Deuxième partie

Un aspect de la linéarité de 12 à 15 ans

5

Tableaux, graphiques, formules

1 Des abaques et des graphiques pour calculer

De quoi s'agit-il ?

Les élèves recueillent des données, ils élaborent des diagrammes en bandes et des diagrammes circulaires à l'aide d'abaques ; ils calculent des pourcentages. Le terme « abaque » est employé ici dans le premier sens donné par le Larousse : graphique permettant de résoudre de nombreux calculs.

Enjeux

Représentation de données par des grandeurs géométriques (segments et angles) et conversion des données en pourcentages, par voie graphique et par calcul. Les instruments graphiques en question permettent d'appréhender les rapports et proportions de manière très visuelle.

Voir chapitre 16, sections 4.9 et 5.3.

Compétences

Représenter des données par un graphique, un diagramme. Dans une situation simple et concrète, estimer la fréquence d'un événement sous forme de rapport.

Calculer des pourcentages.

Interpréter un graphique, un tableau, un diagramme.

De quoi a-t-on besoin ?

Pour les diagrammes circulaires : des maquettes de « bracelets de conversion » (voir la fiche 26 à la page 181), une paire de ciseaux, un bâton de colle ou quelques trombones par groupe de trois ou quatre élèves.

Pour les pourcentages : le cercle gradué en centièmes (voir la fiche 27 à la page 182) et les abaques de conversion de rapports de longueurs en pourcentages (voir les fiches 28, 29 et 30 aux pages 183 à 185).

Comment s'y prendre ?

L'activité commence par une question qui se rapporte à des données recueillies par les élèves.

On dispose, pour plusieurs classes d'une même école, des nombres d'élèves pour les catégories suivantes : ceux qui rentrent à la maison à midi, ceux qui mangent des sandwiches à l'école et ceux qui y prennent un repas chaud. On demande de construire des diagrammes circulaires afin de comparer rapidement les proportions d'élèves dans chaque catégorie pour les différentes classes.
Pour chaque classe, déterminer le pourcentage que représente chacune des catégories.

Le déroulement décrit ci-après part de données fictives à propos des repas de midi. Les élèves peuvent recueillir des informations réelles en enquêtant dans différentes classes ou en s'adressant à l'économat de l'école. Le professeur répartit le travail entre les groupes de façon à ce que l'on puisse dégager des méthodes et des propriétés à partir d'exemples qui comportent des effectifs différents. Traitons par exemple deux relevés, l'un qui correspond à une classe de 29 élèves et l'autre à une classe de 26 élèves.

	Classe 1	Classe 2
Rentrent à la maison	11	5
Sandwiches	3	12
Dîner chaud	15	9
Nombre total d'élèves de la classe	29	26

Avec un bracelet

Le support des bandelettes aide l'élève à construire un diagramme circulaire sans qu'il soit nécessaire de fournir au préalable une définition de rapport ou une procédure. Pour faire apparaître un partage du disque en 29 parties égales, le professeur propose donc aux élèves de découper une des bandelettes de la fiche 26 à la page 181 et de l'enrouler pour former un cercle. En observant comment les élèves se débrouillent avec ce matériel, le professeur veille à ce qu'ils traitent correctement les aspects suivants :

- l'ensemble de tous les élèves d'une classe est représenté par un disque complet et chaque catégorie est représentée par une partie du disque proportionnelle au nombre d'élèves,
- partager le disque revient à partager son contour et à relier les points de partage au centre du disque.

Moyennant quelques indications (que le professeur dispensera de manière parcimonieuse pour bien localiser les points de blocage et laisser aux élèves le plaisir de la découverte), on élabore un mode d'emploi. On choisit une bandelette qui comporte plus de 29 unités et l'on repère les longueurs qui correspondent aux différentes catégories.

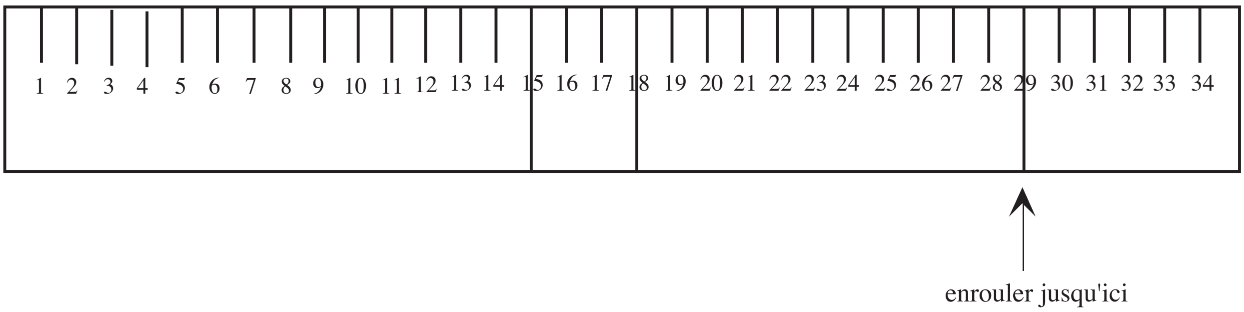


Fig. 1

On ferme, puis on colle ou on place un trombone pour obtenir un « bracelet ». On trace un cercle plus grand que le bracelet et on indique le centre du cercle de manière très visible. Ceci permet de centrer le bracelet à vue et de reporter les traits qui correspondent aux différentes catégories.

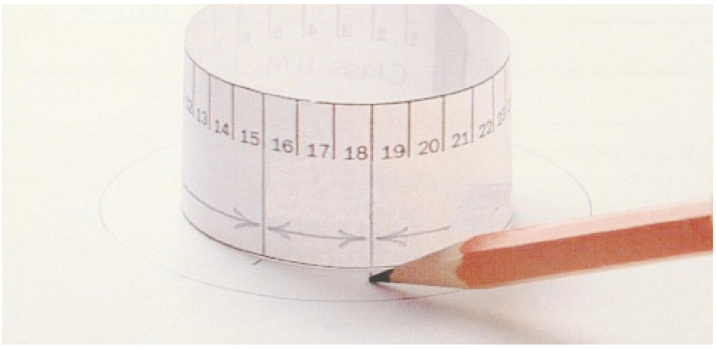


Fig. 2

On obtient un diagramme circulaire qui permet de visualiser la part de chaque catégorie. Pour la classe 2, en utilisant une autre bandelette, on obtient le deuxième diagramme de la figure 3. La comparaison des proportions dans les différentes classes est plus aisée lorsque les cercles ont même rayon. Dans le cas présent, on voit tout de suite que les proportions d'élèves pour chaque catégorie sont très différentes d'une classe à l'autre.

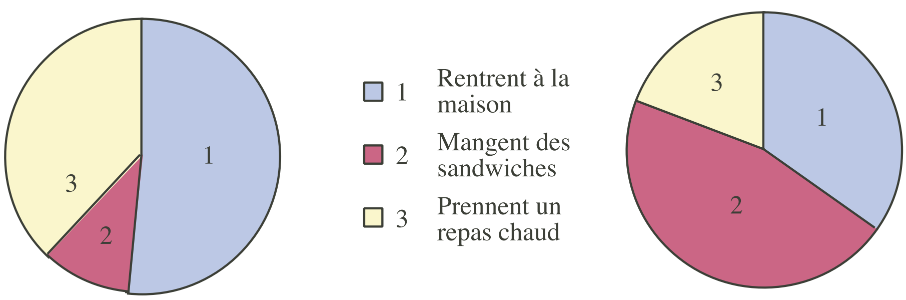


Fig. 3

Pour convertir les données en pourcentages, les élèves disposent de quatre outils : un disque transparent gradué en centièmes (fiche 27 à la page 182), les abaques de conversion de rapports de longueurs en pourcentages (voir fiches 28, 29 et 30 aux pages 183 à 185).

Tout en évitant les calculs, ces outils conduisent à percevoir cette conversion comme un changement de graduation d'un cercle ou d'un segment : un partage du tout en parties égales (ici en 29 ou en 26 parties) est remplacé par un partage en 100. Le professeur choisit les outils qu'il exploitera pour traiter les données recueillies. Il organise la classe de façon à ce que chaque élève n'utilise qu'un abaque, mais qu'il bénéficie des travaux des autres élèves.

Avec le cercle gradué en centièmes

En déposant un cercle gradué transparent sur le disque comme indiqué par la figure 4, on « lit » qu'à la fraction $\frac{15}{29}$ correspond à peu près 52%.

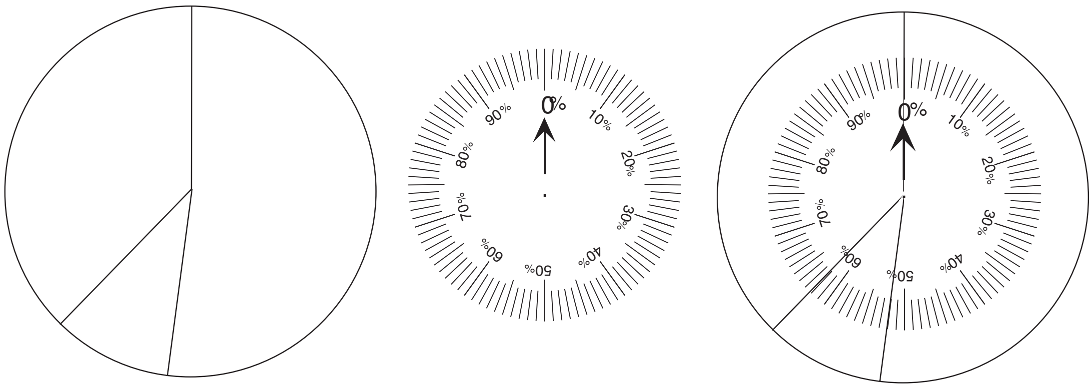


Fig. 4

Il faut ensuite tourner le rapporteur de manière à ajuster la flèche qui pointe 0 sur le premier côté du secteur représentant la catégorie de 3 élèves et de même pour le troisième secteur.

Avec l'abaque de conversion des longueurs en pourcentages

Cet abaque (voir figure 5) ressemble au faisceau lumineux d'un projecteur de diapositives ou d'un agrandisseur. Les segments parallèles à la ligne graduée sont partagés par le faisceau en 10 (ou 100) parties égales.

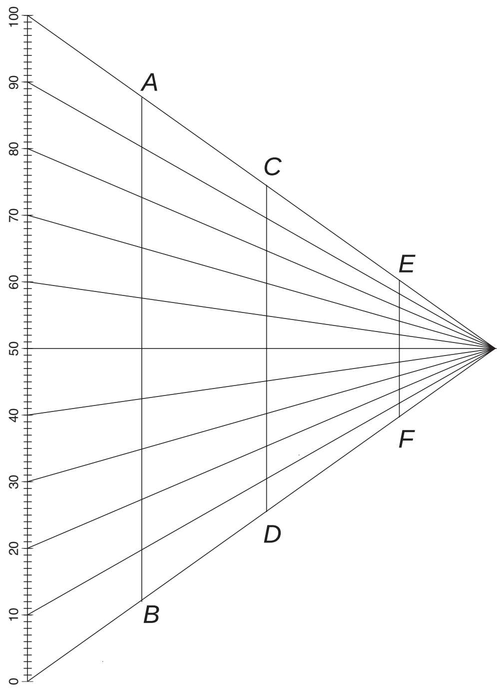


Fig. 5

Si la perception de ce phénomène géométrique n'est pas immédiate pour les élèves, on procèdera à des expériences pour des partages plus simples : observer par exemple où se trouve le milieu d'un segment que l'on place tantôt dans une position parallèle à la ligne graduée, tantôt dans une autre position (voir figures 6 et 7).

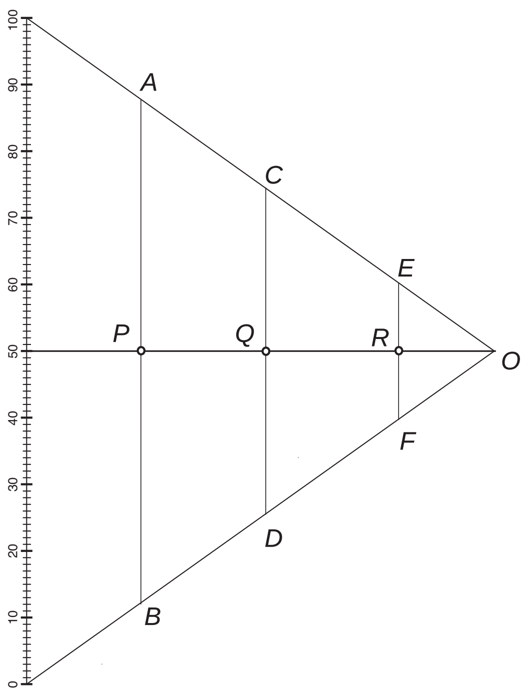


Fig. 6

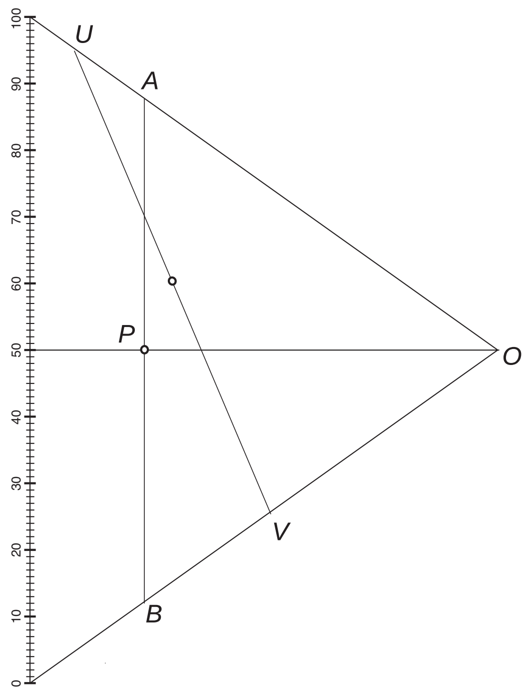


Fig. 7

La figure 8 montre comment disposer la bandelette sur l'abaque pour graduer un segment de 29 unités en centièmes.

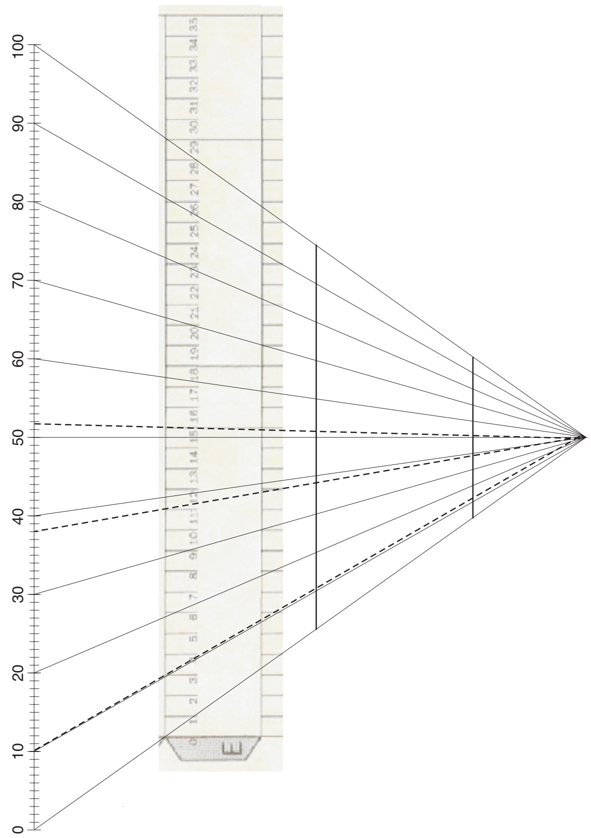


Fig. 8

On y « lit » :

- qu'à la graduation 3 sur la bandelette de 29 unités, correspond à peu près la graduation 10 sur le segment de 100 unités,
- qu'à la graduation 11 sur la bandelette de 29 unités, correspond à peu près la graduation 38 sur le segment de 100 unités,
- qu'à la graduation 15 sur la bandelette de 29 unités, correspond à peu près la graduation 52 sur le segment de 100 unités.

Avec le guide ligné

Pour que les élèves découvrent comment utiliser ce réseau de lignes, on peut d'abord leur montrer comment partager une bandelette en deux, trois ou quatre parties égales en la déposant sur une feuille lignée (voir figure 9).

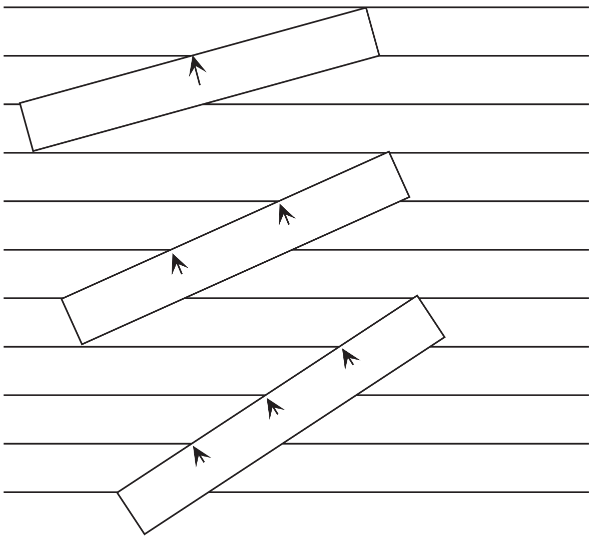


Fig. 9

La figure 10 montre comment déterminer le pourcentage qui correspond à 3 élèves sur 29 ; 11 élèves sur 29 et 15 élèves sur 29.

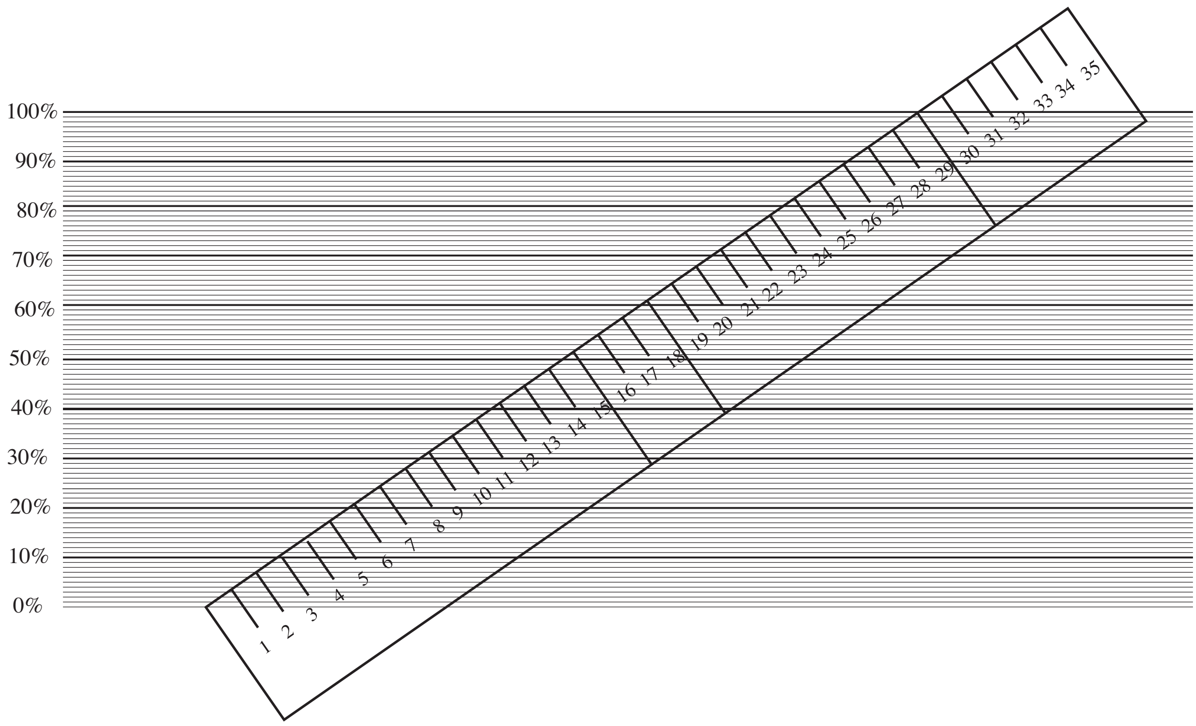


Fig. 10

Avec le repère rectangulaire

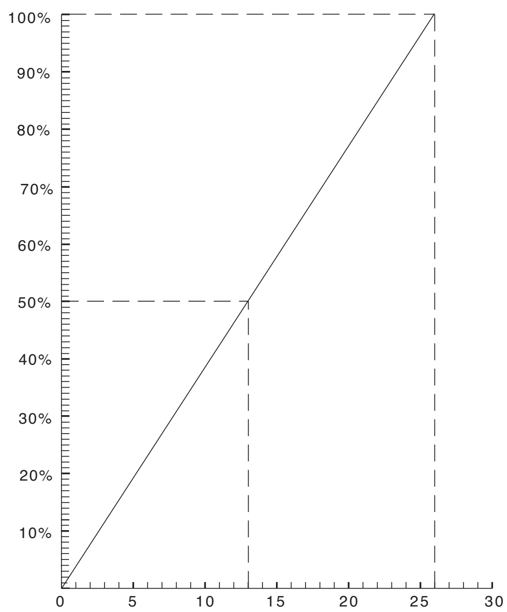


Fig. 11

Le repère fourni aux élèves (figure 11) est prévu pour opérer les conversions relatives à un groupe de 26 élèves. Il montre comment indiquer qu'à 26 sur 26 correspond le rapport 100% et qu'à 13 sur 26 correspond le rapport 50%. Les élèves ont à découvrir comment convertir les autres rapports (5 sur 26, 12 sur 26 et 9 sur 26) en pourcents de la grandeur de référence choisie. L'image du partage en deux qui s'effectue dans trois directions, celles des côtés du rectangle et celle de sa diagonale, donne l'idée de la construction : pour convertir 5 sur 26, on part de la graduation 5 (voir figure 12), on trace un segment vertical, on repère l'intersection de cette verticale avec la diagonale du rectangle, on trace un segment horizontal et on lit le nombre de pourcents correspondant. La figure 13 montre les conversions pour la classe de 29 élèves.

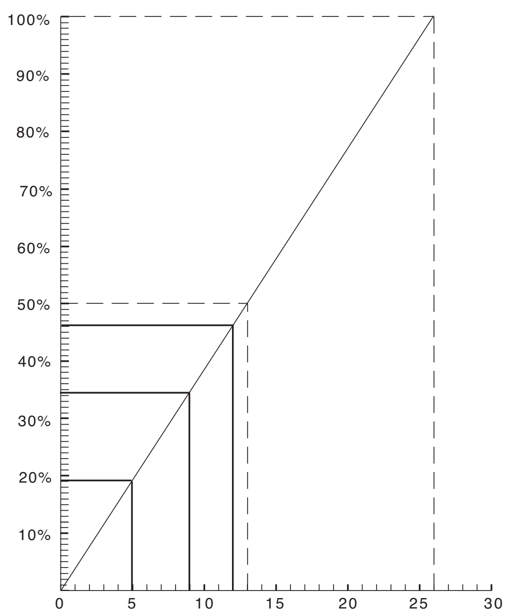


Fig. 12

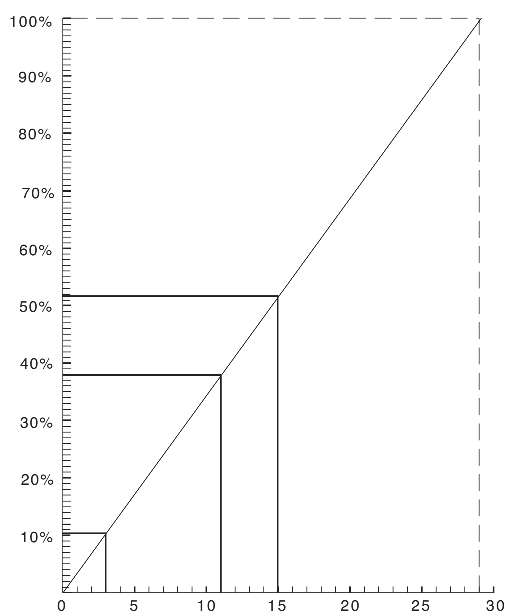


Fig. 13

Ces deux graphiques peuvent servir de supports pour réaliser des diagrammes en bâtons. Il suffit pour chaque donnée, de prendre comme hauteur du bâton, la longueur du segment correspondant sur le graphique. On obtient ainsi le diagramme de la figure 14.

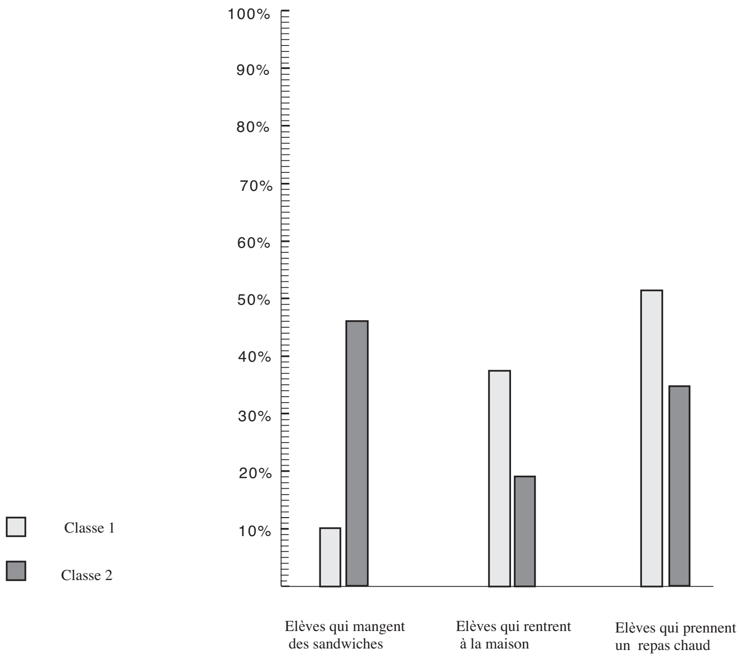


Fig. 14

Les abaques de conversion fournissent des pourcentages approximatifs qui bien souvent suffisent pour construire des diagrammes. On réalise cependant que si l'on veut traiter les données avec plus de précision, on ne peut pas recourir à de tels supports. Le professeur peut tabler sur les images visuelles suscitées par l'activité pour mettre en place une méthode de calcul des pourcentages.

Calculons d'abord le pourcentage exact que représentent 3 élèves d'une classe de 29. Pour ce faire, on remplace les correspondances lues sur les abaques par un tableau de proportionnalité dans lequel 29 correspond à 100.

Nombre d'élèves	Pourcentage
29	100
3	?

Chaque élève est 1/29 de ce tout, trois élèves en constituent trois fois plus c'est à dire 3/29. C'est ce que montre le tableau

	Nombre d'élèves	Pourcentage	
: 29	29	100	: 29
×3	1	$\frac{100}{29}$	×3
	3	$\frac{100\times3}{29}$	

On procède de manière analogue pour calculer quel pourcentage de la classe représentent 11 élèves sur 29 puis 15 élèves sur 29.

Nombre d'élèves	Pourcentage	
29	100	
1	3,448...	
3	10,344...	soit 10,3%
11	37,931...	soit 37,9%
15	51,724...	soit 51,7%

À ce stade, le professeur pose une nouvelle question.

> Déterminer l'opération qui permet de passer d'un nombre de la première colonne du tableau au nombre correspondant de la seconde. Écrire une formule qui généralise cette relation entre le « nombre d'élèves » et le « pourcentage ».

On retourne au tableau pour y déceler par quelles opérations (toujours les mêmes) on passe de la première à la deuxième colonne. Il s'agit d'une division par 29 et d'une multiplication par 100. Les élèves utilisent ensuite un aspect de la notion de fraction : elle remplace la succession de deux opérations par une seule opération : une multiplication par la fraction $\dfrac{100}{29}$.

Nombre d'élèves	Pourcentage	Opérations
29	100	
1	3,448...	$1 \times \dfrac{100}{29}$
3	10,344...	$3 \times \dfrac{100}{29}$
11	37,931...	$11 \times \dfrac{100}{29}$
15	51,724...	$15 \times \dfrac{100}{29}$

Il faut ensuite traduire ce calcul par une formule. Si on appelle x le nombre d'élèves de la catégorie, et si y est le pourcentage qui exprime le rapport entre ce nombre et le nombre total d'élèves de la classe, on a

$$y = x \times \frac{100}{29} \quad \text{ou} \quad y = \frac{100}{29}x.$$

2 Proportionnalité : divers contextes

Nous présentons ici une suite de situations qui éclairent les différentes propriétés d'un tableau de proportionnalité et du graphique qui lui correspond.

La richesse d'un tableau de proportionnalité est telle que les élèves ne peuvent en apercevoir toutes les propriétés sur un seul exemple : le choix de chaque situation est donc particulièrement important pour favoriser l'émergence de telle ou telle propriété. Nous essayons pour chaque activité de bien préciser quelle facette de la proportionnalité est visée afin de permettre aux enseignants de modifier le contexte de l'activité, s'ils le souhaitent, tout en conservant les objectifs précis qu'elle doit atteindre. Les contextes choisis ici nous permettent simplement de réactiver des notions acquises à l'école primaire, telles que multiples, échelles, conversions d'unités, ...

De quoi s'agit-il ?

Les élèves créent des tableaux de nombres, étudient des régularités dans ces tableaux, étendent des tableaux de proportionnalité, établissent les graphiques ou les formules qui leur correspondent, explorent des graphiques. On les confronte également à des situations de non-proportionnalité.

Enjeux

Mettre en évidence les différentes facettes de la proportionnalité.
Identifier, à partir d'un tableau de nombres, d'un graphique ou d'une formule, une situation de proportionnalité parmi d'autres.
Pour une situation donnée, faire le va-et-vient entre le tableau de nombres, le graphique et la formule. Voir à ce sujet le chapitre 16, sections 2 et 5.3.

Compétences

Résoudre des problèmes simples de proportionnalité directe.

Dans une situation de proportionnalité directe, compléter, construire, exploiter un tableau qui met en relation deux grandeurs.

Reconnaître un tableau de proportionnalité directe parmi d'autres.

Déterminer le rapport entre deux grandeurs, passer au rapport inverse.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – Des feuilles de papier, des crayons, des feuilles préparées pour la réalisation des graphiques, éventuellement une calculatrice.

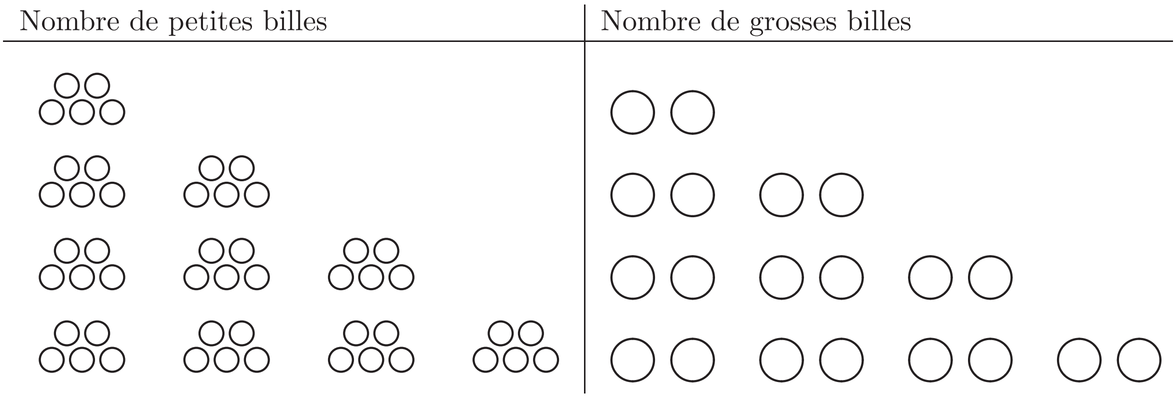
2.1 Un problème de troc

Comment s'y prendre ?

Dans la cour de récréation, les enfants font du troc : cinq petites billes s'échangent contre deux grosses. Représenter les échanges possibles dans un tableau.

Après un temps de recherche libre, le professeur examine les résultats des élèves. Il nous semble qu'une première étape dans l'apprentissage de la proportionnalité consiste à repérer dans un tableau figuratif (sans nombres) les premières propriétés de proportionnalité. C'est la raison pour laquelle l'analyse d'un tableau comme celui présenté ci-dessous est importante, même s'il semble un peu simpliste pour des élèves de 12 ans[1].

[1] On peut susciter la réalisation de ce type de tableau en distribuant aux élèves des petits cartons sur lesquels seront dessinés des paquets de deux billes et des paquets de cinq billes qu'ils n'ont plus qu'à placer dans les colonnes du tableau.



Dans ce type de représentation, visuellement plus parlant, certaines propriétés apparaissent de façon plus évidente que dans un tableau de nombres. Chaque fois qu'on ajoute cinq billes dans la colonne de gauche, on ajoute deux billes dans la colonne de droite. Si on double le nombre de billes dans la colonne de gauche, on le double aussi dans la colonne de droite, etc. Il est ensuite plus simple de retrouver ces propriétés dans les tableaux de nombres réalisés dans un deuxième temps.

On arrive à l'élaboration d'un tableau de nombres dans lequel les élèves reportent les observations faites précédemment.

	Nombre de petites billes	Nombre de grosses billes	
	5	2	
+5			+2
	10	4	
+5			+2
	15	6	
+5			+2
	20	8	
+5			+2
	25	10	
	⋮	⋮	

	Nombre de petites billes	Nombre de grosses billes	
	5	2	
	10	4	
×2	15	6	×2
	20	8	
	25	10	
	⋮	⋮	

On poursuit l'activité en posant les questions suivantes.

Combien de petites billes faut-il donner pour en recevoir 24 grosses, 35 grosses, . . . ? Combien de grosses billes recevra-t-on si on dispose de 15 petites billes, de 24 petites billes, . . . ?

Après un temps de recherche libre, les élèves comparent leurs résultats et leurs démarches. Il est important de les laisser expliquer ces démarches, en espérant évidemment que celles-ci seront suffisamment variées pour permettre de dégager plusieurs propriétés de la proportionnalité. Le choix des nombres dans l'énoncé induit ici la découverte des propriétés liées aux facteurs[2] internes à une colonne. Par contre, le facteur externe, qui permettrait de passer directement de la première à la deuxième colonne du tableau ($\times\frac{2}{5}$), ne viendra pas spontanément à l'esprit des élèves de cet âge. Voici quelques exemples de calculs que l'on peut voir surgir dans une classe en réponse à la question « combien de petites billes faut-il donner pour en recevoir 24 grosses ? »

- Continuer de 2 en 2, dans la deuxième colonne, de 10 jusqu'à 24, et donc de 5 en 5 dans la première colonne, de 25 jusqu'à 60.
- Accélérer en allant de 4 en 4 dans la deuxième colonne et donc de 10 en 10 dans la première.
- Remarquer que pour 10 grosses billes, il en faut 25 petites, en conclure que pour 20 grosses, il en faudra 50 petites et enfin aller jusqu'à 24 en ajoutant 4 d'un côté et donc 10 de l'autre.
- Remarquer que pour 12 grosses billes, il en faut 30 petites, en conclure que pour 24 grosses, il en faudrait deux fois plus, c'est-à-dire 60 petites.
- Remarquer que pour 14 grosses billes, il en faut 35 petites, que pour 10 grosses il en faut 25 petites, en conclure que pour 24 grosses il en faudra $35 + 25 = 60$ petites.

L'examen de chacune des méthodes de calcul permet de découvrir les différentes propriétés liées aux rapports internes du tableau de proportionnalité.

Dans deux des exercices proposés, le nombre de billes dont on dispose ou dont on souhaite disposer ne correspond pas exactement à un échange possible : combien de grosses billes peut-on obtenir si on dispose de 24 petites billes ? Combien de petites billes faut-il pour en obtenir 35 grosses ? C'est le moment, si ce n'est déjà fait, d'analyser les propriétés arithmétiques des nombres contenus dans les deux colonnes du tableau : on trouve les multiples de 5 dans la première et les multiples de 2 dans la deuxième. Répondre aux deux questions précédentes revient donc à situer un nombre entre deux multiples consécutifs, par exemple ici, 24 est compris entre 20 et 25 dans la liste des multiples de 5.

La découverte des multiples de 5 dans une colonne et des multiples de 2 dans l'autre permet d'établir le tableau suivant :

	Nombre de petites billes	Nombre de grosses billes	
	5	2	
$2 \times \mathbf{5}$	10	4	$2 \times \mathbf{2}$
$3 \times \mathbf{5}$	15	6	$3 \times \mathbf{2}$
$4 \times \mathbf{5}$	20	8	$4 \times \mathbf{2}$
$5 \times \mathbf{5}$	25	10	$5 \times \mathbf{2}$
...	...	...	...

[2] Nous préférons parler ici de « facteur » interne ou externe et non de « rapport », car il s'agit ici de trouver le nombre par lequel on multiplie un résultat pour en obtenir un autre (que ce soit au sein d'une même colonne ou d'une colonne à l'autre).

C'est une étape importante qui fournit une méthode générale pour compléter n'importe quelle ligne du tableau en posant simplement une division et une multiplication. Les élèves vérifieront son efficacité sur des exercices où la grandeur des nombres ne permet plus de travailler de proche en proche.

On peut ensuite passer à la réalisation du graphique associé à ce tableau de nombres. On donne aux élèves une feuille de papier munie d'un système d'axes prégradués, on leur demande de placer les points correspondant aux nombres repris dans le tableau. Une simple observation du graphique permet de voir que les points s'alignent avec l'origine des axes et que chaque fois que l'on augmente de 5 sur l'axe horizontal, on augmente de 2 sur l'axe vertical, ce qui traduit bien les conclusions tirées des tableaux de la page précédente. L'activité se termine par la recherche sur le graphique de quelques valeurs non encore calculées.

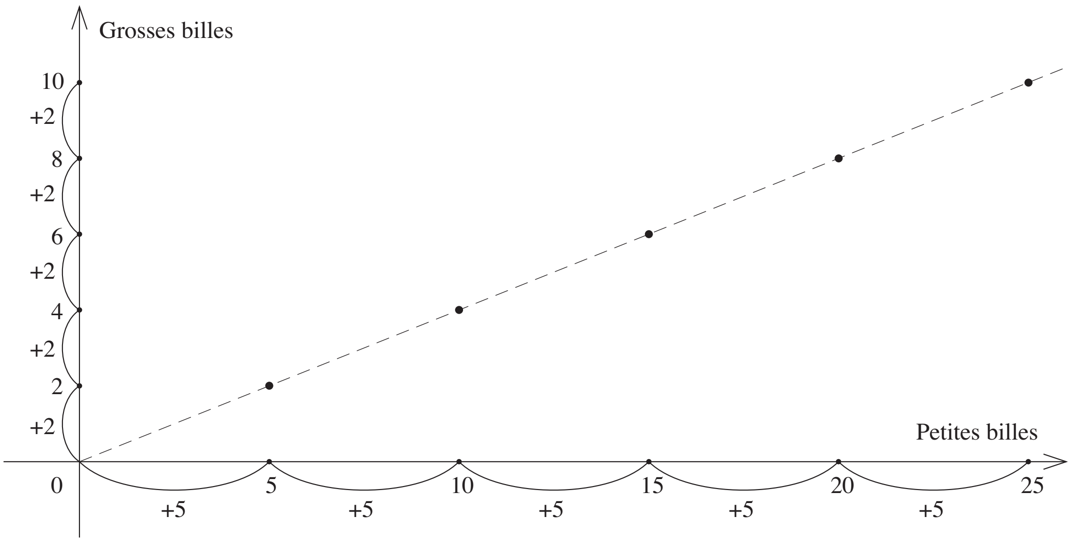


Fig. 15

2.2 Une épargne intéressante

Cette activité permet de fixer les acquis de la précédente, tout en faisant découvrir de nouvelles propriétés. Elle peut paraître plus simple à certains et il est tout à fait possible d'intervertir ces deux activités à condition de bien garder à l'esprit les objectifs précis de chacune d'elles.

Comment s'y prendre ?

À l'école, on organise une épargne pour financer le départ en classes de neige. Chaque fois qu'un élève a apporté 400 francs, la caisse de l'amicale de l'école en ajoute 80. Établir un tableau qui montre l'évolution de l'épargne de l'élève, la participation correspondante de l'amicale et l'épargne totale de l'élève.

Après un temps de recherche libre, le professeur regroupe les résultats des élèves dans un tableau comme ci-dessous.

Épargne de l'élève en BEF	Bonus de l'amicale en BEF	Épargne totale en BEF
400	80	480
800	160	960
1 200	240	1 440
1 600	320	1 920
2 000	400	2 400
...	...	...

Les objectifs de cette activité sont doubles : susciter l'apparition du facteur externe et montrer que les méthodes de calcul mises en évidence dans la première situation sont encore efficaces.

Le facteur externe, c'est-à-dire le coefficient de proportionnalité, lié à cette activité est donc volontairement plus simple que dans la situation précédente : il suffit de diviser les nombres de la première colonne par 5 pour obtenir ceux de la deuxième. Il sera intéressant de voir comment les élèves réagiront à cette situation après avoir résolu la première. Vont-ils reproduire les mêmes automatismes et calculer avec les facteurs internes ou vont-ils directement recourir au facteur externe ? Il faut espérer que les deux méthodes apparaissent dans la classe et permettent de découvrir une nouvelle propriété qui vienne s'ajouter à celles déjà dégagées. Si les élèves n'évoquent pas spontanément le facteur externe, il appartiendra au professeur de le faire émerger.

De même, au niveau du graphique, il convient de faire remarquer que les points sont toujours alignés avec l'origine et que chaque fois que l'on avance de 400 horizontalement, on monte de 80 verticalement.

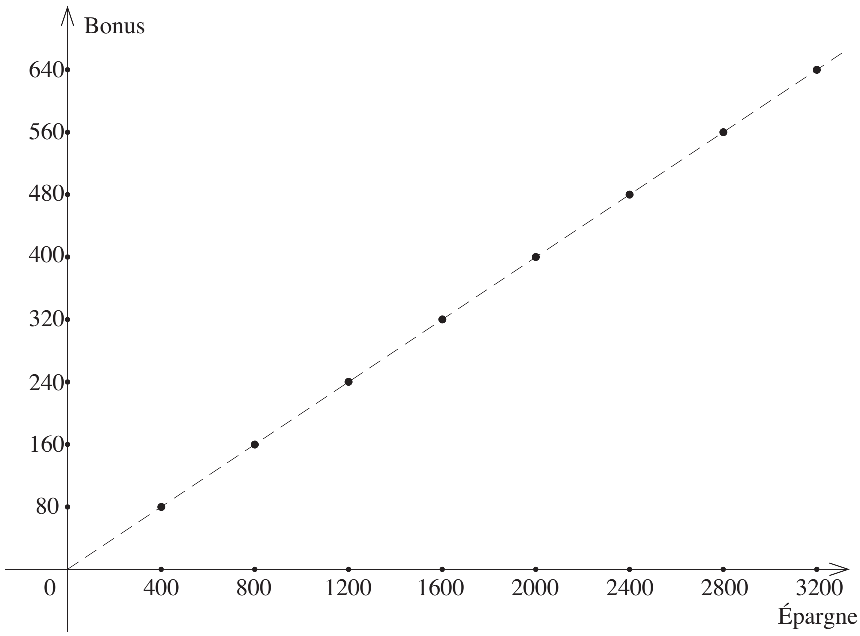


Fig. 16

Les similitudes évidentes entre les deux situations imposent un bref retour à la première. N'existe-t-il pas aussi dans le premier cas une opération qui permette de passer directement d'une colonne à l'autre ? Les élèves feront sans doute une première proposition sous la forme d'une composée d'opérateurs, comme par exemple : on divise par 5 et puis on multiplie par 2. Il appartiendra au professeur de juger du moment où il convient de rapprocher les deux situations en passant aux facteurs multiplicatifs $\times\frac{1}{5}$ et $\times\frac{2}{5}$. Cette étape représente un véritable seuil épistémologique pour les élèves de cet âge. Peut-être faudra-t-il attendre la synthèse finale pour le franchir.

2.3 Une situation non proportionnelle

Cette question amène une situation de non-proportionnalité qui permet de contraster les propriétés du tableau de nombres et du graphique avec celles des deux situations précédentes.

Comment s'y prendre ?

> Sur une feuille quadrillée, tracer des carrés de 1, 2, 3, 4, 5, ...unités[3] de côté. Calculer le nombre total de petits carrés de chaque figure. Compléter le tableau ci-dessous. Faire la représentation graphique. Que remarque-t-on ?

Les élèves travaillent d'abord sur du papier quadrillé pour dessiner les carrés successifs et déterminer le nombre de petits carrés des figures, ensuite ils établissent le tableau de nombres suivant.

Nombre d'unités du côté	Nombre de petits carrés de la figure
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
...	...

L'analyse du tableau fait ressortir l'absence d'un facteur commun qui permettrait de passer d'une colonne à l'autre et la difficulté de prévoir un résultat en se référant à d'autres lignes du tableau, puisque les méthodes de calcul mises en évidence lors des situations précédentes se révèlent ici inefficaces. Par exemple,

si le côté vaut 2 unités, le carré compte 4 petits carrés,
si le côté vaut 3 unités, le carré compte 9 petits carrés,
si le côté vaut 5 unités, le carré compte 25 petits carrés.

Or, si $2 + 3 = 5$, il est clair que $4 + 9 \neq 25$.

[3] L'unité de longueur du côté est celle induite par le quadrillage du papier.

De même, si on multiple par 2 un nombre de la première colonne, on ne multiplie pas par 2, mais par 4, le résultat correspondant de la deuxième colonne.

	Nombre d'unités du côté	Nombre de petits carrés de la figure	
	1	1	
	2	4	
$\times 2$	3	9	$\times 4$
	4	16	
	5	25	
	$\vdots$	$\vdots$	

Il est aussi intéressant d'étudier les écarts entre deux lignes successives du tableau et de voir que, contrairement aux situations précédentes, si l'écart est toujours constant dans la colonne de gauche, il ne l'est pas dans la colonne de droite. On peut se demander si cela va influencer l'allure du graphique. Certains émettront l'idée que les points ne sont sans doute plus alignés.

	Nombre d'unités du côté	Nombre de petits carrés de la figure	
	1	1	
$+1$			$+3$
	2	4	
$+1$			$+5$
	3	9	
$+1$			$+7$
	4	16	
$+1$			$+9$
	5	25	
	$\vdots$	$\vdots$	

Les élèves élaborent ensuite, sur une feuille quadrillée, le graphique qui correspond à la situation.

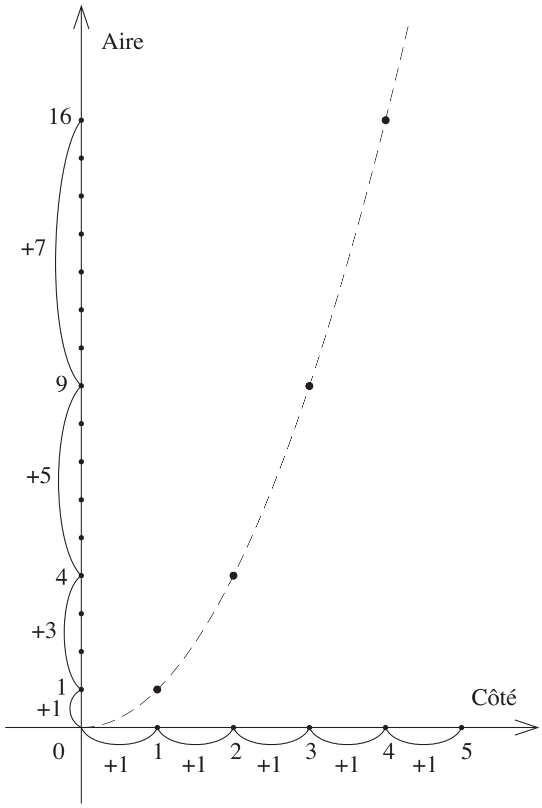


Fig. 17

Dans ce cas-ci, on peut les laisser se débrouiller seuls pour placer et graduer le système d'axes. Une fois les points dessinés sur le graphique, ils vérifient leur conjecture, à savoir que les points ne s'alignent pas. Ce n'est pas pour autant que les élèves pourront tracer seuls la courbe qui relient les différents points du graphique. En effet, si on les laisse faire, la plupart d'entre eux relient, deux par deux, les différents points du graphique par un segment de droite. Dans ce cas, on peut choisir une valeur intermédiaire calculée entre deux points présents sur le graphique et montrer que le point correspondant ne se trouve pas sur le segment qu'ils ont tracé et donc que leur graphique n'est pas correct.

2.4 Le plan de la classe

Cette situation introduit deux sous-unités d'une même grandeur et de ce fait, entraîne à l'utilisation de nombres décimaux. Elle permet également d'apprendre à écrire une formule à partir d'un tableau de proportionnalité.

Comment s'y prendre ?

On veut faire le plan de la classe. Pour cela, on décide de représenter une longueur de 1 m dans la classe par 4 cm sur la feuille. Voici des mesures relevées dans la classe : 8 m ; 6,4 m ; 1,2 m ; 3 m. Quelles sont les mesures correspondantes sur le plan ? Si on trouvait sur le plan les dimensions 5 cm ; 6,8 cm ; 25 cm ; 40 cm, à quoi correspondraient-elles dans la réalité ?

On laisse les élèves chercher librement. Dans un premier temps, ils négligent les unités de mesure et construisent spontanément leur tableau en multipliant par 4 les nombres de la colonne de gauche pour obtenir ceux de la colonne de droite, comme ci-dessous.

Longueurs en m dans la classe	Longueurs en cm sur le plan
1	4
8	32
6,4	25,6
1,2	4,8
3	12
1,25	5
1,7	6,8
6,25	25
10	40

Il est indispensable d'attirer l'attention des élèves sur le problème que pose le rapport externe. En effet, si on considère le tableau de nombres sans se préoccuper des mesures (reprises seulement dans les titres de colonnes), on peut dire que le facteur externe est 4. Par contre, si on tient compte des unités de mesure, les nombres de la première colonne représentent des mètres et ceux de la deuxième colonne des centimètres. Dans ce cas, 4 ne peut être considéré comme le facteur externe du tableau, car en multipliant 1 mètre par 4, on n'obtient pas 4 centimètres. Il faut donc travailler avec des longueurs exprimées dans la même unité dans les deux colonnes et élaborer un autre tableau qui tienne compte de l'échelle : à 1 m dans la classe correspond 4 cm, c'est-à-dire 0,04 m. L'échelle du plan est donc de $\frac{1}{25}$.

$\times \frac{1}{25}$

Longueurs en m dans la classe	Longueurs en m sur le plan
1	0,04
8	0,32
6,4	0,256
1,2	0,048
3	0,12
1,25	0,05
1,7	0,068
6,25	0,25
10	0,4

On demande ensuite aux élèves d'écrire les opérations qui permettent de passer d'un nombre de la première colonne au nombre correspondant de la deuxième. Par exemple

$$6,4 : 25 = 0,256 \quad \text{ou} \quad 6,4 \times \frac{1}{25} = 0,256.$$

On les encourage ensuite à généraliser ces calculs pour obtenir les formules suivantes ; si x représente la longueur en mètres dans la réalité, y la longueur en mètres sur le plan, il vient

$$y = x : 25 \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{25} \times x.$$

L'échelle d'une carte est donc le rapport externe d'un tableau de proportionnalité. Ainsi, ce tableau permet-il de répondre aussi bien à une question relative à une mesure réelle, à une mesure sur le plan ou à l'échelle de ce plan.

2.5 Remplir un réservoir d'essence

Les objectifs de cette activité sont doubles. Premièrement, elle introduit des grandeurs de types différents (masse et capacité) et donc une grandeur composée comme facteur externe (kg/l). Deuxièmement, elle débouche sur l'étude de deux fonctions, l'une linéaire, l'autre affine. Cette dernière permet de mettre en évidence le fait qu'un tableau de nombres non proportionnels peut donner un graphique dont les points sont alignés entre eux, mais pas avec l'origine des axes.

Comment s'y prendre ?

> Un réservoir d'essence a une masse à vide de 8 kg. On le remplit d'essence. La masse volumique de l'essence est de 0,75 kg/l. Calcule la masse du réservoir au fur et à mesure du remplissage.

Il est probable que certains élèves aient besoin d'éclaircissements sur la notion de masse volumique. Le professeur veillera donc à donner les explications indispensables à la bonne compréhension de l'énoncé.

Il invitera ensuite les élèves à calculer la masse d'essence correspondant à 4, 8, 12, 14, 36, 50 litres et la masse totale du réservoir à chaque étape. Après un temps de recherche libre, on regroupe les résultats des élèves dans le tableau suivant.

Nombre de litres V en l	Masse du contenu M en kg	Masse totale T en kg
4	3	11
8	6	14
12	9	17
14	10,5	18,5
36	27	35
50	37,5	45,5

L'analyse du tableau se fait en deux temps. On se concentre d'abord sur les deux premières colonnes, ce qui permet de mettre en évidence la proportionnalité des grandeurs V et M. Les différents volumes n'ont pas été choisis au hasard, ils permettent d'insister une nouvelle fois sur quelques propriétés d'un tableau de proportionnalité.

Nombre de litres V en l	Masse du contenu M en kg
4	3
8	6
12	9
14	10,5
36	27
50	37,5

Le professeur demande alors aux élèves d'élaborer la formule qui lie les deux grandeurs, à savoir $M = 0,75 \times V$, et de réaliser le graphique correspondant à cette fonction (le choix de l'échelle est laissé à l'initiative des élèves). Ils constatent une fois de plus que le graphique de la figure 18 est une droite passant par l'origine des axes.

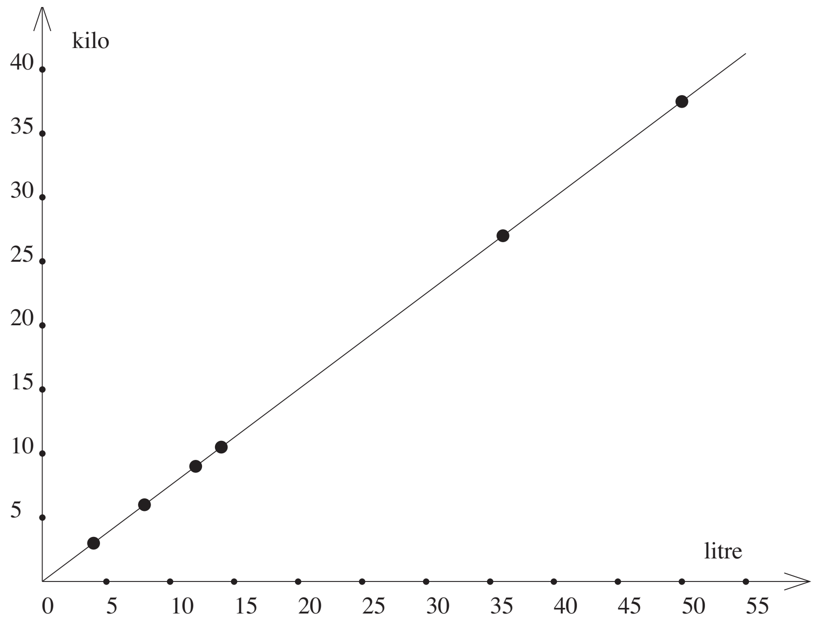


Fig. 18

On examine dans un deuxième temps la relation qui lie le volume d'essence et la masse totale du réservoir. L'analyse du tableau de nombres permet de constater rapidement que ces deux grandeurs ne sont pas proportionnelles.

Nombre de litres V en l	Masse totale T en kg
4	11
8	14
12	17
14	18,5
36	35
50	45,5

Peut-on néanmoins trouver une formule qui permette de calculer la masse totale du réservoir en fonction du nombre de litres d'essence ? Si les élèves ne proposent pas spontanément la formule, le professeur les aidera en mettant en évidence les opérateurs qui permettent de passer d'une colonne à l'autre du tableau.

Nombre de litres V en l	Masse du contenu M en kg	Masse totale T en kg
4	3	11
8	6	14
V	$0,75 \times V$	$0,75 \times V + 8$

Les élèves réalisent ensuite le graphique correspondant à cette situation. Ils constatent que, même si la masse totale n'est pas proportionnelle au volume d'essence, les points du graphique de la figure 19 sont alignés. Néanmoins, la droite qui joint ces points ne passe pas par l'origine des axes.

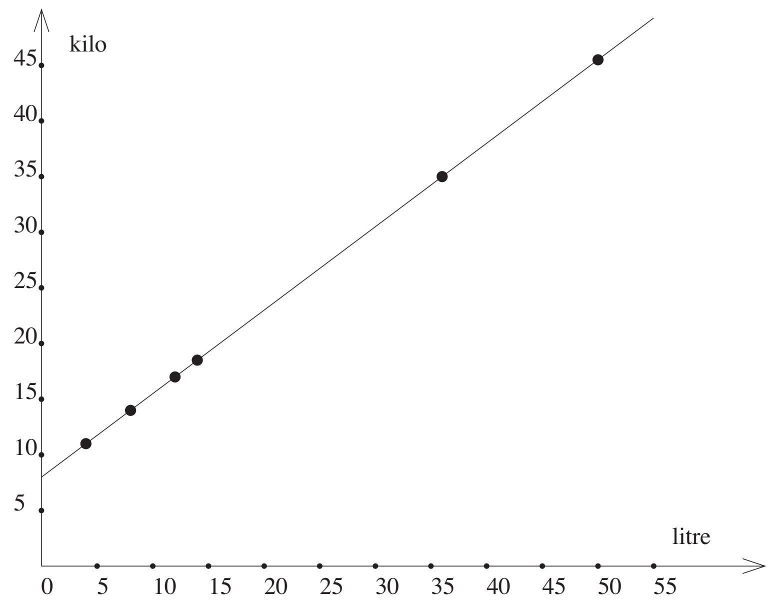


Fig. 19

Ces deux caractéristiques de la fonction affine méritent d'être analysées un peu plus profondément. Pourquoi les points du graphique s'alignent-ils ? Pour répondre à cette question, on demande aux élèves de compléter le tableau suivant en calculant systématiquement litre après litre les masses totales du réservoir, puis de relever, dans chaque colonne, les écarts entre deux lignes successives du tableau.

Nombre de litres V en l	Masse totale T en kg
1	8,75
2	9,5
3	10,25
4	11
5	11,75
6	12,5

Chaque fois que l'on augmente de 1 dans la colonne de gauche, on augmente de 0,75 dans la colonne de droite. C'est normal puisque chaque litre d'essence ajouté dans le réservoir a une masse de 0,75 kg. Comment cela se traduit-il graphiquement ? Si on reprend le graphique 19 en graduant les axes en unités, la densité des points obtenus ne permet pas d'analyser clairement la situation. Pour mieux voir, on effectue un zoom sur la partie du grahique concernée par les nombres repris dans le tableau ci-dessus.

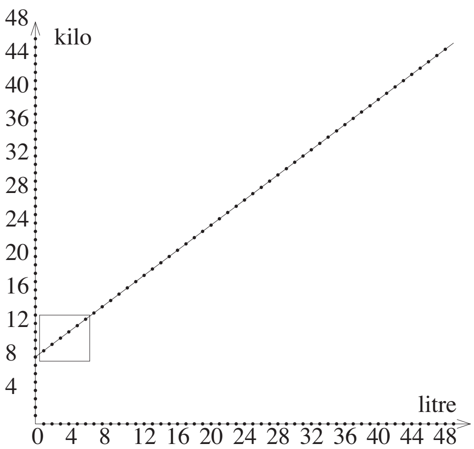


Fig. 20

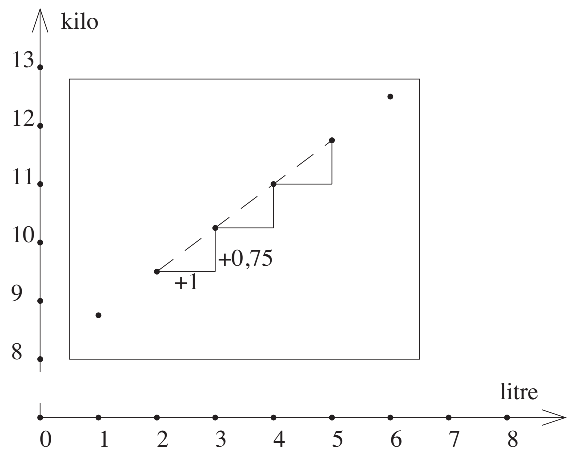


Fig. 21

On se place alors en un point du graphique, on avance de 1 cm horizontalement, puis de 0,75 cm verticalement, et on arrive bien au point suivant du graphique. En répétant cette opération de proche en proche, on construit ce que les élèves appellent un « escalier ». L'image d'une planche posée sur cet escalier suffit à les convaincre de l'alignement des points du graphique. Il reste à régler le problème de l'ordonnée à l'origine. Pour ce faire, on pose deux questions : quelle est l'ordonnée du point d'intersection du graphique avec l'axe des y ? Quel rapport a l'ordonnée de ce point avec l'énoncé du problème ?

On peut d'ailleurs envisager la question de manière plus générale en comparant toutes les ordonnées des points du graphique de la figure 19 aux ordonnées des points d'abscisses correspondantes sur le graphique de la figure 18. On en conclut rapidement que la différence des ordonnées est constante et vaut 8. Si on superpose les deux graphiques, on s'aperçoit que le graphique de la figure 19 est l'image de celui de la figure 18 par une translation verticale de huit unités.

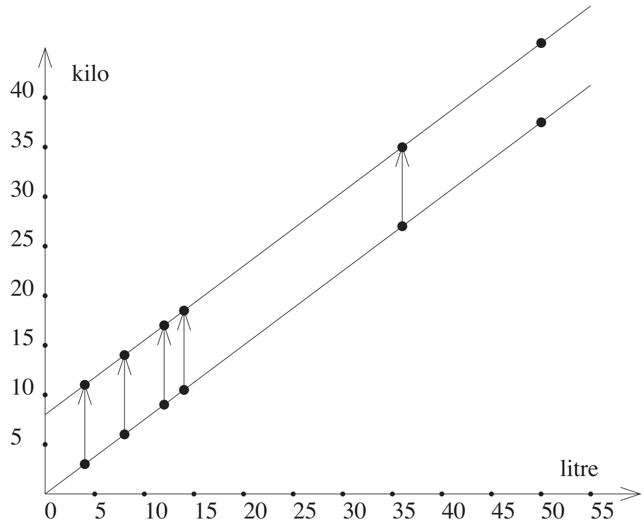


Fig. 22

Toute fonction dont le graphique est constitué de points alignés est dite *affine* ; si de plus les points sont alignés avec l'origine, elle est dite *linéaire*.

Prolongements possibles

On peut introduire quelques transformations de formules en posant, par exemple, les questions suivantes.

- Quel est le volume d'essence qui correspond à une masse d'essence de 40,5 kg ?
- Quel est le volume d'essence qui correspond à une masse totale du réservoir de 38 kg ?

2.6 Proportionnel ou non proportionnel ?

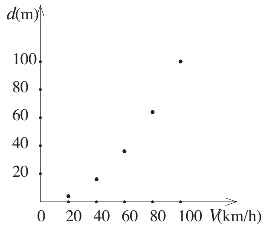
Cette dernière activité a pour objectif de faire le point sur les différentes images mentales que les élèves se sont forgées tout au long des activités précédentes. Nous leur présentons donc volontairement divers types de représentation : textes, tableaux, graphiques, photos, dessins. Nous avons également pris soin de varier les contextes.

Comment s'y prendre ?

Observe attentivement les différents textes, tableaux et graphiques qui suivent. Classe chacune des situations ainsi décrites dans le tableau vierge de la page 128. Indique dans la colonne de gauche les situations proportionnelles, et dans la colonne de droite celles qui ne le sont pas. Justifie soigneusement ton choix dans chacun des cas.

Situation 1

Distance de freinage d'un véhicule



Situation 2

Prix en EUR	Prix en BEF
10	403.399
50	2016.995
100	4033.99
200	8067.98
500	20169.95
1000	40339.9

Situation 3

Agrandissements photos

10 × 15 cm	0,20 EUR
13 × 18 cm	0,71 EUR
20 × 23 cm	2,45 EUR
30 × 45 cm	4,93 EUR
40 × 60 cm	6,17 EUR

Situation 4

Longueur du pied en cm	Pointure de la chaussure
18	27
22	33
26	39
28	42

Situation 5

Jean court le 100 m en 13 secondes et le 200 m en 29 secondes.

Situation 6

Pour la rentrée scolaire, un supermarché annonce des prix sacrifiés sur les fournitures scolaires :
1 bloc de feuilles pour 1,50 EUR
5 blocs de feuilles pour 6 EUR
10 blocs de feuilles pour 12 EUR

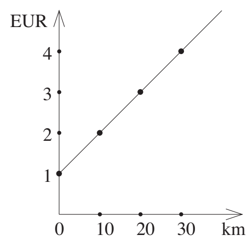
Situation 7

Pierre et Marc sont deux frères ; on a indiqué dans le tableau ci-dessous leurs âges respectifs à différentes dates

âge de Pierre	1	3	8	15
âge de Marc	4	6	11	18

Situation 8

Course en taxi



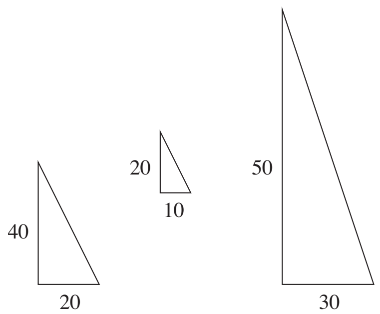
Situation 9

On roule à bicyclette. Notons N le nombre de tours de roue et d la distance parcourue en mètres,

N	5	10	23	30
d	11	22	50,6	66

Situation 10

Triangles rectangles



Situations proportionnelles	Situations non proportionnelles

À ce stade, les élèves reconnaissent pratiquement une situation de proportionalité lorsque

- dans un tableau présenté en colonnes, les nombres de la deuxième colonne s'obtiennent en multipliant ceux de la première par un même nombre,
- sur un graphique, les points sont tous alignés avec l'origine des axes.

Si la situation de départ ne présente ni tableau de nombres, ni graphique de fonctions, les élèves élaborent spontanément leur propre tableau de nombres, ils recourent très rarement au graphique.
Au terme de cette activité, une petite synthèse reprendra donc ces deux propriétés essentielles qui devraient faire partie du bagage minimum d'un élève à l'issue du premier degré du secondaire.

3 Patterns de cubes et proportionnalité

Nous avons emprunté le terme « pattern » à la langue anglaise, faute de lui avoir trouvé un équivalent français qui exprime la même chose de façon aussi brève. On appelle « pattern », toute régularité, tout rythme que l'on découvre dans des formes diverses, qu'elles soient numériques ou géométriques et qui invitent l'esprit à conjecturer des propriétés mathématiques, des lois.

Les propriétés que l'on découvre dans cette section se rapportent à des tableaux de nombres et à des graphiques. Les lois d'engendrement des différents patterns sont écrites sous la forme d'expressions algébriques.

De quoi s'agit-il ? Les élèves sont mis en présence de patterns faits d'assemblages de cubes qui s'enchaînent selon une loi de progression qui n'est pas énoncée. Ils doivent imaginer les solides qui suivent « logiquement » ceux qui sont donnés et déterminer le nombre de cubes d'un tel solide en fonction de sa position dans la suite.

Ils examinent ensuite les propriétés des tableaux de nombres et des graphiques qui correspondent à chacune des suites.

Enjeux L'enjeu de cette activité est la capacité de circuler, selon les besoins, entre les représentations imagées des objets, les graphiques et les formules.

La construction de formules est au centre de l'activité : c'est ainsi que les élèves expriment la loi d'engendrement d'un pattern.

Les graphiques qui représentent les lois d'engendrement des différents patterns sont des ensembles de points alignés. Un des enjeux de cette activité réside dans la façon dont on explique l'alignement des points du graphique, au départ de propriétés du rectangle, sans faire appel au théorème de Thalès, ni aux similitudes.

Sur les diverses opérations qui sont nécessaires pour construire un graphique, voir chapitre 16, section 5.3.

Compétences. – *Représenter des données par un graphique, un diagramme.*

Interpréter un graphique, un tableau, un diagramme.

Relever des régularités dans des suites de nombres.

Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées.

Utiliser les conventions d'écriture mathématique.

Calculer les valeurs numériques d'expressions littérales.

De quoi a-t-on besoin ?

Des fiches de travail 31, 32 et 33, proposées en annexe (voir pages 186 à 188).

Pour la troisième activité, il est utile de disposer en classe, d'au moins vingt cubes de même dimension.

Prérequis. – Les élèves doivent savoir construire un tableau de nombres qui met en relation deux grandeurs et être capables de réaliser un graphique qui correspond au tableau.

3.1 Des cubes et une table

Comment s'y prendre ?

Chacun des solides de la figure 23 est formé de cubes identiques. Combien faudrait-il de cubes pour construire le quatrième solide, le dixième, le centième ?
Réaliser un tableau qui mette en relation le nombre de cubes avec le numéro d'ordre du solide dans la suite, puis le graphique qui montre le nombre de cubes en fonction du numéro d'ordre du solide.

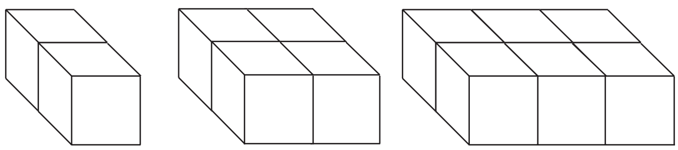


Fig. 23

Cette première situation est simple. Lors de la résolution, le professeur met en place une méthode de travail et un langage utiles pour traiter les questions suivantes.

Huit cubes sont nécessaires pour construire le quatrième solide, vingt pour le dixième, deux cents pour le centième. Les élèves associent rapidement à cette suite de solides, une table de multiplication par 2. La formule qui traduit le calcul est donc

$$c = 2n,$$

dans laquelle n est le numéro d'ordre et c le nombre de cubes.

Les propriétés d'une table de multiplication sont familières, ce sont celles-là mêmes qui ont servi à mémoriser les tables et qui sont utiles en calcul mental. Il se fait que ce sont aussi des propriétés d'un tableau de proportionnalité. Ainsi par exemple, si on sait que $3 \times 75 = 225$, alors on sait que 6×75, c'est 450, le double de 225 ; on peut aussi calculer 9×75 en calculant $225 + 450$. Ces propriétés seront mises en évidence dans l'activité suivante, lorsqu'il s'agira de comparer ce tableau à un autre.

Pour faire un graphique, les élèves doivent réaliser que les abscisses sont des numéros d'ordre et les ordonnées des nombres de cubes, que chaque point du graphe condense les deux informations.

La figure 24 montre les premiers points du graphe. On constate qu'ils s'alignent. On peut expliquer cet alignement en examinant les points trois par trois et en se référant aux propriétés géométriques du graphique. C'est ce que montre la figure 25.

Dans le rectangle $ECFA$, les segments $[HG]$ et $[KJ]$ sont des médianes. Le point d'intersection de ces médianes est aussi l'intersection des diagonales du rectangle. Le point B appartient donc au segment $[AC]$. Ceci explique pourquoi les points A, B et C sont alignés.

On explique de la même façon pourquoi les points B, C et D sont alignés. De même pour tout autre ensemble de trois points consécutifs du graphe.

On attire ensuite l'attention des élèves sur le fait que la droite qui passe par tous ces points, passe aussi par l'origine du repère (voir figure 26). Pour expliquer ceci, on considère le rectangle $EBFO$ dans lequel le point A, intersection des médianes, est aussi l'intersection des diagonales.

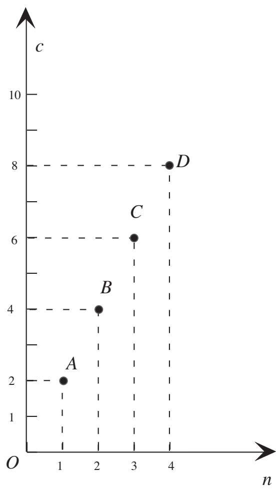


Fig. 24

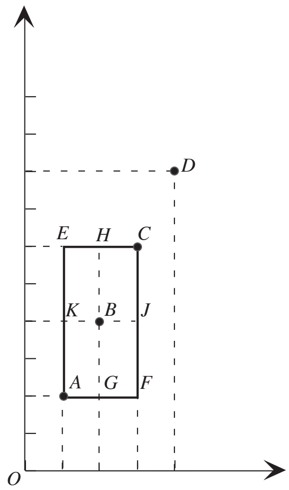


Fig. 25

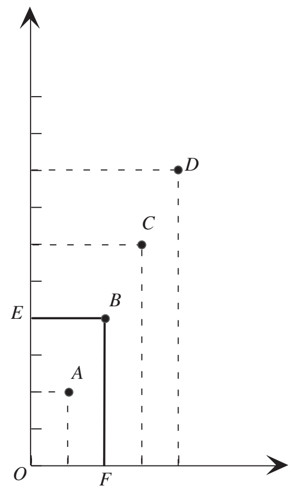


Fig. 26

3.2 Une table décalée

Comment s'y prendre ?

Chacun des solides de la figure 27 est formé de cubes identiques. Combien faudrait-il de cubes pour construire le quatrième solide, le dixième, le centième ? Réaliser un tableau qui mette en relation le nombre de cubes avec le numéro d'ordre du solide dans la suite, puis le graphique qui montre le nombre de cubes en fonction du numéro d'ordre du solide. Comparer le tableau et le graphique à ceux qui ont été réalisés à propos de la première question.

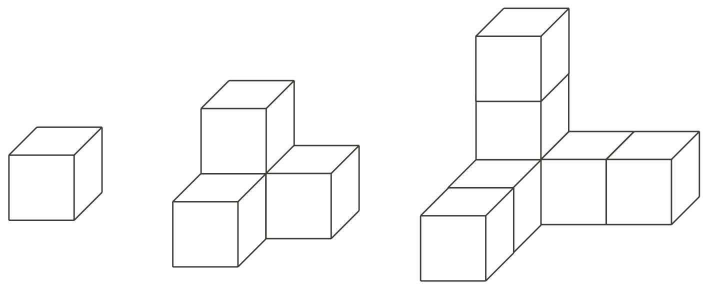


Fig. 27

Les élèves réalisent que pour passer d'un solide au suivant, il faut ajouter trois cubes. Cela permet de calculer de proche en proche le nombre d'éléments de chacun des solides suivants. Par contre, pour prévoir le nombre de cubes du centième solide, il faut aborder les choses autrement. Cette recherche est plus aisée au départ du tableau.

Numéro d'ordre dans la suite	Nombre de cubes	Accroissements
1	1	
2	4	3
3	7	3
4	10	3
5	13	3
n		

Pour établir une loi de calcul qui permettrait de prévoir le nombre de cubes de n'importe quel solide dont on connaîtrait le numéro d'ordre, plusieurs démarches sont possibles. Nous en proposons deux.

1. Chercher quels sont les calculs (toujours les mêmes) qui permettent de passer de la première à la deuxième colonne de calcul. On y arrive en triplant le numéro d'ordre, puis en retranchant 2. Ce que l'on traduit dans le langage de l'algèbre en écrivant la formule
$$c = 3n - 2,$$
où c est le nombre de cubes et n le numéro d'ordre.

2. Partir du premier terme et ajouter l'accroissement un « certain » nombre de fois : une fois de moins que le numéro d'ordre. Ce qu'on traduit par la formule

$$c = 1 + 3(n - 1).$$

C'est l'occasion d'attirer l'attention des élèves sur le sens de l'égalité pour des expressions algébriques. Les expressions établies sont égales pour deux raisons.

1. Elles prennent les mêmes valeurs pour chaque nombre n.
2. On peut passer d'une expression à l'autre en appliquant une propriété de calcul. Ici, on passe de la seconde à la première par la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Le tableau et la formule expriment, dans des langages différents, le mode d'engendrement du pattern. Comme dans la table de multiplication par 3, à chaque étape, il y a trois unités de plus, mais cette table est « décalée » de deux unités.

Pour étudier les propriétés de ce tableau, on le compare au tableau de l'activité précédente.

n	$2n$	Accroissements
1	2	
2	4	2
3	6	2
4	8	2
5	10	2

n	$3n-2$	Accroissements
1	1	
2	4	3
3	7	3
4	10	3
5	13	3

Dans la table de multiplication, on dégage les propriétés suivantes.

1. Chaque fois qu'une multiplication (ou une division) envoie un nombre d'une colonne sur un autre de la même colonne, la même multiplication (ou division) envoie l'une sur l'autre les valeurs correspondantes de l'autre colonne.
2. Une même multiplication (ici par 2) envoie un nombre quelconque de la première colonne sur son correspondant dans la deuxième colonne.
3. À la somme de deux valeurs de la première colonne, correspond la somme des valeurs correspondantes de l'autre colonne.
4. Lorsqu'un nombre de la première colonne augmente de 1, l'accroissement correspondant dans la deuxième colonne est toujours le même.

Les trois premières propriétés ne peuvent pas s'appliquer au deuxième tableau, seule la quatrième propriété est commune.

Il reste à construire le graphique (voir figure 28 à la page suivante) et à le comparer à un graphique qui représente une proportionnalité, par exemple celui de la figure 24 à la page 130.

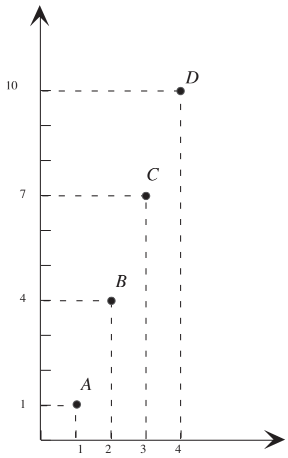


Fig. 28

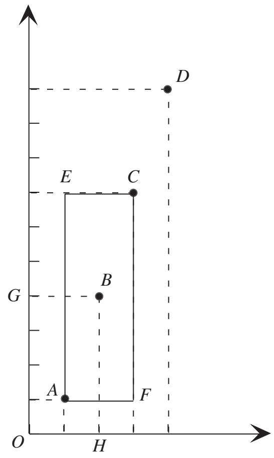


Fig. 29

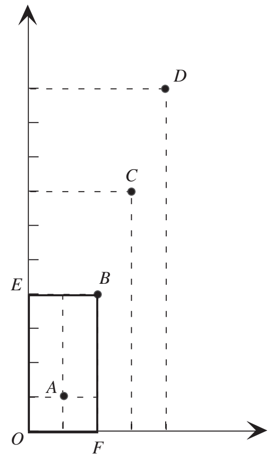


Fig. 30

La figure 28 montre que les points sont alignés, mais que la droite qui passe par ces points ne passe pas par l'origine du repère.

La figure 29 montre pourquoi les points A, B et C sont alignés.

La figure 30 montre pourquoi les points O, A et B ne sont pas alignés : le point A appartient à une médiane du rectangle $EBHO$ mais pas à l'autre, il n'appartient donc pas à la diagonale du rectangle.

3.3 Un escalier de cubes

Comment s'y prendre ?

Chacun des solides de la figure 31 est formé de cubes identiques. Combien faudrait-il de cubes pour construire le quatrième solide, le dixième, le centième ? Réaliser un tableau qui mette en relation le nombre de cubes avec le numéro du solide dans la suite, puis le graphique qui montre le nombre de cubes en fonction du numéro d'ordre du solide. Comparer le tableau et le graphique à ceux qui ont été réalisés à propos des questions précédentes.

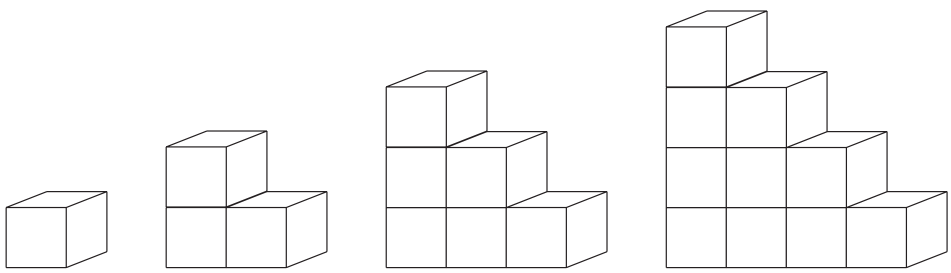


Fig. 31

Une première impression : d'étape en étape, pour passer d'un solide au suivant, on ajoute de plus en plus de cubes. On sait déjà qu'on ne pourra pas tabler sur des accroissements constants pour établir une formule.

Pour y voir clair, la construction d'un tableau s'impose.

Numéro d'ordre dans la suite	Nombre de cubes	Accroissements
1	1	
2	3	2
3	6	3
4	10	4
5	15	5
n		

Si l'on veut élaborer une formule au départ des accroissements, il faut partir du nombre 1 et ajouter successivement 2, 3, 4, ... Le dernier terme de cette somme correspond chaque fois au numéro d'ordre du solide. On a donc la formule

$$c = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n.$$

Il existe une formule classique pour calculer rapidement une telle somme. Elle peut être découverte par des élèves de 12-13 ans pour peu qu'on leur suggère l'une ou l'autre méthode. Celle qui suit est très visuelle, et peut être proposée aux élèves à partir d'une question.

> Compléter chaque solide de la figure 31 pour former un parallélépipède qui a un volume double. Trouver une relation entre le numéro d'ordre du solide et le nombre de cubes du parallélépipède.

Les élèves réalisent d'abord l'un des parallélépipède demandé avec les cubes dont ils diposent, ils complètent ensuite le dessin correspondant. La figure 32 montre trois parallélépipèdes construits de cette façon.

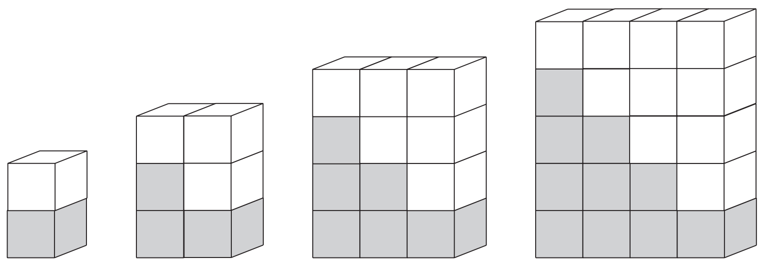


Fig. 32

Chaque solide repose sur une base qui comporte n cubes et a une hauteur de $(n+1)$ cubes. Ce qui conduit à la formule

$$2c = n(n+1).$$

On a donc

$$c = \frac{n(n+1)}{2} \text{ (}n\text{ est le numéro d'ordre et }c\text{ le nombre de cubes).}$$

Il s'agit à présent de construire le graphique, puis de le comparer aux graphiques précédents.

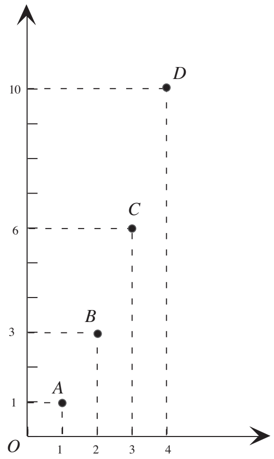


Fig. 33

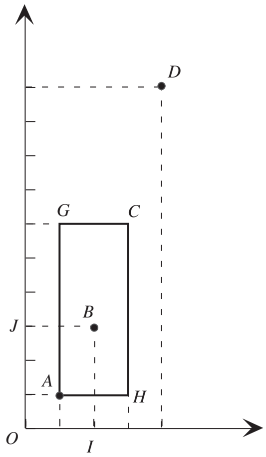


Fig. 34

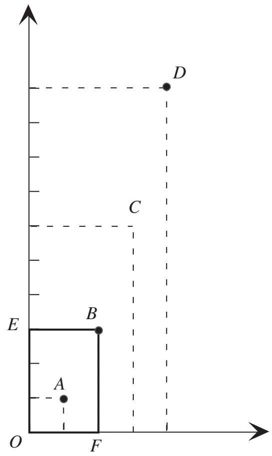


Fig. 35

Si l'on place une règle sur graphique de la figure 33, on constate qu'on ne trouve jamais trois points sur une même droite.

La figure 34 montre pourquoi les points A, B et C ne sont pas alignés.

La figure 35 montre pourquoi les points O, A et B ne sont pas alignés.

Synthèse

Ces trois questions font progresser les élèves dans la maîtrise du tryptique tableau-graphique-formule. Lors de la synthèse, avec l'aide du professeur, ils dégagent les méthodes qui ont été élaborées sur le tas et formulent les propriétés établies de façon à ce qu'elles soient disponibles pour d'autres situations.

Tableau de proportionnalité

Pour préparer cette partie de la synthèse, les élèves rassemblent les différents tableaux réalisés sur une même feuille. Trois propriétés caractérisent un tableau de proportionalité, il s'agit de les dégager.

Le professeur peut s'inspirer des énoncés ci-dessous[4] pour examiner les différents tableaux réalisés en classe : il demande aux élèves de représenter par une flèche, dans chaque tableau qui s'y prête, l'un ou l'autre opérateur qui correspond à la propriété.

S'il n'est pas utile de faire mémoriser ces énoncés, il importe par contre que les élèves en saisissent la portée.

1. *Chaque fois qu'une multiplication (ou une division) envoie un nombre d'une colonne sur un autre de la même colonne, la même multiplication (ou division) envoie l'une sur l'autre les valeurs correspondantes de l'autre colonne.*

[4] Ce sont les formulations utilisées dans F. Van Dieren-Thomas *et al.* [1993]

2. *À la somme de deux valeurs de la première colonne, correspond la somme des valeurs correspondantes de l'autre colonne.*

3. *Une même multiplication (ou une division) envoie un nombre quelconque de la première colonne sur son correspondant dans la deuxième colonne.*

Dès qu'on reconnaît une de ces propriétés, on sait qu'on trouvera les deux autres dans le tableau.

Par ailleurs,

lorsque dans un tableau de proportionnalité, on passe d'un terme au suivant dans la première colonne en ajoutant toujours le même nombre, par exemple 1, les accroissements correspondants dans la deuxième colonne sont constants.

Cette dernière propriété apparaît dans d'autres tableaux, elle ne permet donc pas à elle seule de reconnaître un tableau de proportionnalité.

Formules

La formule $c = 3n$ exprime qu'on calcule c en fonction de n. Pour établir le tableau correspondant, on place dans la colonne de gauche, les valeurs de n que l'on choisit de calculer et on place le résultat de chaque calcul dans la colonne de droite. On exprime cela en disant que, dans cette formule, n est la *variable* et que c est *fonction* de cette variable.

La suite engendrée par cette formule est une table de multiplication par 3. Cette table commence par 0 ou par 3, selon que les valeurs de n commencent à 0 ou à 1.

Voici deux tableaux qui correspondent, l'un à la formule $c = 3n$ (n est un naturel) et l'autre à la formule $y = 5x - 3$ (x est un naturel).

n	$3n$
0	0
1	3
2	6
10	30

x	$5x - 3$
0	-3
1	2
2	7
3	12

Le premier tableau est un tableau de proportionnalité, le second n'en est pas un.

Traitons à présent la situation inverse : écrire une formule à partir d'un tableau de nombres. Nous nous limitons ici aux tableaux qui correspondent à des fonctions affines et qui se présentent comme ceux qui ont été élaborés en cours d'activité : ils présentent une liste de valeurs de la variable qui commence par le nombre 1 et qui croît à chaque étape d'une unité.

Deux méthodes ont été dégagées. Rappelons-les au départ du tableau ci-dessous. On calcule d'abord les accroissements et on vérifie qu'ils sont constants.

x	y
1	5
2	7
3	9
4	11

x	y	Accroissements
1	5	
2	7	2
3	9	2
4	11	2
5	13	2

Première méthode : partir de la première valeur de la fonction et ajouter $(x-1)$ fois l'accroissement. On trouve la formule

$$y = 5 + 2(x-1) \text{ (x est un naturel non nul).}$$

Deuxième méthode : comparer la liste des valeurs de y à la table de multiplication par 2 (parce que 2 est l'accroissement).

x	$2x$	y
1	2	5
2	4	7
3	6	9
4	8	11

On constate que y vaut chaque fois 3 unités de plus que $2x$. D'où la formule :

$$y = 2x + 3 \text{ (x est un naturel non nul).}$$

Un simple calcul algébrique montre l'équivalence de ces deux formules.

Graphiques

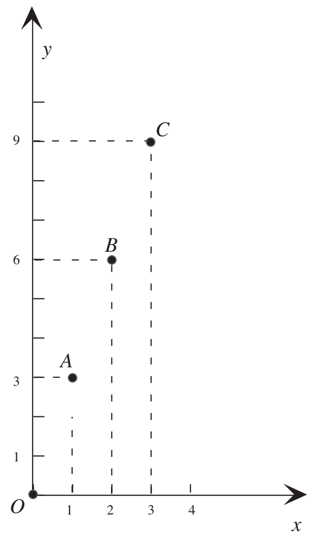


Fig. 36

Pour construire le graphique, on place dans un repère les points dont l'abscisse est une valeur de la variable et dont l'ordonnée est la valeur correspondante de la fonction. Voici le graphique qui correpond à la formule $y = 3x$ (x est un naturel).

Tous les points d'un graphique qui correspond à un tableau de proportionnalité appartiennent à une même droite qui passe par l'origine du repère.

Prolongements possibles

Le pattern qui est proposé dans la première question se prête à un prolongement intéressant lorsqu'on considère la suite des aires totales des différents solides.

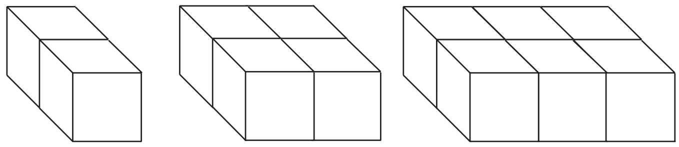


Fig. 37

Un tableau, établi en observant l'aire totale de chacun des solides, met en évidence les accroissements constants.

Numéro d'ordre dans la suite	Aire totale en cm^2	Accroissements
1	10	
2	16	6
3	22	6
4	28	6
n		

L'accroissement constant apparaît aussi dans la figure 37 comme ceci : lorsqu'on accole un nouveau module de deux cubes au solide précédent, on perd 2 faces externes du solide et on ajoute 8 nouvelles faces externes. l'aire est donc augmentée de 6 cm^2. En appliquant la première méthode indiquée dans la synthèse, on arrive à la formule

$$a = 10 + 6(n - 1) \text{ (n est un naturel non nul),}$$

dans laquelle a représente l'aire et n le numéro d'ordre. La deuxième méthode conduit plus directement à la formule

$$a = 6n + 4 \text{ (n est un naturel non nul).}$$

Échos des classes

Ces activités ont été expérimentées de nombreuses fois dans différentes classes de première et de deuxième années du secondaire. Pour les élèves de première, la construction de tableaux ne soulève aucune difficulté et la plupart du temps, ils arrivent d'eux-mêmes à déterminer le nombre de cubes d'un rang quelconque. Ce qui fait problème, c'est la transposition de ces calculs dans le symbolisme algébrique. Ils n'y arrivent seuls que s'ils ont déjà été confrontés à des situations dans lesquelles ils ont manipulé de telles expressions. On ne s'attendra donc pas à ce qu'ils maîtrisent tout à fait cette compétence après cette seule activité.

La construction de graphiques de cette sorte fait franchir une étape : les graphiques demandés ne montrent pas une relation entre deux grandeurs, mais une relation entre un numéro d'ordre et une grandeur (un nombre de cubes, c'est un volume). Les élèves ont de la peine à considérer le numéro d'ordre comme une variable.

Les élèves de deuxième année résolvent les mêmes questions avec plus d'autonomie.

4 Points alignés et calcul avec les entiers

Préambule

Cette section parcourt toutes les règles de calcul avec des entiers dans un même contexte : celui d'ensembles de points alignés, situés dans un repère cartésien. À chaque étape, nous montrons en quoi les règles de calcul sont nécessaires pour assurer que des points qui vérifient une formule du premier degré, demeurent alignés lorsque leurs abscisses deviennent négatives. Ces activités peuvent être proposées à des élèves de niveaux différents.

Une grande partie des activités s'adresse aux élèves de première année qui découvrent le calcul avec des entiers. Le contexte est certes assez abstrait (il est constitué de points dans un repère), mais les élèves sont mis devant des configurations simples et les tâches sont agencées dans une progression assez lente.

Dans ce cas le professeur doit orienter les élèves dans l'observation de régularités numériques et géométriques ainsi que sur la mise en relation de ces deux types de régularités. Vers 13 ans, les élèves sont capables de *décrire* ce type de phénomème, ils peuvent en tirer des *trucs* qui leur permettent de s'en tirer dans des situations analogues. Mais le plus souvent, ils ne savent pas formuler les raisons qui lient leurs observations et leurs *trucs*. Cette phase du travail est prise en charge par le professeur. Il s'agit alors, pour les élèves d'une *initiation* à un mode de pensée et d'expression.

Chaque section doit être complétée par des exercices qui intègrent l'opération nouvellement apprise dans d'autres contextes et qui illustrent les règles au départ d'autres images mentales. La dernière section peut se situer bien plus loin dans l'année scolaire, voire l'année suivante.

Toutes les sections de ce chapitre ne doivent pas être enseignées d'une traite, le calcul avec des entiers est un seuil dans la formation, qui mérite qu'on veille soigneusement à ce que chaque étape soit significative pour les élèves et que ceux-ci dépassent la seule pratique du calcul pour s'approprier les *raisons* de ces règles.

Pour faciliter la distinction entre nombre négatif et nombre soustrait, distinction essentielle pour saisir la construction des opérations avec les entiers, nous avons adopté la notation qui consiste à placer le signe moins au-dessus du nombre lorsqu'il est négatif. Il ne faut y voir qu'une facilité d'écriture pour les plus jeunes. Cette distinction peut aussi bien être signifiée par des parenthèses qui encadrent le nombre négatif.

Dans cette approche, le calcul avec des entiers est introduit dans un contexte où il sert : celui de la géométrie analytique qui exhibe la cohérence globale de toutes les règles. C'est pourquoi, ces activités peuvent s'adresser, moyennant quelque adaptations et des raccourcis, à des élèves de troisième année. Ceux-ci découvriront, en même temps que les premières équations de droites, des liens entre les raisons qui font que des points s'alignent sur un graphique et les règles de signes qu'ils ont apprises précédemment.

De quoi s'agit-il ?

Les élèves caractérisent des ensembles de points alignés situés dans un repère, en termes de relations entre abscisses et ordonnées. Ils écrivent ces relations sous forme algébrique et ce faisant, ils construisent les lois de calcul dans l'ensemble des entiers.

Enjeux

Les lois de calcul dans l'ensemble des entiers et le lien entre ces lois et l'alignement pour des points qui vérifent $y = ax + b$. L'extension des tableaux de proportionnalité aux nombres négatifs. Voir aussi le chapitre 16 section 6.

Compétences

Les compétences socles visées par ces activités sont :

Interpréter un graphique, un tableau, un diagramme.

Classer, situer, ordonner, comparer des entiers.

Relever des régularités dans des suites de nombres.

Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées.

Utiliser les conventions d'écriture mathématique.

Construire des expressions littérales dans lesquelles les lettres ont le statut de variables.

Calculer les valeurs numériques d'une expression littérale.

Utiliser, dans leur contexte, les termes usuels et les notations propres aux nombres et aux opérations.

Les activités et les questions s'enchaînent de façon à développer des compétences transversales, notamment celles qui suivent.

Reconnaître des situations comme semblables ou dissemblables.

Se poser des questions pour étendre une propriété, une règle, une démarche.

Se servir dans un contexte neuf de connaissances acquises antérieurement et les adapter à des situations différentes.

Procéder à des variations pour en analyser les effets sur le résultat et dégager la permanence de liens logiques.

De quoi a-t-on besoin ?

Les fiches de travail 34 à 41 proposées en annexe aux pages 189 à 196.

Prérequis

Situer un point de coordonnées positives dans un repère orthonormé.

Représenter graphiquement des fonctions de proportionnalité et des fonctions du premier degré dans lesquelles variable et fonction ne prennent que des valeurs positives.

Repérer un entier sur une droite munie d'un repère.

Repérer et écrire l'opposé d'un entier (un nombre et son opposé sont situés à même distance de l'origine choisie sur la droite, de part et d'autre de cette origine). Ordre dans l'ensemble des entiers.

4.1 Ensembles de points, couples de nombres

Comment s'y prendre ?

Fiche 34

Les questions ci-dessous se rapportent aux ensembles montrés par les figures 38 et 39. Ces ensembles s'étendent implicitement au-delà de ce que montrent les dessins.

1. Les points donnés par les couples

   $$(8{,}9)\ ;\ (25{,}15)\ ;\ (13{,}36)\ ;\ (27{,}37)\ ;$$
   $$(10{,}10)\ ;\ (100{,}13)\ ;\ (120{,}19)\ ;\ (119{,}73)\ ;$$
   $$(45{,}20)\ ;\ (45{,}62)\ ;\ (17{,}105)\ ;\ (17{,}106)\ ;$$

   sont-ils représentés dans la figure 38 par une croix, un point noir ou un point blanc ?
2. Même question pour les mêmes couples, à propos cette fois de la figure 39.

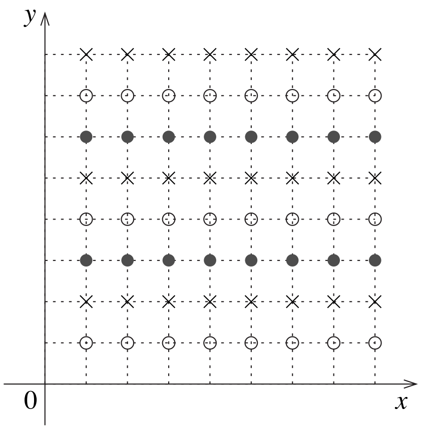


Fig. 38

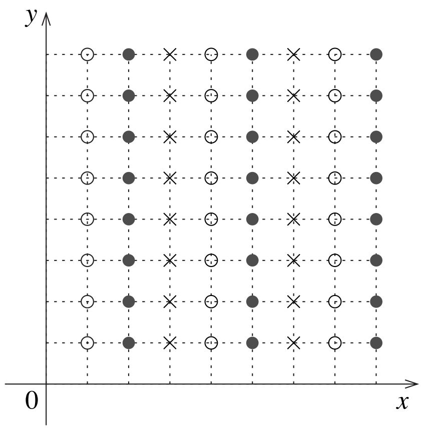


Fig. 39

Les élèves écrivent une liste de couples pour chaque ensemble de points de la figure 38. Ils constatent alors que ceux qui sont alignés ont la même ordonnée, elle suffit donc pour caractériser chaque ensemble de points.

Ensuite, comme les coordonnées sont trop grandes et qu'ils ne peuvent situer les points sur la figure elle-même, ils réalisent qu'il suffit de savoir si l'ordonnée est un multiple de 3, un multiple de 3 plus 1 ou un multiple de 3 moins 1 (ou plus 2).

Dans la deuxième figure, les rôles respectifs de l'abscisse et de l'ordonnée sont échangés.

Fiche 35
Les questions ci-dessous se rapportent aux ensembles montrés par les figures 40 et 41. Chacun de ces ensembles s'étendent seulement dans une seule direction, celle de la droite qui porte les points.

1. Les points donnés par les couples ci-dessous sont-ils ou non alignés avec une suite de croix, de points noirs ou de points blancs de la figure 40 ?

   (7,8) ; (8,8) ; (8,7) ; (9,8) ; (9,10) ;
   (25,24) ; (30,30) ; (30,29) ; (41,40) ; (40,40).

   Comment caractériser les ensembles de points alignés ?

2. Même question à propos des couples ci-dessous, qui se rapportent à la figure 41.

   (7,14) ; (7,15) ; (7,13) ; (8,17) ; (8,15) ;
   (20,50) ; (25,49) ; (30,61) ; (29,60) ; (29,59).

   Comment caractériser les ensembles de points alignés ?

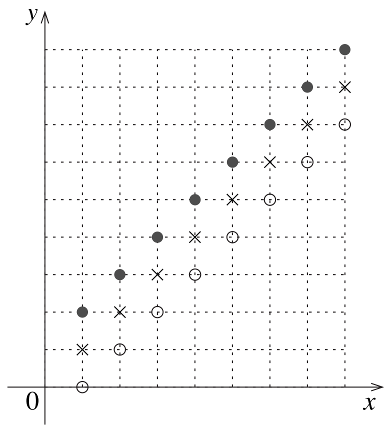


Fig. 40

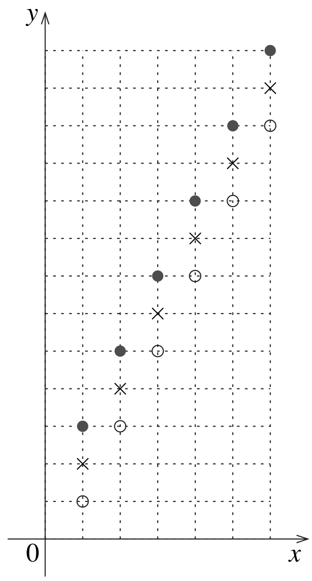


Fig. 41

Une relation entre abscisse et ordonnée caractérise chaque fois des points alignés. Après que les élèves aient énoncé cette relation dans le langage courant, le professeur introduit la notation algébrique.

Les points alignés avec les croix de la question 1 ont leur abscisse égale à leur ordonnée. À cet ensemble de points correspond la formule

$$y = x.$$

Ensuite, l'ordonnée de chaque point noir vaut chaque fois une unité de plus que son abscisse ; on écrit la formule

$$y = x + 1.$$

Enfin, l'ordonnée de chaque point blanc vaut chaque fois une unité de moins que l'abscisse ; on écrit la formule

$$y = x - 1.$$

Dans ces trois formules, x et y sont des nombres naturels non nuls.

Trois autres formules caractérisent respectivement les ensembles de la figure 41, à savoir

$$y = 2x\,, \quad y = 2x + 1\,, \quad y = 2x - 1,$$

les lettres x et y représentant des nombres naturels non nuls.

4.2 Points à coordonnées entières

Comment s'y prendre ?

Fiche 36
Les points qui correspondent aux coordonnées ci-dessous sont-ils ou non alignés avec une suite de croix, de points noirs ou de points blancs ?
Envisager successivement les figures 42, 43 et 44.

$$(\overline{3}, 2)\ ;\ (2, \overline{3})\ ;\ (\overline{3}, \overline{3})\ ;\ (\overline{3}, 3)\ ;$$
$$(3, \overline{3})\ ;\ (3, \overline{2})\ ;\ (\overline{3}, \overline{4});\ (\overline{3}, \overline{2}).$$

Comment caractériser les ensembles de points alignés ?

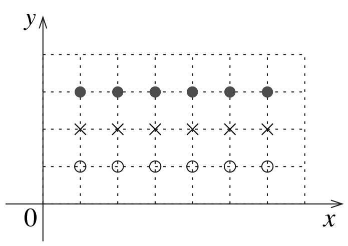


Fig. 42

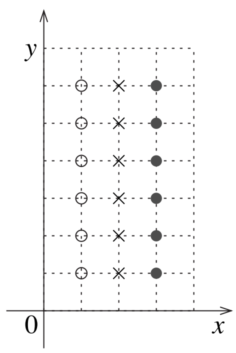


Fig. 43

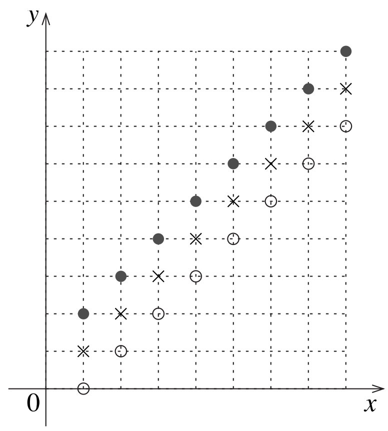


Fig. 44

Comme les coordonnées proposées sont des nombres petits, les élèves vérifient l'alignement en plaçant les points sur le graphique. Ils s'entraînent ainsi à situer des points dans les quatre quadrants.

La caractérisation des points alignés dans les figures 42 et 43 se présente de la même façon pour les points à coordonnées négatives que pour les autres : elle n'engage à chaque fois qu'une seule coordonnée. Les élèves écrivent les six équations

$$y = 1\,; \quad y = 2\,; \quad y = 3\,; \quad x = 1\,; \quad x = 3\,; \quad x = 1.$$

Dans ces six équations x et y sont des nombres entiers.

Lorsqu'ils situent des points qui se rapportent à la figure 44, ils réalisent que les nouveaux points qui s'alignent avec les croix ont toujours la même caractéristique : l'abscisse et l'ordonnée sont égales.

En caractérisant les points noirs et les points blancs qui appartiennent à la figure 44, les élèves les situent par rapport aux croix. Ceci conduit le professeur à leur montrer à partir de *mouvements* sur un axe orienté, comment ajouter ou retrancher 1 à un entier.

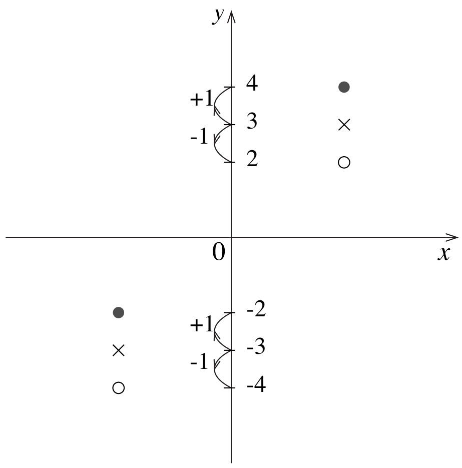


Fig. 45

À ces mouvements correspondent les calculs

$$\begin{aligned} 3+1 &= 4,\\ 3-1 &= 2,\\ \overline{3}+1 &= \overline{2},\\ \overline{3}-1 &= \overline{4}. \end{aligned}$$

Nous retiendrons que

sur l'axe vertical, lorsqu'on ajoute 1, on monte et lorsqu'on retranche 1, on descend.

On écrit ensuite les trois équations qui caractérisent ces ensembles de points, à savoir

$$y = x\,; \quad y = x + 1\,; \quad y = x - 1.$$

Lorsqu'on attire l'attention des élèves sur les nombres que les lettres représentent, il faut envisager les points d'abscisse nulle. Ils noteront ensuite que les lettres x et y représentent des entiers.

Le professeur propose alors une série d'exercices qui fixent, puis étendent ces premiers acquis. Par exemple, repérer la température indiquée par un thermomètre, imaginer qu'elle monte d'un degré, puis de deux, de trois degrés ; repartir de la même valeur et imaginer qu'elle descende, écrire les additions et les soustractions correspondantes. Partir ensuite d'une température négative. On pratique des exercices analogues de mouvements en avant et en arrière, sur un axe horizontal.

Premier bilan de ce que les élèves savent faire : ajouter et retrancher un nombre *positif* à un entier quelconque.

Cela introduit la suite : il faut apprendre à ajouter, puis à retrancher, un *entier quelconque* à un entier quelconque.

4.3 Alignement et addition d'entiers

Comment s'y prendre ?

> *Fiche 37*
> Représenter sur le graphique quelques points dont les coordonnées vérifient l'équation
> $$y = 3 + x.$$

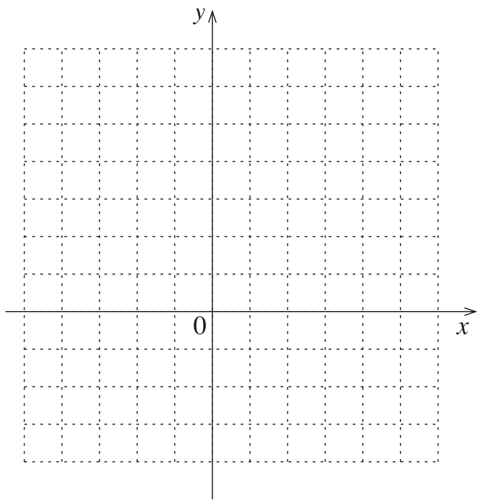


Fig. 46

Les élèves commencent par les additions qui leur sont familières ; ils complètent donc le tableau en partant de valeurs positives de x.

x	y
3	6
2	5
1	4
0	3

Comme il s'agit ensuite de situer des points d'abscisse négative, le professeur suggère de placer les couples dans un tableau ordonné par valeurs décroissantes de x. C'est le tableau montré dans la marge. Les élèves placent les points correspondants sur le graphique.

Le professeur demande alors de *lire* l'ordonnée du point d'abscisse $\overline{1}$ qui s'aligne avec les autres points, puis l'ordonnée du point d'abscisse $\overline{2}$ et ainsi de suite. On complète ainsi le tableau sans faire aucun calcul. Le professeur pose alors la question suivante.

> Quelle est la règle d'addition qui fournit de tels résultats ?

Pour aider les élèves à y voir clair, le professeur place en regard du tableau, la colonne d'additions suivante.

x	y	$3+x=y$
3	6	$3+3=6$
2	5	$3+2=5$
1	4	$3+1=4$
0	3	$3+0=3$
$\overline{1}$	2	$3+\overline{1}=2$
$\overline{2}$	1	$3+\overline{2}=1$
$\overline{3}$	0	$3+\overline{3}=0$
$\overline{4}$	$\overline{1}$	$3+\overline{4}=\overline{1}$
$\overline{5}$	$\overline{2}$	$3+\overline{5}=\overline{2}$

Observons ce tableau : dans la première colonne les nombres se succèdent comme sur un thermomètre, ils diminuent chaque fois d'une unité. En parallèle, dans les autres colonnes, la somme $3 + x$ diminue aussi. On note que ce principe persiste lorsque x est négatif.

Attardons-nous à la deuxième partie de la troisième colonne, qui montre ce que nous cherchions : une série d'additions dans lesquelles il s'agit d'ajouter un nombre négatif.
Les résultats de ces additions indiquent que cela revient à retrancher un positif, ce que nous savions déjà faire. Ceci est illustré par les exemples ci-contre.

$$\begin{aligned} 3+\overline{1} &= 2, \\ 3-1 &= 2, \\ 3+\overline{2} &= 1, \\ 3-2 &= 1, \\ \overline{3}+\overline{1} &= \overline{4}, \\ \overline{3}-1 &= \overline{4}. \end{aligned}$$

Le bilan est complété par l'énoncé qui suit.

Ajouter un négatif et retrancher le positif opposé, cela revient au même.

4.4 Alignement et soustraction d'entiers

Comment s'y prendre ?

> *Fiche 38*
> Représenter sur le graphique quelques points dont les coordonnées vérifient l'équation
> $$y = 6 - x.$$

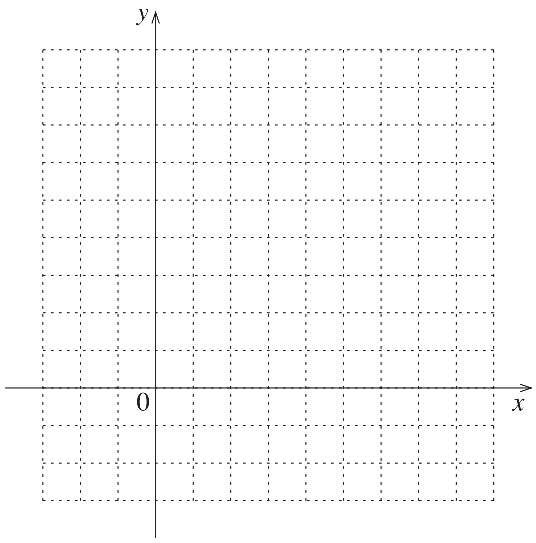


Fig. 47

x	y
5	1
4	2
3	3
2	4
1	5
0	6

Les élèves commencent par les soustractions qui leur sont familières : celles dans lesquelles le nombre à retrancher est un positif, plus petit que le premier terme. Au fur et à mesure qu'ils découvrent des points par calcul, ils les placent sur le graphique et le professeur complète un tableau ordonné par valeurs décroissantes de x.

Le professeur demande ensuite de repérer sur le graphique, le point d'abscisse $\overline{1}$ qui s'aligne avec les autres ; puis les points d'abscisse $\overline{2}$, $\overline{3}$, ... Les couples correspondants sont reportés dans le tableau.

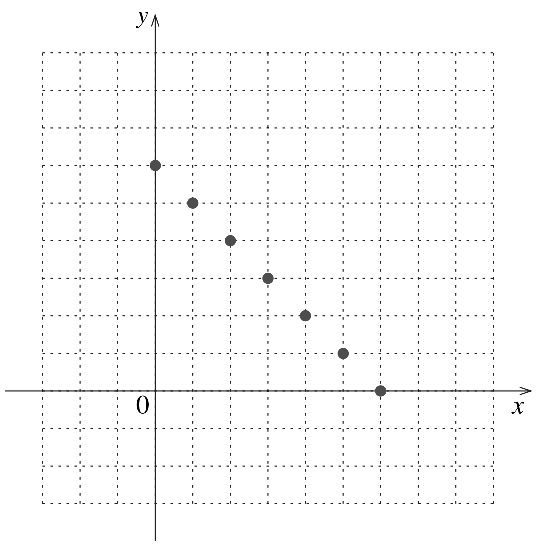


Fig. 48

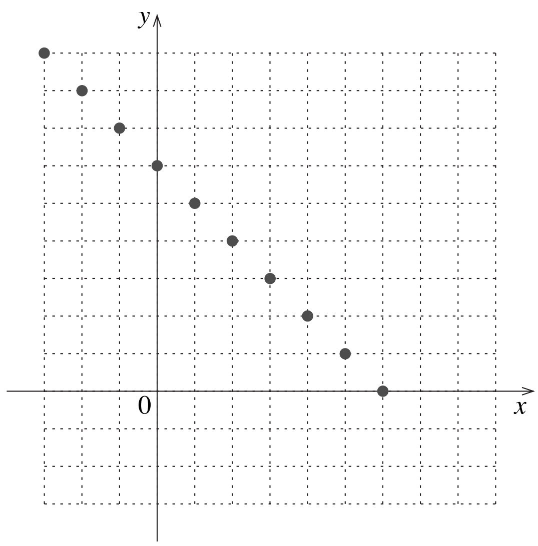


Fig. 49

On enchaîne avec la question :

> Quelle est la règle de soustraction qui correspond à ce graphique et à ce tableau de nombres ?

Voici les soustractions qui montrent la correspondance entre la formule et les couples de nombres.

x	$6 - x = y$
5	$6 - 5 = 1$
4	$6 - 4 = 2$
3	$6 - 3 = 3$
2	$6 - 2 = 4$
1	$6 - 1 = 5$
0	$6 - 0 = 6$
$\overline{1}$	$6 - \overline{1} = 7$
$\overline{2}$	$6 - \overline{2} = 8$
$\overline{3}$	$6 - \overline{3} = 9$

L'analyse de la colonne de soustractions montre la permanence d'un principe : *plus le nombre que l'on enlève diminue, plus le résultat devient grand.*
Les résultats des trois dernières soustractions montrent que *retrancher un négatif revient à ajouter un positif* ! Ainsi,

$$\begin{aligned} 6 - \overline{1} &= 7 \\ 6 + 1 &= 7, \\ 6 - \overline{3} &= 9, \\ 6 + 3 &= 9. \end{aligned}$$

On conclut avec l'énoncé qui suit.

Retrancher un nombre revient à ajouter l'opposé de ce nombre.

Fiche39

1. Qu'est-ce qui caractérise chacun des trois ensembles de points alignés de la figure 50 ?
2. Quel est le point d'abscisse 1 qui est aligné avec les croix, avec les points blancs, avec les points noirs ?
3. Même question pour les points d'abscisse 3 et d'abscisse 7.
4. Dresser les tableaux de nombres qui correspondent au graphique tel qu'il a été complété.

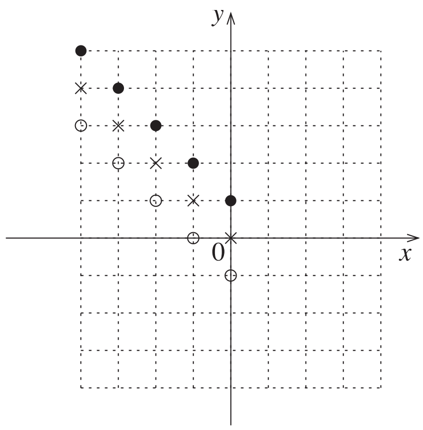


Fig. 50

1. Chacune des croix de la figure 50 est située à égale distance de l'axe des x et de l'axe des y. Les abscisses de tous ces points sont négatives, les ordonnées sont positives. Déterminer l'ordonnée d'une croix revient donc à prendre l'opposé de son abscisse.

   Pour trouver l'ordonnée d'un point noir, il faut ajouter 1 après avoir pris l'opposé de l'abscisse.

   Pour trouver l'ordonnée d'un point blanc, il faut retrancher 1 après avoir pris l'opposé de l'abscisse.

   Avant d'écrire les équations qui caractérisent ces ensembles de points, le professeur explique comment noter l'opération qui consiste à prendre l'opposé d'un nombre : puisque retrancher un nombre revient à ajouter son opposé, on considère que prendre l'opposé d'un nombre c'est comme *soustraire* ce nombre. Ainsi, l'opération « prendre l'opposé » se traduit-elle par le symbole « $-$ », placé devant le nombre.

   Par exemple, l'opposé de 3 est noté -3, l'opposé de $\overline{3}$ est noté $-\overline{3}$ et l'opposé de x, qui peut être aussi bien négatif que positif, est noté $-x$. Les trois ensembles de points sont décrits par les équations

$$y = -x\,, \qquad y = -x + 1\,, \qquad y = -x - 1.$$

2. Le point d'abscisse 1 aligné avec les croix a comme ordonnée $\overline{1}$ (voir figure 51). Ici aussi, il suffit de changer le signe de l'abscisse pour déterminer l'ordonnée.

Le point d'abscisse 1 aligné avec les points noirs a comme ordonnée 0. La règle de calcul est la même que celle utilisée avec les autres points noirs.

Le point d'abscisse 1 aligné avec les points blancs a comme ordonnée $\overline{2}$. La règle de calcul est la même que celle des autres points blancs.

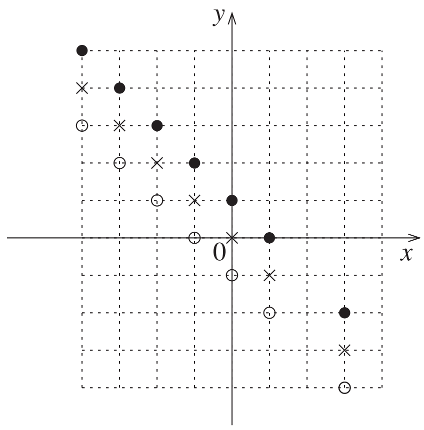


Fig. 51

3. On tire des conclusions analogues après avoir repéré les trois points dont l'abscisse est 3, puis ceux dont l'abscisse est 7.
4. Les tableaux mettent en relation le graphique et les équations. Le professeur incite les élèves à écrire dans la troisième colonne, les opérations qui montrent ces relations. Les réponses confirment ce qui a été abordé à partir de mouvements à la fiche 36.

x	y	$y = -x$
$\overline{4}$	4	$-\overline{4}$
$\overline{3}$	3	$-\overline{3}$
$\overline{2}$	2	$-\overline{2}$
$\overline{1}$	1	$-\overline{1}$
0	0	0
1	$\overline{1}$	-1
3	$\overline{3}$	-3
7	$\overline{7}$	-7

x	y	$y = -x + 1$
$\overline{4}$	5	$-\overline{4} + 1 = 4 + 1$
$\overline{3}$	4	$-\overline{3} + 1 = 3 + 1$
$\overline{2}$	3	$-\overline{2} + 1 = 2 + 1$
$\overline{1}$	2	$-\overline{1} + 1 = 1 + 1$
0	1	$0 + 1$
1	0	$-1 + 1 = \overline{1} + 1$
3	$\overline{2}$	$-3 + 1 = \overline{3} + 1$
7	$\overline{6}$	$-7 + 1 = \overline{7} + 1$

x	y	$y = -x - 1$
$\overline{4}$	3	$-\overline{4} - 1 = 4 - 1$
$\overline{3}$	2	$-\overline{3} - 1 = 3 - 1$
$\overline{2}$	1	$-\overline{2} - 1 = 2 - 1$
$\overline{1}$	0	$-\overline{1} - 1 = 1 - 1$
0	$\overline{1}$	$0 - 1$
1	$\overline{2}$	$-1 - 1 = \overline{1} + \overline{1}$
3	$\overline{2}$	$-3 - 1 = \overline{3} + \overline{1}$
7	$\overline{8}$	$-7 - 1 = \overline{7} + \overline{1}$

Le professeur rassemble à présent les différentes significations du signe « $-$ » et introduit les simplifications d'écriture habituelles. Ainsi « -3 » peut représenter le nombre négatif « -3 » ou signifier dans d'autres contextes

- retrancher 3,
- prendre l'opposé de 3.

Les simplifications d'écriture consistent à remplacer les soustractions par des additions, à supprimer les signes d'addition et à placer le signe du nombre devant. L'expression obtenue est souvent appelée « somme algébrique ». On l'effectue en considérant le signe qui précède chaque nombre comme étant le signe du nombre et en appliquant les règles d'addition. Exemple :

$$7 - \overline{5} + \overline{3} - 4 = 7 + 5 + \overline{3} + \overline{4} = 7 + 5 - 3 - 4$$

4.5 Alignement et multiplication par un entier

Comment s'y prendre ?

Fiche 40
Les points qui correspondent aux couples ci-dessous sont-ils ou non alignés avec une suite de croix, de points noirs ou de points blancs ?

$$(0,0)\ ;\ (0,\overline{2})\ ;\ (\overline{1},2)\ ;\ (\overline{1},\overline{2})\ ;$$

$$(\overline{2},4)\ ;\ (\overline{2},\overline{4})\ ;\ (\overline{3},6)\ ;\ (\overline{3},\overline{6})\ ;$$

$$(3,7)\ ;\ (\overline{3},\overline{7})\ ;\ (\overline{3},7)\ ;\ (3,\overline{7}).$$

Comment caractériser les ensembles de points alignés ?

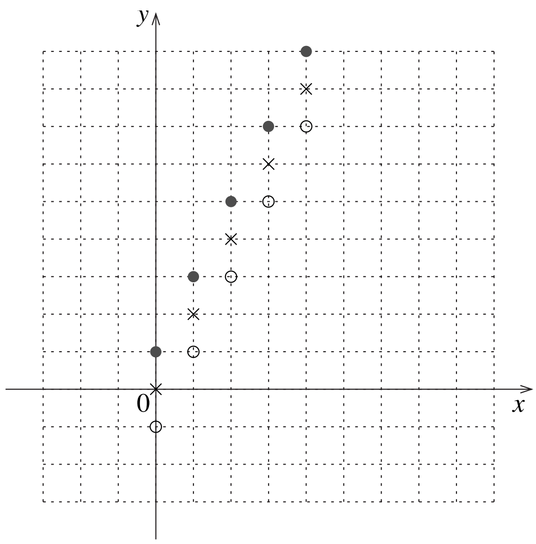


Fig. 52

x	y
4	8
3	6
2	4
1	2
0	0
$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{6}$

Les élèves vérifient l'alignement en plaçant, un à un, les points sur le graphique. Pour écrire la formule, ils cherchent une relation entre abscisse et ordonnée. Cette recherche est plus facile lorsqu'on rassemble dans un tableau ordonné, tous les couples visibles sur le graphique.

Les quatre premiers couples évoquent la table de multiplication par 2, mais est-ce la même opération qui envoie $\overline{1}$ sur $\overline{2}$, $\overline{2}$ sur $\overline{4}$ et $\overline{3}$ sur $\overline{6}$?

Oui, si l'on considère la multiplication par un entier positif comme une addition itérée et qu'on calcule :

$$\overline{1} + \overline{1},$$

$$\overline{2} + \overline{2},$$

$$\overline{3} + \overline{3}.$$

On retrouve les résultats du tableau.

L'équation est donc

$$y = 2x.$$

La règle de la multiplication par un entier positif s'ensuit très naturellement :

Lorsqu'on multiplie un nombre par un entier positif, le produit a le même signe que ce nombre.

La recherche des équations relatives aux deux autres ensembles de points consiste à traduire dans une même expression algébrique l'enchaînement de deux opérations : doubler puis ajouter 1, ou doubler puis retrancher 1.

Fiche 41
Les points qui correspondent aux couples ci-dessous sont-ils alignés avec une suite de points noirs ?

$$(1,2)\ ;\ (1,\overline{2})\ ;\ (\overline{1},\overline{2})\ ;\ (\overline{5},10)$$

$$(3,6)\ ;\ (3,\overline{6})\ ;\ (\overline{3},\overline{6})\ ;\ (\overline{7},14)$$

$$(100,200)\ ;\ (100,\overline{200})\ ;\ (\overline{100},\overline{200})\ ;\ (\overline{100},200).$$

Comment caractériser les points alignés ?

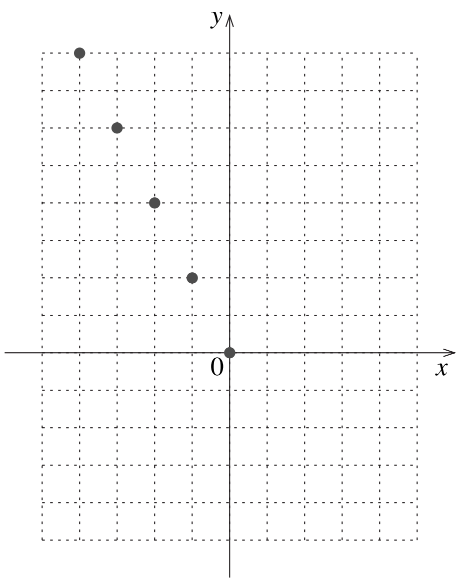


Fig. 53

Les couples représentés sur le graphique ont cette fois une abscisse négative. Ainsi, la fiche n'induit-t-elle pas la construction d'un tableau partant d'opérations sur des positifs qui conduisent, via les régularités de calcul, à des abscisses négatives. Ici, ce qui est mis en avant, c'est l'alignement des points. Le travail est donc amorcé par l'observation du graphique. Pour des élèves plus jeunes, il est évidemment plus facile d'aborder la question au départ d'un graphique qui montre des points d'abscisse positive et qui

x	y
3	$\overline{6}$
2	$\overline{4}$
1	$\overline{2}$
0	0
$\overline{1}$	2
$\overline{2}$	4
$\overline{3}$	6

conduit à un tableau dont on observe les régularités (voir le tableau situé dans la marge) .

Les élèves plus âgés recourent donc au graphique pour traiter les sept ou huit premiers couples. Ils observent que seuls ceux dont l'abscisse et l'ordonnée sont de signes différents s'alignent avec les autres. Ils en concluent que pour déterminer l'ordonnée, il faut doubler l'abscisse, puis prendre l'opposé de ce produit. Ils font parfois ces deux opérations dans l'ordre inverse et s'aperçoivent que cela revient au même. Ceci leur permet de répondre à la question pour les derniers couples qu'ils n'ont pu situer dans le repère.

Le professeur intervient ici pour introduire une définition de la multiplication par $\overline{2}$: elle combine ces deux opérations.

L'équation est donc

$$y = \overline{2}x.$$

Pour mieux réaliser les effets de cette opération, on construit en parallèle un tableau de nombres, une liste d'opérations et un graphique. Les couples sont ordonnés par valeurs croissantes de x.

x	y	$\overline{2}x = y$
$\overline{3}$	6	$\overline{2} \times \overline{3} = 6$
$\overline{2}$	4	$\overline{2} \times \overline{2} = 4$
$\overline{1}$	2	$\overline{2} \times \overline{1} = 2$
0	0	$\overline{2} \times 0 = 0$
1	$\overline{1}$	$\overline{2} \times 1 = \overline{2}$
2	$\overline{2}$	$\overline{2} \times 2 = \overline{4}$
3	$\overline{3}$	$\overline{2} \times 3 = \overline{6}$

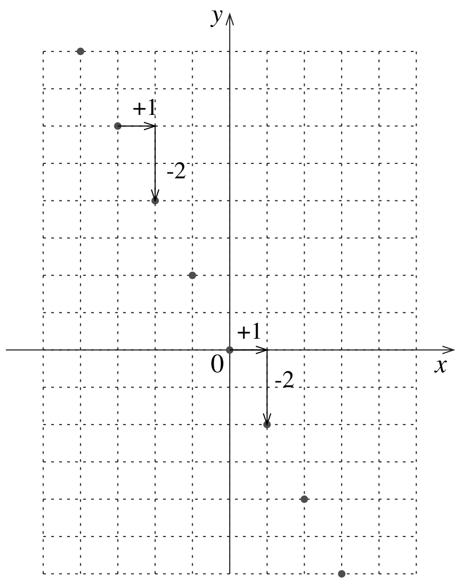


Fig. 54

Les flèches qui figurent sur ce graphique attirent l'attention sur les variations : chaque fois que le multiplicateur augmente d'une unité, le produit diminue de deux unités.

Synthèse

La synthèse est réalisée par les élèves avec l'aide du professeur qui donne la consigne qui suit.

Parmi les multiplications qui ont été amenées par les fiches 40 et 41, constituer un échantillon qui comporte tous les cas qui peuvent se présenter lorsqu'on multiplie deux entiers.
Conjecturer les règles de multiplication et vérifier si elles s'appliquent aux autres produits que l'on peut « voir » sur les différents graphiques.

Voici quatre multiplications :

$$2 \times 3 = 6\,, \quad \overline{2} \times \overline{3} = 6\,, \quad \overline{2} \times 3 = \overline{6}\,, \quad 2 \times \overline{3} = \overline{6}.$$

Les élèves distinguent assez facilement deux cas : soit les deux nombres ont même signe, soit ils ont des signes différents.

Dans le premier cas, le produit est positif ; dans le second, il est négatif. Toutes les vérifications graphiques confirment ces règles.

4.6 Règle des signes et proportionnalité

Comment s'y prendre ?

Cette activité suppose que les élèves connaissent les propriétés d'un tableau de proportionnalité et savent que dans toute proportion, le produit des moyens est égal au produit des extrêmes.

x	y
$\overline{3}$	6
$\overline{2}$	4
$\overline{1}$	2
0	0
1	$\overline{2}$
2	$\overline{4}$
3	$\overline{6}$

Le tableau qui correspond à $y = \overline{2}x$ est-il un tableau de proportionnalité ?

On part du tableau situé dans la marge. Pour vérifier l'égalité entre rapports internes, les élèves écrivent un rapport entre deux nombres de la première colonne et le rapport entre les nombres correspondants de la deuxième, par exemple

$$\frac{\overline{2}}{\overline{1}} \text{ et } \frac{4}{2}.$$

Pour obtenir que ces rapports soient égaux, il faut étendre aux entiers la propriété qui dit que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ entraîne } ad = bc.$$

Après avoir vérifié de cette façon plusieurs égalités, on dispose de tous les éléments nécessaires pour conjecturer la règle des signes d'un quotient de deux entiers.

Pour déceler l'existence d'un rapport externe, il faut considérer les rapports entre un nombre d'une colonne et son correspondant dans l'autre et vérifier si ces rapports sont égaux. On vérifie par exemple que

$$\frac{\overline{1}}{2} = \frac{2}{\overline{4}}.$$

Examinons à présent la propriété de la somme en partant des couples $(\overline{2}, 4)$ et $(1, \overline{2})$. À la somme de deux termes de la première colonne, correspond bien la somme des termes correspondants. En effet, le couple $(\overline{2} + 1, 4 + \overline{2})$ est bien un couple du tableau.

6

Proportionnalité et non-proportionnalité en géométrie

1 Quand un triangle rencontre un carré

De quoi s'agit-il ?

Étudier des tableaux de nombres et les graphiques associés à ces tableaux à partir de situations simples basées sur les périmètres de polygones. Établir les formules associées aux tableaux de nombres. Établir les graphiques correspondants.

Enjeux

Étudier, à partir des tableaux de nombres, la proportionnalité des coordonnées et celle des accroissements et la linéarité du graphique associé.

Contraster une fonction linéaire et une fonction affine. Voir le chapitre 16, section 6.4.

Associer proportionnalité des accroissements et alignement du graphique.

Prouver l'alignement des points du graphique d'une fonction linéaire ou d'une fonction affine. Voir le chapitre 16, section 5.3.

Déterminer l'intersection de deux graphiques de fonctions.

Compétences

Savoir, connaître et définir les expressions relatives aux fonctions.

Modéliser des problèmes de manière à les traiter au moyen des fonctions de référence.

Esquisser, construire un graphique pour mettre en évidence des caractéristiques du phénomène traité.

Interpréter un graphique en le reliant au problème qu'il modélise.

Calculer l'ensemble des solutions d'une équation, d'un système d'équations linéaires.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – Du papier, un crayon et une calculatrice.

Prérequis

Les cas de similitude des triangles.

Les propriétés des tableaux de proportionnalité.

Comment s'y prendre ?

> Dessine un segment $[AB]$ de 10 cm de long. Sur ce segment, place un point X à 3 cm de A. Sur $[AX]$, construis un triangle équilatéral, sur $[BX]$ un carré. Calcule les périmètres de ces deux figures.

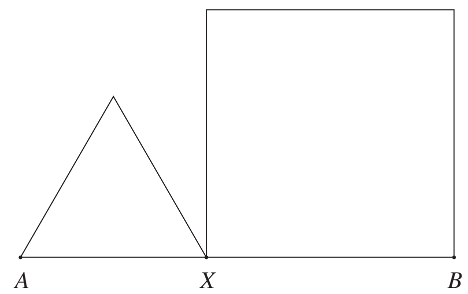


Fig. 1

Lorsque les élèves ont terminé pour $|AX| = 3$, on leur demande de faire varier la position du point X sur le segment $[AB]$ et de calculer les périmètres pour toutes les valeurs entières de $|AX|$ (de 0 à 10). On en arrive à élaborer le tableau suivant :

$\lvert AX\rvert$	$\lvert XB\rvert$	Périmètre triangle	Périmètre carré
0	10	0	40
1	9	3	36
2	8	6	32
3	7	9	28
4	6	12	24
5	5	15	20
6	4	18	16
7	3	21	12
8	2	24	8
9	1	27	4
10	0	30	0

Lorsque tous les calculs sont terminés pour des valeurs entières de $|AX|$, on observe les différents résultats. En comparant les deux colonnes de périmètres, on s'aperçoit que les valeurs du périmètre du triangle vont en croissant de 0 à 30 et que celles du carré vont en décroissant de 40 à 0. On peut alors poser la question qui suit.

> Existe-t-il une valeur de $|AX|$ pour laquelle les périmètres du triangle et du carré sont égaux ?

L'intuition de continuité amènera sans doute les élèves à dire qu'il existe nécessairement une valeur pour laquelle ces deux résultats sont égaux et que cette égalité a lieu pour une valeur de $|AX|$ comprise entre 5 et 6. Pour la déterminer, certains proposent d'affiner les calculs au dixième, puis au centième près. Si l'estimation devient de plus en plus précise, le résultat n'est toujours pas exact. Les calculs devenant fastidieux, certains élèves demandent s'il n'est pas possible de trouver ce résultat autrement. C'est le moment de les amener à mettre la situation en équation. S'ils ont été habitués à élaborer des formules à partir de tableaux de nombres, ils proposeront sans doute immédiatement d'appeler x le côté du triangle et une brève analyse de la deuxième colonne du tableau devrait amener $10-x$ pour le côté du carré. L'égalité des périmètres des deux figures se traduit finalement par l'équation

$$3x = 4(10 - x),$$

ce qui donne après résolution

$$x = \frac{40}{7}.$$

Le professeur pose ensuite cette question.

> Pourrait-on visualiser les résultats obtenus en représentant dans un repère les périmètres des deux figures en fonction de la longueur $|AX|$?

Les élèves commencent par placer les points correspondant au périmètre du triangle. À première vue, ils sont alignés. Comment cela se fait-il ? Pour répondre à cette question, on analyse le tableau de nombres correspondant.

accroissements des x	x côté du triangle	y périmètre	accroissements des y
	0	0	
+1			+3
	1	3	
+1			+3
	2	6	
+1			+3
	3	9	
+1			+3
	4	12	
...	...	...	...

On observe tout d'abord que l'on peut obtenir la colonne des y en multipliant la colonne des x par 3. Les valeurs de y sont proportionnelles aux valeurs de x. On peut donc associer à ce tableau de nombres la formule $y = 3x$. On remarque ensuite que chaque fois que x augmente de 1 unité, y augmente de 3 unités. Les accroissements des y sont proportionnels aux accroissements des x. On traduit alors cette dernière constatation sur le graphique : on se place en un point du graphique, on avance de 1 cm horizontalement et puis de 3 cm verticalement, on arrive bien ainsi au point suivant du graphique. On poursuit de proche en proche et on construit de cette façon ce que les élèves appellent spontanément un « escalier ». On retrouve une situation analogue à celle déjà traitée à la page 125.

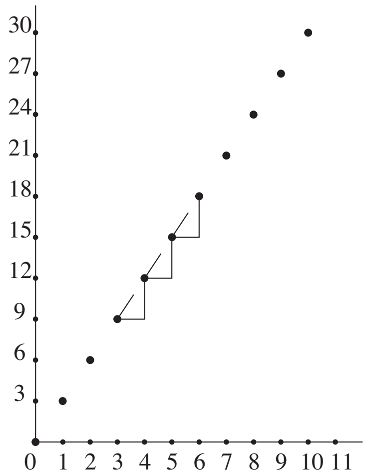


Fig. 2

L'image d'une « planche » posée sur un escalier suffira sans doute dans un premier temps pour convaincre les élèves que les points du graphique sont bien alignés comme le montre la figure 2. On peut dans un deuxième temps, si le niveau de la classe le permet, proposer une démonstration de cette propriété.

Comment justifier que les points du graphique sont alignés ?

Afin de rendre cette démonstration plus éclairante, nous raisonnerons sur un graphique légèrement faux au départ (voir figure 3).

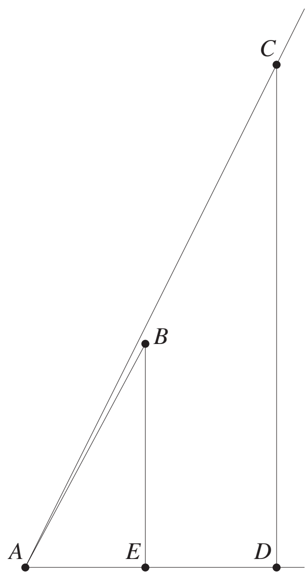


Fig. 3

Soient A, B et C trois points quelconques du graphique. Par B et C, menons les parallèles à l'axe OY. Par A, menons la parallèle à l'axe OX. Soient E et D les points d'intersection de cette droite avec les deux précédentes. Montrons que les triangles ABE et ACD sont semblables. Les angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{AEB}$ ont la même amplitude car ce sont des angles droits. Si $(x_A, 3x_A)$, $(x_B, 3x_B)$, $(x_C, 3x_C)$ sont les coordonnées des points A, B, C, les segments $[CD]$, $[BE]$, $[AD]$ et $[AE]$ mesurent respectivement

$3(x_C - x_A),\ 3(x_B - x_A),\ x_C - x_A,\ x_B - x_A$ unités de longueur.

On obtient ainsi

$$\frac{|CD|}{|BE|} = \frac{|AD|}{|AE|} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_A}.$$

Les angles $\widehat{AEB}$ et $\widehat{ADC}$ sont adjacents à des côtés correspondants proportionnels ; nous sommes donc en présence du cas de similitude : « deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels. » Les triangles ABE et ACD sont donc semblables. Par conséquent, les angles $\widehat{CAD}$ et $\widehat{BAE}$ ont la même amplitude et les points A, B, C sont alignés. On fera alors remarquer que la figure sur laquelle on a raisonné n'est pas correcte. Un travail analogue se fait pour le périmètre du carré, ce qui nous donne le tableau suivant.

Accroissements des x	x côté	y périmètre	Accroissements des y
	0	40	
+1			-4
	1	36	
+1			-4
	2	32	
+1			-4
	3	28	
+1			-4
	4	24	
...	...	...	...

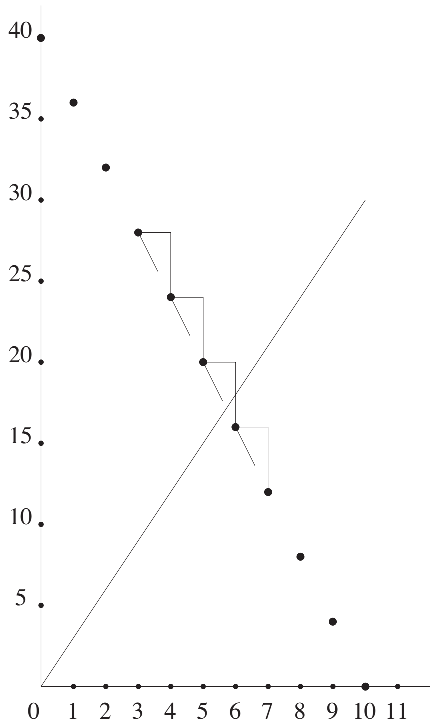


Fig. 4

Cette fois il n'est pas possible de trouver un facteur multiplicatif pour passer de la colonne des x à la colonne des y du tableau. On voit de cette façon que y n'est pas proportionnel à x. Mais les accroissements des y sont encore proportionnels aux accroissements des x et on obtient donc de nouveau un escalier régulier pour passer d'un point à l'autre du graphique. On fera toutefois remarquer que, dans ce cas, chaque fois que l'on avance de 1 unité horizontalement, on descend de 4 unités verticalement et que l'escalier est incliné dans l'autre sens. Il reste à noter que le graphique de cette fonction ne comprend pas le point (0,0). On peut de nouveau bien entendu démontrer l'alignement des points du graphique en recourant au même cas de similitude.

À partir de ces constatations, on peut élaborer une première synthèse.

Synthèse

Fonction	Tableau de nombres	Graphique
$y = 3x$	Les ordonnées sont proportionnelles aux abscisses. Les accroissements sont proportionnels.	Le graphique est une droite qui passe par l'origine du repère.
$y = 40 - 4x$	Les ordonnées ne sont pas proportionnelles aux abscisses. Les accroissements sont proportionnels.	Le graphique est une droite qui ne passe pas par l'origine du repère.

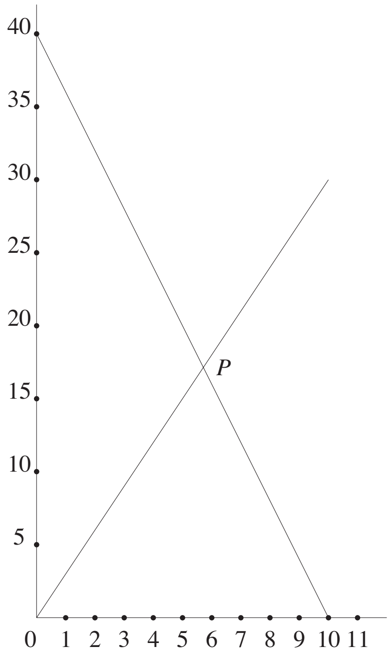


Fig. 5

Les deux fonctions sont donc représentées par deux droites. En affirmant cela, on conjecture que tous les nouveaux points qu'on pourrait calculer seraient eux aussi chaque fois sur la même droite. Il ne nous paraît pas nécessaire de nous appesantir sur ce fait, qui va de soi pour les élèves à ce niveau. Les deux droites se coupent en un point P. Il convient alors de faire réfléchir les élèves sur la signification de ce point d'intersection et de faire le lien avec l'équation $3x = 4(10 - x)$.

Échos des classes

Cette situation a été expérimentée dans deux classes de troisième technique de transition à option scientifique. Le niveau des élèves était faible dans la première classe et moyen dans la deuxième. Dans les deux classes, les élèves se sont pris au jeu de la recherche d'une valeur exacte pour l'égalité des périmètres. Certains ont poursuivi leur recherche jusqu'au dix-millième. Dans la première classe, le professeur a dû interrompre ces recherches et proposer lui-même d'algébriser ; dans la deuxième, les élèves ont demandé si le professeur n'avait pas un truc pour aller plus vite. Par contre, dans les deux classes, l'élaboration des formules a posé le problème du choix des inconnues. Si tous les élèves ont immédiatement posé $|AX| = x$, peu ont pensé à exprimer la longueur $|BX|$ en fonction de x. Comme un des objectifs du professeur était l'élaboration d'équations à une inconnue, il a incité les élèves à exprimer les deux longueurs en fonction de la même variable. On pourrait envisager de les laisser introduire une deuxième variable y pour la longueur $|BX|$ et on obtiendrait alors un système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} x + y &= 10, \\ 3x &= 4y. \end{cases}$$

Il nous semble cependant que ce type de mise en équation est plus difficile conceptuellement. En effet, la première traduit non pas une question mais une donnée du problème et les élèves n'auront pas tendance à l'énoncer spontanément. De plus, ces situations-problèmes ont été testées en début d'année scolaire et il est difficile de confronter à ce moment les élèves à la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues.

Prolongements possibles

On peut envisager une activité dont le déroulement serait semblable à l'activité précédente, mais qui étudierait les aires des deux figures. On obtient alors deux équations du deuxième degré

$$A = (10 - x)^2,$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x^2.$$

L'élaboration du graphique de ces deux fonctions amène naturellement l'analyse du tableau de nombres associé à chacune d'elles et la découverte de leur caractère non linéaire. Nous avons choisi ici d'expliquer la propriété de non-linéarité à partir d'une autre situation.

2 Des rectangles de même périmètre

De quoi s'agit-il ?

Étudier des tableaux de nombres et les graphiques associés à ces tableaux à partir d'une situation faisant intervenir la base, la hauteur et l'aire de rectangles isopérimétriques[1]. Établir les formules correspondant aux tableaux de nombres. Établir les graphiques correspondants.

Enjeux

Contraster les tableaux de nombres et les graphiques associés à une fonction affine et une à fonction du deuxième degré. Associer proportionnalité des accroissements et alignement du graphique. Voir le chapitre 16, section 5.

Compétences

Savoir, connaître et définir les expressions relatives aux fonctions.

Modéliser des problèmes de manière à les traiter au moyen des fonctions de référence.

[1] Pour plus de détails J. Bretton et al. [1991].

Esquisser, construire un graphique pour mettre en évidence des caractéristiques du phénomène traité.

Interpréter un graphique en le reliant au problème qu'il modélise.

Calculer la solution d'une équation.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – Du papier non tramé, un crayon, une calculatrice.

Comment s'y prendre ?

Dessiner quelques rectangles dont le périmètre mesure 30 cm.
Dans un repère orthonormé, dessiner les points qui ont pour abscisse la base des rectangles et pour ordonnée leur hauteur.
Comment ces points se disposent-ils les uns par rapport aux autres ?

Les élèves commencent par rechercher les dimensions des rectangles. Ils doivent pour cela répondre à la question « Comment calculer la hauteur d'un rectangle quand on connaît sa base ? ». Une simple transformation de la formule du périmètre du rectangle permet de répondre à cette question. On obtient successivement les équations

$$\begin{aligned} P &= 2 \cdot (x+y), \\ 30 &= 2x + 2y, \\ 2y &= 30 - 2x, \\ y &= \frac{30-2x}{2}, \\ y &= 15 - x. \end{aligned}$$

On aboutit à la construction du tableau suivant, où x désigne la base du rectangle et y sa hauteur.

x base du rectangle	y hauteur du rectangle
1	14
2	13
3	12
...	...
4,5	10,5
5	10
5,5	9,5
...	...
7,2	7,8
7,3	7,7
...	...
14	1
14,9	0,1

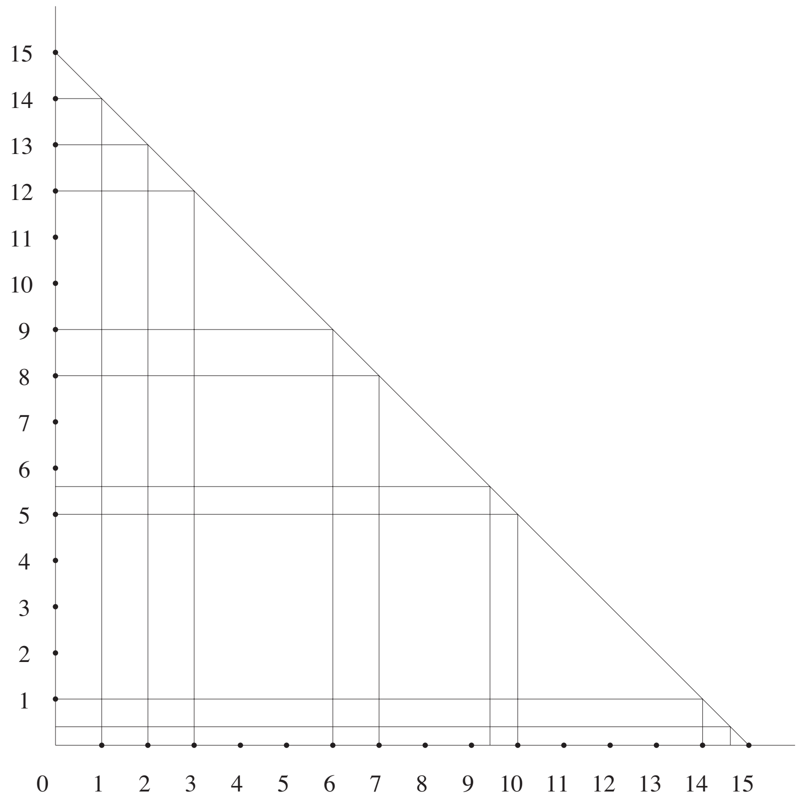


Fig. 6

Dans un repère orthonormé, le fait de dessiner les rectangles en portant en abscisse les bases et en ordonnée les hauteurs fait clairement apparaître l'alignement des sommets supérieurs droits. Cet alignement est-il lié au périmètre choisi ? Si nous modifions celui-ci, la conclusion sera-t-elle la même ? L'activité se poursuit en répétant la même procédure pour d'autres données et, force est de constater que les sommets supérieurs droits des rectangles s'alignent de nouveau. Pourquoi ?

Comment justifier que ces points sont alignés ?

L'analyse du tableau montre que la base et la hauteur ne sont pas proportionnelles. Pour conserver un périmètre constant, il faut ajouter à la hauteur ce que l'on enlève à la base ou réciproquement. On ne peut donc passer de l'une à l'autre grâce à un facteur multiplicatif. Par contre, les accroissements en x et en y sont proportionnels : on peut passer des premiers aux seconds en les multipliant par -1. Ceci est confirmé par le graphique : lorsqu'on se déplace d'une unité vers la droite sur l'axe des abscisses, on se déplace d'une unité vers le bas sur l'axe des ordonnées.

Accroissements des x	x Base	y Hauteur	Accroissements des y
	1	14	
+1			-1
	2	13	
+1			-1
	3	12	
	...	...	
	4,5	10,5	
+0,5			$-0,5$
	5	10	
+0,5			$-0,5$
	5,5	9,5	
	...	...	
	7,2	7,8	
+0,1			$-0,1$
	7,3	7,7	
	...	...	
	14	1	
+0,9			$-0,9$
	14,9	0,1	

En retournant à la synthèse de l'activité précédente, on peut conclure que cette fonction est du même type que $y = 40 - 4x$. Il est donc normal d'obtenir une droite qui ne passe pas par l'origine du repère ; en effet quand $x = 0$, $y \neq 0$.

On peut maintenant poser les questions suivantes.

Tous les rectangles ont-ils la même aire ?
Dans le cas contraire, comment peut-on décrire la situation ?
Quelles sont les dimensions du rectangle de 30 cm de périmètre ayant la plus grande aire possible ?

Les élèves ont manipulé beaucoup de tableaux de nombres au cours du premier degré de l'enseignement secondaire. Il est naturel d'y recourir encore et de compléter celui ci-dessous. Manifestement, les rectangles n'ont pas la même aire. Le tableau semble indiquer un effet de symétrie. On passe d'aires petites à des aires plus grandes pour revenir ensuite à des aires petites. Conjecturer qu'il existe un rectangle présentant une aire maximale est raisonnable et on peut même penser qu'il s'agit d'un carré dont le côté mesure entre 7 et 8 cm (les élèves annonceront probablement 7,5 cm spontanément). Dessiner la situation dans un repère orthonormé conduira à confirmer la conjecture.

On constate que le graphique prend cette fois l'allure d'une courbe (parabole) présentant un sommet correspondant à l'aire maximale, celle d'un carré de 7,5 cm de côté.

x Base	y Hauteur	$x \cdot y$ Aire
1	14	14
2	13	26
3	12	36
...	...	...
4,5	10,5	47,25
5	10	50
5,5	9,5	52,25
...	...	...
7,2	7,8	56,16
7,3	7,7	56,21
...	...	...
12	3	36
13	2	26
14	1	14
...	...	...
14,9	0,1	1,49

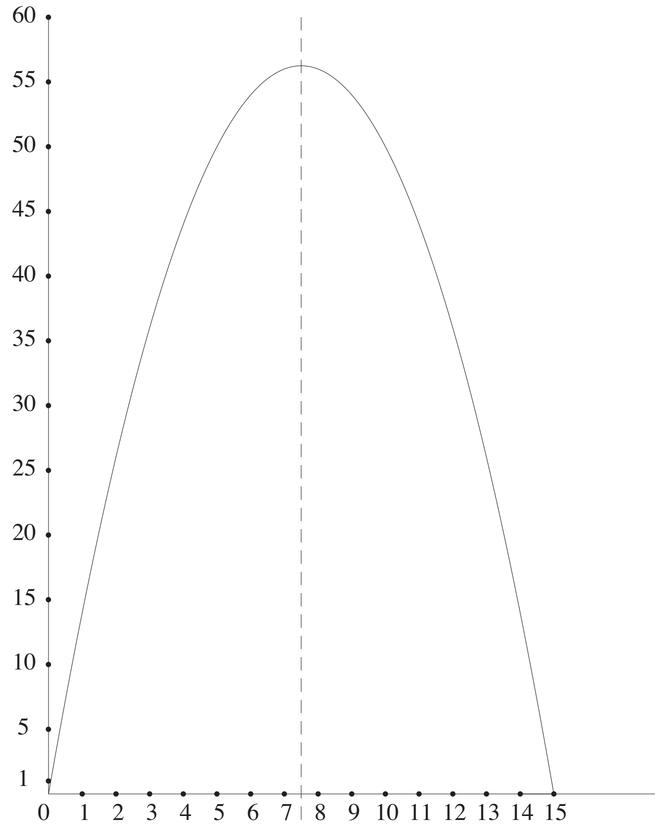


Fig. 7

Le graphique confirme l'effet de symétrie (deux points symétriques du graphique correspondent d'ailleurs à deux rectangles identiques, l'un « posé » sur sa longueur, l'autre sur sa largeur) ; il est d'ailleurs facile de dessiner l'axe de cette symétrie. Il comprend évidemment le point milieu du segment déterminé par les points (0 , 0) et (15 , 0) – extrémités de l'intervalle sur lequel le problème à un sens – c'est-à-dire le point (7,5 ; 0) où 7,5 est la mesure de la base et de la hauteur du rectangle (et c'est un carré !) de 30 cm de périmètre et de plus grande aire.

Quelle est l'équation de cette courbe ?

Chacun de ses points a pour abscisse la base d'un rectangle et pour ordonnée l'aire du même rectangle, donnée par l'équation $A = x \cdot (15 - x)$ ou $A = 15x - x^2$. Nous sommes maintenant en présence d'une fonction du deuxième degré.

Le tableau de nombres montre que les accroissements en x et les accroissements d'aire ne sont pas proportionnels. De même, la base et l'aire des rectangles ne le sont pas non plus.

Accroissements des x	x Base	$x \cdot y$ Aire	Accroissements des $x \cdot y$
	1	14	
+1			+12
	2	26	
+1			+10
	3	36	
	...	...	
	4,5	47,25	
+0,5			+2,75
	5	50	
+0,5			+2,25
	5,5	52,25	
	...	...	
	7,2	56,16	
+0,1			+0,05
	7,3	56,21	
	...	...	
	12	36	
+1			-10
	13	26	
+1			-12
	14	14	
+0,9			-12,51
	14,9	1,49	

Prolongements possibles

On peut démontrer assez facilement que l'aire du carré est bien l'aire maximale d'une famille de rectangles isopérimétriques. Si on appelle p le demi-périmètre du carré, $\frac{p}{2}$ est la mesure du côté du carré. Tout autre rectangle a comme dimensions $\frac{p}{2}-\alpha$ et $\frac{p}{2}+\alpha$ avec $\alpha > 0$. L'aire du rectangle devient donc

$$\left(\frac{p}{2}-\alpha\right)\left(\frac{p}{2}+\alpha\right),$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2-\alpha^2,$$

ce qui est toujours strictement inférieur à $(\frac{p}{2})^2$ qui représente l'aire du carré.

3 Des rectangles de même aire

De quoi s'agit-il ?

Étudier le tableau de nombres et le graphique associé à ce tableau à partir d'une situation basée sur les rectangles de même aire.

Enjeux

Établir le tableau de nombres, la formule et le graphique associés à la fonction $x \cdot y = k$ à partir de la situation géométrique des rectangles de même aire. Comparer avec les fonctions découvertes lors des activités précédentes.

Compétences

Savoir, connaître et définir les expressions relatives aux fonctions.

Modéliser des problèmes de manière à les traiter au moyen des fonctions de référence.

Esquisser, construire un graphique pour mettre en évidence des caractéristiques du phénomène traité.

Interpréter un graphique en le reliant au problème qu'il modélise.

Calculer la solution d'une équation.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – Du papier, un crayon et une calculatrice.

Comment s'y prendre ?

Rechercher tous les rectangles dont l'aire vaut 24 cm^2. Dans un repère orthonormé, dessiner les points qui ont pour abscisse la mesure de la base des rectangles et pour ordonnée celle de leur hauteur. Comment ces points se disposent-ils les uns par rapport aux autres ?

x	y
1	24
2	12
3	8
4	6
5	4,8
6	4
7	$\frac{24}{7}$
...	...
10	2,4
11	$\frac{24}{11}$
...	...
24	1

Dans un premier temps, les élèves proposeront sans doute les rectangles dont les dimensions sont des nombres entiers. En suggérant certaines valeurs particulières pour la base, on les amènera à proposer des valeurs décimales ou fractionnaires et à élaborer la formule qui permet de calculer la hauteur en fonction de la base. On aboutit finalement à la construction d'un tableau du type suivant, où x désigne la base et y la hauteur. L'analyse du tableau permet de voir rapidement que la hauteur des rectangles n'est pas proportionnelle à leur base. Pour les accroissements, une brève observation du tableau reprenant les premières dimensions entières permet de conclure qu'il n'y a pas non plus proportionnalité.

Accroissements des x	x Base	y Hauteur	Accroissements des y
	1	24	
$+1$			-12
	2	12	
$+1$			-4
	3	8	
$+1$			-2
	4	6	
	...	...	

On peut maintenant demander aux élèves s'ils pensent que les points du graphique de cette fonction seront ou non alignés. La réalisation concrète du graphique dans un repère permettra de vérifier leurs conjectures. Pour donner une allure convenable à la courbe, il sera indispensable d'augmenter le nombre de valeurs pour x dans le tableau de nombres. Le professeur proposera éventuellement d'étendre le domaine de la fonction aux nombres négatifs afin d'obtenir le graphique complet de la fonction $y = \frac{24}{x}$. Il choisira également, en fonction du niveau de sa classe, de parler ou non d'hyperbole, d'asymptote, de domaine de définition, ...

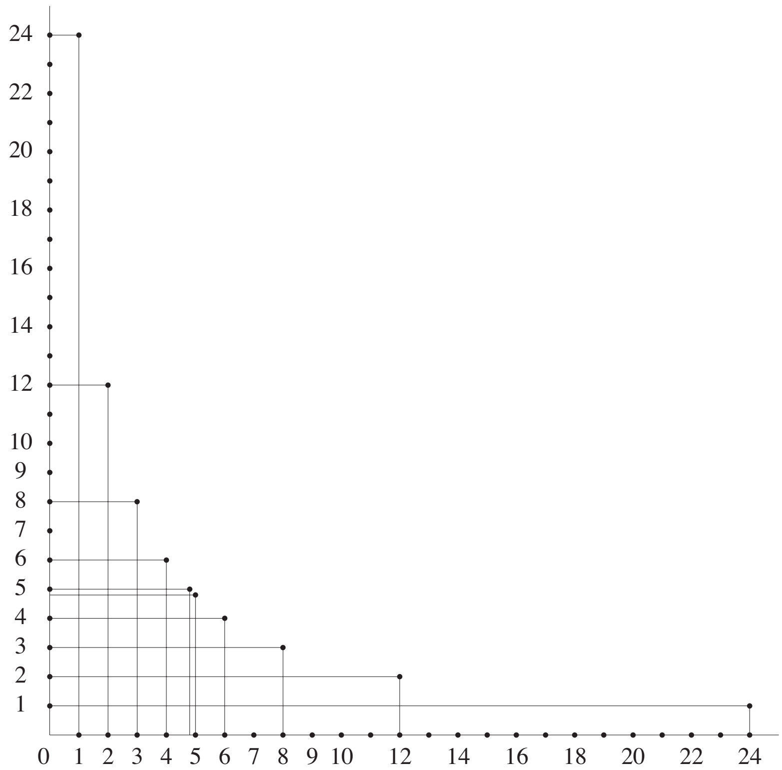


Fig. 8

Synthèse. – On peut proposer à ce moment de rassembler les différentes observations des trois activités afin de compléter le tableau de synthèse ébauché à la page 159.

Fonction	Tableau de nombres	Graphique
$y = 3x$	Les ordonnées sont proportionnelles aux abscisses. Les accroissements sont proportionnels.	Le graphique est une droite qui passe par l'origine du repère.
$y = 40 - 4x$ $y = 15 - x$	Les ordonnées ne sont pas proportionnelles aux abscisses. Les accroissements sont proportionnels.	Le graphique est une droite qui ne passe pas par l'origine du repère.
$y = 15x - x^2$	Les ordonnées ne sont pas proportionnelles aux abscisses. Les accroissements ne sont pas proportionnels.	Le graphique n'est pas une droite Il s'agit ici d'une parabole.
$y = \frac{k}{x}$	Les ordonnées ne sont pas proportionnelles aux abscisses. Les accroissements ne sont pas proportionnels.	Le graphique n'est pas une droite. Il s'agit ici d'une hyperbole.

4 De la perspective au théorème de Thalès

De quoi s'agit-il ?

Dessiner, en perspective parallèle, un cube dont les faces sont munies d'un quadrillage régulier.

Enjeux

Découvrir le théorème de Thalès par le biais du partage d'un segment par un réseau de parallèles équidistantes, dans le contexte du dessin en perspective.

Voir chapitre 16, section 3.3.

Compétences

Savoir, connaître, définir les théorèmes de la géométrie classique relatifs aux rapports de longueurs.

Choisir des propriétés, organiser une démarche en vue de déterminer des éléments d'une figure, dégager de nouvelles propriétés géométriques, résoudre des problèmes de construction.

Effectuer et interpréter des représentations planes de figures de l'espace en se fondant sur les propriétés de telles représentations.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – Une copie par élève des fiches 42 à 44. Règle et équerre pour chacun.

Prérequis. – La perspective parallèle conserve le parallélisme, l'incidence et le milieu (cf. par exemple les six premières activités du chapitre 7 de CREM [2001b] qui sont centrées sur le dessin de cubes et d'assemblages de cubes en perspective parallèle).

4.1 Dessiner un cube de Rubik

Le *cube de Rubik* est un casse-tête en trois dimensions. Il est formé de 27 petites cubes colorés, articulés de manière astucieuse pour se prêter à des mouvements de rotation. Le jeu consiste à faire pivoter ces cubes de façon à ce que chacune des 6 faces du cube 3×3 qu'ils forment, soit d'une même couleur. Le cube de Rubik porte le nom de son inventeur *Erno Rubik*, un architecte hongrois, passionné de géométrie. Créé en 1974, ce jeu a rencontré très rapidement un vif succès dans de nombreux pays.

Nous ne nous intéressons pas ici au jeu lui-même mais seulement aux questions que soulève le dessin d'un tel cube.

Comment s'y prendre ?

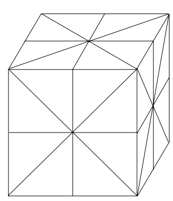


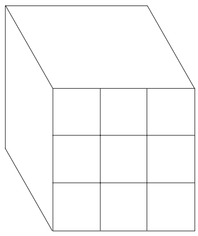
Fig. 9

La figure 9 constitue une figure de référence pour passer du partage en deux à un partage en n parties égales : elle rappelle l'ensemble des propriétés des médianes et des diagonales des parallélogrammes qui apparaissent dans la perspective parallèle d'un cube.

Les élèves reçoivent la fiche 42.

Fiche 42 (page 197)

Un dessin d'un cube de Rubik est ébauché ci-dessous ; achever ce dessin sans procéder à aucune mesure. Utiliser une règle non graduée et une équerre pour tracer les parallèles nécessaires. Décrire les différentes étapes de la construction.



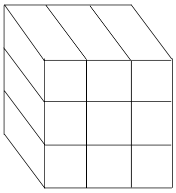


Fig. 10

En un premier temps, les élèves travaillent seuls, ils tracent les parallèles aux fuyantes comme le montre la figure 10. Mais comment partager ces fuyantes sans recourir à des mesures ?

La difficulté vient de ce que le milieu des diagonales n'est pas un élément de la figure. Mais dès qu'une diagonale de la face frontale est tracée (avec ou sans l'aide du professeur), la situation s'éclaire : cette diagonale passe par les nœuds du quadrillage et est partagée ainsi en trois parties égales (figure 11*a*). La familiarité des élèves avec les tracés sur papier quadrillé est telle qu'il n'est pas opportun de soulever, pour le carré, la question de l'alignement des nœuds, ni celle du partage en trois de la diagonale. On y reviendra à propos des autres faces.

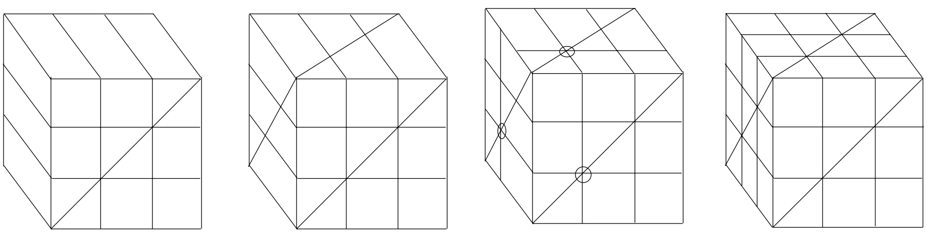


Fig. 11 (a,b,c,d)

Comme les autres faces sont des images de carrés, l'idée vient de tracer la diagonale de la face supérieure et celle de la face de gauche (figure 11*b*), ensuite, de transposer sur ces faces les propriétés d'incidence. La figure 11 montre une correspondance entre ce qui se passe sur la face frontale et les autres faces. On poursuit en traçant les parallèles aux arêtes (figures 11*c* et *d*).

À l'issue de cette construction, une question théorique peut être soulevée.

Les arêtes fuyantes sont-elles partagées par ces parallèles en trois segments de même longueur ?

Il arrive en effet souvent que les mesures que l'on prend pour vérifier révèlent des différences de longueurs entre les trois parties déterminées sur l'arête fuyante. Sont-elles dues à des imprécisions dans le tracé ou faut-il incriminer le procédé ?

Pour amorcer une réponse à la question, le professeur attire l'attention des élèves sur le fait que, s'ils ne disposent d'aucune propriété sur le partage en trois, ils en connaissent par contre à propos du milieu de segments dans les parallélogrammes. Il rappelle aussi qu'ils disposent d'une figure de référence (figure 9 à la page 168). Les propriétés utiles ici sont :

– dans un parallélogramme, diagonales et médianes se coupent en un même point, milieu de chacune d'elles ;
– dans un parallélogramme, chaque médiane est parallèle à une paire de côtés.

On revient au dessin du cube, on observe d'abord les carrés de la face frontale qui sont ombrés sur les figures 12 a et b.

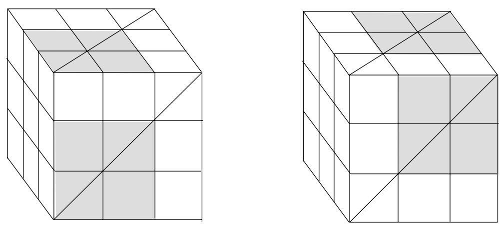


Fig. 12 (a,b)

Bien sûr, les élèves savent que la diagonale de la face frontale passe par deux nœuds du quadrillage et est partagée en trois parties égales, néanmoins en conjuguant les figures 12 a et b, ils comprennent pourquoi les égalités sur une arête de la face frontale se propagent sur la diagonale de cette face. Par ailleurs, cette première étape met en évidence les sous-figures qui seront en jeu pour aborder les égalités sur les fuyantes.

Considérons à présent les parallélogrammes ombrés des figures 13.

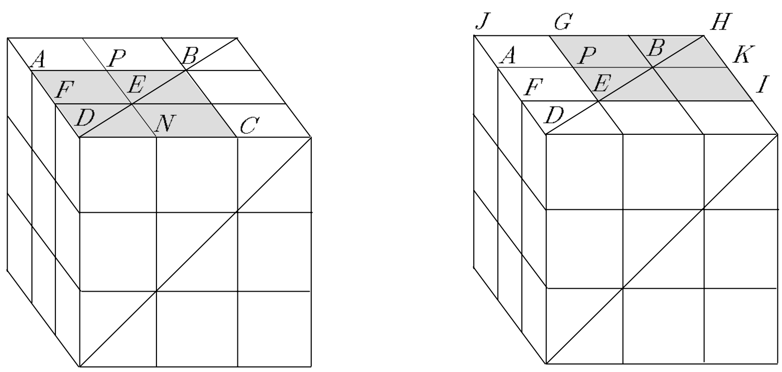


Fig. 13 (a,b)

- Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme (puisque ses côtés sont deux à deux parallèles par construction) ;
- le segment $[DB]$ est une diagonale de ce parallélogramme et le segment $[NP]$ est une médiane (par construction N est le milieu de $[DC]$ et NP est parallèle à AD, ainsi donc cette médiane est déterminée par un de ses points et sa direction) ;
- le point E, intersection de cette diagonale et de cette médiane est donc le milieu de la diagonale, c'est à dire :

$$|DE| = |EB|\,;$$

- le même point E appartient à l'autre médiane FE, par conséquent F partage $[AD]$ en deux segments de même longueur. On a donc :

$$|FD| = |FA|.$$

On montre de même que dans le parallélogramme $GHIE$,

$$|EB| = |BH|,$$

que le segment $[PK]$ est une médiane et que

$$|GP| = |PE|.$$

Comme

$$|GP| = |JA| \text{ et } |PE| = |AF|,$$

on a aussi

$$|JA| = |AF|.$$

Ceci achève la démonstration.

La construction terminée, il importe de sortir du contexte du dessin en perspective et de mettre en évidence un procédé plus général. La figure 14 et son commentaire montrent comment partager le segment $[AC]$ en trois parties égales, sans mesurer.

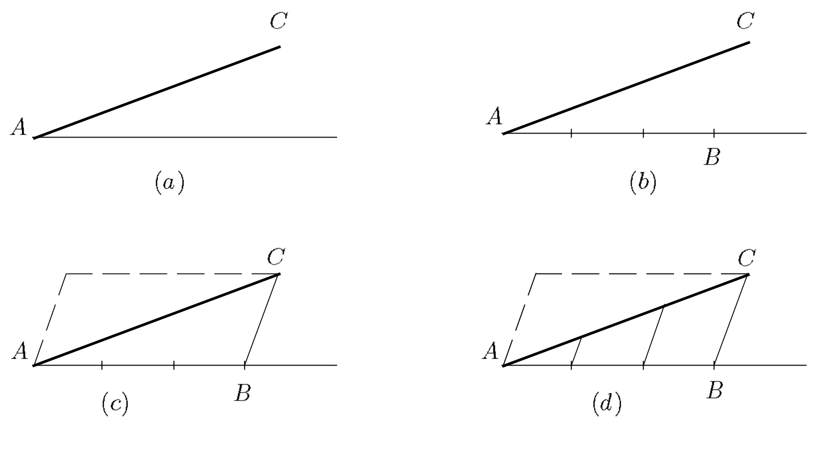


Fig. 14

Pour partager un segment $[AC]$ en trois, on peut le considérer comme une diagonale d'un parallélogramme :

(a) on trace à partir de A, une demi-droite non alignée avec $[AC]$;

(b) à partir du point A, on gradue la demi-droite en y portant trois segments de même longueur, on détermine ainsi $[AB]$, premier côté d'un parallélogramme ;

(c) on joint les points B et C, on détermine ainsi le second côté du parallélogramme ;

(d) par chacun des points de graduation du premier côté, on mène une parallèle au second côté ;

chaque point d'intersection d'une de ces parallèles avec la diagonale est un point de division de celle-ci.

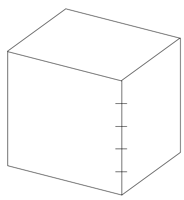
4.2 Partager les arêtes d'un cube

Comment s'y prendre ?

Dans cette deuxième activité, il s'agit d'adapter le procédé mis au point à propos du partage en trois, au partage en cinq, et ensuite au partage en n parties égales. Les élèves reçoivent la fiche 43.

Fiche 43 (page 198)

L'arête verticale de ce cube est partagée en cinq parties de même longueur ; partager les autres arêtes en cinq, sans procéder à aucune mesure. Utiliser une règle non graduée et une équerre pour tracer les parallèles nécessaires, décrire les différentes étapes de la construction.



Dans cette activité comme dans la précédente, trois réseaux de parallèles sont implicitement présents : les parallèles aux arêtes du cube. On s'attend à ce que les élèves aient recours aux diagonales des faces.

La figure 15 montre une façon de procéder.

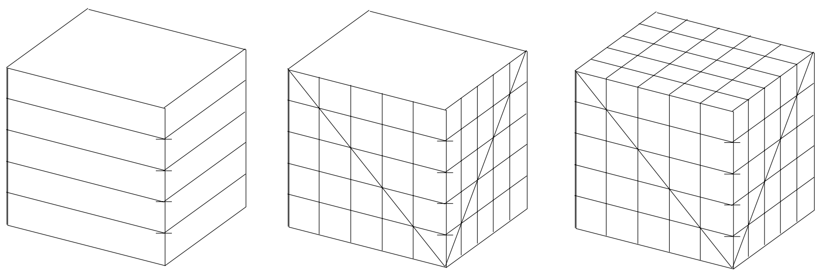


Fig. 15

Le professeur pose à présent une nouvelle question.

Décrire comment partager un segment en n parties égales en utilisant un réseau de parallèles. Énoncer les propriétés utilisées.

Le professeur veille à ce que chaque élève se donne un segment à partager et prenne conscience des choix à faire, à savoir

– la direction de la demi-droite qui servira d'intermédiaire ;

– l'unité sur cette demi-droite.

Il s'ensuit un travail collectif pour dégager une méthode de partage et pour la rattacher aux propriétés du parallélogramme. La figure 16 montre les étapes d'une telle construction. La figure 17 avec ses commentaires en donne une démonstration.

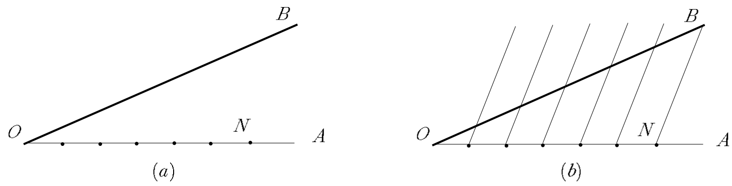


Fig. 16

Supposons qu'il s'agisse de partager le segment $[OB]$ en six parties égales.

(a) Par O menons la demi-droite $[OA$ et portons, à partir de O six segments de longueur égale ;

(b) joignons le point N (extrémité du dernier segment sur $[OA)$ et le point B. Par chacun des points de graduation, faisons passer la parallèle à BN.

Montrons à présent que par ce procédé, le segment $[OB]$ est bien partagé en six parties égales.

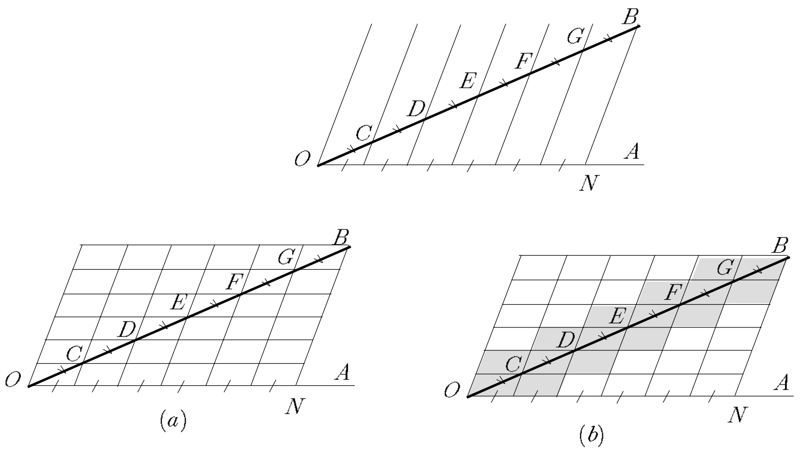


Fig. 17

(a) Par chaque point C, D, E, ...déterminé sur $[OB]$ par le premier réseau de parallèles, menons la parallèle à $[OA$. Nous obtenons un réseau de parallélogrammes.

(b) Sélectionnons les parallélogrammes ombrés. Une configuration apparaît. Elle rappelle la figure 13 à la page 170 ; on applique donc de proche en proche le raisonnement qui mobilise les propriétés des diagonales et des médianes de ces parallélogrammes et on montre ainsi l'égalité des segments déterminés sur $[OB]$.

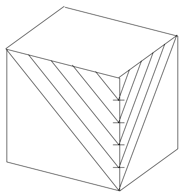


Fig. 18

Après cette mise au point, on peut revenir à la fiche de travail et chercher un moyen de partager les arêtes sans passer par le partage des diagonales. La construction est illustrée par la figure 18.

Tout en exerçant le procédé mis au point, cette construction constitue une bonne préparation à l'activité suivante.

À présent, les élèves sont prêts à utiliser la conservation des rapports par une projection parallèle. Notons au passage que, dans le contexte d'une étude des propriétés de la projection parallèle (ce qui n'est pas le cas ici), on montrerait que cette propriété assure le caractère linéaire de cette transformation.

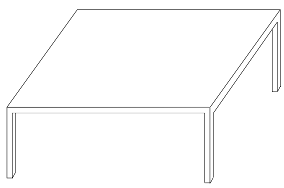
4.3 Dessiner sur une table

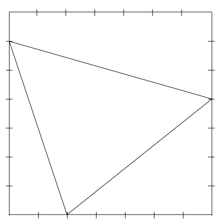
Comment s'y prendre ?

Dans cette activité, on introduit la conservation des rapports rationnels.

Fiche 44 (page 199)

Voici une table sur laquelle on veut dessiner un triangle dont le modèle, vu en vraie grandeur, est placé juste en-dessous. Dessiner le même triangle, dans la même position, sur la table représentée en perspective parallèle. Décrire les étapes de la construction. Utiliser une équerre et une règle non graduée, ne rien mesurer.





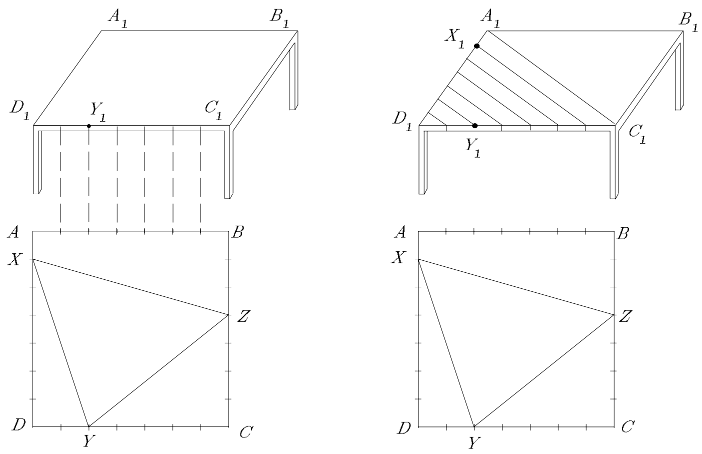


Fig. 19 (a,b)

Les bords de la table sont divisés en parties égales sur le modèle. Commençons par reporter ces graduations sur $[D_1C_1]$ qui est vu en vraie grandeur. Le point Y_1 est situé aux deux septièmes de $[D_1C_1]$ à partir de D_1.

Le point X (voir figure 19 b) est situé aux six septièmes du segment $[DA]$ à partir de D. Il s'agit donc de partager le segment $[D_1A_1]$ en sept. On se sert évidemment des graduations de $[D_1C_1]$.

On joint C_1 et A_1, et on mène les parallèles à C_1A_1 qui passent par les graduations de $[D_1C_1]$. On trouve X_1. Les élèves réalisent *a posteriori* que seule la parallèle qui passe par la sixième graduation (à partir de D_1) est utile !

Le point Z (voir figure 20a) est situé aux quatre septièmes du segment $[CB]$ à partir de C. Il s'agit donc de déterminer le point aux quatre septièmes de $[C_1B_1]$. On se sert à nouveau des graduations de D_1C_1.

On joint D_1 et B_1 et on mène la parallèle à D_1B_1 qui passe par la quatrième graduation de $[D_1C_1]$ à partir C_1. On trouve Z_1 et on trace le triangle $Y_1X_1Z_1$ (figure 20 b).

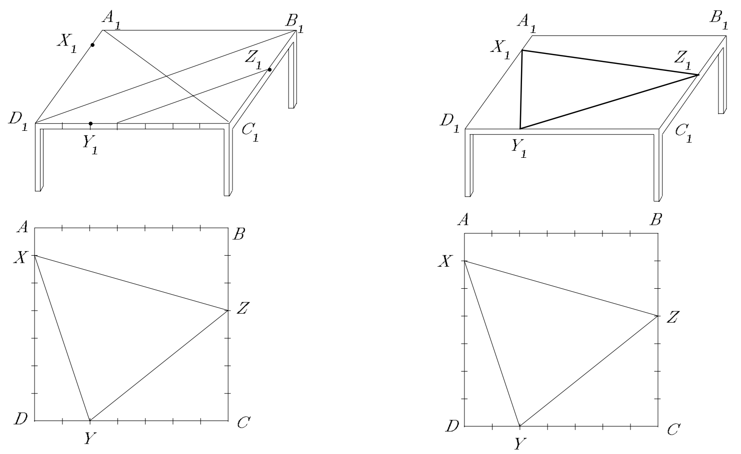


Fig. 20 (a,b)

À l'issue de cette activité, le professeur met en évidence quelques expressions et notations relatives aux rapports et proportions. Par exemple, l'égalité $|DY| = \dfrac{2}{7}|DC|$, signifie que le segment $[DY]$ vaut les deux septièmes du segment $[DC]$. Cette égalité est équivalente à $\dfrac{|DY|}{|DC|} = \dfrac{2}{7}$, qu'on traduit souvent par l'expression : $|DY|$ est à $|DC|$ comme 2 est à 7.

À partir des égalités

$$\frac{|DX|}{|DA|} = \frac{6}{7} \quad \text{et} \quad \frac{|D_1X_1|}{|D_1A_1|} = \frac{6}{7},$$

on en écrit une autre :

$$\frac{|DX|}{|DA|} = \frac{|D_1X_1|}{|D_1A_1|}.$$

Une telle égalité entre deux rapports est appelée *proportion*. On dit que les segments $[DX], [DA], [D_1X_1]$ et $[D_1A_1]$ sont proportionnels ou encore que $|DX|$ est à $|DA|$ comme $|D_1X_1|$ est à $|D_1A_1|$.

Prolongements possibles

L'exploration du théorème de Thalès et de sa réciproque se poursuit pour des rapports de longueurs à propos desquels il faut imaginer des graduations de plus en plus fines. Le lecteur trouvera dans FESeC [1996b], sous le titre *Une toile d'araignée autour de Thalès*, une suite d'activités qui poursuivent cet objectif.

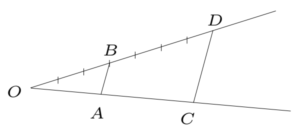
4.4 Synthèse

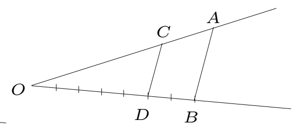
Comment s'y prendre ?

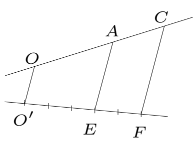
La synthèse est préparée par une fiche qui apprend aux élèves à traduire les propriétés de différentes configurations de Thalès par des égalités de rapports.

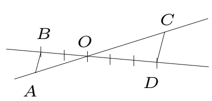
Fiche 45 (page 200)

Pour chaque figure, écrire l'une ou l'autre proportion qui fait intervenir le rapport $\frac{|OC|}{|OA|}$.

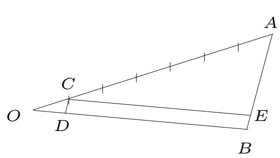


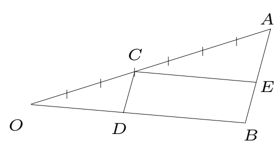






Même question à propos des rapports $\frac{|OD|}{|OB|}$; $\frac{|EB|}{|BA|}$; $\frac{|EB|}{|EA|}$.





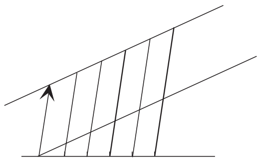


Fig. 21

La figure 21 sert de référence lorsque les élèves n'arrivent pas à imaginer le réseau de parallèles équidistantes. On y revient aussi pour réaliser la translation qui permet d'analyser la troisième figure, ou encore la rotation de 180° qui permet d'analyser la quatrième.

Ensuite, on rédige des énoncés qui couvrent l'ensemble de ces situations. Voici des *exemples* de tels énoncés. Leur formulation peut varier selon les classes et selon la culture mathématique des élèves (s'ils sont familiers des projections parallèles, la formulation sera plus concise).

Énoncé 1. – Dessinons une graduation régulière sur une droite. Traçons des parallèles par les points de cette graduation. Dans ces conditions, toute droite qui coupe les parallèles est partagée en parties égales.

Énoncé 2. – Si dans un triangle on mène une parallèle à un côté, cette parallèle détermine sur les deux autres côtés des segments proportionnels. De plus, dans les notations de la figure 22, on peut aussi écrire que

$$\frac{|OX|}{|OA|} = \frac{|OY|}{|OB|} = \frac{|XY|}{|AB|}.$$

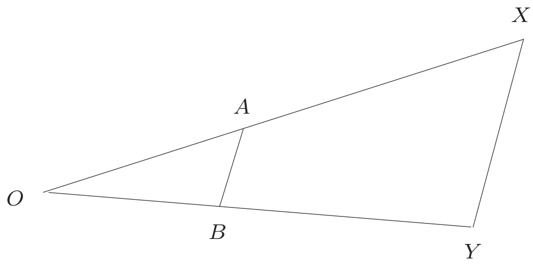
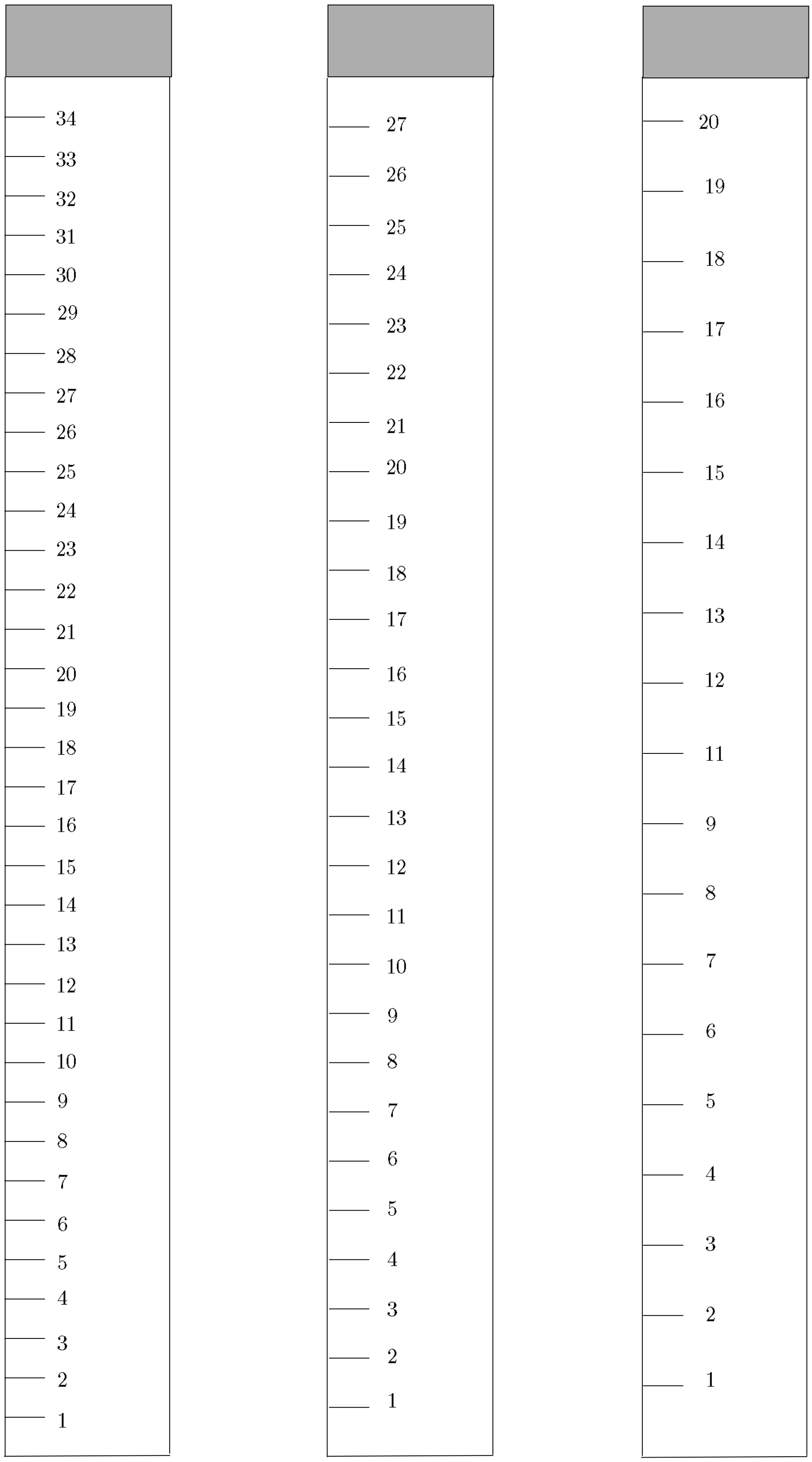
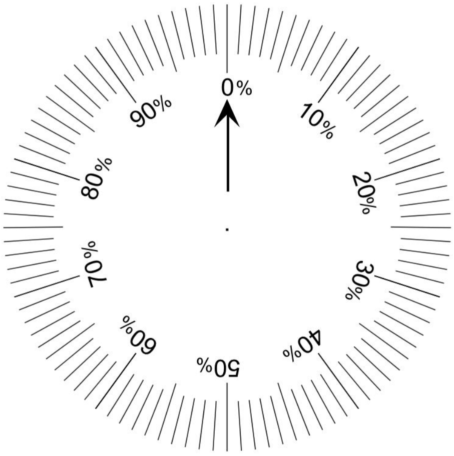


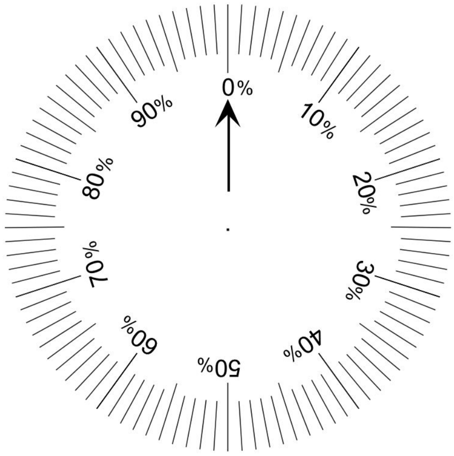
Fig. 22

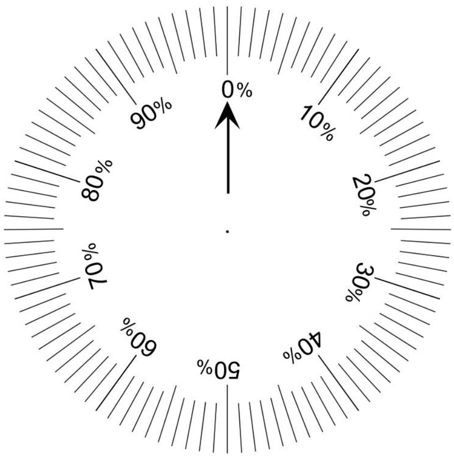
Annexe II

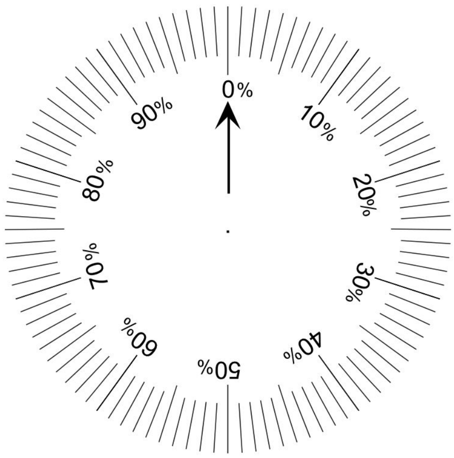
Documents à photocopier

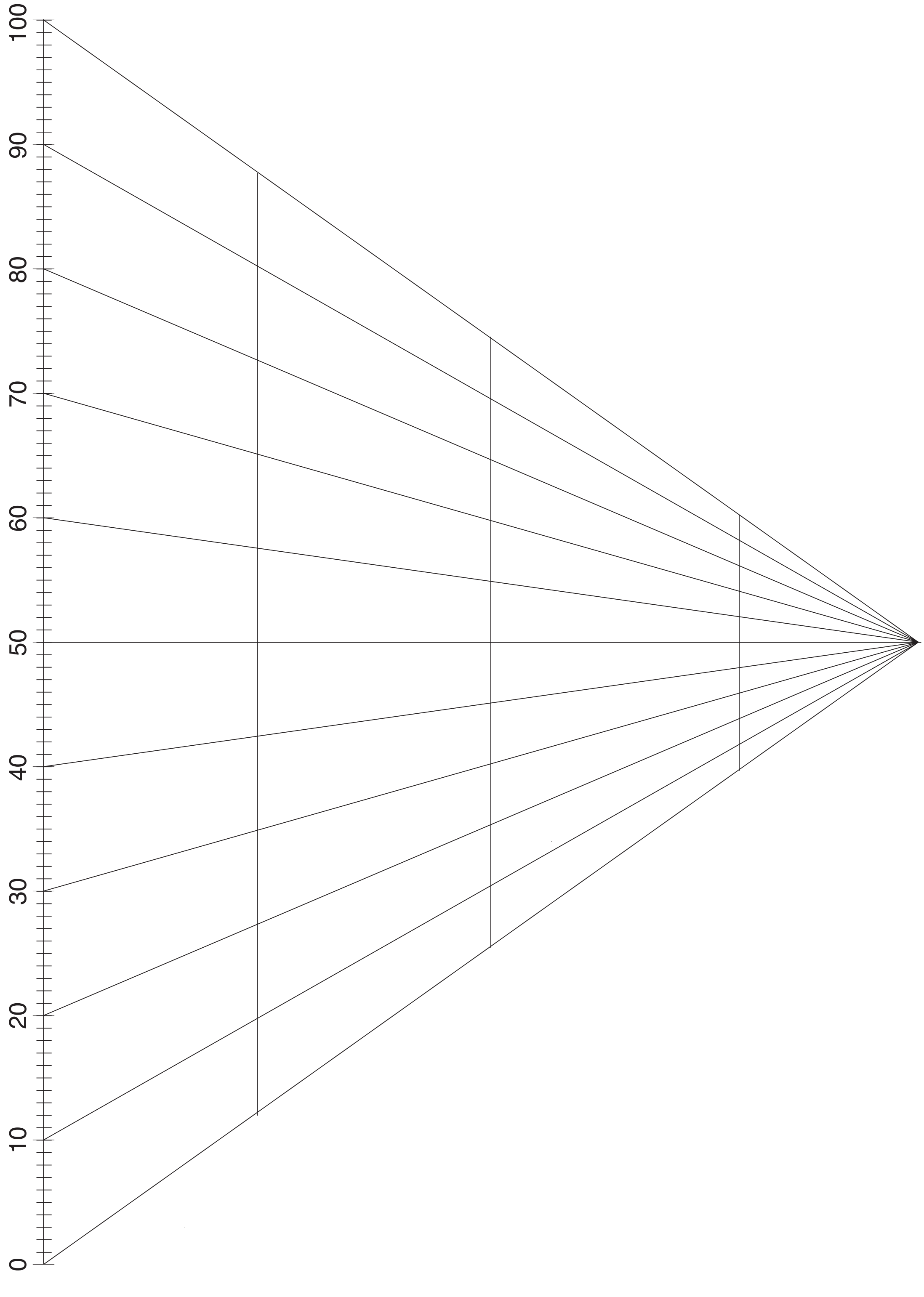

34
33
32
31
30
29
28
27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
9
8
7
6
5
4
3
2
1

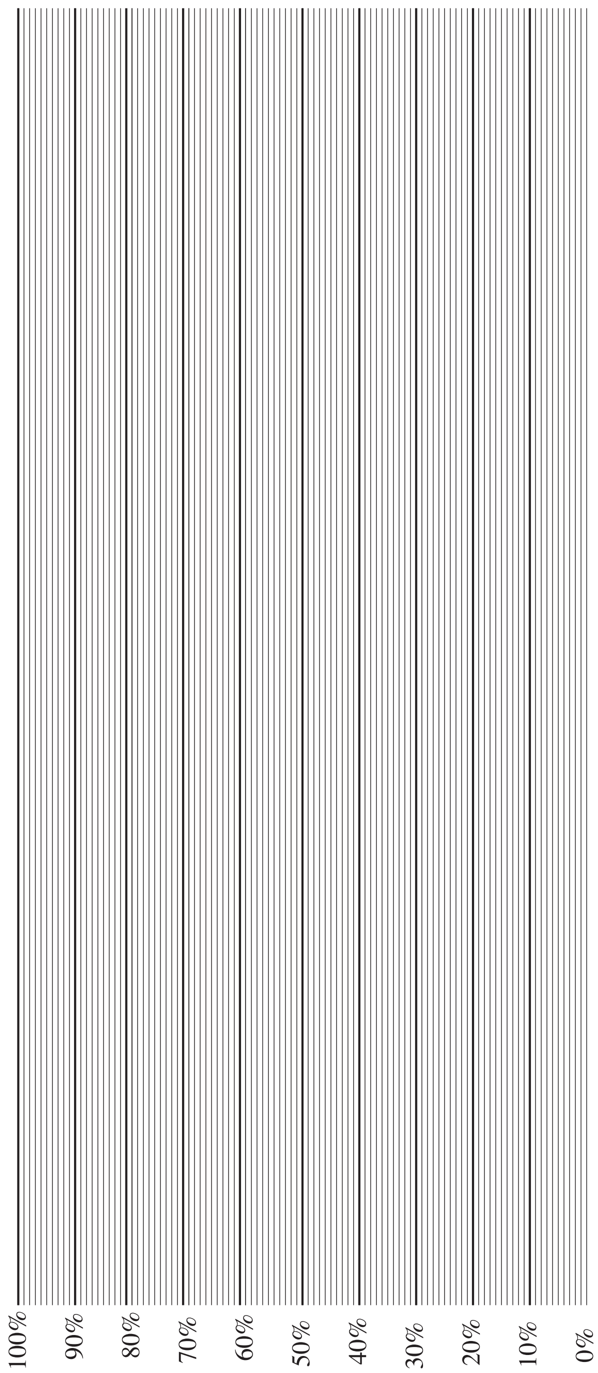

0%
10%
20%
30%
40%
50%
60%
70%
80%
90%

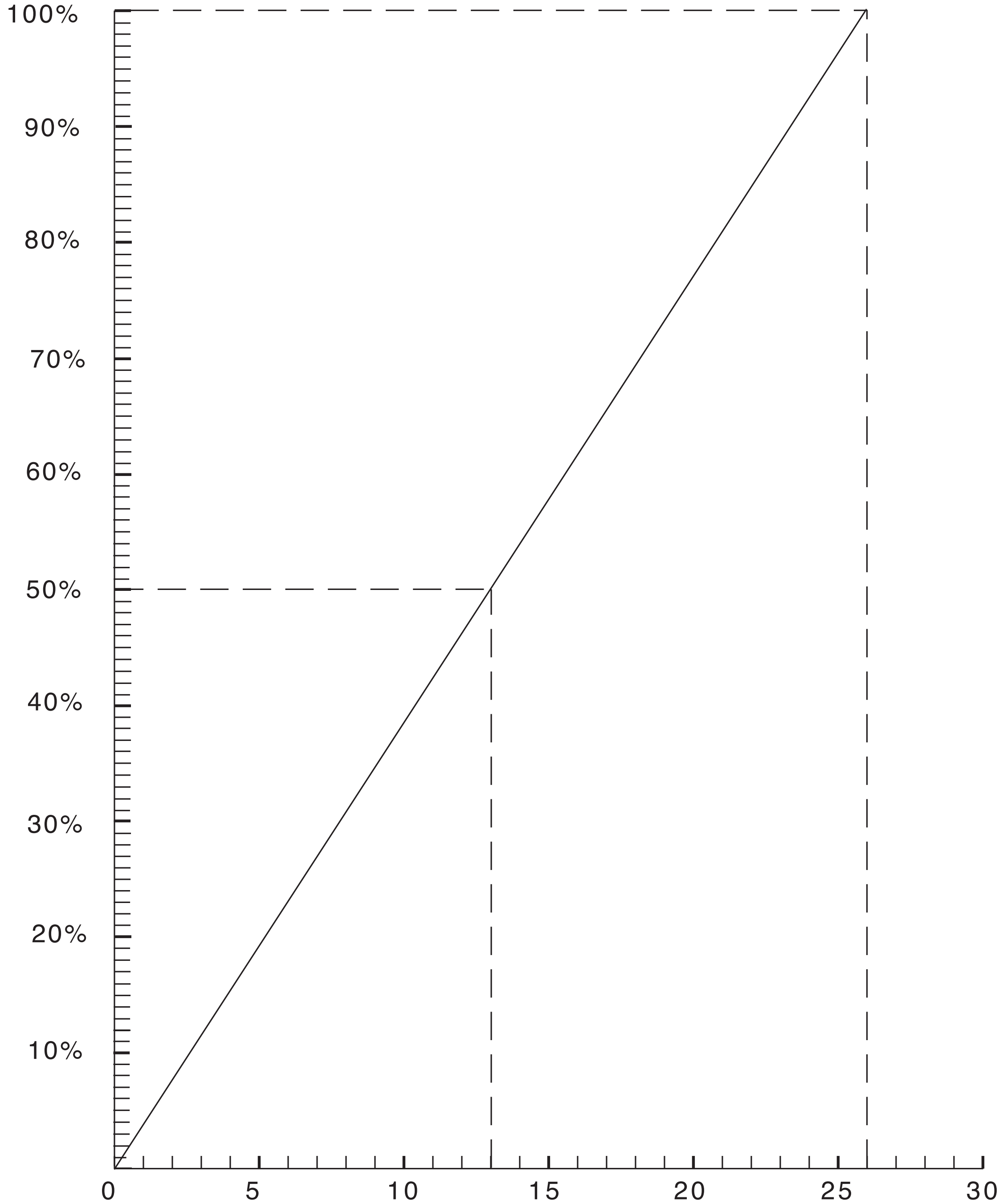

0%
10%
20%
30%
40%
50%
60%
70%
80%
90%


0%
10%
20%
30%
40%
50%
60%
70%
80%
90%


0%
10%
20%
30%
40%
50%
60%
70%
80%
90%


100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0


100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%


100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0
5
10
15
20
25
30

Chacun des solides de la figure est formé de cubes identiques. Combien faudrait-il de cubes pour construire le quatrième solide, le dixième, le centième ?
Réaliser un tableau qui mette en relation le nombre de cubes avec la position du solide dans la suite, puis le graphique qui montre le nombre de cubes en fonction du numéro d'ordre du solide.

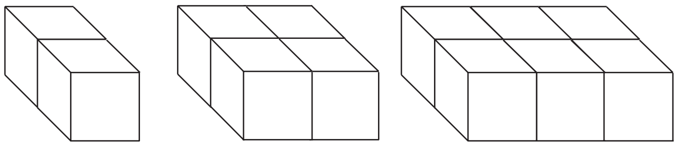
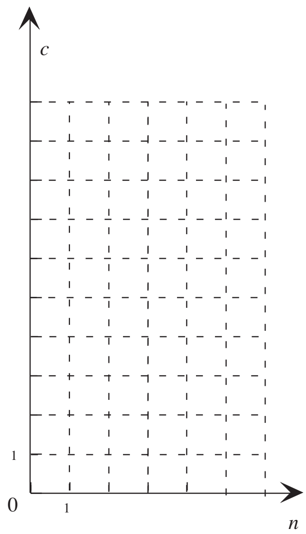


Tableau et graphique

Numéro d'ordre dans la suite	Nombre de cubes



Formule

Chacun des solides de la figure est formé de cubes identiques. Combien faudrait-il de cubes pour construire le quatrième solide, le dixième, le centième ? Réaliser un tableau qui mette en relation le nombre de cubes avec la position du solide dans la suite, puis le graphique qui montre le nombre de cubes en fonction du numéro d'ordre du solide.
Comparer le tableau et le graphique à ceux qui ont été réalisés à propos de la première question.

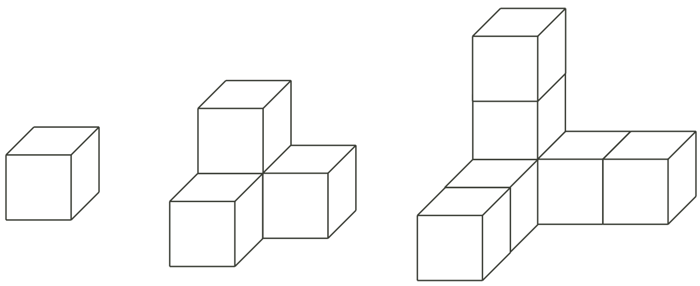
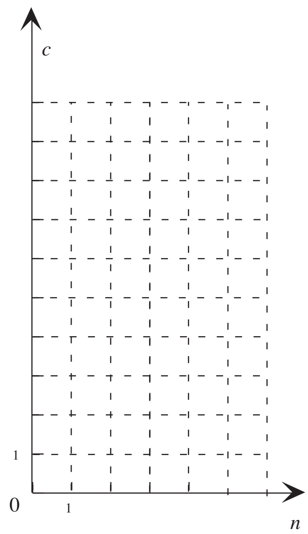


Tableau et graphique

Numéro d'ordre dans la suite	Nombre de cubes



Formule

Chacun des solides de la figure est formé de cubes identiques. Combien faudrait-il de cubes pour construire le quatrième solide, le dixième, le centième ? Réaliser un tableau qui mette en relation le nombre de cubes avec la position du solide dans la suite, puis le graphique qui montre le nombre de cubes en fonction du numéro d'ordre du solide.
Comparer le tableau et le graphique à ceux qui ont été réalisés à propos de la première question.

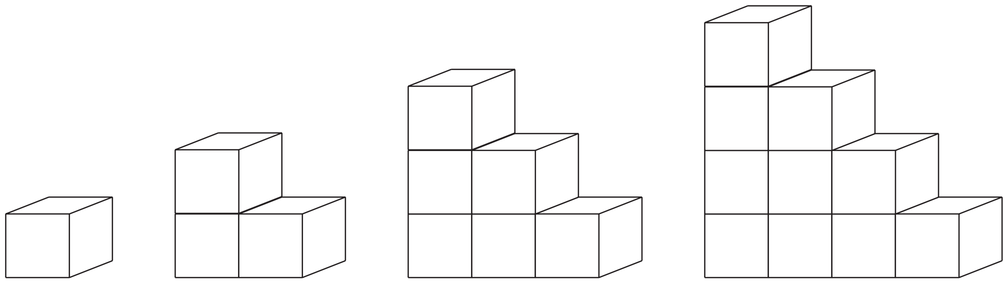
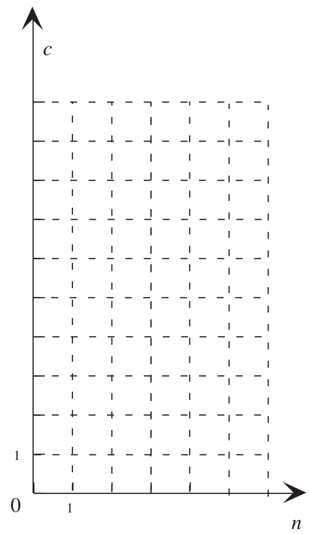


Tableau et graphique

Numéro d'ordre dans la suite	Nombre de cubes



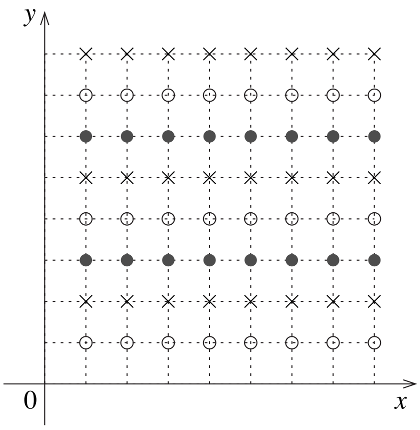
Formule

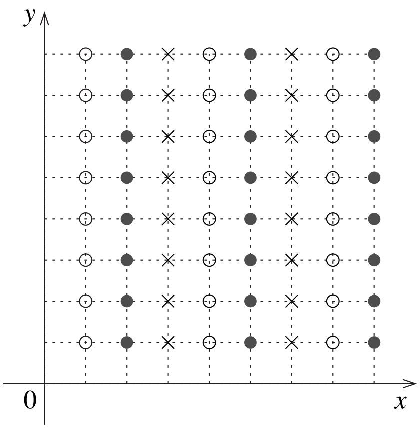
Les questions ci-dessous se rapportent aux ensembles montrés par les figures 38 et 39. Ces ensembles s'étendent implicitement au-delà de ce que montrent les dessins.

1. Les points donnés par les couples

$$(8,9)\ ;\ (25,15)\ ;\ (13,36)\ ;\ (27,37)\ ;$$
$$(10,10)\ ;\ (100,13)\ ;\ (120,19)\ ;\ (119,73)\ ;$$
$$(45,20)\ ;\ (45,62)\ ;\ (17,105)\ ;\ (17,106);$$

   sont-ils représentés dans la première figure par une croix, un point noir ou un point blanc ?
2. Même question pour les mêmes couples, à propos cette fois de la deuxième figure.





Les ensembles montrés par les figures ci-dessous s'étendent seulement dans une seule direction : celle de la droite qui porte les points.

1. Les points donnés par les couples ci-dessous sont-ils ou non alignés avec une suite de croix, de points noirs ou de points blancs de la première figure ?

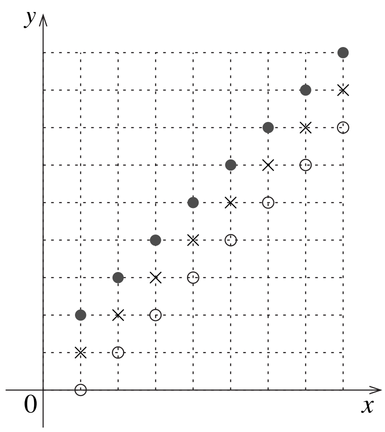
$$(7,8)\ ;\ (8,8)\ ;\ (8,7)\ ;\ (9,8)\ ;\ (9,10)$$
$$(25,24)\ ;\ (30,30)\ ;\ (30,29)\ ;\ (41,40)\ ;\ (40,40).$$

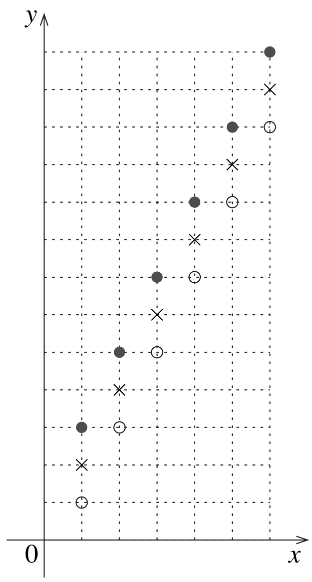
   Comment caractériser les ensembles de points alignés ?

2. Même question à propos des couples ci-dessous, qui se rapportent à la deuxième figure.

$$(7,14)\ ;\ (7,15)\ ;\ (7,13)\ ;\ (8,17)\ ;\ (8,15)\ ;$$
$$(20,50)\ ;\ (25,49)\ ;\ (30,61)\ ;\ (29,60)\ ;\ (29,59).$$

   Comment caractériser les ensembles de points alignés ?



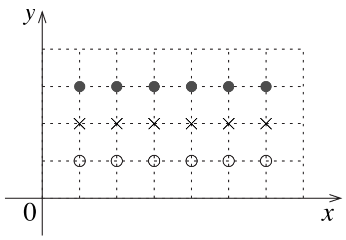


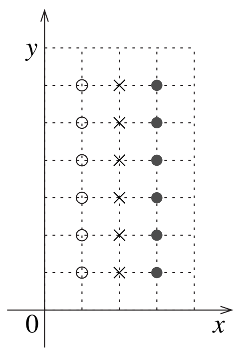
Les points qui correspondent aux coordonnées ci-dessous sont-ils ou non alignés avec une suite de croix, de points noirs ou de points blancs ?
Envisager successivement les trois figures ci-dessous.

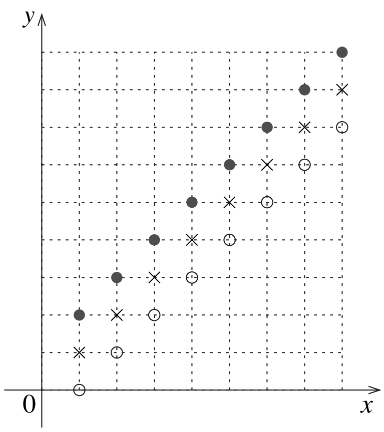
$$(\overline{3}, 2)\ ;\ (2, \overline{3})\ ;\ (\overline{3}, \overline{3})\ ;\ (\overline{3}, 3)\ ;$$

$$(3, \overline{3})\ ;\ (3, \overline{2})\ ;\ (\overline{3}, \overline{4});\ (\overline{3}, \overline{2}).$$

Comment caractériser les ensembles de points alignés ?

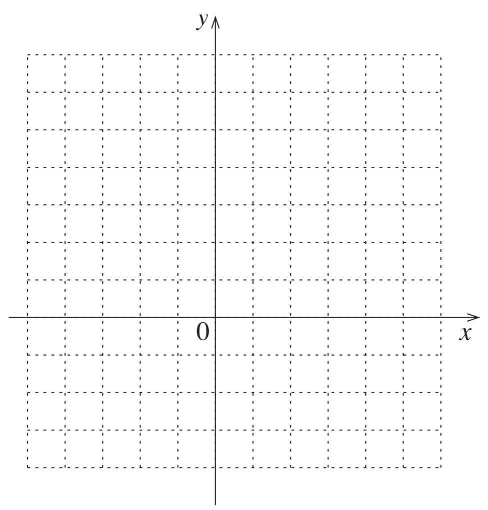






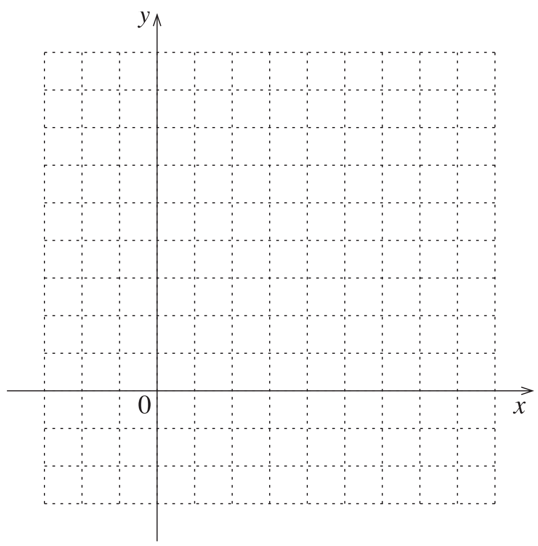
Représenter sur le graphique quelques points dont les coordonnées vérifient l'équation

$$y = 3 + x.$$

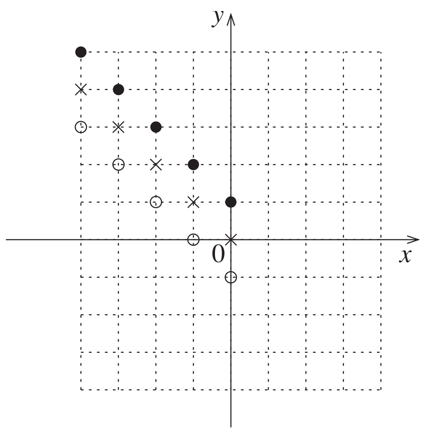


Représenter sur le graphique quelques points dont les coordonnées vérifient l'équation

$$y = 6 - x.$$



1. Qu'est-ce qui caractérise chacun des trois ensembles de points alignés de la figure ci-dessous ?
2. Quel est le point d'abscisse 1 qui est aligné avec les croix, avec les points blancs, avec les points noirs ?
3. Même question pour les points d'abscisse 3 et d'abscisse 7.
4. Dresser les tableaux de nombres qui correspondent au graphique tel qu'il a été complété.



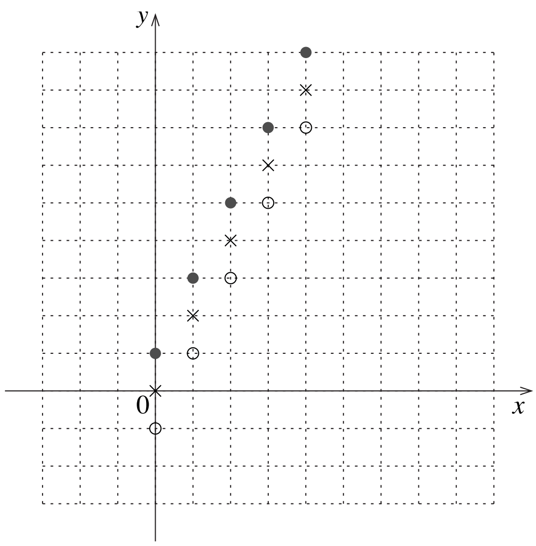
Les points qui correspondent aux couples ci-dessous sont-ils ou non alignés avec une suite de croix, de points noirs ou de points blancs ?

$$(0,0)\ ;\ (0,\overline{2})\ ;\ (\overline{1},2)\ ;\ (\overline{1},\overline{2})\ ;$$

$$(\overline{2},4)\ ;\ (\overline{2},\overline{4})\ ;\ (\overline{3},6)\ ;\ (\overline{3},\overline{6})\ ;$$

$$(3,7)\ ;\ (\overline{3},\overline{7})\ ;\ (\overline{3},7)\ ;\ (3,\overline{7}).$$

Comment caractériser les ensembles de points alignés ?



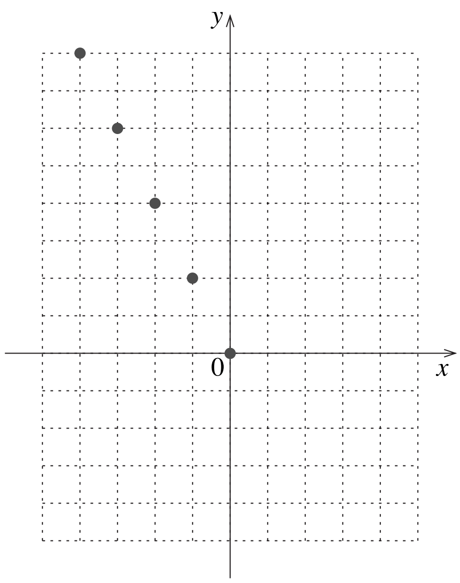
Les points qui correspondent aux couples ci-dessous sont-ils alignés avec une suite de points noirs ?

$$(1, 2) \;;\; (1, \overline{2}) \;;\; (\overline{1}, \overline{2}) \;;\; (\overline{5}, 10) \;;$$

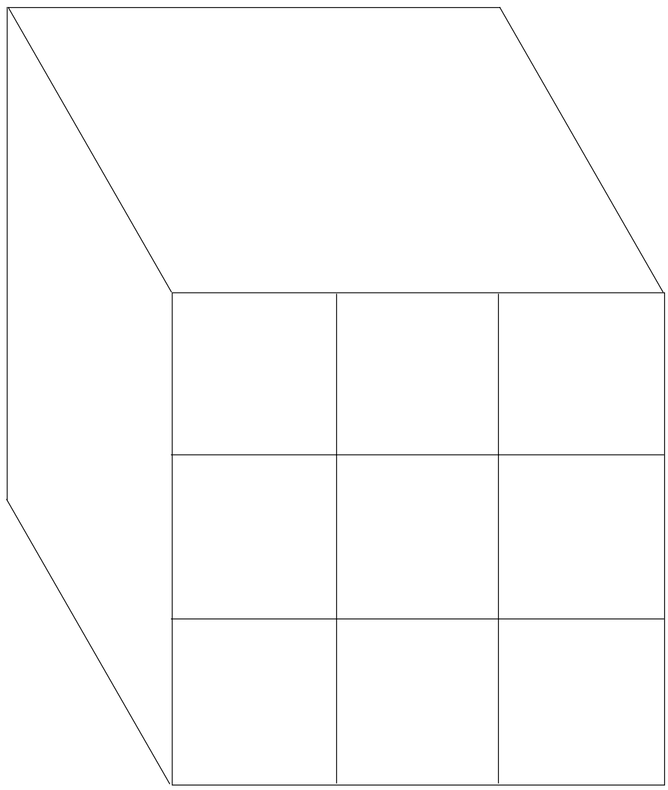
$$(3, 6) \;;\; (3, \overline{6}) \;;\; (\overline{3}, \overline{6}) \;;\; (\overline{7}, 14)$$

$$(100, 200) \;;\; (100, \overline{200}) \;;\; (\overline{100}, \overline{200}) \;;\; (\overline{100}, 200).$$

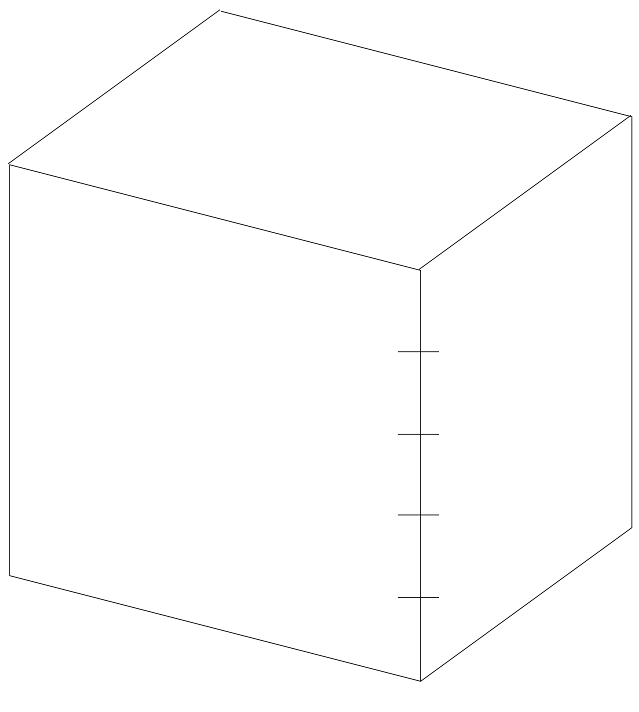
Comment caractériser les points alignés ?



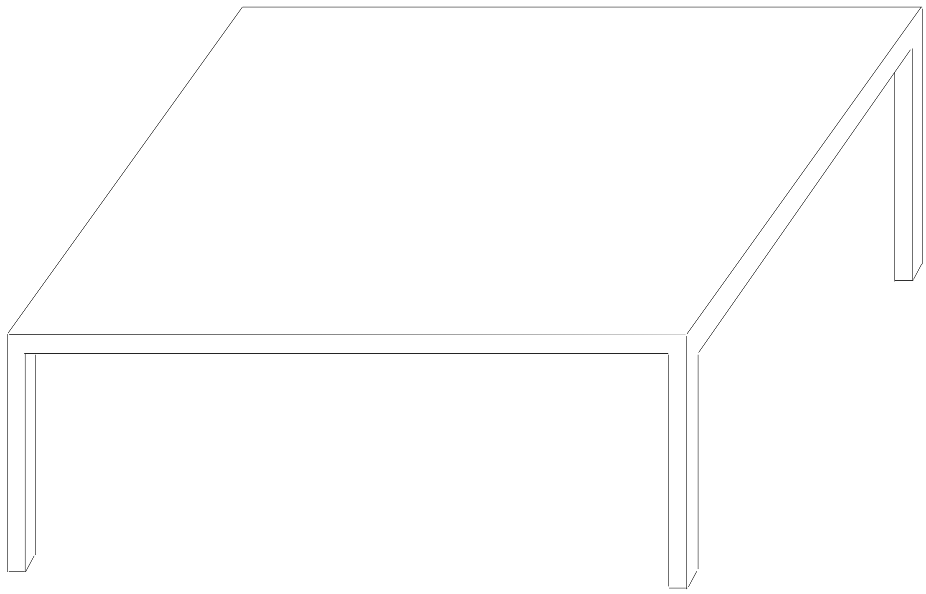
Un dessin d'un cube de Rubick est ébauché ci-dessous ; achever ce dessin sans procéder à aucune mesure. Utiliser une règle non graduée et une équerre pour tracer les parallèles nécessaires. Décrire les différentes étapes de la construction.

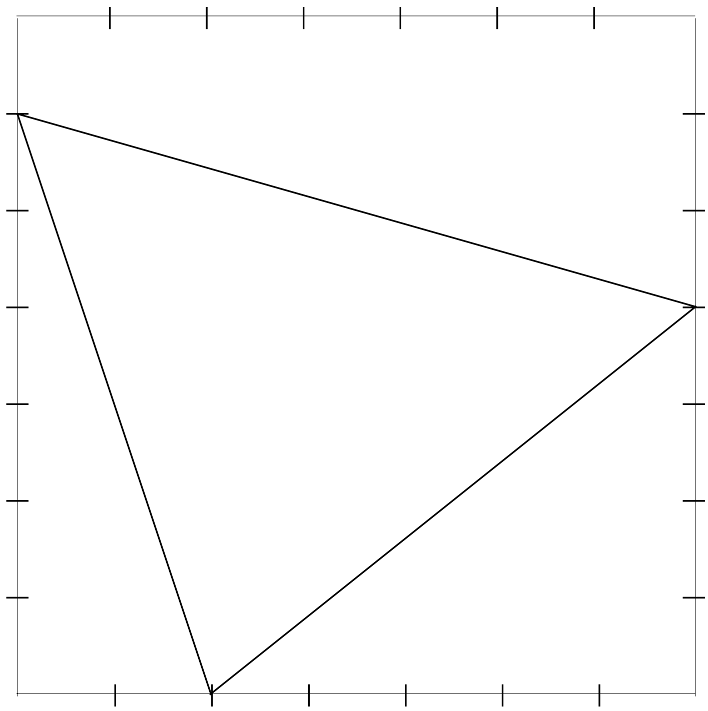


L'arête verticale de ce cube est partagée en cinq parties de même longueur ; partager les autres arêtes en cinq, sans procéder à aucune mesure. Utiliser une règle non graduée et une équerre pour tracer les parallèles nécessaires, décrire les différentes étapes de la construction.

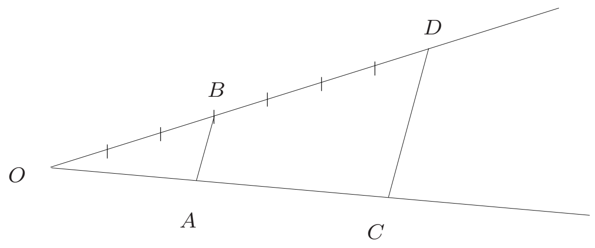


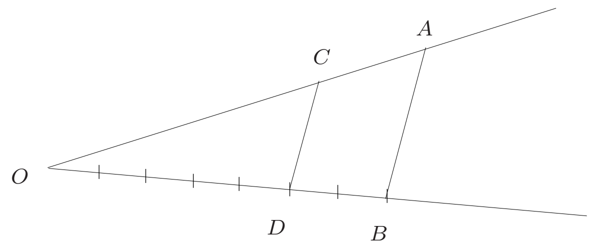
Voici une table sur laquelle on veut dessiner un triangle dont le modèle, vu en vraie grandeur, est placé juste en-dessous. Dessiner le même triangle, dans la même position, sur la table représentée en perspective parallèle. Décrire les étapes de la construction. Utiliser une équerre et une règle non graduée, ne rien mesurer.

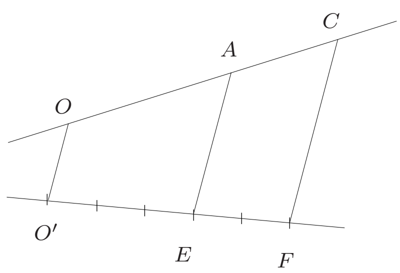


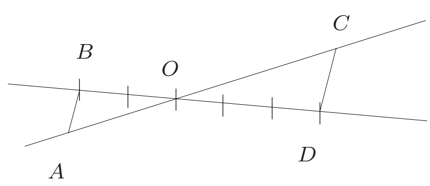


Pour chaque figure, écrire l'une ou l'autre proportion qui fait intervenir le rapport $\frac{|OC|}{|OA|}$.

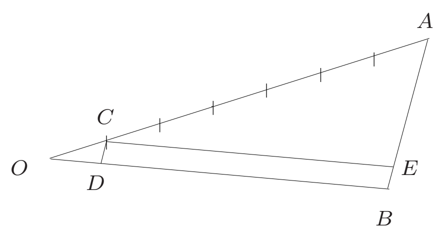


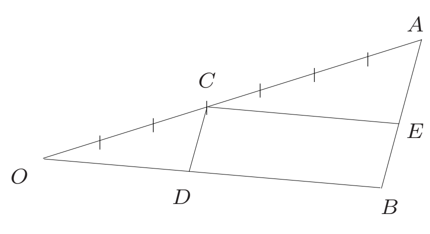






Même question à propos des rapports $\frac{|OD|}{|OB|}$; $\frac{|EB|}{|BA|}$; $\frac{|EB|}{|EA|}$.





16

La linéarité comme fil conducteur

> ... on trouve à l'origine des mathématiques des problèmes qui se résolvent par une seule multiplication ou division, c'est-à-dire par le calcul d'une valeur d'une fonction $f(x) = ax$, ou la résolution d'une équation $ax = b$: ce sont là des problèmes typiques d'algèbre linéaire, et il n'est pas possible de les traiter, ni même de les poser correctement sans « penser linéairement ».
>
> ... on s'est aperçu du caractère essentiellement linéaire de presque toute l'algèbre moderne, dont cette « linéarisation » est elle-même l'un des traits marquants.
>
> N. Bourbaki

1 Introduction

Tout notre travail jusqu'ici a consisté à illustrer la notion de structure linéaire à travers l'ensemble de la scolarité. Ce dernier chapitre, de nature plus théorique, esquisse le développement de cette structure depuis les grandeurs jusqu'aux espaces vectoriels et permet ainsi de situer tous les autres chapitres.

Plus précisément, nous essayons de montrer d'abord comment naît la notion de *rapport* entre deux grandeurs, avant même que celles-ci soient mesurées, et ensuite ce que devient cette notion dès qu'il est question de mesures, la mesure d'une grandeur étant un nombre positif. Après nous regardons ce que deviennent les rapports lorsqu'on en arrive aux grandeurs orientées, c'est-à-dire celles dont les mesures sont des nombres relatifs. Et enfin nous étudions les mutations considérables que subit la notion de rapport lorsqu'on essaie de l'appliquer aux grandeurs vectorielles, ce qui nous amène jusqu'aux deux concepts de *combinaison linéaire* et de *transformation linéaire*.

Ce qui s'appelle *rapport* au départ d'une telle étude ne peut plus, après quelques mutations, continuer à porter le même nom. C'est pourquoi nous désignons du nom de *structure linéaire* ou de *linéarité* cette plante dont la semence est le rapport entre deux grandeurs et qui, sans cesser jamais d'être elle-même, se développe et finit par produire des fruits qui s'appellent combinaisons et transformations linéaires.

Soulignons un choix méthodologique important. Qui dit *rapport* évoque une certaine relation entre deux choses. Qui dit *proportion* évoque l'égalité de deux rapports et renvoie donc à quatre choses. Nous adoptons ici de bout en bout un point de vue que nous croyons beaucoup plus éclairant, à savoir celui de *fonction linéaire*, renvoyant d'emblée à une multitude de rapports égaux. Notre idée est de partir des tableaux de proportionnalité entre grandeurs – ces tableaux expriment des fonctions –, et de voir comment il faut adapter de tels tableaux pour passer des grandeurs aux mesures des grandeurs, puis aux grandeurs orientées et enfin aux vecteurs.

Notre parcours est un survol. À aucun moment nous ne nous attardons aux détails sans grande portée. À chaque étape, nous essayons de montrer les contextes significatifs où naît une théorie et les grands axes de celle-ci, qui expliquent son efficacité. Nous essayons de montrer sur quelles difficultés bute chaque théorie lorsqu'on tente de l'appliquer dans de nouveaux contextes, et comment il faut la plupart du temps la restructurer pour dépasser les obstacles. La restructurer plutôt que la retoucher, car une théorie est une construction logique, et dès qu'on change un axiome ou une définition, tout ce qui en résulte est à refaire. Ce qui nous intéresse, c'est l'enchaînement des idées, le développement d'une pensée qui augmente sa puissance, c'est-à-dire sa généralité, par bonds successifs.

Au terme du parcours, la théorie la plus générale et la plus abstraite puise son sens dans tous les contextes, tous les champs de phénomènes et de problèmes qu'elle a traversés, tous les obstacles qu'elle a surmontés pour se constituer en instrument de pensée efficace. La théorie abstraite exposée comme un monument logique isolé provoque l'admiration et fige la pensée. La théorie abstraite conquise au terme d'un parcours de questions significatives et de révisions motivées[1], provoque les transferts d'intuition, la mobilité de la pensée, la capacité de résoudre des problèmes. Elle a des racines pour l'alimenter.

Voyons maintenant à quels lecteurs cette étude est destinée. L'idée d'analyser l'évolution d'une notion à travers une succession de contextes problématiques de plus en plus généraux *ne peut évidemment pas inspirer directement un enseignement d'initiation.* La motivation d'un premier enseignement se trouve en effet dans les phénomènes intrigants, les questions curieuses, et non dans les concepts qui servent d'instruments pour en parler et y répondre. L'intérêt pour les concepts eux-mêmes, que ce soit sur un plan mathématique ou épistémologique, ne vient qu'après. Il est le fait d'une pensée qui réfléchit sur elle-même.

Mais une telle réflexion peut fournir un fil conducteur pour l'enseignement. En particulier, parcourir les étapes de généralisation successives d'une théorie peut inspirer un enseignement en spirale. On dit souvent – à raison –, que les enseignants doivent en savoir plus que leurs élèves. Toutefois, si les choses qu'ils savent en plus ne sont que des théories sans racines, fussent-elles brillantes, ils en seront embarrassés. Le savoir supplémentaire dont les enseignants ont un pressant besoin, c'est un savoir à la fois mathématique et épistémologique, ce sont des mathématiques alimentées par l'expérience.

2 Un exemple élémentaire

Comme nous l'avons dit, toute cette étude porte sur la proportionnalité et les phénomènes apparentés. Notre propos sera simplifié si nous commençons par un exemple familier qui illustre les diverses facettes de l'idée de proportionnalité. Presque tous les matériaux dont sont faits les objets usuels peuvent nous fournir un tel exemple. Pour fixer les idées, considérons l'aluminium.

(1) Une fonction. Supposons que nous disposions d'un certain nombre d'objets en aluminium, des gros, des moyens, des petits, dans le désordre. Mesurons le volume et la masse de chacun et disposons nos résultats en tableau, le volume d'un objet à gauche et sa masse en regard sur la même ligne (voir tableau 1). Ce tableau comporte autant de lignes que nous avons d'objets. Mais nous pouvons toujours l'étendre en y écrivant le volume et la masse d'un nouvel objet en aluminium absolument quelconque.

[1] On parle beaucoup aujourd'hui du *constructivisme* comme philosophie de l'enseignement. Mais si ce que l'on enseigne est, par nécessité, soumis à des révisions, cela signifie que le savoir ne se construit pas comme une maison, au départ d'un plan préétabli, et en ajoutant à chaque étape de nouvelles briques à la partie déjà définitivement en place. Dans la construction du savoir, il faut au contraire refaire le plan à diverses reprises.

On dit qu'il existe une *fonction* qui à tout volume d'aluminium fait correspondre sa masse et réciproquement. Le tableau 1 représente une petite partie de cette fonction.

volume	masse
1 dm^3	$2,7$ kg
2 dm^3	$5,4$ kg
5 dm^3	$13,5$ kg
20 dm^3	54 kg
12 dm^3	$32,4$ kg
15 dm^3	$40,5$ kg
8 dm^3	$21,6$ kg
3 dm^3	$8,1$ kg
...	...

Tableau 1.

(2) Deux additions. On peut additionner les volumes : par exemple rassembler 5 dm^3 et 2 dm^3. On peut aussi additionner les masses : par exemple ajouter 4 kg à 10 kg. Ainsi la fonction en question fait correspondre une grandeur munie d'une somme (le volume) à une autre grandeur munie elle aussi d'une somme (la masse).

(3) Les sommes se correspondent. Prenons deux éléments dans la première colonne du tableau et faisons-en la somme :

$$2 \text{ dm}^3 + 3 \text{ dm}^3 = 5 \text{ dm}^3.$$

Celle-ci se trouve dans le tableau en regard de la somme des masses correspondantes :

$$5,4 \text{ kg} + 8,1 \text{ kg} = 13,5 \text{ kg}.$$

Ainsi, une somme de volumes a pour masse la somme des masses correspondantes et réciproquement.

(4) La proportionnalité. Deux volumes quelconques sont entre eux comme les masses correspondantes. Par exemple 2 dm^3 est à 3 dm^3 comme $5,4$ kg est à $8,1$ kg. On exprime souvent cela en abrégé sous la forme

$$\frac{2}{3} = \frac{5,4}{8,1}.$$

(5) Égalité des rapports internes. On exprime aussi cette dernière propriété autrement, à savoir en parlant de *rapports internes*. On passe de 2 à 3 dm^3 en multipliant 3 dm^3 par 1,5 ou 3/2. Le rapport est le même entre les masses correspondantes : on passe de $5,4$ kg à $8,1$ kg en multipliant $5,4$ kg par 1,5 ou 3/2. L'adjectif *interne* exprime le fait que les rapports considérés sont internes à une colonne du tableau.

(6) La règle de trois. La règle de trois est une expression calculatoire de la même situation. Si 2 dm^3 pèsent $5,4$ kg, alors 1 dm^3 pèse 2 fois moins, c'est-à-dire $2,7$ kg. Mais alors 3 dm^3 pèsent 3 fois plus, c'est-à-dire $8,1$ kg.

(7) Le rapport externe. Dans notre exemple, ce que l'on désigne du nom de *rapport externe* est la masse volumique, qui est de $2,7$ kg/dm^3. On passe d'un volume quelconque à la masse correspondante en multipliant le volume par la masse volumique. Par exemple :

$$3 \text{ dm}^3 \times 2,7 \text{ kg/dm}^3 = 8,1 \text{ kg}.$$

L'adjectif *externe* exprime le fait que le rapport en question fait sortir d'une colonne pour aller vers l'autre.

(8) Des accroissements constants. Si dans la première colonne du tableau on passe de chaque ligne à la suivante en ajoutant toujours la même quantité, il en va de même dans la deuxième colonne, et réciproquement. C'est ce qu'illustre le tableau 2.

volume	masse
1 dm^3	$2,7$ kg
2 dm^3	$5,4$ kg
3 dm^3	$8,1$ kg
4 dm^3	$10,8$ kg
5 dm^3	$13,5$ kg
6 dm^3	$16,2$ kg
7 dm^3	$18,9$ kg
8 dm^3	$21,6$ kg
...	...

Tableau 2.

(9) Un graphique en ligne droite. Si on porte les masses en fonction des volumes dans un système d'axes gradués régulièrement, on obtient un graphique en ligne droite.

(10) Une pente constante. Ce graphique monte avec une pente constante. Cette pente peut être identifiée à la masse volumique.

(11) Une formule, une fonction du premier degré. La masse m s'exprime en fonction du volume v par la formule $m = av$, dans laquelle a représente la masse volumique. La fonction qui se trouve au second membre de cette égalité est du premier degré.

Ce sont-là onze facettes de la linéarité, observées sur un exemple particulier et à un niveau d'abstraction modéré. Elles nous serviront de référence – par analogie et constraste –, pour parler ci-après de la linéarité à d'autres niveaux, plus élémentaires ou plus avancés. La multiplicité même de ces facettes montre que le concept de linéarité est moins immédiat qu'on n'aurait tendance à le croire.

Sur les tableaux de proportionnalité en général , voir le chapitre 5.

3 Les rapports de grandeurs

> Un rapport est la relation, telle ou telle, selon la taille, entre deux grandeurs du même genre.
>
> Euclide

3.1 Avant les rapports, les grandeurs elles-mêmes

La proportionnalité (ou la linéarité) a des antécédents. Tout commence avec les grandeurs. Rappelons donc brièvement comment celles-ci apparaissent dans l'expérience commune.

Les objets ont, selon le cas, une longueur, une hauteur, une aire, un volume, une masse, ... Ce sont là divers types de grandeurs. S'intéresser à un type de grandeur, c'est donc regarder les objets d'un certain point de vue.

Une fois que l'on a fixé son attention sur un type de grandeur, la première démarche consiste à vérifier si deux objets ont ou non la même grandeur. S'il s'agit de la longueur de baguettes, de tiges ou de segments, c'est facile : on les juxtapose. Pour les masses de deux objets, on les met sur les plateaux d'une balance. L'égalité ou l'inégalité des aires est souvent plus difficile à vérifier, même pour des surfaces planes. En effet, leur forme empêche souvent lorsqu'on les superpose, soit de les mettre en coïncidence, soit d'inclure l'une dans l'autre. Toutefois on vérifie sans peine par superposition que deux figures planes sont isométriques et donc de même aire. Vérifier l'égalité ou l'inégalité de deux volumes est aussi bien souvent difficile. Une exception toutefois : celle des « capacités », qui sont des volumes de liquide remplissant des récipients. Dans ces cas, on procède par transvasements. Les inégalités de grandeurs conduisent naturellement à ce que Piaget appelle des *sériations*, opérations qui consistent à classer des objets par ordre de grandeurs croissantes ou décroissantes.

Un dernier préliminaire de la linéarité, c'est l'addition des grandeurs. Elle est le plus souvent une opération simple : on met deux tiges bout à bout pour additionner leurs longueurs, on rassemble deux objets pour additionner leurs masses, et de même on rapproche deux surfaces pour additionner leurs aires et deux solides pour additionner leurs volumes.

Jusqu'ici nous avons parlé de diverses grandeurs que peuvent avoir des objets. Mais les intervalles de temps, qui ne sont pas des objets au sens immédiat de ce terme, ont aussi une grandeur (leur durée), et l'on est amené à les comparer, sérier, additionner. Ils posent un problème particulier du fait qu'ils ne se transportent pas dans le temps comme les objets se transportent dans l'espace. Pour manipuler des intervalles de temps, il faut identifier des phénomènes de même durée et reproductibles.

L'observation suivante est évidente, mais elle jouera un grand rôle dans la suite de ce travail : *on ne peut jamais comparer ou additionner que deux grandeurs de même espèce* : cela n'a pas de sens de comparer ou additionner par exemple une longueur et une masse, ou une surface et un temps.

Sur les grandeurs en général, voir les chapitres 1, 2 et 3.

3.2 Deux grandeurs de natures différentes

Observons quelques phénomènes familiers. Pour peindre une surface deux fois plus grande qu'une autre, on a besoin de deux fois plus de peinture. Si on marche deux fois plus longtemps – d'un même pas –, on va deux fois plus loin. Avec deux fois plus d'essence, on va deux fois plus loin. Si on ensemence un champ deux fois plus grand, on obtient sauf exception une récolte deux fois plus abondante. Deux fois plus de longueur d'un câble pèse deux fois plus lourd. Deux fois plus de surface découpée dans une tôle pèse deux fois plus lourd.

Mais les choses ne sont pas toujours aussi régulières. Un être humain deux fois plus âgé qu'un autre n'est ni deux fois plus haut, ni deux fois plus lourd que le premier. Un carré de côté double d'un autre n'a pas une aire double, mais bien une aire quadruple. Quand une voiture va deux fois plus vite, sa distance de freinage en cas d'urgence est plus que deux fois plus longue.

Quoiqu'il en soit, dans beaucoup de phénomènes, *deux fois* d'un côté correspond à *deux fois* de l'autre.

Et d'autre part, le rapport le plus simple à saisir est celui *du simple au double*. Mais si on double le double, on obtient le rapport *de un à quatre*. Le rapport *de un à un demi* est aussi un rapport facile. Par exemple, couper une ficelle ou une bandelette en deux parts égales est une opération élémentaire. La diviser exactement en trois exige par contre un tâtonnement. Ensuite couper deux fois en deux amène à *un quart*. Lorsqu'on dispose d'un demi, on arrive facilement à *un et un demi*. Il existe ainsi un petit nombre de rapports que nous concevons facilement. Nous n'envisagerons que ceux-là pour commencer et nous n'introduirons des rappports plus compliqués qu'à la section 4.

Dans chacune des situations évoquées ci-dessus, nous avons mis deux grandeurs en correspondance. Par exemple, toute surface à peindre exigeait un volume déterminé de peinture, et avec un volume donné de peinture, on peut peindre une surface bien déterminée. Nous pouvons représenter cela par un tableau en deux colonnes. Dans la première nous inscrivons les aires a_1, a_2, a_3, ... des surfaces à peindre, et en face les volumes de peinture v_1, v_2, v_3, ... correspondants. Bien entendu, un tel tableau n'aura jamais qu'un nombre fini de lignes, mais on peut toujours l'allonger en y inscrivant de nouvelles aires et de nouveaux volumes.

aire	vol.
a_1	v_1
a_2	v_2
a_3	v_3
a_4	v_4
a_5	v_5
a_6	v_6
...	...

Tableau 3.

Ce tableau est l'expression d'une *fonction*. La notion de fonction est très importante pour nous : en effet, toutes les situations que nous envisagerons dans la suite auront pour première expression une fonction, représentable par un tableau en deux colonnes.

Le tableau 3 possède *la propriété des rapports internes* au sens où, comme nous l'avons vu, si on passe, dans la colonne de gauche, d'une certaine aire à une autre deux fois plus grande (ou quatre fois, ou une fois et demie plus grande, ou deux fois plus petite, ...) on trouve dans la colonne de droite un volume double (ou, selon le cas, quatre fois, ou une fois et demie plus grand, ou deux fois plus petit, ...). On exprime aussi cela en disant que les aires et les volumes sont proportionnels. On dit également, en choisissant à titre d'exemple deux couples de valeurs correspondantes, que

$$a_1 \text{ est à } a_2 \text{ comme } v_1 \text{ est à } v_2.$$

À cause de cette propriété, on dit que le tableau 3 est un *tableau de proportionnalité*. Rappelons que les rapports en question sont appelés *rapports internes* parce qu'ils concernent deux grandeurs situées à l'intérieur d'une même colonne.

Ce tableau possède aussi *la propriété de la somme*. En effet, pour peindre deux surfaces, on peut – mais cela va sans dire ! –, rassembler les deux volumes de peinture préparés pour chacune d'elles. En se référant au tableau, on exprime cela de la manière suivante : à la somme de deux éléments de gauche (par exemple a_1 et a_2, et nous noterons leur somme $a_1 \oplus a_2$) correspond la somme des deux éléments correspondants de droite (ici $v_1 \oplus v_2$). Nous utilisons le symbole $\oplus$ pour désigner la somme de deux grandeurs, pour éviter la confusion avec la somme de deux nombres.

3.3 Deux grandeurs de même nature

Passons maintenant à la proportionnalité entre deux grandeurs de même nature. Elle va nous apporter tout un lot de propriétés nouvelles. Nous commencerons par quelques situations concrètes qui font voir des proportions entre longueurs. Les figures habituellement associées au théorème de Thalès pourraient en inspirer d'autres, que le lecteur évoquera sans peine. Nous passerons ensuite aux masses. Pour être complet, il faudrait aussi évoquer les aires, les volumes, les durées, ...

Les objets semblables

Très jeunes, les enfants s'aperçoivent que deux objets ont la même forme, même si leurs dimensions sont différentes. Par exemple, ils voient bien qu'un petit bateau est un modèle réduit d'un grand, ou qu'une photographie est un agrandissement d'une autre. Considérons donc, à titre d'exemple, le dessin d'un tangram et sa reproduction en deux fois plus grand (voir figure 1).

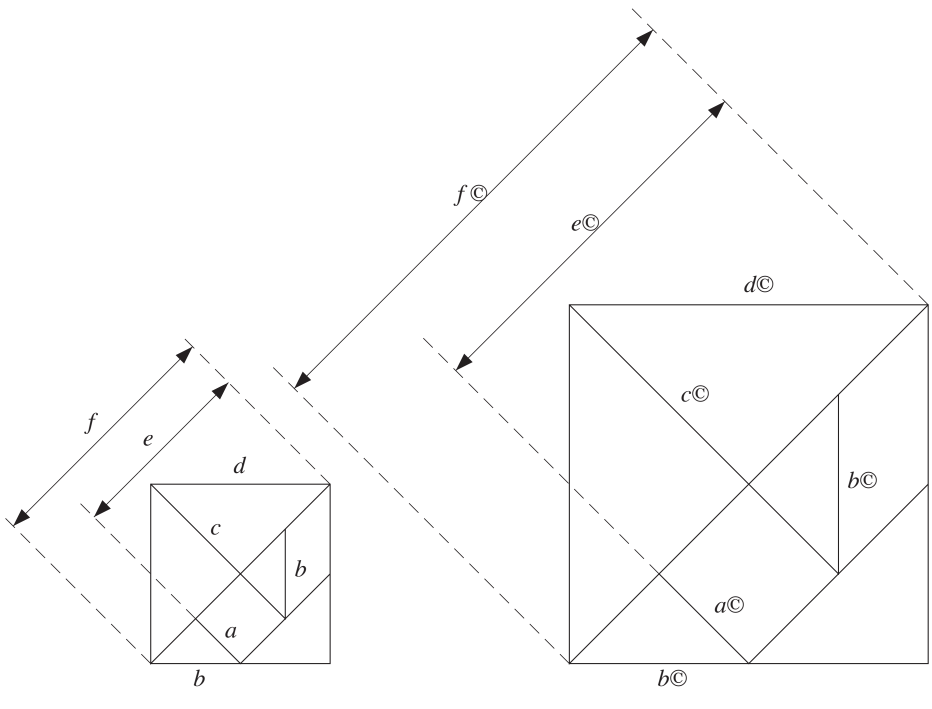


Fig. 1

À tout segment tel que a de la figure de gauche correspond un segment a' deux fois plus grand dans la figure de droite. Disposons dans la première colonne d'un tableau les segments (ou plutôt les lettres qui les représentent) relevés dans le petit tangram. Il y en a de six longueurs différentes. Écrivons en regard les segments du tangram agrandi (voir tableau 4). Ce tableau représente une fonction, en l'occurrence avec un nombre fini de lignes. On passe d'un segment de gauche au segment correspondant de droite en multipliant la longueur par deux.

a	a'
b	b'
c	c'
d	d'
e	e'
f	f'

Tableau 4.

L'existence d'un rapport entre les deux éléments d'une même ligne du tableau est une propriété nouvelle pour nous : en effet, à la section précédente, nos fonctions mettaient en relation deux grandeurs de natures différentes, et il n'existe aucun rapport, aucune comparaison possible entre de telles grandeurs. Lorsque comme ici il existe toujours un même rapport entre éléments correspondants de la fonction, nous appelons ce rapport le *rapport externe*.

D'autre part, le tableau 4 possède aussi la *propriété des rapports internes*, comme on le vérifie sur quelques exemples : ainsi, c vaut deux fois a, et c' vaut deux fois a' ; de même f vaut deux fois c, et f' vaut deux fois c' ; ou encore e vaut une fois et demie c, et de l'autre côté e' vaut une fois et demie c'. Ce dernier cas relève aussi, si on veut, de la *propriété de la somme* : on peut dire en effet que e, qui vaut $a \oplus c$, correspond dans le tableau à e', qui vaut $a' \oplus c'$.

Nous avons donc maintenant affaire à un tableau qui possède les trois propriétés respectivement du rapport externe, des rapports internes et de la somme. Bien entendu, nous n'avons vérifié ces deux dernières propriétés que sur quelques cas, mais nous nous satisferons pour l'instant de cette vérification partielle. D'autre part, il y dans le tangram au moins un rapport plus compliqué que les quelques rapports simples que nous avons identifiés jusqu'ici. En effet, le rapport de a à b n'est ni le rapport de un à deux, ni le rapport de un à un et demi. Il en va de même du rapport de b à c, et de celui de c à d. C'est un rapport inconnu comme nous en trouverons quelques-uns sur notre chemin[2].

Les formats de papier

Nous venons d'engendrer un tableau de proportionnalité à partir de deux figures semblables. Restons dans le domaine des longueurs et construisons une fonction à partir d'une toute autre expérience.

Si on plie une feuille de format A3 en deux dans le sens de sa largeur, on obtient le format A4. Si on fait de même avec ce dernier, on obtient le format A5. Et on peut continuer de même. Chose remarquable, si on dispose toutes les feuilles rectangulaires obtenues comme sur la figure 2 qui les représente à l'échelle, on s'aperçoit que les diagonales de tous les rectangles sont alignées. On n'observe pas ce curieux phénomène avec tous les formats de papier. Par exemple, si on part du format Quarto, on obtient des rectangles dont les diagonales ne se superposent qu'une fois sur deux. C'est ce qu'on voit sur la figure 3, qui les montre elle aussi à l'échelle.

[2] Notre propos est de *construire* la notion de proportionnalité. Dans un exposé déductif, on ne laisse pas traîner de difficulté non résolue. Par contre lorsqu'on construit un concept en cherchant une voie d'accès pas trop difficile, on est amené non pas à ignorer, mais à renvoyer à plus tard certaines questions inaccessibles à un stade donné de la construction. Comment croire en effet que l'on pourrait régler d'emblée le problème des rapports irrationnels, ou même celui des rapports exprimés par des fractions compliquées ? La connaissance de quelques rapports simples nous semble être un soutien assez clair à ce stade de la construction.

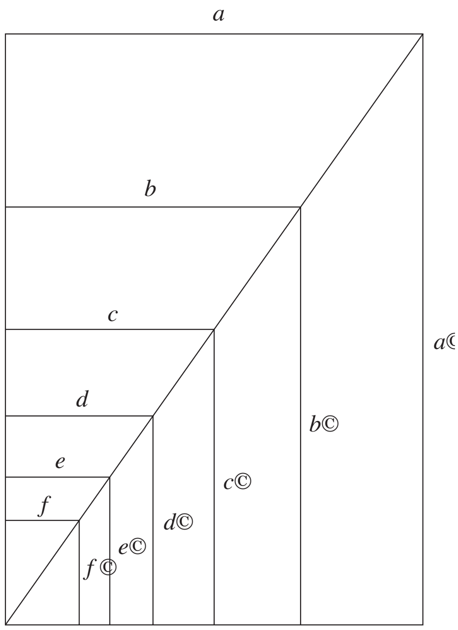


Fig. 2

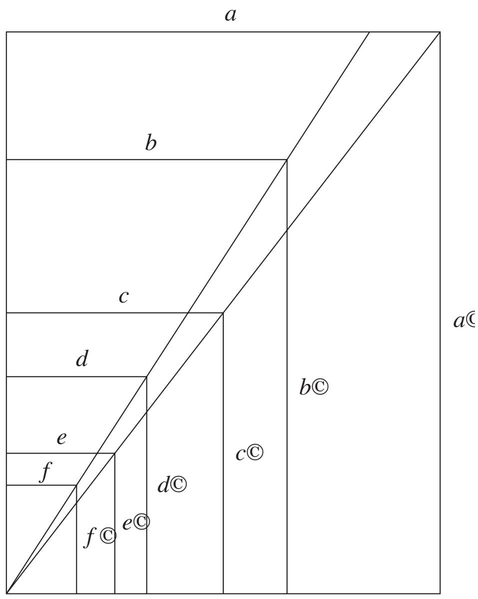


Fig. 3

Revenons à la figure 2, et disposons dans la première colonne d'un tableau tous les petits côtés des rectangles, et dans la seconde colonne tous les grands côtés (voir tableau 5). On dirait que ce tableau est comme le précédent constitué sur la base d'un même rapport entre a et a', b et b', etc. Mais alors que, dans le cas du tangram agrandi, ce rapport externe était de un à deux, ici ce n'est aucun des rapports simples qui nous sont familiers. En effet a ne va dans a' ni deux fois, ni une fois et demie, ni une fois et un quart... Mais il semble pourtant, à vue, que a va dans a' autant de fois que b dans b', c dans c', etc. Laissons en suspens la détermination exacte de ce rapport.

a	a'
b	b'
c	c'
d	d'
e	e'
f	f'

Tableau 5.

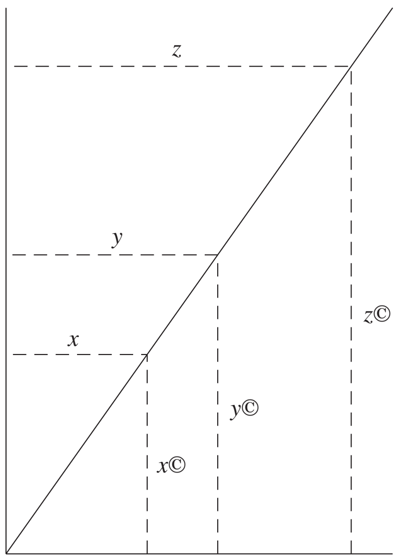


Fig. 4

Quoiqu'il en soit, nous reconnaissons dans le tableau 5 l'égalité de quelques rapports internes. En effet, étant donné la façon dont nous avons obtenu nos rectangles par pliage, nous voyons par exemple que c va deux fois dans a et c' deux fois dans a', que e va deux fois dans c et e' deux fois dans c'. De même f va quatre fois dans b, et f' quatre fois dans b'. Ces quelques exemples nous portent à croire que le tableau 4 satisfait à la propriété des rapports internes.

En définitive, ce que la figure 2 suggère, c'est que si l'on assemble des rectangles de manière que leurs diagonales se superposent de la manière indiquée, les côtés de ces rectangles sont proportionnels. Ainsi, pour créer des couples de segments de même rapport, il suffit de dessiner, comme sur la figure 4, une demi-droite dans un angle droit et d'ajouter à la figure des segments tels que x, x', y, y', etc. C'est là une sorte de machine à fabriquer des segments proportionnels.

Sur les figures semblables, voir le chapitre 2. Sur le théorème de Thalès, qui est la clef des similitudes, voir chapitre 6.

La balance

Avec une balance ordinaire, on peut par tâtonnement créer une masse égale à une masse donnée, et donc ensuite doubler une masse. Il faut pour cela disposer d'une matière qui, telle la plasticine, se laisse couper en morceaux quelconques. On peut aussi diviser une masse en deux parts égales. On arrive ainsi à prendre une fois et demie une masse donnée. On voit qu'on peut dans le domaine des masses, réaliser les quelques rapports simples auxquels nous nous sommes bornés jusqu'ici. Nous laissons au lecteur le soin d'imaginer comment l'on peut non seulement réaliser ces rapports, mais aussi, lorsque deux masses sont données, vérifier si elles ont entre elles un de ces rapports simples.

Il existe d'ailleurs une façon commode de réaliser ou de vérifier un rapport de masses donné. Par exemple, pour réaliser le rapport de deux à trois, qui est aussi le rapport de un à un et demi, on construit une balance dont les longueurs des bras sont entre elles comme deux est à trois (voir figure 5). Une telle balance est en équilibre lorsque les masses posées sur ses plateaux sont entre elles comme deux est à trois, la masse deux étant du côté du bras de longueur trois et la masse trois du côté du bras de longueur deux. On a là une sorte de machine à fabriquer des masses proportionnelles.

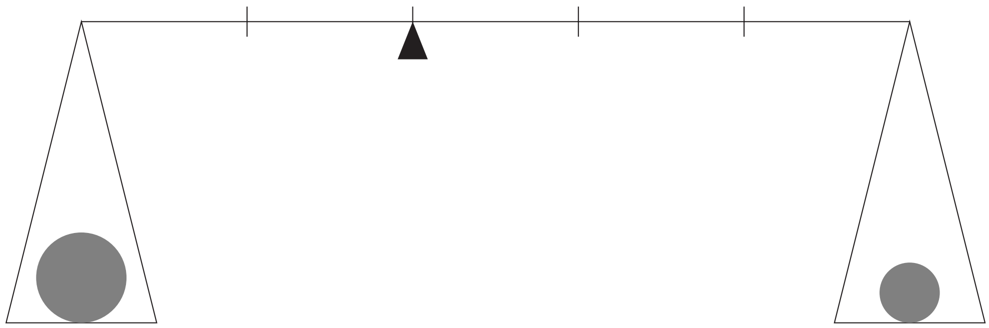


Fig. 5

Créons donc à l'aide d'une telle balance un ensemble de couples de masses (m_1, m'_1), (m_2, m'_2), etc. et mettons-les en tableau (voir tableau 6). Ce tableau possède la propriété des rapports internes. Cela signifie que si la balance de la figure 5 est équilibrée, elle le demeurera si on double les deux masses, ou si on les multiplie par un et demi, etc. Le tableau 5 possède aussi la propriété de la somme, dont il est facile de se donner un exemple.

m_1	m'_1
m_2	m'_2
m_3	m'_3
m_4	m'_4
m_5	m'_5
m_6	m'_6
...	...

Tableau 6.

Sur les poids et les balances, voir chapitre 2.

4 Numérisation des rapports, mesures

MESURE. s. fem. Ce qui sert à connoître la grandeur, l'étenduë, la quantité de quelque corps. La *mesure* des longueurs est la ligne ou grain d'orge, le pouce contenant douze lignes, le pied douze pouces, le pas geometrique cinq pieds, la toise six pieds, la perche des Geometres dix pieds ; en quelques lieux elle va jusqu'à vingt-deux pieds ; le stade cent vingt-cinq pas ; le mille huit stades ; la lieue Françoise trois mille.

A. Furetiere (1694)

Reprenons les choses à la base. Deux grandeurs de même espèce peuvent être comparées pour voir si elles sont égales, ou si l'une est plus grande que l'autre (voir 3.1). Souvent dans le quotidien on ne se contente pas de constater l'inégalité : on la qualifie en disant que telle grandeur est un peu plus grande que telle autre, ou beaucoup plus grande, ou énormément plus grande, etc. En s'exprimant ainsi, on compare certes dans chaque cas deux grandeurs, mais on va vers la comparaison des rapports. En effet, si une grandeur est beaucoup plus grande qu'une autre, le rapport entre les deux est plus grand que si la première est seulement un peu plus grande que l'autre.

Pour dépasser cette vue qualitative des rapports, nous avons chiffré quelques rapports simples. Les tout premiers, ceux de un à deux, de un à un demi, et de un à un et demi, étaient parfois simples à *percevoir*. Par exemple on voit à peu près bien qu'un objet est deux fois plus long qu'un autre lorsque les deux ne sont ni trop grands ni trop petits et qu'ils sont disposés parallèlement dans un plan frontal par rapport à l'observateur. Il est déjà beaucoup plus difficile d'estimer si un objet est deux fois plus lourd qu'un autre, en les soupesant l'un dans une main et l'autre dans l'autre. Estimer qu'un intervalle de temps est deux fois plus long qu'un autre ne peut se faire à peu près correctement que pour des intervalles situés dans une gamme de durées assez restreinte et proches l'un de l'autre dans le temps.

S'il est vrai que les rapports de grandeurs ne peuvent être *perçus* que dans de tels cas simples, par contre des rapports un peu plus compliqués peuvent être *construits* ou *vérifiés* par des opérations mécaniques. Comme nous l'avons vu, on engendre par itération du doublement les rapports de un à quatre, ou de un à huit, et par itération du partage en deux parts égales, les rapports de un à un quart ou un huitième. Par reports successifs, on vérifie sans peine qu'une tige est trois ou quatre ou cinq fois plus grande qu'une autre. Par contre un rapport de quatre à sept par exemple est déjà beaucoup plus difficile à vérifier.

Ainsi, caractériser numériquement tous les rapports possibles n'est pas une question triviale. Il s'agit du problème de la mesure, qui est l'objet de cette nouvelle section. Ce sera un voyage comportant un bon nombre d'étapes.

4.1 Fixer une unité de mesure

Nous pourrions attaquer la question sous l'angle le plus général possible, en nous demandant comment attacher un nombre au rapport de deux grandeurs quelconques. Mais l'intérêt principal de pouvoir chiffrer les rapports réside dans la possibilité, pour chaque domaine de grandeur (les longueurs, les masses, etc.) de rapporter chaque grandeur à une grandeur particulière choisie pour unité. Faire cela, c'est ramener la comparaison des grandeurs d'une même espèce à la comparaison de leur rapport chiffré à l'unité, c'est-à-dire de leur mesure. Très tôt dans l'histoire, les communautés humaines ont découvert cette pratique extraordinairement féconde qui consiste à choisir dans chaque domaine une grandeur de référence (ou un petit nombre de telles grandeurs). Nous plaçons la suite de notre exposé dans cette perspective-là.

Sur le choix d'une unité, qu'elle soit de rencontre ou conventionnelle, voir les chapitres 1, 2.

4.2 Mesure en nombre entier et encadrement

Multiplier une grandeur a par un nombre naturel[3] n, c'est faire la somme de n grandeurs égales à a, ce qui se note na.

[3] Nous supposons les nombres naturels connus, au moins dans leurs propriétés les plus élémentaires. Par ailleurs, ce n'est pas ici le lieu de rappeler en détail comment on les construit, que ce soit dans leur aspect cardinal, ou dans leur aspect ordinal. Cette construction a des analogies avec celle des grandeurs. On trouvera quelques compléments d'information à ce sujet dans N. Rouche [1992]. Bien entendu, dans la réalité, les enfants n'apprennent pas d'abord

Soient deux grandeurs u et a, et n un nombre naturel. Si u multipliée par n est égale à a, autrement dit si $a = nu$, alors on dit que n est la *mesure* de a dans l'unité u. On dit aussi que *u va n fois dans a*, ou encore que *u est contenue n fois dans a*. Le rapport entre les grandeurs u et a est ainsi caractérisé par le seul nombre n.

Il arrive souvent, lorsqu'on a deux grandeurs u et a, avec u plus petite que a, que pour un certain nombre n, nu soit plus petite que a, et que par contre $(n+1)u$ soit plus grande que a. On dit alors que la grandeur a est *encadrée* par nu et $(n+1)u$.

Dans un tel cas, la mesure de a n'est connue qu'approximativement. Une première façon d'affiner la mesure consiste simplement à choisir une unité plus petite. Mais on voit tout de suite combien une telle décision est peu commode. En effet si, pour chaque mesure que l'on veut faire, on choisit une unité assurant la précision que l'on désire, on obtiendra des mesures rapportées à toutes sortes d'unités, qui ne seront pas facilement comparables entre elles. Il faut donc chercher des solutions plus commodes.

Sur les mesures en nombres entiers et les encadrements, voir les chapitres 1, 2.

4.3 Les unités de commune mesure

Lorsque l'unité u n'est pas contenue un nombre naturel de fois dans une grandeur a, il arrive qu'il existe une troisième grandeur c qui soit contenue un nombre entier m de fois dans u, et aussi un nombre entier n de fois dans a. Autrement dit, on a alors

$$u = mc \quad \text{et} \quad a = nc.$$

La grandeur c est appelée *unité de commune mesure* entre a et b. On dit alors que

u est à a comme m est à n.

Le rapport entre les deux grandeurs u et a est dans ces conditions caractérisé par deux nombres.

On se demande naturellement si, étant donné deux grandeurs, il en existe toujours une troisième qui soit unité de commune mesure pour les deux autres. La réponse n'a rien d'évident. On la doit aux Pythagoriciens vers les VI^{e} ou V^{e} siècles avant J.-C. Et cette réponse est *non*. Parfois il y a une unité de commune mesure, et parfois il n'y en a pas. Dans le premier cas, on dit que le rapport des deux grandeurs est *rationnel*, et dans le second qu'il est *irrationnel*[4].

4.4 Les mesures fractionnaires

Ramener la comparaison de deux grandeurs à celle de deux nombres est une idée intéressante, quoique recourir à un seul nombre est évidemment plus pratique. Mais nous avons vu ci-dessus qu'étant donné deux grandeurs u et a, u étant la plus petite, on ne peut pas toujours trouver un nombre naturel n qui soit la mesure de a dans l'unité u. Toutefois si on ne peut pas trouver un nombre naturel, peut-être peut-on trouver un nombre d'un autre type ? Ou alors, si on n'a pas encore de nombre adéquat, *comment étendre la notion de nombre* pour que, quelles que soient deux grandeurs u et a, on trouve un nombre μ tel que $a = \mu u$? Pour arriver à ce résultat, l'humanité est passée par plusieurs étapes.

---

les naturels, et ensuite les grandeurs : ces deux apprentissages non seulement progressent simultanément, mais encore s'épaulent fortement l'un l'autre. Cette remarque suffit à montrer que notre étude ne saurait être considérée comme un projet d'enseignement. En dissociant ici dans une certaine mesure les naturels des grandeurs, nous avons pour seul objectif de montrer le plus clairement possible comment les mesures dépendent des naturels.

[4] L'adjectif *irrationnel* renvoie à la difficulté de rendre raison de tous les rapports entre grandeurs en recourant aux seuls nombres naturels. Il est remarquable d'ailleurs que le mot *raison* vienne du latin *ratio*, qui veut dire *rapport*.

Repartons du fait que toute grandeur peut-être multipliée par un nombre naturel n quelconque. Cette opération de multiplication possède une réciproque : toute grandeur peut être partagée (divisée) en n parts égales, quel que soit le nombre naturel n. Diviser une grandeur a par n, c'est trouver une grandeur b telle que $a = nb$. Le résultat de la division de a par n s'écrit $b = \frac{a}{n}$ ou $b = \frac{1}{n}a$.

On peut aussi enchaîner une division d'une grandeur a par un nombre naturel n, ce qui donne $\frac{1}{n}a$, et une multiplication du résultat par un nombre naturel m, ce qui donne $m(\frac{1}{n}a)$. Comme on obtient le même résultat en exécutant les deux opérations dans l'ordre inverse[5], on peut supprimer les parenthèses et écrire simplement $\frac{m}{n}a$. On dit alors que $\frac{m}{n}$ est un *opérateur fractionnaire* agissant sur a.

Rappelons que, si deux grandeurs u et a sont telles que $a = nu$, nous disons que n est la *mesure de a dans l'unité u.* Si maintenant deux grandeurs a et u sont telles que $a = \frac{m}{n}u$, nous dirons que $\frac{m}{n}$ est la *mesure de a dans l'unité u*. Il s'agit cette fois d'une *mesure fractionnaire.* La fraction comme opérateur composé (deux opérations enchaînées) se mue ici en un nombre qui exprime un rapport. Ce changement de statut de la fraction n'est pas facile à admettre, les enseignants en savent quelque chose.

Étant donné deux grandeurs u et a, existe-t-il toujours deux nombres naturels m et n tels que $a = \frac{m}{n}u$? La réponse est *non*, comme tout à l'heure, lorsque nous nous interrogions sur l'existence d'une commune mesure entre deux grandeurs quelconques. Nous ne nous attarderons pas ici sur cette impossibilité.

Dans la pratique, on trouve toujours une mesure exprimable par une fraction (sachant bien par ailleurs que toute mesure est approximative). C'est pourquoi, dans ce qui suit, nous supposerons qu'étant donné deux grandeurs u et a de même nature, il existe toujours un nombre α tel que $a = \alpha u$. Ce nombre α est l'expression numérique du rapport entre u et a.

Quoiqu'il en soit, les mesures fractionnaires ont été très communément utilisées au cours de l'histoire. Mais elles ont un inconvénient grave. En effet, lorsqu'on a mesuré des grandeurs, on est souvent amené à calculer avec les mesures. L'ennui est que le calcul sur les fractions n'est pas facile, comme en témoignent les écoliers.

Examinons maintenant un autre perfectionnement de l'idée de mesure.

Sur les mesures fractionnaires, voir chapitre 2.

4.5 Les mesures décimales

Une démarche importante dans l'histoire de l'humanité a consisté à mesurer toute grandeur non seulement dans une unité convenue, mais encore en utilisant ses sous-unités décimales, de sorte que le nombre exprimant la mesure soit décimal, avec toutes les facilités de calcul que cela comporte. Ceci fait, on dispose de la notion la plus répandue de mesure d'une grandeur. Soit u l'unité convenue : à toute grandeur a nous pouvons associer le nombre décimal α tel que $a = \alpha u$. Le nombre α peut être un décimal très long. Il peut même être de longueur infinie, et être périodique ou non. Nous n'examinerons pas ces phénomènes ici, d'autant que, dans la pratique, toute mesure est approximative et s'arrête à quelques chiffres après la virgule.

Sur les mesures décimales, voir chapitre 3.

[5] Ce qui n'a rien d'évident : couper une tarte en 4 et prendre 3 morceaux, c'est bien autre chose que de partager 3 tartes entre 4 personnes. Sur cette difficulté, cf. N. Rouche [1992].

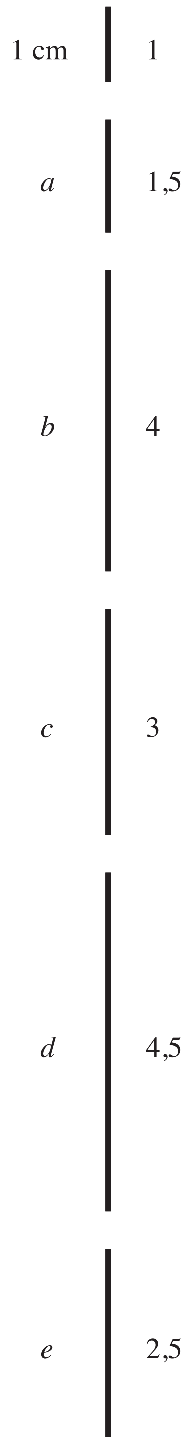


Fig. 6

4.6 Le rapport entre deux nombres

Nous venons de voir, très sommairement, comment les nombres fractionnaires et décimaux peuvent naître des rapports entre grandeurs[6]. Mais les nombres eux-mêmes[7], munis des opérations que nous connaissons, se comportent à beaucoup d'égards comme des grandeurs. En particulier, entre deux nombres quelconques, nous pouvons définir un rapport. Soient α et β deux nombres (α non nul). Il existe un nombre ρ tel que $\beta = \rho\alpha$. Or, nous savons que $\rho = \frac{\beta}{\alpha}$. En gros, le nombre ρ dit combien de fois α va dans β. Nous dirons que ρ est le *rapport* entre α et β.

4.7 Un tableau de mesures

Considérons maintenant un tableau dans la première colonne duquel nous disposons des segments, avec chaque fois leur mesure en regard dans la deuxième colonne : voir figure 6. Il n'y a pas de *rapport* (au sens technique du terme rapport) entre un segment et sa mesure : on ne peut pas augmenter ou diminuer un segment en espérant obtenir un nombre. Le tableau en question ne comporte pas de rapport externe. Le principe qui a permis de le constituer est la mesure des longueurs de la première colonne.

Par contre il existe évidemment des rapports internes à la première colonne, et aussi – nous venons de le voir –, des rapports internes entre les nombres de la deuxième colonne. Il résulte des propriétés de la mesure que ces rapports sont égaux. Montrons-le sur un exemple. Les grandeurs a et b de la figure 6 sont telles que $a = 1,5$ cm et $b = 4$ cm. Le rapport des deux mesures est ici $\frac{1,5}{4}$. Par ailleurs $\frac{b}{4} = 1$ cm. Il vient donc que $a = 1,5(\frac{b}{4}) = \frac{1,5}{4}b$, et le rapport de a à b est donc bien de $\frac{1,5}{4}$.

Enfin nous retrouvons ici la propriété de la somme. En effet, la mesure de la somme de deux longueurs est égale à la somme de leurs mesures.

Ces résultats, que nous venons de montrer sur un tableau de longueurs, sont valables pour une grandeur de nature quelconque. Quel est l'avantage d'avoir ainsi mis des mesures (des nombres) en regard des grandeurs ? Cet avantage est décisif. Comparer des grandeurs, les additionner, les multiplier par un nombre, les diviser en parts égales sont des opérations souvent malaisées, voire impossibles dès qu'elles mettent en œuvre des objets difficiles à manipuler vu leur encombrement ou leur poids. Les mesures ont pour vocation, pour fonction essentielle, de se substituer aux grandeurs chaque fois que c'est possible. Les mesures sont « les grandeurs passées sur le papier et dans la tête ». Elles représentent *fidèlement* les grandeurs parce que, comme nous venons de le voir, entre les grandeurs et leurs mesures, il y a proportionnalité : les sommes et les rapports se conservent : on peut manipuler les mesures au lieu des grandeurs elles-mêmes.

[6] C'est bien aussi comme cela qu'ils sont nés dans l'histoire, même si, depuis la fin du XIX[e] siècle, la plupart des traités construisent les nombres dans la théorie des ensembles, ce qui fait que, dans ce cas, ils précèdent la géométrie et les rapports géométriques.

[7] Remarquons que les nombres dont nous parlons sont les réels positifs. Nous nous occuperons des nombres relatifs

Fig. 7

4.8 Changer d'unité

L'unité que l'on choisit pour mesurer des grandeurs est arbitraire : le choix n'obéit qu'à des motifs de commodité. Qu'arrive-t-il si on change d'unité ? Revenons à notre tableau de longueurs de la figure 6. Les longueurs y sont mesurées en centimètres. La figure 7 montre les mêmes longueurs mesurées en pouces : 1 pouce vaut 2,54 cm. Les nouvelles mesures s'obtiennent à partir des anciennes en multipliant celles-ci par la mesure de l'ancienne unité dans la nouvelle. Un phénomène paradoxal déroute beaucoup de gens : c'est que plus l'unité est petite, plus les mesures sont grandes. Les deux dernières colonnes de la figure 7 constituent elles aussi un tableau de proportionnalité.

Sur les changements d'unité, voir le chapitre 3.

4.9 Les représentations de données

S'il est vrai, comme nous l'avons souligné à la section 4.7, qu'il est souvent avantageux de substituer les mesures aux grandeurs, il est parfois utile de revenir des mesures à des grandeurs faciles à percevoir, telles que des longueurs, des secteurs circulaires, etc. Ainsi lorsqu'on dispose d'un ensemble de données sous forme de mesures, on peut les représenter graphiquement, ce qui a l'avantage, par rapport à la consultation d'un tableau de nombres, d'offrir une vue d'ensemble des données et de faciliter les comparaisons.

Montrons sur un exemple qu'une représentation graphique s'obtient à la suite de deux opérations. Le tableau 7 montre les consommations journalières d'eau d'une famille.

alimentation	5 l
vaisselle	8 l
hygiène corporelle	38 l
WC	43 l
lessive	16 l
entretien	10 l

Tableau 7.

D'abord, on choisit une échelle de 1 cm pour 10 litres, en vue de représenter les quantités par des bâtonnets. Le tableau 8 montre dans sa troisième colonne, les longueurs obtenues. Les deux dernières colonnes du tableau expriment une proportionnalité.

à la section 6.

Ensuite il faut construire le graphique, c'est-à-dire dessiner (par exemple) des bâtonnets dont les hauteurs aient les mesures calculées. C'est de nouveau l'expression d'une proportionnalité. La figure 8 montre le diagramme.
On peut aussi transformer ces données en pourcentages de la consommation totale, comme le montre le tableau 9. La réduction à la base 100, si on la fait pour plusieurs familles, facilite la comparaison des proportions d'eau consacrées par ces familles aux différents usages. Par contre elle fait disparaître la communication des valeurs réellement consommées.

alimentation	5 l	0,5 cm
vaisselle	8 l	0,8 cm
hygiène corporelle	38 l	3,8 cm
WC	43 l	4,3 cm
lessive	16 l	1,6 cm
entretien	10 l	1 cm

Tableau 8.

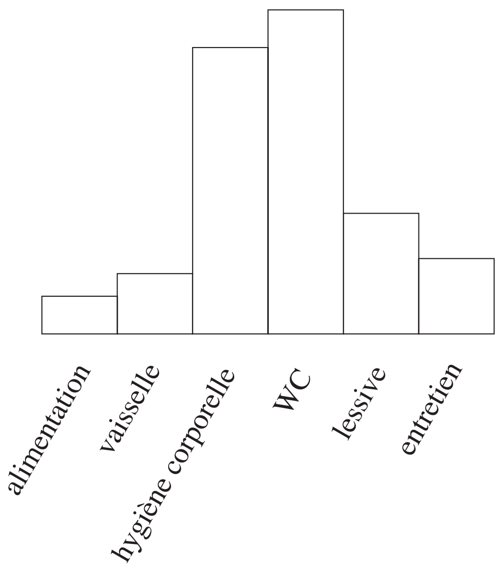


Fig. 8

alimentation	5 l	4,1 %
vaisselle	8 l	6,7 %
hygiène corporelle	38 l	31,6 %
WC	43 l	35,8 %
lessive	16 l	13,3 %
entretien	10 l	8,3 %

Tableau 9.

Les pourcentages peuvent se traduire en diagrammes circulaires. Il faut pour cela les convertir en secteurs circulaires, ce qui est encore une opération de proportionnalité.

Sur divers modes de représentation de données, voir les chapitres 4 et 5.

5 Les rapports de mesures

> L'espace et le temps sont des quantités de nature différente, ... on sent bien qu'on ne peut diviser l'espace par le temps ; ainsi quand on dit que *les vitesses sont comme les espaces divisés par les temps*, c'est une expression abrégée qui signifie que les vitessses sont comme les rapports des espaces à une même commune mesure, divisés par les rapports des temps à une même commune mesure ; c'est-à-dire que si l'on prend, par exemple, le pied pour la mesure des espaces, et la minute pour la mesure des temps, les vitesses de deux corps qui se meuvent uniformément sont entre elles comme les nombres de pieds parcourus divisés par les nombres de minutes employées à les parcourir, et non pas comme les pieds divisés par les minutes.
>
> J. d'Alembert

Voyons maintenant ce que deviennent les tableaux de proportionnalité lorsqu'on passe des grandeurs aux mesures. L'effet le plus notable de ce passage sera de nous faire retrouver un rapport externe pour les tableaux de proportionnalité entre grandeurs d'espèces différentes.

5.1 Grandeurs de même nature

Commençons toutefois par des grandeurs de même nature, et retournons au tableau 4 qui mettait en regard les longueurs des segments visibles sur un petit tangram et sur un autre deux fois plus grand. Complétons ce tableau en lui adjoignant à gauche une colonne reprenant les longueurs des segments du petit tangram, et à droite une colonne avec les longueurs des segments du grand (voir tableau 10). Pour toutes les mesures, nous avons choisi pour unité la longueur du segment a.

1	a	a'	2
1,41...	b	b'	2,82...
2	c	c'	4
2,82...	d	d'	5,64...
3	e	e'	6
4	f	f'	8

Tableau 10.

Entre la première et la quatrième colonnes du tableau, il y proportionnalité, avec 2 pour rapport externe. On vérifie sans peine pour ces colonnes de mesures la propriété des rapports internes et celle de la somme.

Sur les tableaux de proportionnalité entre grandeurs de même nature, voir le chapitre 5. Dans le même chapitre, on étudie un dessin à l'échelle.

5.2 Grandeurs de natures différentes

Revenons maintenant aux tableaux qui établissent une correspondance entre grandeurs de natures différentes, telles par exemple que des volumes et des masses de solides d'une même matière. Choisissons l'aluminium comme à la section 2 et reprenons dans un tableau quelques volumes et quelques masses (voir tableau 11). Ajoutons à ce tableau deux nouvelles colonnes : une à gauche des volumes et qui représente leurs mesures en dm^3, et une à droite des masses et qui représente leurs mesures dans l'unité kg : voir tableau 12. Ce qui est intéressant maintenant, c'est que la première et la quatrième colonnes sont deux colonnes de nombres. Or nous avons vu qu'entre deux nombres (non nuls), il y a un rapport. Si nous enjambons les deux colonnes centrales, *nous retrouvons un rapport externe* (que nous n'avions pas entre les grandeurs elles-mêmes), et qui se trouve être le même pour tous les couples. Nous avons donc construit un *tableau de proportionnalité entre les mesures.*

vol.	masse
v_1	m_1
v_2	m_2
v_3	m_3
v_4	m_4
v_5	m_5
v_6	m_6
...	...

Tableau 11.

dm^3	vol.	masse	kg
2	v_1	m_1	5,4
3	v_2	m_2	8,1
5	v_3	m_3	13,5
12	v_4	m_4	32,4
15	v_5	m_5	40,5
8	v_6	m_6	21,6
...	...	...	...

Tableau 12.

Ce rapport constant est appelé la *masse volumique* de la matière dont sont faits les corps que nous étudions. Évidemment, cette masse volumique dépend des unités que nous avons choisies. Dans notre exemple, et puisque nous avons choisi pour unité de volume le dm^3 et pour unité de masse le kg, la masse volumique vaut 2,7 kg/dm^3.

Sur le tableau de proportionnalité des mesures, nous retrouvons aussi la propriété des rapports internes : le rapport des mesures de volumes de deux corps est toujours égal au rapport des mesures de leurs masses.

Et enfin, nous retrouvons aussi la propriété de la somme : la somme de deux mesures de volumes correspond à la somme des mesures des masses correspondantes.

En conclusion, lorsque nous avons affaire à un tableau de proportionnalité qui met en correspondance deux grandeurs de deux natures différentes, le tableau de leurs mesures possède les trois propriétés de l'existence d'un rapport externe, de l'égalité des rapports internes et de la correspondance des sommes.

Voir au chapitre 5 un exemple de proportionnalité entre massse et volume.

5.3 Graphiques de fonctions linéaires

À titre d'exemple, repartons du tableau 12. Nous voulons le mettre en graphique, ce qui aboutira à la figure 9. Montrons que cette opération se décompose en plusieurs autres.

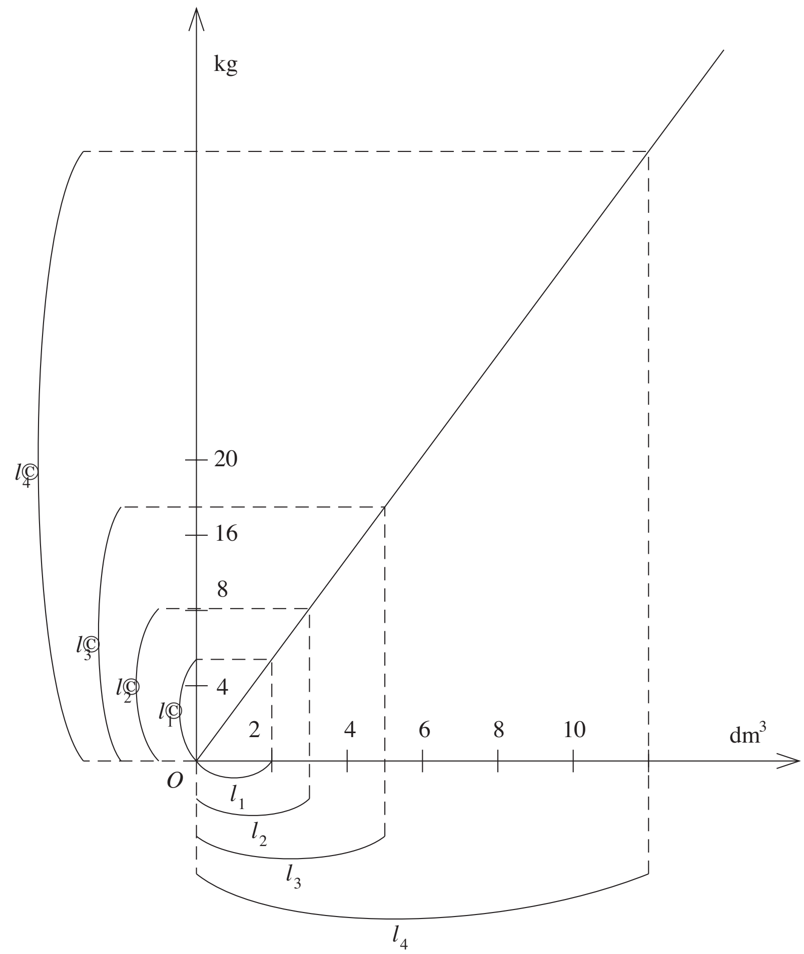


Fig. 9

Ayant décidé de représenter les volumes par des segments, nous devons choisir la longueur du segment qui représentera l'unité de volume : disons 0,5 cm pour 1 dm^3. Nous devons choisir ensuite une longueur de segment pour représenter l'unité de masse : disons 0,25 cm pour 1 kg. Ceci fait, nous pouvons comme le montre le tableau 13 faire correspondre des mesures de longueurs aux volumes et aux masses. Mais ce n'est pas tout, car nous devons encore convertir ces longueurs en segments, pour pouvoir les reporter sur le graphique. C'est ce que montre le tableau 14.

On retrouve dans la figure 9 les rectangles à côtés proportionnels avec leurs diagonales superposées, que nous avons déjà rencontrés à la section 3.3. Le tableau 14 montre comment on recourt de façon répétée à des proportionnalités pour représenter une fonction de façon commode. Remarquons que le choix de deux échelles et le retour aux grandeurs par le tracé des axes gradués sont des opérations de routine pour représenter des fonctions quelconques, et donc pas seulement des fonctions linéaires.

cm	dm^3	vol.	masse	kg	cm
1	2	v_1	m_1	5,4	1,35
1,5	3	v_2	m_2	8,1	2,025
2,5	5	v_3	m_3	13,5	3,375
6	12	v_4	m_4	32,4	8,1
7,5	15	v_5	m_5	40,5	10,125
4	8	v_6	m_6	21,6	5,4
...	...	...	...	...	...

Tableau 13.

long.	cm	dm^3	vol.	masse	kg	cm	long.
l_1	1	2	v_1	m_1	5,4	1,35	l'_1
l_2	1,5	3	v_2	m_2	8,1	2,025	l'_2
l_3	2,5	5	v_3	m_3	13,5	3,375	l'_3
l_4	6	12	v_4	m_4	32,4	8,1	l'_4
l_5	7,5	15	v_5	m_5	40,5	10,125	l'_5
l_6	4	8	v_6	m_6	21,6	5,4	l'_6
...	...	...	...	...	...	...	...

Tableau 14.

Voir des exemples et contre-exemples de fonctions linéaires aux chapitres 5 et 6.

5.4 Des objets et des opérateurs

Pour faire le point, à ce stade de notre étude, réexaminons les divers rôles qu'y ont joués les grandeurs et les nombres.

Au début nous n'avions pratiquement que des grandeurs. Nous ne nous sommes servis à ce stade initial que de nombres très simples tels que 2, $\frac{1}{2}$ ou 1 et $\frac{1}{2}$.

Puis nous avons *opéré* sur les grandeurs en nous servant des nombres : nous avons multiplié une grandeur par un naturel, divisé une grandeur par un naturel, puis combiné ces deux opérations pour arriver à multiplier une grandeur par une fraction (un rationnel). Et nous avons soupçonné au passage l'arrivée de nouveaux nombres, les irrationnels, mais avec une fonction analogue, celle d'opérer sur une grandeur en la « multipliant ».

À ce stade, nous nous intéressions donc à deux sortes de choses : les grandeurs (et leurs rapports) d'une part, et les nombres *opérant* sur les grandeurs de l'autre. Les grandeurs étaient plutôt de l'ordre des choses que l'on *perçoit*, et les nombres de l'ordre des choses qui *guident une action*, des choses avec lesquelles on *agit*, des sortes d'*outils*.

Les opérateurs numériques nous ont amenés à exprimer les rapports par des nombres. Et, moyennant le choix d'une unité standard, nous sommes arrivés à associer à chaque grandeur sa mesure, et à toute mesure la grandeur correspondante. Nous pouvions alors, et c'était bien commode, substituer le plus souvent les mesures aux grandeurs. Mais à partir de là, les nombres jouaient un double rôle : d'une part à travers les mesures, ils prenaient la place des grandeurs, mais d'autre part ils continuaient à jouer le rôle d'opérateurs, non plus sur les grandeurs mais sur leurs mesures.

De là viennent des distinctions plus ou moins éclairantes comme celle des *nombres concrets* (par exemple 4 dans « 4 mètres ») et des *nombres abstraits* (par exemple 3 dans « 3 fois 4 mètres », ou encore 3 et 4 dans « 3×4 » lorsque les nombres ne renvoient qu'à eux-mêmes). Ou encore la distinction entre *multiplicande* et *multiplicateur* puisque dans un produit, les deux facteurs ne jouent pas toujours le même rôle[8].

Pour la suite de l'exposé, retenons principalement qu'à ce stade, *un seul et même type d'objet mental, à savoir les nombres,* joue deux rôles. Plus tard, dans le développement de la structure linéaire, ces deux rôles seront assumés par des objets mentaux distincts.

6 Les rapports de grandeurs orientées

> Nous prendrons toujours la dénomination de *nombres* dans le sens où on l'emploie en arithmétique, en faisant naître les nombres de la mesure absolue des grandeurs ; et nous appliquerons uniquement la dénomination de *quantités* aux quantités *réelles positives* ou *négatives*, c'est-à-dire, aux nombres précédés des signes + ou −. De plus, nous regarderons les quantités comme destinées à exprimer des accroissements ou des diminutions ; en sorte qu'une grandeur donnée sera simplement représentée par un nombre, si l'on se contente de la comparer à une autre grandeur de même espèce prise pour unité, et par ce nombre précédé du signe + ou du signe −, si on la considère comme devant servir à l'accroissement ou à la diminution d'une grandeur fixe de la même espèce.
>
> A.-L. Cauchy

Jusqu'ici tout notre exposé a porté sur les grandeurs et la mesure des grandeurs. La mesure d'une grandeur est toujours un nombre positif. Nous n'avons donc à aucun moment éprouvé le besoin de recourir à des nombres négatifs. Mais il y a des situations où apparaissent des « grandeurs » de deux types, que l'on pourrait dire *antagonistes*, et qui conduisent à des mesures tant négatives que positives. Tel est le cas par exemple des abscisses sur une droite, des temps sur l'échelle des durées, des vitesses, des charges électriques et de bien d'autres. Nous regroupons ces types de grandeurs sous la dénomination commune de *grandeurs orientées*[9].

Commençons par étudier deux d'entre elles qui sont apparentées aux longueurs, à savoir les positions et variations de position sur une droite.

Au début de cet exposé, nous avons étudié les *grandeurs en elles-mêmes*, munies d'un ordre et d'une somme (cf. 3.1) avant d'étudier les *rapports de grandeurs* et les tableaux de proportionnalité (cf. 3.2 et 3.3). Nous procéderons ici dans le même ordre, en rappelant d'abord ce que sont ces grandeurs orientées munies d'un ordre et d'une somme, puis en nous occupant à leur propos des rapports et proportions.

6.1 Les positions et les variations de position

Pour situer un point sur une droite, on choisit une origine sur celle-ci, on se donne la longueur du segment entre le point et l'origine et on marque cette longueur par un symbole arbitraire exprimant le fait que le point se trouve d'un côté ou de l'autre de l'origine. Le symbole peut être un + ou un −, mais remarquons que nous ne parlons pas encore ici de mesures. Ces longueurs marquées sont ordonnées, mais pas du tout comme les longueurs ordinaires. En ce qui les concerne, les symboles

[8] Et qu'en outre lorsqu'on les dispose l'un en dessous de l'autre pour effectuer l'algorithme de la multiplication, il faut bien en mettre un au dessus et l'autre en dessous, et que l'algorithme n'est pas le même selon le choix que l'on fait.

[9] Dans cette étude, nous réservons le nom de *grandeur orientée* aux « grandeurs » qui sont mesurées par *un* nombre relatif. Nous n'utiliserons donc pas cette expression pour les grandeurs de nature vectorielle à deux dimensions ou davantage.

$<$ et $>$ veulent dire respectivement non pas *plus petit* et *plus grand*, mais bien *avant* et *après* dans le sens choisi sur la droite.

Une longueur marquée a pour fonction première de repérer un point sur la droite, de dire où il est. À cause de cela, on voit mal a priori le sens qu'il y aurait à définir une addition sur ces longueurs.

Passons maintenant aux variations de position sur une droite. Ce sont les distances (plus précisément les longueurs) dont on peut déplacer un point sur la droite, mais affectées d'un signe (par exemple $+$ ou $-$) selon que le point est déplacé dans un sens ou l'autre sur la droite. On ordonne les variations de position en disant que

1) si deux variations de position sont positives, l'une est plus petite que l'autre si la distance (au sens ordinaire) correspondant à la première est plus petite que la distance correspondant à la seconde ;

2) si les deux variations sont l'une positive et l'autre négative, la négative est plus petite que la positive ;

3) et enfin si les deux variations sont négatives, celle qui correspond à la plus grande distance est plus petite que l'autre.

Comme on met deux baguettes ou deux segments bout à bout pour les additionner, il semble naturel de convenir qu'additionner deux variations de position, c'est les exécuter l'une après l'autre, les enchaîner. Mais cette définition souffre d'une limitation gênante. En effet, pour pouvoir enchaîner deux variations de position, il faut que le point d'arrivée de la première coïncide avec le point de départ de la seconde. Or on voudrait pouvoir additionner deux variations de position quelconques. Il nous faut pour cela adapter la notion de variation de position.

Répétons que pour additionner deux longueurs, représentées par deux baguettes, nous mettons ces dernières bout à bout en les alignant. Et pour ce faire, il nous faut le plus souvent déplacer les baguettes pour les amener dans la position voulue. Une baguette (un segment) donnée représente toujours la même longueur, où qu'elle se trouve dans l'espace, ce qui nous laisse la liberté de l'amener où nous voulons.

Pour pouvoir additionner deux variations de position quelconques sur une droite, il nous suffit de donner aux variations de position sur la droite la même liberté de mouvement que nous donnons aux baguettes dans l'espace. Autrement dit, deux déplacements d'un point sur la droite (ou deux segments orientés) seront considérés comme représentant la même variation de position pour autant qu'ils aient même longueur et même sens. Il faut un effort d'imagination pour assimiler ce nouveau concept de variation de position.

Jusqu'ici nous avons associé aux positions et variations de position des longueurs munies d'un signe. Nous n'avons donc pas encore parlé de mesurer ces longueurs. Si nous les mesurons (comme on mesure des longueurs ordinaires), mais affectons les nombres trouvés, selon le cas, d'un signe $+$ ou d'un signe $-$, nous obtenons les nombres relatifs. En outre, l'ordre sur les positions et les variations de position nous fournit l'ordre sur les nombres relatifs. Et enfin l'addition des variations de position nous fournit les règles applicables à l'addition des nombres relatifs.

Jusqu'ici également nous n'avons considéré que des grandeurs orientées qui se ramènent à des longueurs munies d'un signe. Quant aux autres, les temps, vitesses, etc., elles se ramènent aux précédentes moyennant des opérations de mesure et des choix d'échelles de représentation analogues à ceux que l'on rencontre dans les grandeurs ordinaires (cf. section 4). Nous n'en parlerons donc pas davantage.

6.2 Les tableaux de proportionnalité entre nombres relatifs

Fixons maintenant notre attention sur les grandeurs orientées mesurées, et donc sur les nombres relatifs. Nous voudrions étendre à ceux-ci la notion de tableau de proportionnalité. Pour cela, nous devons convenir de ce que sera un rapport entre deux nombres relatifs. Supposons pour un moment que les règles de la multiplication des relatifs aient été élaborées, et justifiées de l'une ou l'autre façon, comme on le fait dans l'enseignement secondaire. Nous dirons alors que si y et x sont deux nombres relatifs quelconques, le rapport de x à y est le nombre (relatif) a qui est tel que $y = ax$. Ceci fait, nous pouvons dresser des tableaux de proportionnalité correspondant à des rapports externes a quelconques.

-3	-6
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

Tableau 15.

-3	6
-2	4
-1	2
0	0
1	-2
2	-4
3	-6
4	-8
5	-10

Tableau 16.

Les tableaux 15 et 16 sont caractérisés respectivement par les rapports externes 2 et -2.

On vérifie sans peine que dans de tels tableaux, la propriété de la somme et celle des rapports internes sont vérifiées, ce qui est rassurant. Ces tableaux sont illustrés par les figures 10 et 11.

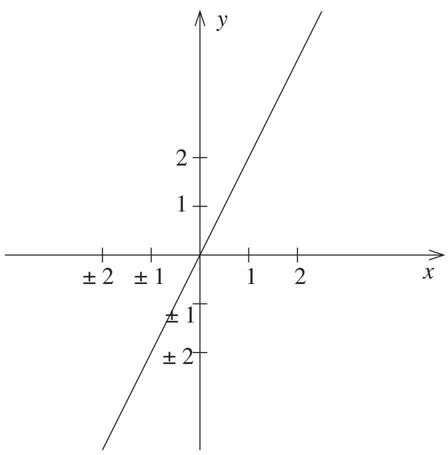


Fig. 10

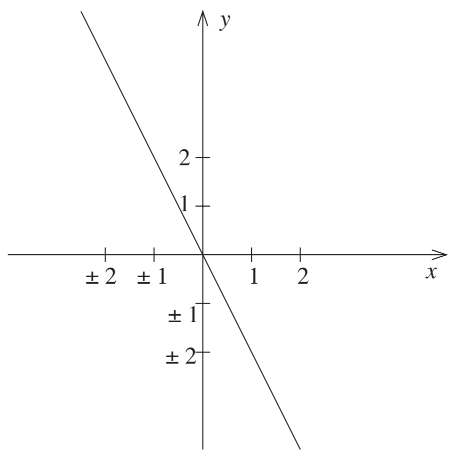


Fig. 11

Supposons maintenant que nous ayons choisi pour la multiplication des relatifs une règle des signes différant de la règle ordinaire. Par exemple que *moins par moins donne moins* et que les autres cas de la règle des signes demeurent inchangés. Nous devons alors remplacer le tableau 16 par le tableau 17 et la figure 11 par la figure 12.

-3	-6
-2	-4
-1	-2
0	0
1	-2
2	-4
3	-6
4	-8
5	-10

Tableau 17.

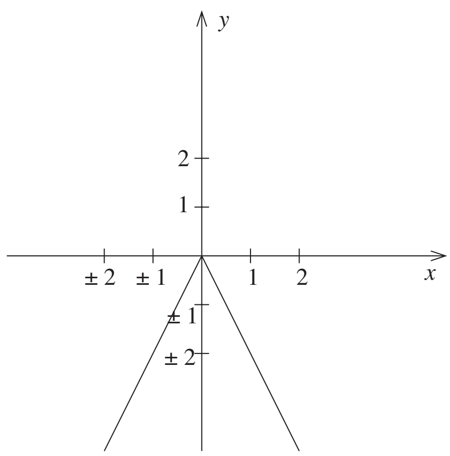


Fig. 12

Le tableau 17 ne vérifie plus ni la propriété de la somme, ni celle des rapports internes. La figure 12 ne représente plus une droite.

Nous pourrions vérifier de même les perturbations qu'introduiraient d'autres modifications à la règle des signes. La conclusion est que celle-ci a un effet majeur : elle permet l'extension aux nombres relatifs de la notion de tableau de proportionnalité, c'est-à-dire de la notion de fonction linéaire. Elle permet la représentation de chaque droite passant par l'origine par une équation simple. Toute autre règle bouleverserait la géométrie analytique[10].

Sur l'extension des tableaux de proportionnalité aux nombres relatifs, voir le chapitre 5.

6.3 Nouveaux objets, nouveaux opérateurs

Jetons maintenant un coup d'œil d'ensemble sur cette sixième section. Nos avons vu que la notion de tableau de proportionnalité résiste au passage des grandeurs ordinaires aux grandeurs orientées, des rapports et mesures positifs aux rapports et mesures exprimés par des nombres relatifs, de la somme des mesures positives à la somme des mesures exprimées par des nombres relatifs. Toutefois, dans les nouveaux tableaux de proportionnalité, les rapports externe et internes et la propriété de la somme ont évidemment changé de visage. Heureusement ce changement est une généralisation : ce que nous avons dit avant le passage aux nombres relatifs demeure applicable aux situations nouvelles lorsque celles-ci ne font apparaître, parmi les nombres relatifs, que des nombres positifs.

Lorsque nous considérions les grandeurs ordinaires, nous avons remarqué que les mesures et les opérateurs étaient tous deux des nombres, positifs en l'occurrence (voir 5.4). Ceci demeure vrai dans le cadre des grandeurs orientées : les mesures et les opérateurs sont encore tous deux des nombres, à ceci près qu'il s'agit maintenant de nombres relatifs. C'est seulement à la section 7 que nous verrons les mesures et les opérateurs prendre des visages différents.

6.4 Les fonctions affines

Les fonctions linéaires, représentées par des tableaux de proportionnalité, ont pour graphiques des droites passant par l'origine (voir figures 10 et 11). Mais dans de nombreuses circonstances, d'autres types de fonctions se présentent naturellement. Par exemple, un mouvement uniforme sur un axe des x répond à une équation du type

$$x(t) = x_0 + vt,$$

t	$x(t)$
-3	$-3,5$
-2	-2
-1	$-0,5$
0	1
1	$2,5$
2	4
3	$5,5$
4	7
5	$8,5$

Tableau 18.

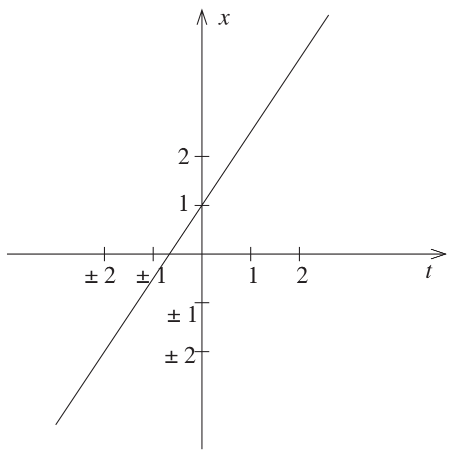


Fig. 13

où t est le temps, v la vitesse et x_0 l'abscisse du point mobile au temps $t = 0$. Un exemple d'une telle fonction (que l'on n'obtient bien entendu qu'après avoir choisi des unités pour les abscisses,

[10] H. Freudenthal [1983] a observé que c'est à partir du moment où la géométrie analytique est entrée dans la pratique mathématique courante, c'est-à-dire dans la deuxième moitié du XVII[e] siècle, que les nombres relatifs ont été utilisés constamment.

les temps et la vitesse) est $x(t) = 1 + 1,5t$. Le tableau 18 et la figure 13 sont deux expressions de cette fonction.

Le tableau 18 n'est pas défini par un rapport externe, et il ne possède ni la propriété de la somme, ni celle des rapports internes. Il ne représente donc pas une fonction linéaire. Toutefois, si on met en regard la différence entre deux termes de la première colonne et la différence entre les deux termes correspondants de la seconde colonne, et que l'on fait cela autant de fois que l'on veut, on obtient un tableau de proportionnalité. Le tableau 19 illustre cette propriété en montrant les différences entre éléments successifs de chaque colonne.
Cette proportionnalité des différences n'exprime rien d'autre, dans le cas du mouvement uniforme, que la propriété que résume la formule : *même durée, même distance parcourue.*

	t	$x(t)$	
	-3	$-3,5$	
1	-2	-2	1,5
1	-1	$-0,5$	1,5
1	0	1	1,5
1	1	$2,5$	1,5
1	2	4	1,5
1	3	$5,5$	1,5
1	4	6	1,5
1	5	$7,7$	1,5

Tableau 19.

Sur les fonctions affines, voir entre autres le chapitre 6.

7 Les vecteurs et les transformations

> Je ne suis toujours pas satisfait de l'algèbre, parce qu'elle ne donne pas la voie d'accès la plus courte aux plus belles constructions de la géométrie. C'est pourquoi je pense qu'en ce qui concerne la géométrie, nous avons besoin d'une autre analyse encore qui soit clairement géométrique ou linéaire et qui exprime directement les *situations* comme l'algèbre exprime directement les *grandeurs*.
>
> G. Leibniz

Dans cette étude, nous avons d'abord examiné les grandeurs au sens ordinaire, dont les mesures étaient des nombres positifs. Nous avons ensuite étudié les grandeurs orientées, dont les mesures étaient des nombres relatifs. Mais les grandeurs ordinaires et les grandeurs orientées n'épuisent pas le champ des grandeurs, si on accepte de donner à ce mot une signification assez étendue. En effet, les changements de position dans l'espace (et non plus seulement sur une droite), les translations, les forces, les vitesses, les champs électriques et magnétiques, etc. sont autant de choses qui peuvent être plus ou moins grandes, plus ou moins intenses, et qui sont par conséquent douées de grandeur. Mais en outre elles ont une direction dans l'espace, et un sens sur cette direction. On les qualifie de *vectorielles*.

Nous n'essaierons pas d'étendre la notion de tableau de proportionnalité successivement aux changements de position, translations, forces, vitesses, etc., car cela nous conduirait trop loin, et dans certains cas n'aurait guère de sens[11]. Nous ne ferons ici cette tentative d'extension que pour les *changements de position* d'un point dans un plan (et dans l'espace ce serait la même chose), ce qui nous conduira aux combinaisons et transformations linéaires. Ensuite, à la section 8, nous reprendrons un par un les autres types de grandeurs vectorielles pour indiquer la spécificité de chacun.

7.1 De la droite au plan

À la section 6.1, nous avons étudié les variations de position sur une droite. Passons maintenant au plan et à l'espace.

[11] Voir à ce sujet la section 8.

Considérons un mobile ponctuel passant d'un point à un autre. Le mouvement le plus simple qui réalise cela suit le segment qui a pour origine le point de départ du mobile et pour extrémité son point d'arrivée. Cette variation de la position est ainsi caractérisée par un segment orienté qui va du point de départ au point d'arrivée. Ce segment possède une longueur, une direction et un sens.

Si nous voulons étendre la notion de tableau de proportionnalité, ou – si on préfère –, de fonction linéaire, à ces objets nouveaux, nous devrons d'abord définir, en ce qui les concerne, les notions de *somme* et de *rapport*.

Pour la *somme*, inspirons nous des variations de position sur une droite. Par définition, additionner deux variations de position dans un plan ou l'espace consistera à enchaîner les deux segments orientés qui les représentent. Mais pour que cette addition soit définie pour deux variations de position quelconques, il faut que nous puissions toujours déplacer les segments orientés pour les amener en position enchaînée. Et donc, de même – rappelons-le –, que nous pouvions déplacer deux baguettes quelconques pour additionner leurs longueurs, nous nous donnerons la liberté de déplacer n'importe quel segment orienté, en prenant toutefois la précaution de lui conserver toujours même longueur, même direction et même sens. Nous désignerons les segments orientés ainsi libérés, du nom de *vecteurs libres*, ou en abrégé de *vecteurs*.

Venons-en maintenant au *rapport* de deux vecteurs. On pense tout de suite à ce que peut vouloir dire *multiplier un vecteur par un nombre relatif.* C'est multiplier sa longueur par la valeur absolue de ce nombre et, tout en maintenant sa direction, changer son sens ou non selon que le nombre par lequel on multiplie est négatif ou positif. Et on est tenté alors de dire que deux vecteurs ont entre eux le *rapport* α, où α est un nombre relatif, si en multipliant le premier par α on obtient le second.

Mais une telle définition du rapport n'est pas vraiment satisfaisante. En effet, selon cette définition, deux vecteurs ne peuvent avoir un rapport entre eux que s'ils ont même direction. Or nous voudrions assez naturellement que deux vecteurs quelconques, même de directions différentes, aient entre eux un rapport, ce qui n'est pas possible avec notre définition. Que faire ?

7.2 Un tableau de proportionnalité étriqué

Malgré cette restriction, essayons de construire un tableau de proportionnalité qui s'appuie sur cette notion de rapport. Juste pour voir. Commençons par deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{a'} = \lambda\overrightarrow{a}$, de rapport λ (voir tableau 20).
Inscrivons ensuite dans notre tableau n'importe quels couples $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b'})$ et $(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{c'})$ tels que

$\overrightarrow{a}$	$\overrightarrow{a'} = \lambda\overrightarrow{a}$
$\overrightarrow{b} = \mu\overrightarrow{a}$	$\overrightarrow{b'} = \mu\overrightarrow{a'}$
$\overrightarrow{c} = \nu\overrightarrow{a}$	$\overrightarrow{c'} = \nu\overrightarrow{a'}$
$\dots$	$\dots$
$\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$	$\overrightarrow{b'} + \overrightarrow{c'}$
$\dots$	$\dots$

Tableau 20.

$$\overrightarrow{b} = \mu\overrightarrow{a} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{b'} = \mu\overrightarrow{a'},$$
$$\overrightarrow{c} = \nu\overrightarrow{a} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{c'} = \nu\overrightarrow{a'},$$

où μ et ν sont deux nombres quelconques, et aussi tout couple de la forme

$$(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b'} + \overrightarrow{c'}) \tag{1}$$

à condition que $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b'})$ et $(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{c'})$ soient déjà dans le tableau.

On vérifie sans peine que dans un tel tableau, tout vecteur de droite est égal au vecteur correspondant de gauche multiplié par λ. Ainsi λ est le *rapport externe* du tableau. On vérifie aussi que ce tableau possède les deux propriétés des rapports internes et de la somme.

Toutefois, l'objection que nous pouvions craindre est bien là : $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{a'}$ étant choisis au départ dans une certaine direction, tous les autres vecteurs du tableau ont cette même direction. Et donc nous ne sommes pas arrivés à construire un tableau de proportionnalité dans la première colonne duquel nous puissions inscrire n'importe quel vecteur, avec en face celui qui lui correspondrait dans un rapport donné à l'avance.

À nouveau, que faire ? Nous devons certainement remplacer notre notion trop étroite de rapport. Il nous faudrait une notion de rapport qui permette le passage d'un vecteur quelconque à un autre vecteur quelconque. Existe-t-il une telle notion ? Pour l'instant, mystère...

7.3 Une généralisation du rapport interne

Ce qui est possible par contre, c'est de passer de *deux* vecteurs quelconques à *un* vecteur quelconque, à condition que les deux premiers soient non nuls et de directions différentes. Soient en effet deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ de ce type. Alors, n'importe quel autre vecteur $\overrightarrow{c}$ peut être représenté sous la forme

$$\overrightarrow{c} = \alpha\,\overrightarrow{a} + \beta\,\overrightarrow{b}, \tag{2}$$

où α et β sont deux nombres appropriés (rappelons que nous travaillons dans le plan). On dit dans ces conditions que $\overrightarrow{c}$ est une *combinaison linéaire* de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$. Une combinaison linéaire n'est pas un rapport, mais elle généralise la notion de rapport du fait qu'elle s'y ramène lorsqu'on revient du plan à la droite.

Pouvons-nous, à partir de là, construire quelque chose qui ressemble à un tableau de proportionnalité ? Essayons de *remplacer les rapports internes par des combinaisons linéaires.* Commençons par inscrire dans la première colonne deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ non nuls et dans la deuxième colonne les vecteurs $\overrightarrow{a'}$ et $\overrightarrow{b'}$ tels que (voir tableau 21)

$$\overrightarrow{a'} = \lambda\,\overrightarrow{a} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{b'} = \lambda\,\overrightarrow{b}, \tag{3}$$

où λ est un nombre non nul. On le voit, nous essayons de maintenir pour le *rapport externe* notre ancienne notion de rapport.

Ajoutons ensuite, dans la première colonne, toutes les combinaisons linéaires que nous voulons des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, par exemple $\alpha_1\,\overrightarrow{a} + \beta_1\,\overrightarrow{b}$ ou encore $\alpha_2\,\overrightarrow{a} + \beta_2\,\overrightarrow{b}$. Nous pouvons par ce procédé inscrire dans cette première colonne n'importe quel vecteur choisi au hasard. Décidons d'inscrire en face les combinaisons linéaires correspondantes (c'est-à-dire de mêmes coefficients) de $\overrightarrow{a'}$ et $\overrightarrow{b'}$.

$\overrightarrow{a}$	$\overrightarrow{a'} = \lambda\,\overrightarrow{a}$
$\overrightarrow{b}$	$\overrightarrow{b'} = \lambda\,\overrightarrow{b}$
$\alpha_1\,\overrightarrow{a} + \beta_1\,\overrightarrow{b}$	$\alpha_1\,\overrightarrow{a'} + \beta_1\,\overrightarrow{b'}$
$\alpha_2\,\overrightarrow{a} + \beta_2\,\overrightarrow{b}$	$\alpha_2\,\overrightarrow{a'} + \beta_2\,\overrightarrow{b'}$
...	...

Tableau 21.

De cette façon, les combinaisons linéaires de gauche – qui nous servent de rapports internes –, correspondent bien à celles de droite. Notre tableau ainsi constitué peut contenir autant de couples que nous voulons.

Assurons-nous maintenant que notre tableau vérifie la propriété des rapports internes, en prenant *rapport interne* au sens nouveau de combinaison linéaire. Soit une combinaison linéaire de deux éléments quelconques de gauche, par exemple

$$\mu(\alpha_1\,\overrightarrow{a} + \beta_1\,\overrightarrow{b}) + \nu(\alpha_2\,\overrightarrow{a} + \beta_2\,\overrightarrow{b}), \tag{4}$$

ce qui revient aussi à

$$(\mu\alpha_1 + \nu\alpha_2)\,\overrightarrow{a} + (\mu\beta_1 + \nu\beta_2)\,\overrightarrow{b}. \tag{5}$$

La même opération exécutée dans la colonne de droite nous amène à

$$\mu(\alpha_1 \overrightarrow{a'} + \beta_1 \overrightarrow{b'}) + \nu(\alpha_2 \overrightarrow{a'} + \beta_2 \overrightarrow{b'}), \tag{6}$$

et ensuite à

$$(\mu\alpha_1 + \nu\alpha_2) \overrightarrow{a'} + (\mu\beta_1 + \nu\beta_2) \overrightarrow{b'}. \tag{7}$$

Cette expression s'écrit aussi

$$\lambda[(\mu\alpha_1 + \nu\alpha_2) \overrightarrow{a} + (\mu\beta_1 + \nu\beta_2) \overrightarrow{b}]. \tag{8}$$

On voit ainsi qu'entre (4) et (6) on retrouve le rapport externe λ.

Par ailleurs, nous n'avons pas à contrôler que notre tableau vérifie la propriété de la somme, puisque la somme est un cas particulier de combinaison linéaire.

Nous avons donc bien construit un tableau de proportionnalité, si nous acceptons d'appeler ainsi un tableau dans lequel les combinaisons linéaires ont pris la place des rapports internes.

La nature même du rapport externe de ce tableau est telle que tout vecteur de droite est égal au vecteur correspondant de gauche multiplié par un nombre λ. Une telle transformation des vecteurs du plan porte le nom d'*homothétie*. Voilà donc l'aboutissement de notre recherche à ce stade : nous voyons les homothéties comme pouvant être exprimée par des « tableaux de proportionnalité », en un sens convenablement adapté.

Un commentaire s'impose toutefois. Dans le cadre conceptuel où nous nous trouvons, une homothétie transforme les vecteurs *libres*, c'est-à-dire ces variations de position que nous pouvons transporter n'importe où, sans autre contrainte que de respecter leur grandeur, leur direction et leur sens. Mais le terme *homothétie* est plus souvent utilisé en un sens différent. Il désigne alors une transformation du plan dans laquelle un point origine reste fixe tandis que tous les autres s'écartent ou se rapprochent de l'origine dans une proportion donnée. Dans ce sens, une homothétie *n'agit pas sur des vecteurs libres, mais bien sur des points.* Nous reviendrons sur cette distinction à la section 8.1.

7.4 Une généralisation du rapport externe

Mais revoyons maintenant attentivement le développement qui nous a conduits aux homothéties. Pour constituer le tableau 21, nous avons d'abord inscrit à gauche des combinaisons linéaires quelconques de deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, puis des combinaisons linéaires des vecteurs ainsi obtenus. Ceci fait, nous avons constaté que nous obtenions en face les mêmes combinaisons linéaires, mais cette fois des vecteurs $\overrightarrow{a'}$ et $\overrightarrow{b'}$. Or, et c'est cela qui est curieux, pour prouver ce résultat (la correspondance bien régulière des combinaisons linéaires entre la gauche et la droite, voir l'expression (7)), nous ne nous sommes pas du tout servis de la condition

$$\overrightarrow{a'} = \lambda \overrightarrow{a} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{b'} = \lambda \overrightarrow{b}. \tag{9}$$

Nous n'avions imposé cette dernière condition que pour préserver cette forme de rapport externe pour notre tableau (ce qui a d'ailleurs réussi).

Donc, si nous voulons, nous pouvons choisir les vecteurs $\overrightarrow{a'}$ et $\overrightarrow{b'}$ arbitrairement, et la propriété des rapports internes (des combinaisons linéaires) sera encore vérifiée. Celle de la somme aussi.

Mais, ceci fait, se pose une question cruciale. En effet, dans ces nouvelles conditions, notre rapport externe est perdu dans la forme que nous lui avions souhaitée. Alors, existe-t-il encore entre les deux colonnes quelque chose que nous puissions appeler *rapport externe* ? Ou en termes plus imagés, quel peut bien être le contenu géométrique du passage de la colonne de gauche à celle de droite ?

Regardons cela de près. Tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de gauche peut être écrit sous la forme

$$\overrightarrow{x} = x_1 \overrightarrow{a} + x_2 \overrightarrow{b}. \tag{10}$$

Le vecteur correspondant de droite est alors de la forme

$$\overrightarrow{x'} = x_1 \overrightarrow{a'} + x_2 \overrightarrow{b'}. \tag{11}$$

Mais $\overrightarrow{a'}$ et $\overrightarrow{b'}$ peuvent aussi être écrits comme combinaisons linéaires de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, par exemple sous la forme

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a'} &= r_{11} \overrightarrow{a} + r_{12} \overrightarrow{b}, \\ \overrightarrow{b'} &= r_{21} \overrightarrow{a} + r_{22} \overrightarrow{b}. \end{aligned}$$

En tenant compte de (11), nous obtenons encore

$$\overrightarrow{x'} = (x_1 r_{11} + x_2 r_{21}) \overrightarrow{a} + (x_1 r_{12} + x_2 r_{22}) \overrightarrow{b}. \tag{12}$$

Autrement dit, si le vecteur $\overrightarrow{x}$ s'exprime en fonction des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ par le couple (x_1, x_2), son image $\overrightarrow{x'}$ s'exprime par rapport aux même vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ par le couple $(x_1 r_{11} + x_2 r_{21}, x_1 r_{12} + x_2 r_{22})$. Pour le lecteur qui connaît déjà un peu le calcul vectoriel, on peut reformuler cela en disant que la transformation qui envoie $\overrightarrow{x}$ sur $\overrightarrow{x'}$ a pour expression dans la base $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$,

$$\begin{aligned} x'_1 &= r_{11} x_1 + r_{21} x_2, \\ x'_2 &= r_{12} x_1 + r_{22} x_2. \end{aligned}$$

Telle est donc la loi de passage des $\overrightarrow{x}$ aux $\overrightarrow{x'}$ ou, en d'autres termes, voilà ce qui nous tient lieu de *rapport externe*.

En réalité, nous arrivons là à des tableaux de proportionnalité (considérablement) généralisés qui expriment ce que l'on appelle les *transformations linéaires du plan*, pour la découverte desquelles nous renvoyons le lecteur à des exposés plus complets. Par delà les homothéties, on y trouve les isométries, les similitudes, les compressions, les cisaillements, ...

Notons toutefois une difficulté. Ces transformations sont habituellement vues comme expédiant chaque point du plan sur un autre (et parfois le même). Or un vecteur libre n'est pas a priori associé à un point. L'intuition le perçoit soit comme un segment orienté transportable, soit comme l'ensemble des segments orientés de même longueur, direction et sens qu'un segment donné. Dans les deux cas, cela exige un travail que d'associer tout vecteur libre à un et un seul point du plan et réciproquement.

7.5 Nouveaux objets, nouveaux opérateurs

Pour en revenir à la mutation à laquelle nous venons d'assister, insistons sur sa signification profonde. Dans nos tableaux de proportionnalité relatifs aux grandeurs, aux mesures de grandeurs et aux grandeurs orientées, nous avions des rapports internes et externes, mais ces rapports avec des noms différents étaient de la même nature et avaient tous le même contenu géométrique simple. Par contre, en passant aux « rapports » entre grandeurs à deux dimensions, nous assistons à une bifurcation de la notion : les rapports internes deviennent des combinaisons linéaires (notion au contenu géométrique encore assez simple, caractérisée par deux nombres), mais les rapports externes deviennent des relations au contenu géométrique divers, impossibles à saisir d'un seul coup d'œil intuitif, et caractérisées par quatre nombres.

Remarquons pour en finir avec les variations de position que nous pourrions aussi les étudier dans l'espace. Les conclusions seraient analogues, quoique nous aurions alors à faire à des combinaisons linéaires de trois vecteurs, et le substitut des rapports externes serait représenté non plus par quatre nombres mais par neuf.

Le chapitre 8 introduit au calcul vectoriel en termes de déplacements. Il est complété par le chapitre 9 qui introduit le produit scalaire, expression de la bilinéarité. Voir aussi sur ces deux sujets, le chapitre 15.

7.6 Le plan quadrillé

Une comparaison peut éclairer la façon dont nous avons introduit les variations de position au début de cette section 7. Lors d'une leçon de gymnastique, un professeur dit à ses élèves : « Faites un pas en avant. » Les élèves peuvent exécuter ce mouvement parce qu'ils ont un *avant* et un *arrière* : chacun d'eux est un corps orienté. Tel n'est pas le cas d'un point dans un plan, et il n'est donc pas possible de décrire de cette façon une variation de position d'un point. Mais le professeur peut dire aussi : « Faites un pas vers le mur de gauche, ou vers le nord. » En disant cela, il se réfère à un repère déjà présent dans l'environnement. Nous aurions pu procéder de manière analogue, mais ce n'est pas ce que nous avons fait. Enfin le professeur peut faire lui-même un pas dans une direction choisie au hasard, puis dire à ses élèves : « Faites comme moi », voulant dire par là : « Faites un pas de la même longueur que le mien, dans la même direction et le même sens. » C'est comme cela que nous avons procédé, en évoquant un mobile ponctuel qui passe d'un point à un autre, puis en considérant que nous pouvions envisager un mouvement identique à partir de n'importe quel autre point.

En procédant ainsi, nous avons pu poser, sans avoir à tenir compte de quoi que ce soit d'autre, d'aucun repère préexistant, la question de ce que pourrait bien être un rapport entre deux variations de position. En échouant à définir un tel rapport dans le cas général, mais en reconnaissant ensuite la possibilité d'une sorte de rapport entre deux variations de position (non nulles et de directions différentes) et une troisième, nous avons fait naître la notion de *combinaison linéaire* et, implicitement, celle de base du plan vectoriel. En mettant ensuite au point un « tableau de proportionnalité » qui respecte cette sorte de rapport nouveau, nous avons fait naître la notion de *transformation linéaire*, autre et dernier avatar du rapport. Tout cela était conforme à l'objectif annoncé au début de cette étude et qui était de faire apparaître diverses mutations de la notion de rapport.

Il va de soi pourtant que dans la pratique, lorsqu'on veut spécifier une variation de position dans un plan, celui-ci est souvent déjà occupé par des objets ou des figures pouvant servir de repère. Par exemple sur les plans de villes, on peut se référer à un quadrillage. Celui-ci tient lieu de repère et permet d'emblée la décomposition des variations de position en deux composantes : avancer de tant, dans tel sens, dans une direction du quadrillage, puis de tant, dans tel sens, dans l'autre direction, le côté du carré servant d'unité de mesure. Cette façon plus concrète d'introduire les variations de position est mieux adaptée à une première approche de la linéarité que notre recherche des avatars de la notion de rapport. C'est le moment de rappeler que nous ne proposons pas du tout cette recherche comme thème d'un enseignement élémentaire.

Sur l'utilisation du plan quadrillé pour introduire les vecteurs géométriques, voir le chapitre 8.

8 Quelques sources de vecteurs

> ... Toute grandeur vectorielle dépend de deux éléments hétérogènes, l'un de nature arithmétique et l'autre de nature géométrique, qui sont un nombre et une direction. On peut lui attacher un *vecteur*, abstraction mathématique qui est à la grandeur vectorielle ce que le nombre est à la grandeur scalaire et, de même que l'étude des grandeurs scalaires se ramène à des raisonnements sur les nombres, celle des grandeurs vectorielles se ramène à des raisonnements sur les vecteurs.
>
> R. Bricard

8.1 Repérer les points d'un plan

À la section 6.1, nous avons étudié le repérage des points sur une droite. Examinons maintenant le repérage des points d'un plan. On ne peut pas spécifier la position d'un point si ce n'est par rapport à quelque chose. Et donc il faut au départ se donner un repère. Alors on part d'un point (que l'on appelle *l'origine*) dans une direction donnée, ce qui ne conduit qu'aux points d'une seule droite. Pour balayer les autres points du plan, il faut changer de direction. On peut par exemple tourner la droite choisie au départ, ce qui engendre les coordonnées polaires. Ici nous choisissons plutôt une deuxième droite passant par l'origine et partant dans une autre direction que la première. En munissant chacune des deux droites d'une unité orientée, nous obtenons un repère au sens bien connu en géométrie.

Si le plan que l'on considère est déjà muni d'un quadrillage (ou d'un pavage de parallélogrammes identiques entre eux), on installe un repère en choisissant deux droites sécantes du quadrillage, puis en orientant celles-ci.

La position d'un point par rapport à un repère est donnée par l'enchaînement de deux variations de position : on avance de tant depuis l'origine le long du premier axe, puis on avance de tant parallèlement au second axe. C'est là une combinaison linéaire des deux variations de position représentées par les deux unités orientées. Elle va de l'origine au point que l'on veut situer. Appelons-la *vecteur-position* de ce point. Ses deux coefficients sont appelés les *coordonnées* du point. Les vecteurs-positions sont aussi parfois appelés *vecteurs liés.*

Ce procédé fait jouer aux deux axes des rôles différents. Pour leur faire jouer le même rôle, on peut construire le parallélogramme défini par les deux axes et les parallèles à ceux-ci passant par le point à situer, puis considérer la variation de position qui, en suivant la diagonale, va de l'origine au sommet opposé de ce parallélogramme.

Et maintenant pourquoi s'intéresser au produit d'un vecteur-position par un nombre et à la somme de deux vecteurs-positions ? Car à première vue un tel vecteur semble avoir rempli son office dès qu'il a montré où est un point.

Toutefois, multiplier les vecteurs-positions de tous les points d'une figure par un même nombre aboutit à agrandir ou rapetisser la figure sans changer sa forme, ce qui a beaucoup de sens. En faisant cela, on réalise une *homothétie.*

D'autre part, si certains points du plan sont affectés d'une masse, pour déterminer le centre d'inertie de ce système de points, on est amené à faire la somme de tous les vecteurs-positions de ces points multipliés chacun par la masse correspondante. Cette application justifie amplement le produit d'un vecteur-position par un nombre et la somme de deux vecteurs-positions.

Ces deux opérations s'introduisent d'ailleurs de façon naturelle, puisque pour multiplier un vecteur-position par un nombre, il suffit de multiplier chacune de ses coordonnées par le nombre, et pour additionner deux vecteurs-positions, il suffit d'additionner deux à deux leurs coordonnées.

Comparés aux variations de position, les vecteurs-positions ont l'avantage de correspondre chacun à un point du plan et réciproquement. Ils semblent donc particulièrement adaptés à l'étude des transformations linéaires du plan : ce sont des transformations dans lesquelles chaque point est envoyé sur un autre point (ou sur lui-même). L'homothétie mentionnée ci-dessus en est un exemple, mais il y a aussi les rotations, les symétries orthogonales et bien d'autres.

Parmi ces transformations, certaines sont linéaires, c'est-à-dire conservent les combinaisons linéaires, et d'autres non. Mais c'est là un résultat théorique qui ne sera habituellement rencontré que bien après l'étude des transformations familières.

8.2 Les translations

Soit une figure dans un plan. Si on la fait glisser sans la tourner vers un autre endroit du plan, on obtient une deuxième figure identique à la première. En répétant ce mouvement (un glissement dans la même direction et sur la même distance) à partir de la deuxième figure, on en crée une troisième. On peut en créer de même une quatrième, une cinquième, etc. On voit ainsi se constituer une frise. En repartant de la première figure et par des mouvements identiques, quoique de sens opposé, on allonge la frise de l'autre côté. On peut imaginer une frise infinie dans les deux sens.

On peut aussi passer de la frise à un papier peint (un réseau plan). Il suffit de choisir un deuxième mouvement, dans une direction différente du premier, et de reproduire la frise autant de fois que l'on voudra par application réitérée de ce mouvement dans les deux sens.

On peut étudier, sur le papier peint, les passages d'un motif de base quelconque à un autre, de la même manière que l'on étudiait le passage d'un point à un autre par une variation de position. Les motifs du papier peint ont simplement pris la place des points. Le passage d'un motif à un autre, caractérisé par sa longueur, sa direction et son sens, peut être reproduit au départ de n'importe quel motif. C'est intuitivement l'analogue du vecteur libre.

Dans ce cadre, la multiplication d'un mouvement par un nombre (en l'occurrence un entier) apparaît naturellement : on envoie le motif tant de fois plus loin dans un sens ou l'autre. La somme de deux mouvements procède par enchaînement, comme dans le cas des variations de position.

D'autre part, on ne doit pas ici introduire la notion de repère : elle se dégage en quelque sorte d'elle même, puisque n'importe quel mouvement peut être exprimé comme la somme de deux mouvements de directions différentes, multipliés chacun par un nombre approprié.

De ces considérations sur les papiers peints, on peut passer par analogie aux vecteurs libres du plan.

Changeons maintenant de point de vue. On peut engendrer une frise tout autrement que ci-dessus, à condition que l'on ait déjà acquis le concept de translation du plan entier (sans aller nécessairement jusqu'à la composition des translations). On part d'une figure. On translate le plan, de manière à envoyer la figure à un autre endroit. Puis on pose la question : comment faudrait-il compléter la figure de départ pour qu'elle retombe sur elle-même (qu'elle soit invariante) à la suite de la seule translation envisagée ? La figure complétée est une frise.

On peut alors engendrer un papier peint en demandant simplement de compléter la figure de départ de sorte qu'elle se transforme en une figure invariante par application de deux translations du plan de directions différentes.

On peut ensuite explorer toutes les translations du plan qui laissent le papier peint invariant. Et on voit bien comment l'on retrouve ainsi le produit d'une translation par un nombre, la somme (la composée) de deux translations, et comment on choisit deux translations de directions différentes dont les combinaisons linéaires permettent de retrouver toutes les autres.

Quelles que soient par ailleurs les façons de procéder pour créer une frise ou un papier peint, les vecteurs mis au point dans de tels contextes sont plus proches des vecteurs libres que des vecteurs-positions. Comme expliqué ci-dessus, cela demande un effort d'associer chacun d'eux à un point du plan pour pouvoir ensuite envisager les transformations du plan d'un point de vue vectoriel.

Un avantage toutefois des frises et papiers peints, c'est que si le motif de base est lui-même invariant pour certaines symétries orthogonales ou rotations, ces symétries se transmettent au plan entier et conduisent donc naturellement aux isométries du plan entier (mais non à d'autres transformations).

L'extension des isométries au plan entier est un caractère intéressant pour ceux qui étudient – ce que nous ne ferons pas ici –, les propriétés de groupe de ces tranformations et les théorèmes de réduction : toute isométrie directe est une translation ou une rotation, et toute isométrie inverse est une symétrie glissée.

8.3 Les vitesses

Les vecteurs se rencontrent dans d'autres champs que la géométrie. Considérons maintenant les vitesses, qui relèvent d'abord de la cinématique, avant de jouer un rôle en dynamique, là où les forces interviennent. Concentrons-nous dans un premier temps sur les mouvements rectilignes et uniformes d'un mobile ponctuel.

La vitesse d'un tel mobile possède une grandeur, une direction et un sens. Il est par conséquent tentant de la représenter par un vecteur. Mais tout d'abord on ne peut la représenter par un segment orienté qu'après avoir fait un double choix, nécessaire pour fixer la longueur du segment : premièrement on doit se donner une unité de longueur et une unité de temps, par exemple le mètre et la seconde, ce qui fixe l'unité de vitesse, dans notre exemple le mètre par seconde ; deuxièmement, on doit se donner une échelle de représentation des vitesses, en convenant par exemple de faire correspondre un centimètre à un centimètre par seconde.

Ceci fait, la vitesse correspond-elle à un vecteur libre ou à un vecteur lié ? A priori pas à un vecteur libre, car elle est attachée à un point, à savoir le mobile. Il serait donc très artificiel d'associer à la vitesse un segment transportable en tout point de l'espace, et encore moins à un ensemble infini de segments orientés de mêmes longueur, direction et sens. Mais si on veut faire correspondre la vitesse à un vecteur lié, on tombe sur une autre difficulté, à savoir que le segment orienté-vitesse doit être attaché à un point mobile, et non à une origine fixe, comme c'était le cas pour les vecteurs-positions. Ainsi, si la vitesse est représentable par un vecteur, il s'agit d'un vecteur très particulier, peut-être une variété de vecteur que nous n'avons pas encore rencontrée. Nous reviendrons sur cette difficulté.

Ceci dit, pour que la vitesse soit représentée fidèlement par un vecteur, il faut encore que cela ait un sens de la multiplier par un nombre. Aucune difficulté à cela, car doubler, tripler, ... une vitesse, en changeant ou non son sens, sont des opérations raisonnables et utiles.

Ensuite, quel sens y a-t-il à additionner deux vitesses ? On peut se faire une idée, mais ce n'est pas si facile, d'un mobile susceptible de prendre deux mouvements (nous en sommes toujours aux mouvements rectilignes et uniformes) et qui les prendrait tous les deux en même temps. Par exemple, il pourrait aller vers le nord à telle vitesse, et pourrait aussi aller vers l'ouest à telle autre vitesse. Les deux mouvements ensemble le porteraient vers le nord-ouest. Mais qu'est-ce que cela veut dire *les deux mouvements ensemble ?* Pour réaliser cela pratiquement, il faut se souvenir qu'un mobile se meut toujours par rapport à quelque chose. Soit par exemple un nageur qui nage vers le nord en eau dormante. Remplaçons ensuite, fut-ce mentalement, l'eau dormante par un fleuve qui coule vers l'ouest. Il se fait que la vitesse du nageur par rapport à la rive s'obtient en ajoutant, par la règle du parallélogramme, sa vitesse initiale vers le nord et la vitesse du fleuve.

La question ainsi posée débouche à terme sur celle du *mouvement relatif*. La vitesse du nageur par rapport au fleuve est sa *vitesse relative*. La vitesse du fleuve est sa *vitesse d'entraînement*. Enfin, la vitesse du nageur par rapport à la rive (repère fixe ou réputé tel) est sa *vitesse absolue*. La vitesse absolue est la somme de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative[12].

Étant donné ce que nous avons dit de la manière de faire correspondre des segments orientés aux vitesses, la façon la plus naturelle d'additionner les vitesses est bien la règle du parallélogramme. On ne voit pas en effet à quoi correspondrait le fait d'enchaîner deux vecteurs vitesses.

En ce qui concerne par ailleurs les transformations linéaires, si étroitement liées aux vecteurs géométriques, on ne voit guère *a priori* pourquoi on s'en occuperait du côté des vitesses.

Si maintenant nous passons des mouvements rectilignes et uniformes aux mouvements quelconques, la définition de la vitesse se complique. Elle devient ce que l'on appelle la *vitesse instantanée*. Sa direction (la tangente à la trajectoire) et sa grandeur sont déterminées au terme d'un processus de limite appelé *dérivation*. Non seulement, comme dans le cas précédent, elle est attachée à un point mobile, mais encore elle ne conserve le plus souvent ni sa grandeur et ni sa direction, elle en change à chaque instant. Il n'empêche, ce que nous avons dit ci-dessus du caractère vectoriel de la vitesse demeure vrai. Mais cela nous entrainerait trop loin de le montrer ici.

La relation entre les vitesses et les vecteurs est étudiée au chapitre 13.

8.4 Les forces

Comme les vitesses, les forces sont candidates pour être représentées par des vecteurs, puisqu'elles ont comme ces dernières une grandeur, une direction et un sens. Mais elles partagent avec les vitesses la propriété que pour les représenter par des segments orientés, il faut d'abord les mesurer dans une unité à choisir (par exemple le kilogramme-force qui est la plus disponible) et ensuite choisir une échelle de représentation, par exemple un centimètre par kilogramme-force.

Ensuite est-ce qu'une force serait représentable plutôt par un vecteur lié, ou plutôt par un vecteur libre ? Il ne serait guère possible de répondre à cette question sans examiner les circonstances où des forces entrent en jeu. Dans un premier temps, bornons-nous au problème le plus simple : celui où quelques forces tirent sur un point et où on s'intéresse à l'équilibre de celui-ci. Les forces sont appliquées au point, et par conséquent le bon modèle est plutôt celui des vecteurs liés. Toutefois, on peut tirer sur le point par l'intermédiaire de cordes dont la longueur n'a a priori pas d'importance. Et donc on pourrait admettre que la force soit accrochée en un point quelconque de la corde. Cette remarque n'a pas pour l'instant de grande conséquence, et donc oublions-la provisoirement. Nous y reviendrons un peu plus tard.

En ce qui concerne la somme des forces, c'est clairement la loi du parallélogramme qui joue, car on voit mal ce que pourrait vouloir dire l'action d'enchaîner deux segments orientés représentant des forces. La condition d'équilibre du point est que la somme des forces, calculée par la loi du parallélogramme, soit nulle.

Multiplier les forces par un nombre est une opération qui a aussi un sens dans le problème de l'équilibre d'un point. En effet, par exemple, si un point est en équilibre sous l'action de quelques forces, il demeure en équilibre si toutes ces forces sont multipliées par un même nombre.

[12] Cette loi ne va pas de soi, comme on s'en rend compte jusqu'à un certain point en considérant les accélérations. Quittons momentanément le cadre des mouvements uniformes, et supposons que le nageur ait un mouvement accéléré par rapport au fleuve et que le fleuve lui-même ait un mouvement accéléré par rapport à la rive. Dans un tel cadre, on définit pour le nageur une accélération relative, une accélération d'entraînement et une accélération absolue. Mais il est généralement faux que la somme des deux premières soit égale à la troisième.

Multiplier, comme nous venons de le faire, toutes les forces appliquées en un point par un même nombre revient à soumettre les vecteurs-forces à une homothétie. Par delà cette remarque, on voit mal *a priori* pourquoi on développerait une théorie des tranformations linéaires à propos des forces.

Dépassons maintenant le problème élémentaire de l'équilibre d'un point, et jetons un coup d'œil sur les questions plus générales où des forces interviennent. Bornons-nous aux questions de statique, car la dynamique nous entraînerait trop loin. Un problème fondamental est celui de l'équilibre d'un solide soumis à quelques forces. Ces forces tirent ou poussent sur le solide *en des points bien déterminés.* La condition (nécessaire et suffisante) d'équilibre est double : la somme (vectorielle) des forces doit être nulle, et la somme des moments des forces par rapport à un point fixe quelconque doit aussi être nulle[13]. Pour faire la somme des forces, le plus simple est de les imaginer toutes appliquées à un point quelconque donné et de procéder comme pour l'équilibre d'un point. Lorsqu'on fait cela, on libère en pensée les forces de leur point d'application sur le solide. Elles deviennent des vecteurs libres pour le temps du calcul. Par contre, pour faire la somme des moments des forces, on ne peut plus déplacer celles-ci, sauf éventuellement que chacune peut glisser sur sa *ligne d'action*, c'est-à-dire sur la droite déterminée par son point d'application et sa direction. En raison de cette contrainte, les mécaniciens ont introduit la notion de *système de vecteurs glissants*, aussi appelé *torseurs.* Ce n'est pas ici le lieu d'en faire la théorie.

Ceci suffit sans doute à montrer que les forces sont représentées fidèlement par des vecteurs, au sens où on leur applique les règles de calcul introduites pour les vecteurs géométriques (ou plus généralement pour les éléments des espaces vectoriels). Les vecteurs sont un outil de représentation des forces et donnent la clé de nombreux calculs qu'on leur applique, mais ils ne disent pas tout sur les forces. Un peu comme les nombres sont des outils de représentation pour celui qui pèse et paie des marchandises, mais les nombres ne disent pas tout sur les marchandises.

Sur la relation entre les forces et les vecteurs, voir le chapitre 12.

8.5 Les nombres complexes

Les nombres complexes sont parmi les objets mathématiques qui ont historiquement le plus contribué à l'émergence des vecteurs. Contentons-nous ici de montrer ce que devient la notion de tableau de proportionnalité lorsqu'on tente de l'étendre aux complexes. Disposons dans une première colonne tous les nombres complexes que nous voulons. Écrivons en face les mêmes nombres multipliés par un nombre complexe ζ, qui jouera le rôle de rapport externe. Un tel tableau satisfait aux deux propriétés de la somme et des rapports internes, les notions de somme et de rapport étant prises ici au sens des complexes. Ces propriétés résultent simplement du fait que les complexes forment un corps.

Il est intéressant de noter que la fonction linéaire à laquelle renvoie un tel tableau n'est autre qu'une similitude du plan complexe. À la section 7 notre généralisation des tableaux de proportionnalité engendrait toutes les transformations linéaires du plan. Ici nous n'atteignons que les similitudes. Par ailleurs, notre analyse de la section 7 s'étend sans peine aux espaces à n dimensions. Les nombres complexes eux ne s'appliquent qu'au plan. Quoiqu'il en soit, la représentation des similitudes par les complexes fait de ceux-ci un instrument très efficace d'étude des problèmes euclidiens plans.

Sur la relation entre les nombres complexes et les vecteurs, voir le chapitre 10.

[13] Nous sommes obligés ici de déborder un peu le cadre théorique de la présente étude. Le lecteur qui ne comprendrait pas ce paragraphe ne perdra pas grand chose de l'ensemble.

9 Conclusions

Jetons un dernier regard sur notre parcours. Nous sommes partis de la proportionnalité entre deux grandeurs. Nous avons envisagé d'emblée la proportionnalité, non sous la forme de l'égalité de *deux* rapports, mais sous la forme des tableaux de proportionnalité. Nous avons donc privilégié les *familles* – toujours extensibles –, de rapports égaux, ou plus généralement les fonctions linéaires. Penser les choses par familles stimule davantage la pensée que de les envisager une par une[14].

Regarder cette matière sous l'angle des tableaux et des fonctions nous a permis de mettre en évidence d'emblée les trois propriétés fondamentales : celles du rapport externe, de la somme et des rapports internes. Tout notre travail a consisté ensuite à voir comment ces notions s'adaptaient à des contextes divers, sucessivement les mesures, les grandeurs mesurées, les grandeurs orientées et leurs mesures, et enfin les grandeurs vectorielles. Nous avons étudié plusieurs généralisations du concept de somme, qui a pourtant conservé le même nom d'un bout à l'autre, et plusieurs généralisations du concept de rapport, celles-ci tellement profondes que le nom même de rapport a dû être remplacé, selon la matière traitée, par ceux de combinaison linéaire et de quotient de deux nombres complexes.

Au terme de ce parcours, nous avons un double espoir. C'est d'abord que le fil conducteur de la linéarité (il n'est pas le seul, mais il est important) soutienne la conception d'un enseignement en spirale, aide à en assurer la cohérence, et ramène l'attention sur les structures dans l'enseignement des mathématiques. À l'époque des mathématiques modernes, on a cru possible d'exhiber très tôt dans l'enseignement, et de manière axiomatique, certaines structures importantes. Du fait que cela s'est avéré difficile, certains ont eu tendance à conclure qu'il fallait accorder moins d'importance aux structures. Cela nous semble contraire à la nature même des mathématiques et préjudiciable à l'enseignement. Nous proposons plutôt *d'envisager les structures autrement*, à savoir en étant attentif à leur émergence et à leur maturation à travers toute la scolarité, quoique *sans vouloir les inculquer prématurément dans une forme abstraite.*

Notre deuxième espoir est qu'un enseignant qui aurait compris les connexions importantes qui relient tant de matières, serait mieux armé pour interpréter les difficultés rencontrées par les élèves dans les circonstances toujours pressantes d'une classe au travail.

[14] C'était une des conclusions méthodologiques de CREM [1995]