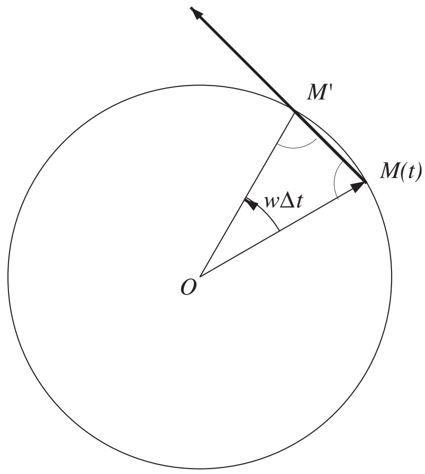


Fig. 49 : Une approximation de la direction de la vitesse instantanée.

L'examen du triangle isocèle OMM' livre la relation

$$\widehat{M} = \frac{\pi - w \cdot \Delta t}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{w \cdot \Delta t}{2},$$

qui montre que l'angle $\widehat{M}$ se rapproche de $\frac{\pi}{2}$ lorsque l'intervalle de temps Δt se rapproche de 0. Cela signifie qu'en termes de leurs représentants géométriques, les vecteurs $\overrightarrow{v}(t)$ et $\overrightarrow{OM}(t)$ sont perpendiculaires.

Ainsi, la vitesse d'un mouvement circulaire uniforme est tangente à la trajectoire de ce mouvement. C'est une propriété facile à observer : par exemple, lorsqu'on lance une bille le long du bord d'un cerceau et qu'on relève ce dernier d'un coup, la bille « prend la tangente », de même lorsqu'on présente une lame d'outil à une meule, les étincelles s'échappent tangentiellement, etc.

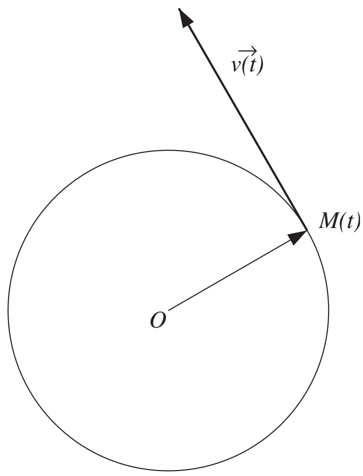


Fig. 50 : La direction de la vitesse instantanée.

Mais il ne faut pas perdre de vue que la justification physique de ce type de comportement fait appel au principe d'inertie, qui est un principe dynamique et qu'on abandonne alors le contexte de la seule cinématique. Par ailleurs, même lorsque le mouvement circulaire n'est pas uniforme, sa vitesse est encore tangente à la trajectoire du mouvement. Cela résulte d'un raisonnement analogue à celui décrit ci-dessus, pourvu que l'angle parcouru $w(t)$, considéré comme fonction du temps t nécessaire à le parcourir, devienne proche de 0 lorsque ce temps lui-même est proche de 0, ou plus précisément, pourvu que cette angle soit une fonction continue du temps t au voisinage de 0 ; c'est là une hypothèse physiquement très raisonnable !

Un changement de point de vue

Fixons maintenant un repère au centre de la trajectoire circulaire. Nous pouvons alors écrire

$$\overrightarrow{OM}(t) = R\,(\cos wt \cdot \overrightarrow{e_1} + \sin wt \cdot \overrightarrow{e_2})\,,$$

Effectuons une translation du vecteur $\overrightarrow{v}(t)$ au centre de la trajectoire du mouvement circulaire. Cela revient à changer (littéralement) de point de vue sur la vitesse, et mérite donc qu'on l'interprète physiquement, ce qui sera l'objet de la question 16 ci-après. Mais comme cette translation n'a rien d'étonnant en mathématiques, et qu'elle a déjà été utilisée et justifiée physiquement dans l'étude des mouvements du nageur et de la goutte d'eau, elle ne doit pas trop nous inquiéter pour le moment. Ceci dit, le fait que la vitesse soit perpendiculaire au rayon d'extrémité $M(t)$ implique qu'il existe une constante k telle que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v}(t) &= k\left(\cos\left(wt + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \overrightarrow{e_1} + \sin\left(wt + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \overrightarrow{e_2}\right)\\ &= k\,(-\sin wt \cdot \overrightarrow{e_1} + \cos wt \cdot \overrightarrow{e_2})\,.\end{aligned}$$

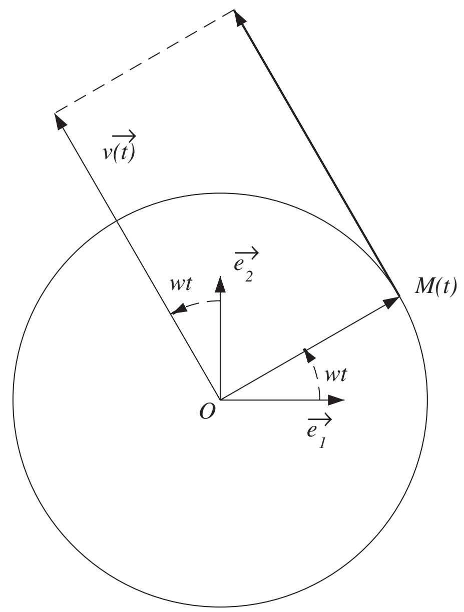


Fig. 51 : La vitesse instantanée, ramenée au centre de la trajectoire.

Par identification des modules dans les deux membres de la dernière égalité, cette constante k ne peut être que l'intensité $v(t)$ de la vitesse instantanée. Mais l'expérience gagnée lors des simulations, ou – plus mathématiquement – la méthode classique de calcul de la longueur de la circonférence (par polygones inscrits) entraîne alors

$$v(t) = \frac{2\pi R}{T},$$

où T est le temps nécessaire à parcourir un tour complet.

Une justification un peu plus détaillée peut être présentée de la manière suivante. Il s'agit de calculer

$$v(t) \text{ ou } v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|MM'|}{\Delta t}.$$

Or, la méthode de calcul de la longueur de la circonférence par « bissection » de polygones inscrits établit que, si MM' est la corde qui sous-tend un angle au centre de $\frac{360°}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \cdot |MM'| = 2\pi R.$$

En posant alors $\Delta t = \frac{T}{2^n}$, on calcule

$$v = \lim_{n\to\infty} \frac{|MM'|}{\frac{T}{2^n}} = \frac{1}{T} \cdot \lim_{n\to\infty} 2^n \, |MM'| = \frac{1}{T} \cdot 2\pi R.$$

Comme $2\pi = wT$, on peut aussi écrire

$$v(t) = Rw,$$

ce qui confirme les résultats des simulations. La vitesse instantanée d'un mouvement circulaire uniforme, considérée comme grandeur vectorielle, s'écrit donc finalement

$$\overrightarrow{v}(t) = Rw \left(-\sin wt \cdot \overrightarrow{e_1} + \cos wt \cdot \overrightarrow{e_2}\right).$$

On la qualifie souvent de *vitesse linéaire*, afin de la distinguer de la vitesse angulaire.

À un niveau plus avancé, on remarquera que le calcul précédent a établi de manière géométrico-physique deux formules de dérivation,

$$(\sin wt)' = w \cos wt,$$

et

$$(\cos wt)' = -w \sin wt.$$

Quelques valeurs numériques à comparer

Revenons-en enfin aux exemples de la question 13, pour achever de quantifier les deux notions de vitesse sous-jacentes. Dans le cas du mouvement de la terre autour du soleil, on a déjà calculé

$$w_{terre/soleil} = \frac{2\pi}{365 \times 24 \times 3600} = 1,9923\ldots 10^{-7} \text{ (rad/s)},$$

et comme on sait que $R = 149 \times 10^9$ (m), on obtient pour l'intensité de la vitesse linéaire

$$v = Rw = 29686,53\ldots \text{ (m/s)} = 106871,53\ldots \text{ (km/h)}.$$

C'est presque exactement la valeur calculée lors de la simulation à l'heure près ! Pour ce qui concerne le mouvement d'une dent de scie circulaire tournant à 1500 tours/minute, on a obtenu

$$w_{scie} = \frac{1500 \times 2\pi}{60} = 157,079\ldots \text{ (rad/s)} ;$$

si on suppose que le rayon de cette scie égale 20 cm, on trouve pour l'intensité de la vitesse linéaire :

$$v = Rw = 31,415\ldots \text{ (m/s)} = 113,097\ldots \text{ (km/h)}.$$

Lequel de ces deux mobiles est le plus rapide ? Cela dépend de la notion de vitesse que l'on sous-entend, mais en termes de déplacement, il n'y a pas de doute : la terre l'emporte, haut la main !

4.2 Le mouvement de la vitesse

Comment s'y prendre ?

Les propriétés géométriques de la vitesse linéaire d'un mouvement circulaire uniforme sont d'une richesse quasiment inépuisable. On va s'en rendre compte en revenant à un point qui restait à éclaircir dans le déroulement de la question précédente.

> Question 16.
> Lorsqu'on observe du centre de sa trajectoire un point animé d'un mouvement circulaire uniforme, comment voit-on sa vitesse varier ?

Quel est le mouvement de la vitesse ?

Effectuer une translation de la vitesse au centre de la trajectoire d'un mouvement circulaire uniforme a-t-il un sens physique ? En fait, oui : cela revient à reconstituer le mouvement là où on l'observe. C'est par exemple ce que réalise (partiellement) un dresseur de chevaux lorqu'il fait travailler un cheval à la longe autour de lui. Et il est relativement fréquent en astronomie, d'observer du centre de la trajectoire un point animé d'un mouvement assimilé à un mouvement circulaire uniforme, certaines planètes ou une étoile proche par exemple. En fait, on reconstitue ainsi à l'endroit où on réalise les observations, une portion du mouvement rectiligne uniforme idéal de l'objet observé, en effectuant une translation vers le centre de la trajectoire de cette portion de mouvement rectiligne. Dans le cas du dresseur de chevaux, la longe figure bien le rayon (mobile) le long duquel la translation peut s'imaginer.

On obtient ainsi une grandeur vectorielle $\overrightarrow{OV}(t)$ physiquement équivalente à la vitesse du point mobile $M(t)$,

$$\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{OV}(t).$$

Or, – et c'est là une observation majeure ! – comme le point mobile tourne, le vecteur $\overrightarrow{OV}(t)$ tourne donc lui aussi ! On appelle *hodographe*[30] l'ensemble des extrémités $V(t)$ des vitesses, *après translation au centre de la trajectoire.*

La caractérisation géométrique du vecteur vitesse implique immédiatement que l'hodographe d'un mouvement circulaire uniforme est un cercle.

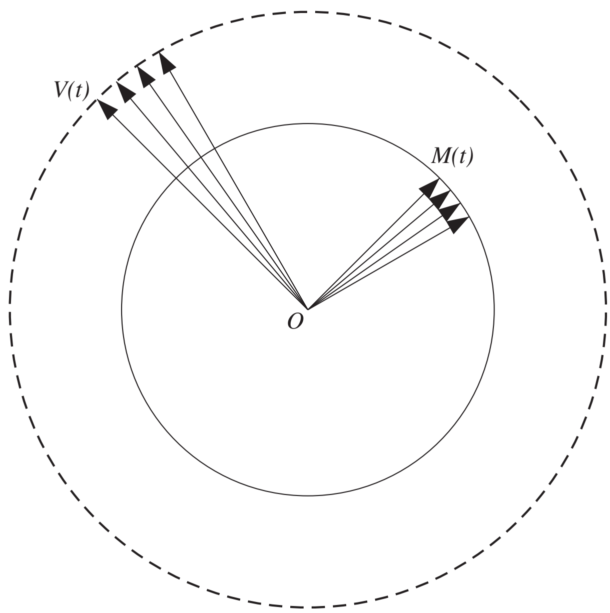


Fig. 52 : Le mouvement de la vitesse, rapporté au centre de la trajectoire.

Plus précisément, si le point mobile $M(t)$ est animé d'un mouvement circulaire uniforme de rayon R et de vitesse angulaire w, le point (imaginaire, et néanmoins) mobile $V(t)$ sera lui aussi animé d'un mouvement circulaire uniforme

- de rayon Rw,
- de la même vitesse angulaire w,
- mais en avance (ou déphasé, comme disent les physiciens) de $\frac{\pi}{2}$ radians sur le mouvement du point $M(t)$,

puisqu'on sait que le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}(t)$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$, et d'intensité égale à Rw.

L'accélération d'un mouvement circulaire uniforme

Ce qui a si parfaitement fonctionné une première fois suggère bien vite qu'on le répète, même si l'idée peut paraître bizarre : puisque la vitesse d'un mouvement circulaire uniforme peut être considérée comme étant elle-même soumise à un mouvement circulaire uniforme, quelle en est… la vitesse ?

Bien sûr, il n'est pas très facile d'imaginer ce que représente physiquement cette vitesse-là, surtout lorsqu'on se situe au centre de la trajectoire

[30] Sous cette forme, la notion semble due à W. R. Hamilton (1805-1865). L'hodographe correspond, en géométrie, à ce qu'on appelle parfois l'*application de Gauss*.

du mouvement circulaire... Par contre, son interprétation dynamique (à un facteur près, en terme de force centripète) est assez immédiate mais échappe encore une fois au contexte cinématique privilégié ici.

En tout cas, si cette « vitesse de la vitesse » semble à première vue incongrue, c'est qu'il faut peut-être d'abord revenir un peu sur la notion d'accélération moyenne, comme mesure de la variation de la vitesse par unité de temps ou mieux encore, sur la notion d'accélération instantanée, qu'on peut effectivement définir comme la vitesse instantanée de la vitesse instantanée. Un retour sur la signification de la constante g dans le mouvement de la goutte d'eau étudié plus haut, peut aussi illustrer ce point de vue.

Ceci rappelé, l'accélération d'un mouvement circulaire uniforme peut donc bien se définir comme la vitesse (appliquée au point mobile) de la vitesse du mouvement. En vertu de tout ce qui précède, c'est une (nouvelle) grandeur vectorielle, caractérisée par :

- son point d'application, c'est-à-dire le point mobile $M(t)$;
- sa direction, qui est celle du rayon $OM(t)$, puisqu'elle doit être perpendiculaire à la direction de la vitesse $\overrightarrow{v}(t)$, qui est elle-même perpendiculaire à ce rayon ;
- son sens, opposé à celui de $\overrightarrow{OM}(t)$, puisque l'angle correspondant est déphasé deux fois de $\frac{\pi}{2}$;
- son intensité, encore obtenue comme produit du rayon de la trajectoire, ici égal à Rw par la vitesse angulaire w, et qui vaut donc Rw^2.

Un exemple rassurant

Pour ne donner qu'un exemple de calcul de cette accélération, considérons le mouvement de la terre autour de son axe de rotation (pôle nord — pôle sud), pour une ville située à 50° de latitude nord, le centre de la terre étant supposé fixe. La vitesse angulaire de rotation vaut

$$w = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7,2722\ldots 10^{-5} \text{ (rad/s)}.$$

Comme le rayon moyen de la terre égale $R = 6378$ (km), le rayon de l'orbite circulaire de la ville en question s'obtient par : $r = R \sin 50° = 4885,83\ldots$ (km). On calcule ensuite

$$v = rw = 355,307\ldots \text{ (m/s)} = 1279,1\ldots \text{ (km/h)},$$

$$a = rw^2 = 0,0258\ldots \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

À titre de comparaison, on vérifie facilement que cette accélération, due à la rotation de la terre sur elle-même, est négligeable par rapport à l'accélération de la pesanteur

$$\frac{a}{g} \approx \frac{1}{380}.$$

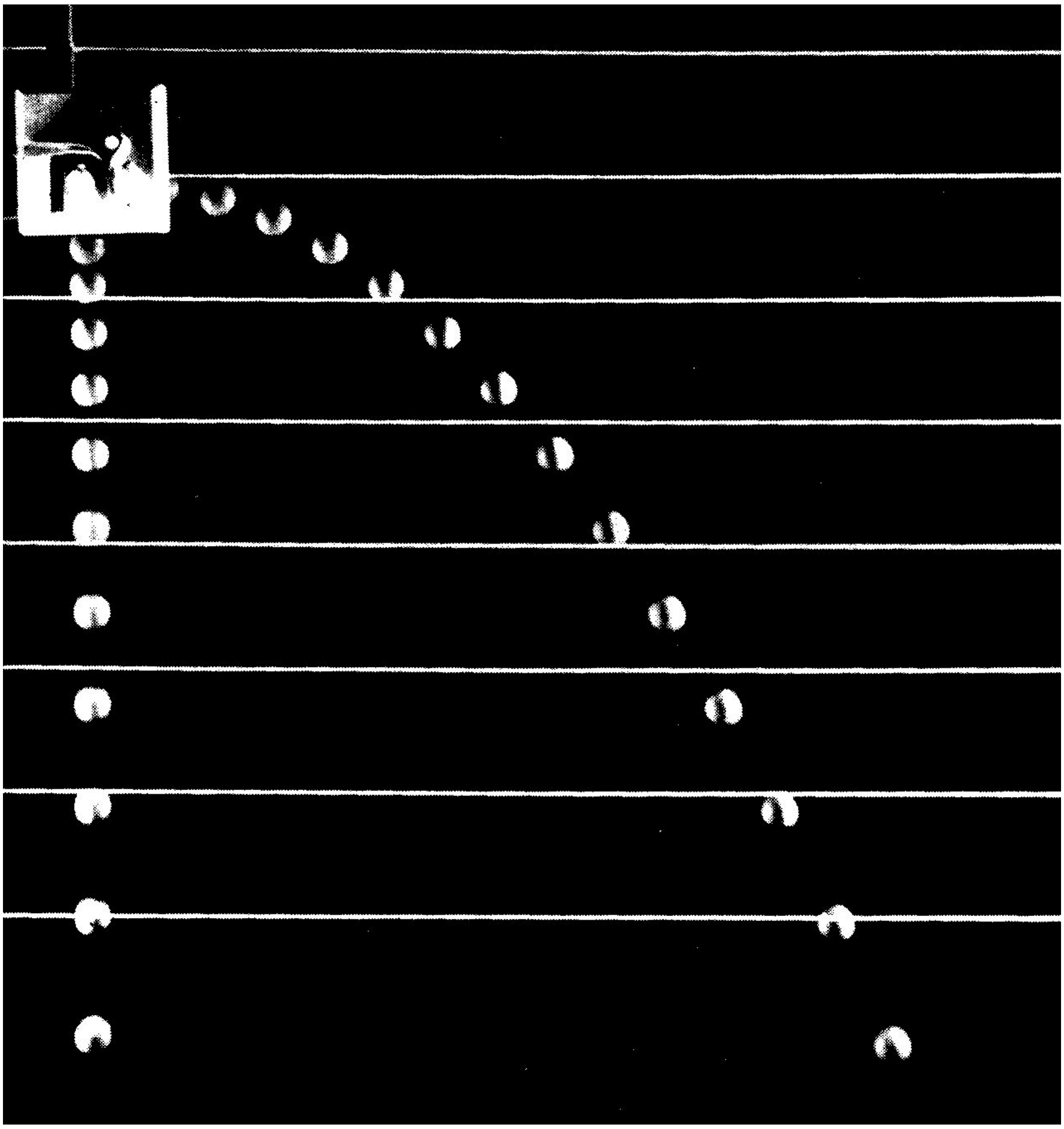
Vers une autre histoire... ?

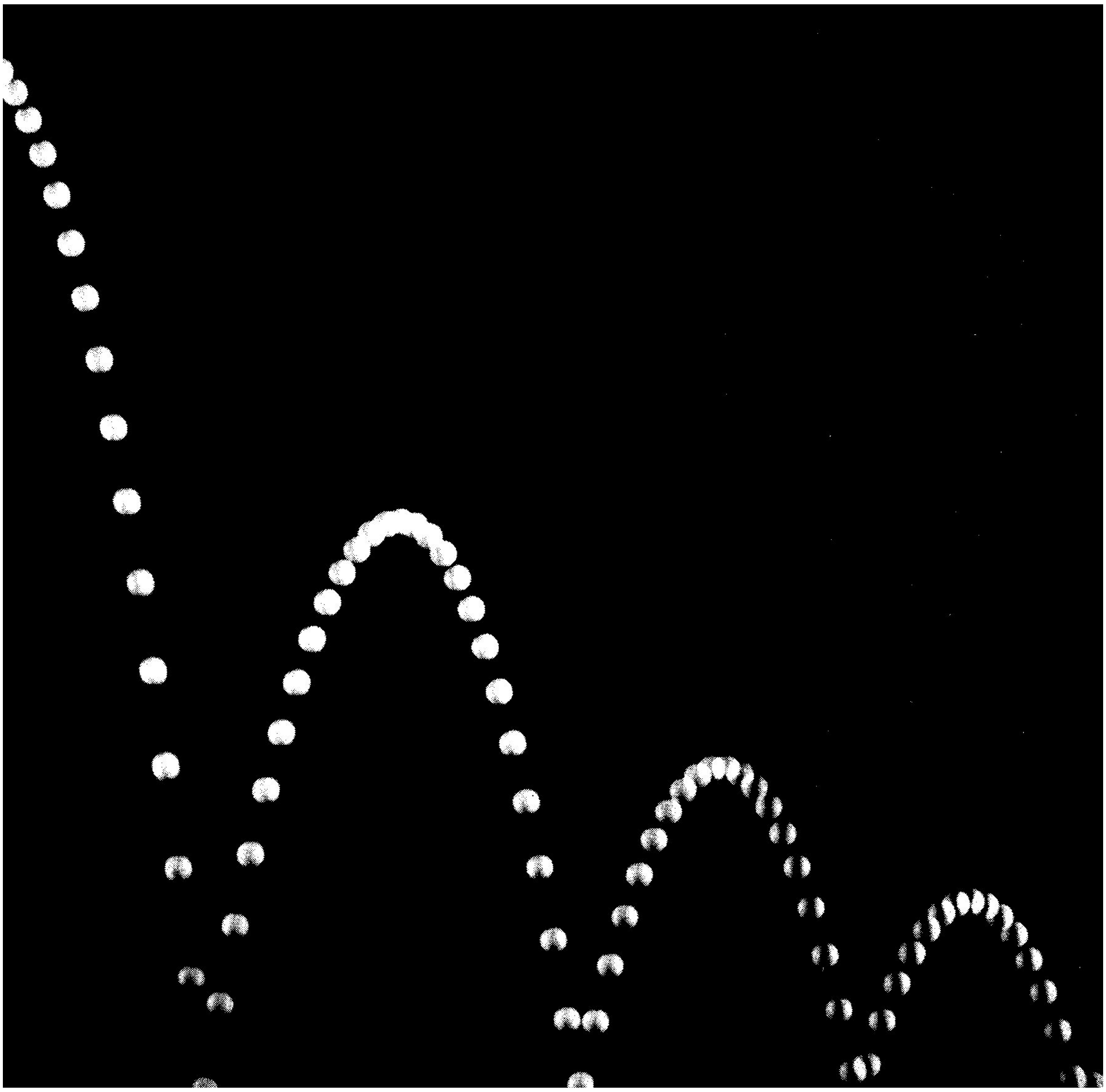
Ce dernier résultat permet de donner une explication géométrique – termes d'une généralisation de ce *transport parallèle* mis en évidence dans le problème du nageur – du résultat de la célèbre expérience de L. Foucault sous le dôme du Panthéon en 1851. Ce n'est pas l'endroit ici de détailler cette explication, aussi belle soit-elle, mais on peut savoir qu'elle est due au mathématicien autrichien J. Radon, dont l'article original est reproduit dans F. Klein, *Vorlesungen über Höhere Geometrie*, J. Springer Verlag, Berlin, 1926.

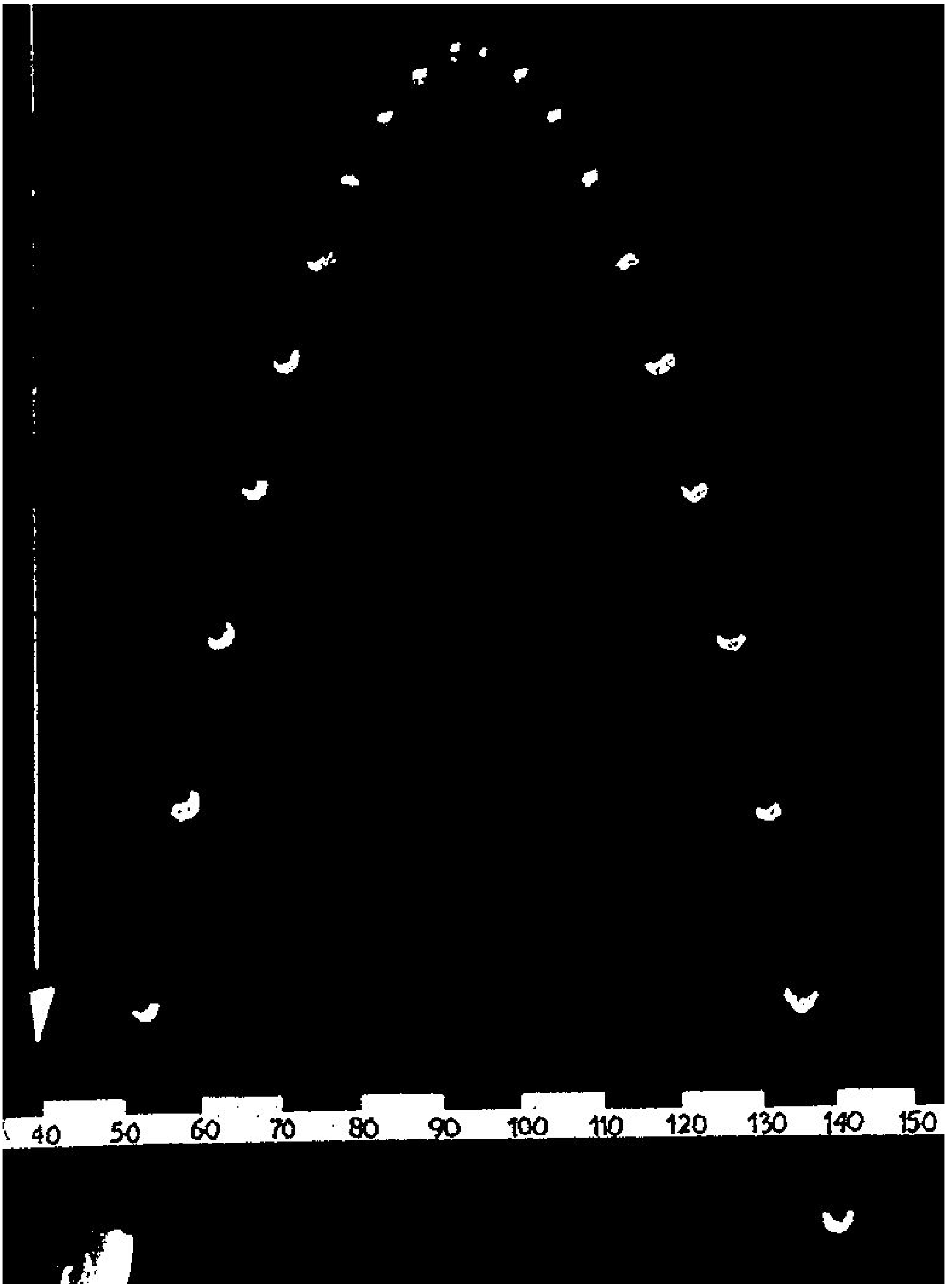
Mais tout cela, c'est déjà une autre histoire...

Annexe III

Documents à photocopier






40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150