur d'une rotation unique d'un angle $m\alpha$ d'un seul trait.

Arrivés à ce point de la question, nous avons intérêt à constater, par anticipation, qu'un quaternion est généralement susceptible d'être mis sous la forme

$$N(\cos\theta+\varpi\sin\theta),$$

N étant une quantité purement numérique, θ un angle réel et ϖ répondant à

$$\varpi^2=-1.$$

Cette forme de représentation d'un quaternion et les formes d'expression qui entrent dans la formule de Moivre ont entre elles une grande ressemblance ; mais il y a entre elles une différence essentielle (et c'est en elle que réside le point capital de l'invention de Hamilton), savoir que ϖ n'est pas l'équivalent de l'élément algébrique $\sqrt{-1}$, mais qu'il représente l'unité de longueur *dirigée dans une direction* DONNÉE *quelconque dans l'espace.*

Two right lines are added if we unite them in such a way that the second line begins where the first one ends, and then pass a right line from the first to the last point of the united lines. This line is the sum of the united lines.
For example, if a point moves forward three feet and backward two feet, the sum of these two paths is not the first three and the last two feet combined ; the sum is one foot forward. For this path, described by the same point, gives the same effect as both the other paths.

Questo metodo soddisfa un desiderio del Carnot di trovare un algoritmo, che rappresenti nello stesso tempo e la grandezza e la posizione delle varie parti di una figura ; ne risultano quindi, per via diretta, eleganti e semplici soluzioni grafiche dei problemi geometrici. Il metodo delle equipollenze comprende come casi particolari i metodi delle coordinate parallele o polari, il calcolo baricentrico ecc. : i problemi sulle curve vi si risolvono in generale senza preferire una maniera di rappresentazione ad un' altra ; perlochè i calcoli sono più spediti di quelli della Geometria analitica, ed i risultamenti sono espressi sotto forma più semplice.
È essenziale nel metodo delle equipollenze la distinzione delle parti positive dalle negative, sicchè la *correlazione* delle figure è una conseguenza necessaria dell' algoritmo, senza che vi sia bisogno di alcuna speciale osservazione, perlochè viena tolta ogni tema di errore. Chi sia abituato ai principj della *Géometrie de Position* troverà facile seguirmi nelle poche convenzioni su cui si appogia il metodo ; forse si potrebbero rendere ancora più conformi all' uso ordinario ; ma non trovo conveniente di posporre la brevità delle formule ad una leggerissima facilità. Le convenzioni saranno facili da ritenersi a memoria, perchè alcune conformi alle solite regole relative alle quantità positive e negative, altre conformi alla notissima composizione delle forze. Le equipollenze esprimono relazioni di rette considerate non solo rispetto alla direzione (o inclinazione che voglia dirsi) ; sicchè esse sono essenzialmente differenti dalle equazioni, che esprimono relazioni di sole quantità reali ; nulladimeno il calcolo delle equipollenze segue precisamente le stesse regole, che valgono nel calcolo delle equazioni, il che torna non poco vantaggioso.
. . .

CHAPITRE II
Multiplication et division des droites.

Produit de deux droites.–Produits de plusieurs droites.

28. Jusqu'à présent, dans les calculs que nous avons effectués sur les droites, nous n'avons fait intervenir que la multiplication *par un nombre réel.* Nous avons maintenant à considérer des produits de droites multipliées les unes par les autres, et pour cela, nous devons tout d'abord définir le produit de deux droites, que nous supposerons ramenées à la même origine O.

Le produit de deux droites OA, OB *est une droite* OC *dont la* longueur *est égale au* produit *des longueurs de* OA *et* OB*, et dont l'*inclinaison *est égale à la* somme *des inclinaisons de* OA *et* OB.

Il suit de là que l'équipollence[10] OA.OB = OC entraîne les deux égalités[11]

$$\text{gr.OA} \times \text{gr.OB} = \text{gr.OC} \quad \text{et} \quad \text{inc.OA} + \text{inc.OB} = \text{inc.OC}.$$

Une première remarque, indispensable à faire, c'est que, tandis que la somme de deux droites était tout à fait indépendante de tout autre élément du plan, leur produit dépend au contraire de l'origine des inclinaisons que l'on a choisie.

Malgré la multiplicité des inclinaisons d'une droite donnée, il ne peut y avoir aucune indécision sur la direction du produit, puisque l'inclinaison de celui-ci ne peut jamais être altérée que d'un nombre entier de circonférences, ce qui ne change rien à sa direction.

Sans contester ce qu'une définition comme celle que nous venons de donner peut en apparence présenter d'arbitraire *a priori*, il est bon de montrer cependant qu'elle se justifie assez naturellement, à la condition qu'on admette pour unité la droite OI de longueur égale à l'unité et dirigée suivant l'origine des inclinaisons.

D'après la définition de la multiplication admise en Arithmétique, on doit former le produit OC, au moyen du multiplicande OA, comme le multiplicateur OB est formé au moyen de l'unité OI. Or, quelles opérations a-t-on fait subir à OI pour l'amener en OB ? On a modifié la longueur dans le rapport $\dfrac{\text{gr.OB}}{\text{gr.OI}} = \text{gr.OB}$, puis on a fait tourner la droite ainsi obtenue, dans le sens convenable, de l'angle $\beta = \text{inc.OB}$. L'analogie nous conduit donc à dire, que pour avoir le produit OA.OB, nous devons modifier la longueur de OA dans le rapport gr.OB, ce qui donnera une droite de longueur gr.OA x gr.OB dirigée suivant OA, puis faire tourner cette droite de l'angle β. Or, elle avait pour inclinaison $\alpha = \text{inc.OA}$. Son inclinaison après la rotation sera donc $\alpha + \beta$; c'est-à-dire que nous retombons précisément sur la droite OC, telle que nous l'avons définie plus haut.

[10] Il faut entendre l'égalité.

[11] La notation gr.AB désigne la longueur (grandeur) d'une droite AB, indépendamment de la direction de cette droite.

La notation inc.AB désigne l'inclinaison d'une droire AB. C'est l'angle formé par la droite OM (OM=AB) et une droite OX appelée *origine des inclinaisons.* L'inclinaison est *positive* si la rotation qui amène OX sur OM s'effectue dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre, sinon elle est négative.