CREM

Nivelles, le 31 août 2002

DES GRANDEURS AUX ESPACES VECTORIELS

La linéarité comme fil conducteur

Recherche N^o 72/01 financée par le Ministère de la Communauté Française,
Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique,
Service général des Affaires générales, de la Recherche en Éducation
et du Pilotage interréseaux

Rapport de fin d'année, première partie

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques a.s.b.l.

5 rue Émile Vandervelde B-1400 Nivelles Belgique

Tél. +32–(0)67 21.25.27 Fax. +32–(0)67 21.22.02 Cpte 068-2179326-54

rouche@amm.ucl.ac.be

Rapport au terme de trois années de recherche (première partie)

Le présent document est la première partie du rapport final d'une recherche qui s'est étalée sur trois ans. La deuxième partie du rapport est présentée à part sous le titre *Vers une géométrie naturelle*.

Auteurs de la recherche

Ce rapport est le fruit d'une recherche collective, jalonnée par de nombreuses et longues discussions. Les membres du groupe de recherche sont : Michel Ballieu, Marie-France Guissard, Patricia Laurent, Christine Lemaître, Luc Lismont, Nicolas Rouche, Thaïs Sander, Philippe Tilleuil, Éric Vanderaveroet, Françoise Van Dieren, Jacques van Santvoort, Marie-Françoise Van Troeye, Patricia Wantiez.

Chaque chapitre a été particulièrement pris en charge par une ou deux personnes :
Nicolas Rouche pour l'introduction,
Thaïs Sander pour les chapitres 1 et 2,
Thaïs Sander avec la collaboration de Françoise Van Dieren pour le chapitre 3,
Thaïs Sander pour le chapitre 4,
Françoise Van Dieren pour les sections 1, 3 et 4 du chapitre 5,
Marie-Françoise Van Troeye pour la section 2 du même chapitre,
Marie-Françoise Van Troeye et Éric Vanderaveroet pour les sections 1, 2 et 3 du chapitre 6,
Françoise Van Dieren pour la section 4 du même chapitre,
Michel Ballieu et Marie-France Guissard pour les chapitres 7, 8, 9 et 10,
Luc Lismont pour le chapitre 11,
Luc Lismont et Nicolas Rouche pour le chapitre 12,
Philippe Tilleuil pour le chapitre 13,
Michel Ballieu et Marie-France Guissard pour le chapitre 14,
Nicolas Rouche pour les chapitres 15 et 16.

La mise au point informatique de l'ensemble du texte a été réalisée par Michel Ballieu et Marie-France Guissard. Patricia Wantiez a réalisé en PostScript la plupart des figures du chapitre 13.

Remerciements

Nous remercions vivement toutes les personnes qui ont lu et commenté diverses versions provisoires de ce rapport. Il s'agit tout d'abord des membres du Comité d'Accompagnement de notre recherche au Ministère de l'Éducation et aussi des membres du Comité d'Accompagnement interne au CREM, en particulier Francis Buekenhout, Sylvain Courtois, Ginette Cuisinier, Michel Demal, Mady Frémal, Thérèse Gilbert, Louis Habran, Christiane Hauchart, Jean-Paul Houben, Maria-Isabela Krysinska, Francis Michel, Jacques Navez, Guy Noël, Maggy Schneider, Christian Vandercammen et Paul van Praag. Nous remercions également les participants de nos formations dans le cadre de l'ASBL Formation en Cours de Carrière et de l'ICAFOC. Nous avons largement profité des critiques et recommandations de toutes ces personnes. Il va de soi cependant que la responsabilité finale de ce rapport incombe à ses seuls auteurs.

Financement de cette recherche

Cette étude a été réalisée dans le cadre des conventions de recherche N[os] 72/99, 72/00 et 72/01, financées par le Ministère de la Communauté française, Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Service général des Affaires générales, de la Recherche en Éducation et du Pilotage interréseaux.
Deux postes de chargé de mission ont été affectés à temps partiel à cette recherche par le Comité de Concertation de la Formation Continue du Caractère non confessionnel.
Deux postes de chargé de mission ont été affectés à temps partiel à cette recherche par le Comité de Concertation de la Formation Continue du Caractère confessionnel.

Avant-propos

1 La linéarité, une idée de base

Dans les années 60 et 70 du XX^{e} siècle, les promoteurs des « mathématiques modernes » avaient proposé un fil conducteur unique et clair pour l'enseignement des mathématiques. Pour le dire sommairement, ils privilégiaient les structures et l'enchaînement déductif qui va des ensembles et relations aux systèmes de nombres et aux espaces vectoriels. Cette conception exhibait l'unité de *la mathématique*, que ces promoteurs défendaient si éloquemment.

À partir de la fin des années 70, ce fil conducteur a été délaissé pour l'essentiel, et l'enseignement, comme les programmes en font foi, est revenu aux divisions traditionnelles des mathématiques, celles que nous avons héritées de l'histoire plus ancienne. Il s'agit en gros de l'arithmétique, la géométrie, l'algèbre, l'analyse et les probabilités. Or ces divisions de la matière mathématique ont un sens. Dans une étude antérieure[1], le CREM a montré que chacune d'elles est associée certes à l'étude d'une certaine classe d'objets, mais aussi et peut-être surtout à *un mode de pensée.* C'est bien d'ailleurs pour cela qu'elles ont émergé au cours des siècles.

Quoiqu'il en soit, et peut-être précisément parce qu'ils correspondent à *des modes de pensée spécifiques*, ces chapitres ont tendance à se refermer chacun sur lui-même. Et l'enseignement mathématique, considéré dans son ensemble, se constitue alors en compartiments plus ou moins étanches. Les enseignants connaissent bien les difficultés, pour les élèves, des transferts de méthodes et d'intuitions d'une matière à une autre. Dans cette perspective, il manque des fils conducteurs, des liens de parenté visibles qui favorisent la mobilité de la pensée.

Comme nous l'avons remarqué déjà ci-dessus, le point de vue des structures a été dans une assez large mesure occulté à partir des années 80. Or les structures peuvent être considérées, en raison même de leur abstraction, comme *un mode de pensée non spécifique,* en ce sens qu'elles transcendent les divisions traditionnelles des mathématiques et de ce fait favorisent les transferts. Elles transcendent ces divisions, parce qu'elles sont au cœur, au principe même de la pensée mathématique.

D'où la question : n'avons nous pas assisté, autour des années 80, à un retour trop ample du balancier de l'histoire ? N'aurait-il pas mieux valu, plutôt que d'abandonner les structures, penser à les enseigner autrement ? Telle est la question à laquelle le présent ouvrage propose des éléments de réponse.

On a compris aujourd'hui que les structures ne peuvent pas être au début de l'enseignement. Ce qui vient d'abord, ce sont les grandeurs, les nombres, les formes, des questions à leur sujet, des symboles qui soutiennent la pensée mathématique commençante. Les parentés de structure se découvrent petit à petit. Et d'ailleurs, certaines structures sont plus prégnantes que d'autres.

Dans cet ouvrage, nous montrons le pouvoir éclairant de la *structure linéaire.* C'est celle qui soustend les grandeurs et leur mesure, les rapports et les proportions, la similitude, l'algèbre du premier

[1] Voir *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans,* CREM [1995], dans les chapitres 4 à 9, les sections intitulées « Les nombres comme forme de pensée », « La géométrie comme forme de pensée », etc.

degré, les combinaisons linéaires et les espaces vectoriels. L'idée de linéarité, qui apparaît modestement à l'école maternelle, se construit par généralisations successives tout au long de la scolarité. Elle est de celles – la principale peut-être ? – qui peuvent soutenir la conception d'un enseignement en spirale, puisque de classe en classe, elle revient dans des contextes divers et éclaire des questions de plus en plus vastes. L'idée de structure linéaire n'est pas donnée au départ, elle s'élabore en même temps que s'approfondit l'expérience mathématique des élèves.

2 De la prime enfance à l'âge adulte

Une fois de plus[2], le CREM propose ici un ouvrage qui traite de l'enseignement des mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte. L'idée est qu'il est intéressant – voire nécessaire –, pour chaque enseignant d'explorer non seulement les matières au programme de sa classe, mais encore celles d'avant et celles d'après, puisque l'éducation mathématique forme un tout.

Le risque d'une étude adressée à des lecteurs aussi nombreux et divers est que beaucoup d'entre eux ne la liront qu'en partie. Mais au moins prendront-ils conscience que leur travail quotidien a des tenants et des aboutissants importants, et seront-ils tentés d'y aller voir. Qui plus est, les lecteurs moins nombreux qui s'intéresseront à l'ensemble sont sans doute ceux qui sont le plus susceptibles de faire évoluer l'enseignement.

3 Creuser profond mais aussi servir en classe

Cette étude regroupe des contributions de deux sortes. D'une part des chapitres de nature épistémologique et historique sur la structure linéaire. L'idée est de creuser profond, sur un plan théorique. Ensuite des chapitres de situations-problèmes adaptées à tous les âges de l'école, montrant pratiquement la structure linéaire en construction dans diverses matières. Cette double face de notre travail entraîne un autre risque : c'est que le lecteur théoricien ne lise que ce qui l'intéresse immédiatement, et que le praticien fasse de même. Notre espoir est que certains, les plus nombreux possibles, cèdent à la tentation d'éclairer un point de vue par l'autre, ce qui est – nous semble-t-il – la meilleure façon de saisir véritablement l'ensemble du problème de l'éducation mathématique.

4 Contenu de l'ouvrage

L'*introduction* reprend et détaille l'intérêt de dégager un (voire plusieurs) fil conducteur pour l'enseignement des mathématiques.

La *première partie,* qui comporte quatre chapitres, concerne les élèves de deux ans et demi à douze ans. Elle propose d'abord des situations-problèmes sur les balances et les poids à l'école maternelle. Elle se poursuit par diverses activités destinées à l'école primaire et utilisant le tangram. Viennent ensuite un chapitre sur les comparaisons et mesures de capacités, et un autre, destiné à la fin du primaire, sur les grandeurs, les pourcentages et leurs représentations graphiques.

La *deuxième partie* vise les élèves de douze à quinze ans. et comprend deux chapitres, numérotés 5 et 6. Le chapitre 5 prend la suite du dernier chapitre de la première partie. Il traite d'abord des pourcentages et de divers supports géométriques qui permettent de les visualiser, puis du thème

[2] Voir les trois publications antérieures les plus importantes du CREM, à savoir : *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans* [1995], *Formes et mouvements, perspectives pour l'enseignement de la géométrie* [2001] et *Construire et représenter, un aspect de la géométrie de la maternelle jusqu'à 18 ans* [2001].

général de la proportionnalité, dans ses expressions numérique (les tableaux de proportionnalité), graphique et algébrique (les formules). Les contextes des questions posées sont divers : problèmes de troc, d'épargne, remplissage d'un réservoir d'essence. Le même chapitre se termine par une question de patterns de cubes et par une introduction des nombres entiers liée à des questions d'alignement de points dans un système d'axes. Le chapitre 6 traite de la proportionnalité et de la non-proportionnalité en géométrie, avec des questions de périmètres et d'aires et enfin une introduction au théorème de Thalès conjointement avec des notions de perspective cavalière.

La *troisième partie* concerne les élèves de quinze à dix-huit ans. Elle comprend sept chapitres, qui portent les numéros 7 à 13. Elle s'ouvre par une introduction historique consacrée aux méthodes de fausse position et de double fausse position, permettant de montrer aux élèves que les pratiques aujourd'hui communes sont apparues au terme d'une difficile maturation. Le chapitre 8 est une introduction progressive au calcul vectoriel géométrique, partant de la notion de changement de position. Le chapitre 9 complète le précédent par une initiation au produit scalaire et donc à l'idée de bilinéarité. Les nombres complexes, considérés comme des vecteurs munis d'un produit particulier, permettent d'aborder efficacement des questions de géométrie euclidienne : ils sont la matière du chapitre 10. Le chapitre 11 propose une initiation simultanée à la réalisation de dessins en Postscript et à la géométrie analytique. Les deux derniers chapitres de cette troisième partie rattachent l'idée de vecteur à celle de *grandeur vectorielle* en physique. Le chapitre 12 traite d'abord de problèmes simples d'équilibre de solides dans un champ de pesanteur uniforme, ce qui mobilise les centres de gravité. Il étudie ensuite les conditions d'équilibre d'un point soumis à des forces, matière qui permet d'introduire la règle du parallélogramme. Enfin le chapitre 13 introduit à la même loi du parallélogramme, mais dans le contexte de la composition des vitesses pour des mouvements uniformes et uniformément accélérés.

La *quatrième partie* est entièrement orientée vers l'histoire et l'épistémologie des vecteurs. Elle comprend les chapitres 14 et 15. Le premier des deux explique la genèse des vecteurs dans le contexte des nombres complexes, chez Tait, disciple de Hamilton, et Bellavitis. Le chapitre 15 tente une construction de l'idée de vecteur en partant de la géométrie analytique ordinaire et en cherchant à dégager les expressions algébriques qui ont un sens géométrique indépendant du repère choisi : ce sont les expressions que pour cela on qualifie d'intrinsèques.

La *cinquième partie* enfin ne comporte qu'un seul chapitre, ce qui peut paraître assez singulier. Cela se justifie par le fait qu'elle propose une synthèse de tout l'ouvrage : en renvoyant systématiquement à tous les autres chapitres, elle dégage la notion de structure linéaire dans ses divers avatars de la maternelle jusqu'à dix-huit ans. C'est donc à ce chapitre que le lecteur est invité à se reporter chaque fois qu'il éprouve le besoin de savoir *où il en est.*

Notons que nous n'avons pas couvert toutes les matières qui relèvent de l'idée linéaire. Et certaines de celles qui manquent au tableau peuvent même être considérées comme particulièrement importantes. Pour n'en citer que trois : les équations et les systèmes algébriques linéaires, ainsi que le calcul matriciel, la différentielle, qui est l'application linéaire tangente à une fonction, et les équations différentielles linéaires. Mais ce qui relève de la structure linéaire dans le corpus entier des mathématiques est gigantesque, et nous ne pouvions tout traiter. Nous espérons, quoiqu'il en soit, avoir au moins montré une certaine direction de pensée.

Ajoutons enfin que ce travail résulte de la collaboration de toute une équipe dans laquelle chacun a pu exprimer sa sensibilité. Nous avons cherché davantage la qualité dans la diversité, que l'expression d'une pensée par trop monolithique.

5 Présentation type des situations-problèmes

Les situations-problèmes rassemblées dans les trois premières parties de ce rapport ont été conçues chacune pour des élèves déterminés, dans une tranche d'âge donnée et possédant certaines connaissances préalables. Toutefois, elles peuvent être adaptées, dans certaines limites, à d'autres élèves. Chaque professeur en jugera.

Ces situations sont présentées selon un plan uniforme[3] comportant les rubriques suivantes :

De quoi s'agit-il ? – Description, en une ligne ou deux, de l'activité proposée aux élèves.

Enjeux – Matières couvertes et compétences visées.

De quoi a-t-on besoin ? – Description du matériel requis. Relevé des connaissances supposées chez les élèves.

Comment s'y prendre ? – Cette rubrique comporte des questions à proposer aux élèves, des indications pour organiser le travail en classe, des éléments de réponses aux questions, et les éléments de la théorie auxquels la situation aboutit normalement.

Échos d'une ou plusieurs classes – Indications sur le déroulement de l'activité dans l'une ou l'autre classe expérimentale. On relève les réactions les plus communes, mais aussi les plus significatives, même si elles sont isolées.

Prolongements possibles – Nouvelles situations-problèmes, plus ou moins difficiles que celle faisant l'objet principal de la section. Ces situations peuvent jouer le rôle de variantes, d'exercices, de questions d'évaluation, de poursuite du travail pour les élèves mordus.

Vers où cela va-t-il ? – À quelles questions mathématiques plus avancées la situation en question prépare-t-elle de manière directe ou indirecte ? Quels rapports la situation en question entretient-elle avec d'autres disciplines ? Quelle place la situation occupe-t-elle dans la culture mathématique globale ?

Commentaires – Éclaircissements de toutes natures susceptibles d'être utiles aux enseignants et aux élèves, comme par exemple des indications sur l'histoire des mathématiques, des commentaires sur le caractère plus ou moins réaliste de certains modèles mathématiques, etc.

[3] Ce plan est inspiré par E. C. Wittmann et G. Müller [1990] et [1994]. Nous l'avons mis au point à l'occasion d'une recherche précédente (voir CREM [2001b]).

Introduction :
vers un fil conducteur ?

Pourquoi est-il important de dégager un ou des fils conducteurs pour l'enseignement des mathématiques, et comment y arriver ? C'est le sujet de cette introduction, que l'on s'est efforcé de présenter de la manière la moins technique possible, de sorte qu'elle soit accessible à toute personne cultivée, même brouillée avec les mathématiques. Il a fallu pour cela tenter une gageure : sans faire de mathématiques, donner de cette discipline une idée raisonnablement fidèle. Cette dernière entreprise est de celles qu'il ne faut jamais abandonner, tant sont énormes les malentendus à propos des mathématiques, même chez beaucoup de personnes abondamment diplômées.

> On n'a pas tardé à s'apercevoir que la rigueur
> ne pourrait pas s'établir dans les raisonnements,
> si on ne la faisait pas entrer d'abord dans les définitions.
>
> H. Poincaré

L'objectif de cette étude est de dégager, parmi d'autres sans doute, un fil conducteur pour l'enseignement des mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte. Pour mener à bien une telle entreprise, il faut – cela va de soi –, prendre deux choses en compte : d'une part les mathématiques et d'autre part les élèves. Commençons par les mathématiques qui sont à la fois une forme de pensée et un ensemble structuré de connaissances, c'est-à-dire une science. Nous commençons par là non pas parce que les mathématiques seraient, lorsqu'il est question de concevoir leur enseignement, plus importantes que les élèves, mais seulement pour assurer la clarté de l'exposé.

1 Logique et rigueur : le sens étroit

Essayons tout d'abord de dégager un caractère qui distingue assez clairement les mathématiques des autres sciences dites exactes, des sciences humaines, de la philosophie et de la pensée commune. Pour cela, analysons la portée et l'usage, dans ces différents domaines, des mots et des symboles comme moyens d'expression de la pensée.

En mathématiques, chaque mot (chaque symbole aussi) est défini de manière univoque par quelques propriétés complètement intelligibles, et renvoie de ce fait à une classe de choses connue sans ambiguïté. Grâce à cela, ces mots et symboles peuvent être engagés dans des raisonnements déductifs de longue haleine[1]. Ce qui est démontré est sûr et peut servir de point de départ à de nouvelles déductions. La pensée mathématique n'appuie ses certitudes sur aucun soutien extérieur.

Dans les sciences dites exactes, comme par exemple la physique et la chimie, on se donne des modèles mathématiques des phénomènes que l'on étudie. Si ces modèles sont assez précisément décrits pour participer de l'univocité des mathématiques, alors travailler dans un modèle, c'est

[1] Dans le *Discours de la méthode*, Descartes parlait de « ces longues chaînes de raisons, toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations ».

faire des mathématiques. Et rien n'empêche dans ces conditions de construire des démonstrations aussi longues que nécessaire. Mais les modèles représentent des situations ou des phénomènes réels, et la question se pose toujours de l'adéquation du modèle à la réalité, de la conformité des déductions aux données expérimentales. En ce sens, les sciences exactes fondent leurs énoncés pour la forme sur les démonstrations mathématiques, et pour le fond sur la conformité à l'expérience.

Les mots utilisés dans les autres domaines de la connaissance sont aussi, comme les mots et symboles mathématiques, cernés par des définitions, les dictionnaires en font foi. Mais ces définitions n'ont pas la même univocité logique, et de ce fait elles ne peuvent pas être engagées dans des déductions de quelque ampleur. On les précise souvent par des exemples. Des mots tels que *maison, cheval, révolution, liberté,* et même *mathématiques,* sont définis d'une façon qui parle à l'intuition et renvoie à un ensemble de choses cerné approximativement. Tout essai de déduction stricte qui les utilise s'enlise au bout de quelques pas.

Ceci ne veut pas dire, loin de là, que ces notions seraient inutilisables et donc inutiles. Mais on ne peut les appliquer à des objets particuliers qu'à coup de commentaires, de correctifs et de nuances. La rigueur mathématique n'est autre que le respect de la logique. La rigueur dans les sciences humaines et bien souvent dans la pensée commune, s'appuie certes aussi sur la logique, mais tout autant sur le soin avec lequel on introduit les correctifs et les nuances qui assurent la fidélité à un certain objet[2].

Ce caractère des sciences humaines est compatible avec la production d'études longues et pertinentes, mais qui par delà l'argumentation s'appuient aussi sur des observations, des expériences, des enquêtes.

Le cas de la philosophie est plus subtil. Les philosophes sont coutumiers de développements de longue haleine. Dans la mesure où ceux-ci sont purement spéculatifs, et où par nature ils ne se fondent pas seulement sur la déduction pure, ils ne peuvent conclure de façon totalement convaincante et demeurent donc des objets de débats. Ceci ne leur enlève ni leur pertinence, ni leur intérêt, en tant que matières à réflexion et sources d'orientations intellectuelles et morales.

Nous appellerons ci-après *sens étroit* – sans connotation péjorative pour l'adjectif *étroit* –, le sens des mots et des symboles tel qu'il est codifié, dans n'importe quelle discipline intellectuelle, pour assurer ou favoriser la solidité des raisonnements et des arguments. Le sens étroit est associé à l'univocité, à la rigueur de la pensée.

2 Intuition et créativité : le sens large

Mais un mot (ou un symbole) n'est jamais entièrement cerné par sa définition. Chacun renvoie dans la mémoire aux questions et contextes où il a été rencontré et a joué un rôle, aux exemples dans lesquels il s'est incarné, aux choses qui lui ressemblent et à celles qui s'opposent à lui. Ces liens sont rationnels ou non, nécessaires ou fortuits, forts ou ténus. C'est parce que les mots et les concepts ont beaucoup de référents, beaucoup de liens entre eux qui forment comme un tissu mental, que la pensée est mobile et peut être créative, que l'imagination peut soupçonner (deviner) des propriétés. Bien entendu, ces choses que l'on soupçonne, il faut ensuite les infirmer ou confirmer

[2] Pour répondre à cette difficulté, le sociologue allemand Max Weber (cf. M. Weber [1965]) a proposé la notion d'*idéal type*. Un idéal type est un concept répondant à une définition la plus claire possible. Il est doté d'une netteté logique qui en fait un bon instrument d'argumentation, mais cette netteté n'est souvent obtenue qu'au prix d'une schématisation, une stylisation de la réalité. Ce qui ne va toutefois jamais jusqu'à permettre de longues déductions. Le fait qu'un idéal type s'écarte ainsi de la réalité par raison de clarté implique ce que nous disions ci-dessus, à savoir qu'on ne peut l'utiliser pour étudier adéquatement des cas particuliers qu'en l'entourant de commentaires et de correctifs.

en les ramenant dans le champ du sens étroit. Nous appellerons ci-après *sens large* d'un mot (ou d'un symbole) l'ensemble, l'essaim des référents auxquels il renvoie – rationnellement ou non –, dans la mémoire et l'imagination.

Toute pensée en recherche, toute pensée mathématique créative en particulier, est une sorte de contrepoint entre le sens large et le sens étroit, entre l'imagination et l'intuition d'une part, et la rigueur de l'autre. Comme l'a dit POINCARÉ [1908], « c'est par la logique qu'on démontre, c'est par l'intuition qu'on invente. Savoir critiquer est bien, savoir créer est mieux. » Une pensée réduite au sens large, à l'imagination débridée, s'agiterait beaucoup et n'aboutirait nulle part. Une pensée réduite au sens étroit serait immobile, car elle ne saurait où aller.

Le sens large est variable d'une personne à l'autre. Un enfant a dans sa mémoire une foule de choses qui relèvent de l'expérience commune, de ce qu'on lui a enseigné à l'école et de tout ce qu'il a brodé de raisonnable ou même d'un peu fou autour de cela au fil de sa pensée libre et de ses rêves. Une personne qui a fait beaucoup de mathématiques a accumulé en outre dans sa mémoire, non seulement des théories bien en forme, mais encore une énorme quantité d'images, d'analogies, de perspectives, étranges ou non, d'intuitions, qui mélangent souvent mathématiques et pensée commune, et constituent le terreau de sa créativité.

3 La déduction comme fil conducteur

Après ces considérations sur les deux registres indissociables de la *pensée mathématique,* examinons la forme générale de la science mathématique comme ensemble structuré de connaissances. Un survol historique s'avérera utile en l'occurrence.

Nous avons vu que la pensée mathématique est capable de produire de longues chaînes de déductions. Le premier exemple majeur que l'histoire nous en ait légué est constitué par les *Éléments* d'EUCLIDE au III^e siècle av. J.-C.[3] C'est un vaste traité de géométrie et d'arithmétique dans lequel tous les théorèmes sont tirés par déduction d'un petit nombre d'axiomes. Les *Éléments* sont demeurés en occident, quasiment jusqu'au XIX^e siècle, le modèle de la rigueur mathématique.

Toutefois, on s'est aperçu au XIX^e siècle qu'EUCLIDE utilisait certains axiomes non explicités, qu'il s'appuyait sur l'une ou l'autre proposition intuitive, non rattachée déductivement aux axiomes. En d'autres termes, il ne satisfaisait pas entièrement à ce qu'étaient devenus les critères de rigueur à la fin du XIX^e siècle. Mais en 1899, DAVID HILBERT a donné une version nouvelle de la géométrie d'EUCLIDE, entièrement conforme à ces critères.

À cette même époque, bien d'autres théories mathématiques avaient été développées, *la plupart en dehors du cadre euclidien.* Elles concernaient de nouvelles formes de la géométrie, les nombres, l'algèbre, l'analyse, etc. Ces théories avaient chacune la forme dont nous avons parlé, à savoir celle d'un système déductif long et rigoureux, accroché à quelques axiomes. Toutefois, elles coexistaient dans un certain désordre, et leur foisonnement faisait désirer non seulement une organisation d'ensemble, mais encore et surtout un fondement unique.

Et c'est là ce qu'a réalisé le XX^e siècle. Ces longs enchaînements déductifs coexistants ont été organisés en une architecture d'un seul tenant, tout entière déduite des quelques axiomes de la théorie des ensembles. Ce résultat spectaculaire, sans doute peu connu du grand public, a frappé les imaginations des mathématiciens. Il constitue une preuve de fait de l'autonomie des mathématiques, de leur capacité d'avancer sans dérailler sur de très longues distances – peut-être indéfiniment ? –, en s'appuyant sur l'univocité de leurs concepts. Le premier traité qui ait matérialisé cet effort de

[3] Les mathématiques antérieures n'ont pas produit de monument déductif comparable.

synthèse a été publié en de nombreux volumes à partir de 1939 par un groupe de mathématiciens français rassemblés sous le pseudonyme de Nicolas Bourbaki.

Pour arriver à cette organisation axiomatique globale, il a fallu concentrer l'attention sur les enchaînements logiques, ce qui ne peut se faire avec toute la rigueur et la sûreté de pensée requise qu'au détriment des autres registres de la pensée mathématique. La question qui s'impose à tout moment dans ce genre d'entreprise est, pour le dire familièrement : *qu'est-ce qui dépend de quoi ?* Et pour y répondre, il faut écarter de la réflexion les perceptions, les mouvements, les intuitions, les conjectures. Il faut écarter les questions du type : d'où cela vient-il ? pour résoudre quels problèmes a-t-on inventé cela ? y a-t-il d'autres applications possibles ? y a-t-il des images ou des analogies qui aident à saisir telle ou telle partie ? Bref il faut, *par raison de méthode* et de façon radicale, réduire la pensée au sens étroit. Ce qui n'a – soulignons-le – jamais empêché les mathématiciens qui l'ont fait de naviguer par ailleurs avec bonheur dans le sens large. Mais il reste que le produit fini est là, sous forme de traité austère, séparant soigneusement et à juste titre les parties strictement déductives d'éventuelles allusions à l'histoire et aux contextes. Dans l'histoire, il y a d'abord des questions, des problèmes, et on construit des théories pour y répondre. Dans les mathématiques réécrites déductivement, il y a d'abord les théories, et ensuite les problèmes passés au rang d'applications. Et dans beaucoup de traités, il n'y a pas d'applications.

Il importe d'ailleurs d'observer ici *un paradoxe du sens large*. On pourrait dire sans trop déformer la vérité que les mathématiques présentées déductivement comme dans le traité de Bourbaki ne sont rien d'autre que *les mathématiques réduites au sens étroit*. Mais il faut tout de suite nuancer cette vue des choses. Comment procède en effet celui qui aborde un traité déductif et s'y enfonce ? Il commence par déchiffrer le texte pas à pas, en vérifiant chaque implication. Mais il ne peut pas poursuivre longtemps ce travail ingrat. Il l'interrompt fréquemment pour se donner des exemples, il s'interroge sur la marche générale de la pensée, sur ses motivations et ses moyens, il repère les passages cruciaux et les distingue des points techniques mineurs, il circule intuitivement avec de plus en plus d'aisance à travers la théorie. On peut dire en bref qu'il se construit un nouveau sens large. Et si on continue à penser que l'exposé déductif pur renvoie au sens étroit, alors le lecteur développe en quelque sorte un *sens large du sens étroit*, nourri par une *intuition des formes abstraites*. Le sens étroit, les implications considérées une à la fois, fut-ce dans le bon ordre, sont imbuvables. Tout le monde, tout mathématicien a besoin de relever la tête et de regarder en arrière et en avant, et même jusqu'à l'horizon.

Ce qui par contre s'avérera éclairant pour nous est de réaliser que les mathématiques ainsi reconstruites à partir de la théorie des ensembles *vont des structures pauvres vers les plus riches*. Qu'est-ce que cela veut dire ? Cette question mérite un développement assez long.

4 Les structures pauvres et les structures riches

Qu'est-ce qu'une structure pauvre ? Qu'est-ce qu'une structure riche ? Pour comprendre cela, regardons d'abord du côté de la géométrie, et pour la facilité, bornons-nous à la géométrie plane. Cette géométrie a pour vocation d'étudier *toutes* les figures planes, et il y en a vraiment beaucoup, d'une infinité de formes et de tailles. Il y en a tellement que l'on n'arrive à se faire une idée que d'une toute petite partie d'entre elles.

On dit d'une géométrie qu'elle est riche lorsqu'elle distingue et décrit beaucoup de types de figures différents. Et pour faire cela, elle doit bien entendu s'appuyer sur un nombre suffisant de propriétés. La géométrie habituelle, qui est aussi la *géométrie d'*Euclide , est une géométrie riche. On y étudie les propriétés d'alignement, les intersections, le parallélisme, les longueurs, les angles et leurs mesures. On y distingue les polygones des cercles, les carrés des rectangles, ceux-ci des parallélogrammes, ces derniers des trapèzes, etc. Ou plus exactement, parmi les trapèzes on distingue les parallélogrammes, parmi ceux-ci les rectangles, et parmi ces derniers les carrés.

Une géométrie un peu moins riche que celle-là porte le nom de *géométrie affine.* On y distingue moins de types de figures que dans la géométrie euclidienne, ce qui va de pair avec le fait qu'on y considère moins de propriétés. En géométrie affine, on étudie les propriétés d'alignement, d'intersection et de parallélisme, mais on ne s'intéresse pas de manière générale aux longueurs, et on ne mesure pas les angles. À cause de cela, on ne distingue plus par exemple les carrés des rectangles, ni ceux-ci des parallélogrammes : il s'agit dans tous les cas de quadrilatères possédant deux paires de côtés parallèles. Mais on distingue les parallélogrammes des trapèzes, car ces derniers peuvent n'avoir qu'une paire de côtés parallèles.

Une géométrie encore moins riche – on peut aussi dire *plus pauvre* –, que la géométrie affine est la *géométrie projective.* Dans celle-ci, on distingue encore moins de types de figures, parce que l'on s'intéresse à moins de propriétés. On ne retient plus que les propriétés d'alignement et d'intersection, et on exclut le parallélisme et a fortiori la mesure des longueurs et des angles. Dans ce cadre-là, un quadrilatère en vaut un autre, puisque la seule chose que l'on considère est le fait qu'il y ait quatre côtés qui se coupent deux à deux en quatre sommets. Par contre, on distingue bien les quadrilatères des triangles et des pentagones.

Une géométrie encore plus pauvre que ces trois premières est celle qui porte le nom de *topologie.* On ne s'y intéresse plus quasiment à aucune des propriétés que nous avons évoquées jusqu'à présent. Tout ce qui demeure est une propriété qui se trouve dans les autres géométries, mais que nous n'avons pas mentionnée encore, à savoir la continuité. En topologie, on distingue les figures *d'un seul tenant*, que l'on qualifie de connexes, et les autres. On distingue aussi les figures en boucle fermée et les autres : les carrés, triangles, rectangles, cercles, ellipses sont des boucles fermées et sont donc équivalents en topologie ; les angles, les lignes brisées ouvertes sont des figures d'un autre type. Parmi les figures en boucle fermée, on distingue aussi celles qui ne se recoupent pas de celles qui se recoupent une fois comme le chiffre 8, et de celles qui se recoupent deux fois, trois fois, etc.

Résumons-nous : de deux structures qui étudient un même ensemble d'objets, on dit que l'une est pauvre si elle s'intéresse à peu de propriétés et qu'en conséquence elle discerne peu de catégories d'objets, et on dit qu'une autre est plus riche lorsqu'au contraire elle étudie davantage de propriétés et discerne dans l'ensemble davantage de catégories d'objets[4].

5 Voir et concevoir

Les conséquences de cette distinction entre structures plus ou moins riches ou pauvres sont considérables quant à la manière d'imaginer – de « voir dans sa tête » –, et de concevoir les catégories d'objets. Si une catégorie est peu nombreuse (parce qu'elle possède de nombreuses propriétés), on y accède sans trop de peine en imagination. On se représente assez facilement tous les carrés, et même tous les rectangles possibles : l'intuition joue à plein. Par contre, si une catégorie est immensément nombreuse et ne possède qu'un tout petit nombre de propriétés, il devient impossible de la parcourir en imagination et donc, pour l'étudier de manière quelque peu sûre, on est bien forcé de se concentrer davantage sur ces propriétés et leurs conséquences logiques. Les intuitions

[4] C'est un peu comme en biologie, où tous les objets que l'on étudie sont des êtres vivants. Il faut donner davantage de caractères pour discerner les règnes végétal et animal, davantage encore pour arriver dans le règne animal aux vertébrés et invertébrés, et ainsi de suite pour décrire les reptiles, les mammifères, etc., puis les ruminants, puis les bovidés. Et donc en biologie aussi, moins il y de caractères imposés, plus la classe des êtres visés est vaste, diverse, difficile à imaginer.

globalisantes échappent et la déduction en devient plus nécessaire. Pour conclure sûrement, il faut faire plus grande la part de l'intellect, concevoir à défaut de voir. Il est par exemple beaucoup plus difficile d'imaginer l'ensemble des quadrilatères que celui des rectangles. On voit des choses sur les rectangles sans trop de risques de se tromper, alors que les quadrilatères quelconques relèvent avant tout du raisonnement.

Il faut se méfier d'une confusion possible. On pourrait croire par exemple que la topologie est une discipline simple parce qu'on y étudie peu de propriétés, et que, pour le bon sens, étudier peu de propriétés semble bien plus facile que d'en étudier beaucoup. Mais c'est là *une illusion de simplicité.* Car on ne fait pas si facilement l'impasse sur l'intuition. Celui qui, en topologie, connaît les axiomes et quelques exemples n'ira pas bien loin. Par contre celui qui a exploré longuement ces immenses catégories d'objets ayant peu de propriétés, qui dans le cours de ses réflexions peut en évoquer de toutes sortes à titre d'exemples et de contre-exemples, celui-là aura en topologie une démarche créative et critique. Nous retrouvons ici, et ce n'est pas un hasard, le sens large et le sens étroit, ainsi que l'appui qu'ils prennent l'un sur l'autre.

À la lumière de la distinction entre structures pauvres et riches, reprenons nos considérations sur les mathématiques reconstruites au XX^{e} siècle. La théorie des ensembles est la plus pauvre de toutes. Elle s'occupe de peu de propriétés, la première d'entre elles étant l'appartenance d'un objet à un ensemble. Elle ne discerne que des catégories d'objets en petit nombre et chacune immense : les intersections, les réunions, les relations, les fonctions, ... Le reste des mathématiques passe – pour le dire très schématiquement –, par la construction de trois types de structures, qualifiées de *structures mères* par BOURBAKI : ce sont les structures algébriques et topologiques et les structures d'ordre. Ce n'est pas ici le lieu de les présenter en détail. Chaque structure de l'un de ces types est définie par très peu de propriétés et couvre un champ d'objets immense, extrêmement varié, impossible à imaginer globalement, où les intuitions apportent par conséquent plus de conjectures que de convictions fortes, et où, par conséquent encore, le dernier mot revient au seul raisonnement.

Il faut ensuite avancer encore longuement dans les chaînes et les enchevêtrements de déductions pour aboutir à ces objets plus familiers, plus riches de propriétés que sont les nombres, les figures et les fonctions particulières étudiés dans l'enseignement élémentaire.

Étant donné la difficulté d'accès de l'intuition aux structures pauvres, on comprend que dans l'histoire des mathématiques, les structures riches soient apparues avant les pauvres. Celles-ci ont été le produit d'un très lent processus de clarification des dépendances logiques qui traversent les matières étudiées. Les géométries sont exemplaires à cet égard. Celle d'EUCLIDE date d'environ 300 ans avant J.-C. La projective est née au XVII^{e} siècle des travaux des peintres de la renaissance sur les représentations fidèles des objets de l'espace. La topologie s'est constituée vers le début du XX^{e} siècle pour résoudre des questions liées autant à l'analyse qu'à la géométrie.

Une observation capitale s'impose ici. On pourrait croire que l'organisation déductive globale des mathématiques n'a d'autre intérêt que d'unifier la discipline et d'assurer son fondement. Il n'en est rien. L'identification, aux XIX^{e} et XX^{e} siècles, de structures abstraites entretenant entre elles des liens fermement établis, a fourni à la pensée mathématique des outils d'une efficacité inégalée jusque-là. Dès qu'un mathématicien travaillant dans un contexte problématique donné y découvre l'existence d'une structure qui lui est familière par ailleurs, il dispose, pour avancer dans son travail de compréhension, de toutes les propriétés de cette structure.

6 Les fils conducteurs de l'enseignement jusqu'en 1980

Jusqu'ici, nous avons longuement parlé de la science mathématique. Comme on s'en rendra compte dans la suite, il fallait passer par là pour comprendre ce qu'ont été les fils conducteurs de l'enseignement des mathématiques depuis le milieu du XX^e siècle, et ce qu'ils pourraient être de nos jours.

Jusqu'aux années 60, sauf exception, on enseignait à l'école primaire l'arithmétique élémentaire et un peu – très peu –, de géométrie intuitive. On enseignait ensuite à l'école secondaire encore un peu de géométrie intuitive, puis vers 14 ans la géométrie d'EUCLIDE plus ou moins réaménagée, l'algèbre héritée du XVIII^e siècle et quelques éléments d'analyse hérités du XIX^e. À cette époque, il n'existait pas pour l'enseignement des mathématiques de fil conducteur traversant la discipline entière. Les chapitres enseignés étaient ceux qui étaient successivement montés du fond des siècles.

Dans les années 60 et 70, la réforme dite des « mathématiques modernes » a tenté une mise à jour de l'enseignement. Le fil conducteur était alors celui de la déduction qui va des ensembles, relations et fonctions aux diverses catégories de nombres, aux structures algébriques, à une géométrie algébrisée et aux débuts de l'analyse. Ce fil conducteur, proclamé par les promoteurs de la réforme, était donc celui qui va des structures pauvres vers les plus riches. Le modèle à suivre était celui du traité de BOURBAKI. L'unité de *la mathématique* devait inspirer et imprégner l'enseignement[5]. Il importait d'enseigner dès le départ *des concepts définitifs*, ceux qui appartiennent aux mathématiques d'aujourd'hui. Certes, il fallait les rendre assimilables par les enfants en en cherchant les expressions les plus simples et surtout en les illustrant de quelques exemples familiers. On considérait en tout cas comme une source de difficultés pour les élèves le fait d'ajuster un concept en cours de route pour l'adapter à de nouveaux contextes.

Ce fil conducteur était clair pour les mathématiciens qui le promouvaient, mais beaucoup moins pour une partie importante des enseignants et pour la majorité des élèves. Ainsi par exemple, du champ immense couvert par la théorie des ensembles, les élèves n'avaient accès *au départ* qu'à quelques exemples relativement insignifiants. Le sens – la foule des référents de cette théorie –, se construisait pour eux trop lentement, et donc ils ne pouvaient pas voir vers quelles applications on les menait.

D'autre part, la réforme des « mathématiques modernes » a suscité d'emblée une controverse majeure. Pour certains[6] cet enseignement devait commencer vers quatorze ans, voire plus tard. Pour d'autres, tels que PAPY et REVUZ, il pouvait commencer au début du secondaire[7]. Et même l'idée d'enseigner, dès l'école élémentaire, en allant des structures pauvres vers les plus riches, a été défendue avec force par PIAGET[8] et très largement appliquée, entre autres aux États-Unis, en Belgique et en France.

Dans les faits, la réforme des « mathématiques modernes » a été élaborée d'abord pour les classes supérieures du secondaire[9], ensuite pour le secondaire inférieur et après seulement pour l'école élémentaire. Ainsi le fil conducteur qui l'inspirait n'a pas été conçu dans l'ordre naturel des apprentissages, qui est l'ordre chronologique. Cela pose question et nous y reviendrons. On se rend compte en outre aujourd'hui que l'adaptation des « mathématiques modernes » à l'enseignement élémentaire s'est appuyée sur une collaboration insuffisante entre spécialistes des mathématiques et de l'épistémologie génétique, entre autres PIAGET[10].

[5] J. DIEUDONNÉ, membre du groupe BOURBAKI, était un promoteur éloquent de la réforme. L'un des manifestes les plus clairs de celle-ci est la préface de son ouvrage : *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, [1963]. Pour plus de développements sur les « mathématiques modernes », voir entre autres R. BKOUCHE et al. [1991] et S.M.B. [1984].

[6] Voir surtout J. DIEUDONNÉ [1963] et G. CHOQUET [1963].

[7] Voir par exemple G. PAPY [1963].

[8] Voir J. PIAGET [1947].

[9] Cf. O.E.C.E. [1961].

[10] Celui-ci n'a cessé de proclamer que les enfants acquièrent spontanément les notions de géométrie et d'arithmétique en allant des structures pauvres vers les plus riches, c'est-à-dire dans l'ordre inverse de leur découverte historique. Cette affirmation est loin d'être claire, tant est grande la distance entre les concepts mathématiques du XX^e siècle et les notions acquises par les enfants, et elle a fait l'objet d'interprétations quasi littérales.

Quoiqu'il en soit de ces difficultés d'application, l'enseignement des mathématiques suivait à l'époque un fil conducteur unique, clair et cohérent, celui de la structure déductive de la science mathématique elle-même.

7 La situation actuelle

Qu'en est-il actuellement ? Les « mathématiques modernes » n'ayant pas donné les résultats escomptés, d'autres réformes ont suivi, inspirées par d'autres idées. Aujourd'hui, et en s'en tenant aux grandes lignes, on observe du côté des matières traitées : une insistance beaucoup moindre sur les fondements (ensembles, relations, construction des systèmes de nombres) et sur les structures présentées axiomatiquement, un recentrage de l'algèbre sur les polynômes, les fonctions rationnelles et les équations des premier et deuxième degrés, un retour à la géométrie des figures accompagné d'une initiation aux vecteurs et à la géométrie analytique, un recours aux transformations, principalement planes et appliquées à l'étude des figures (plus guère de transformations étudiées pour elles-mêmes), un développement du traitement de données, en y comprenant les statistiques et probabilités, et enfin l'usage des calculatrices et, dans une mesure croissante, des ordinateurs.

Les « mathématiques modernes » ont laissé des traces dans cet enseignement. On ne retrouve plus dans celui-ci la construction d'Euclide, *qui était un fil conducteur majeur* pour la géométrie dans la première moitié du XX^e siècle. On y découvre non pas un exposé ordonné des géométries projective, affine et euclidienne, mais une conscience plus claire de la hiérarchie logique des géométries. On observe aussi un usage plus général et plus précoce des fonctions, des graphiques de fonctions et de leur interprétation, et de la géométrie analytique élémentaire. On s'accordera à reconnaître qu'il y a, dans cette évolution, beaucoup de points positifs.

Quels sont d'autre part *les principes* qui inspirent aujourd'hui la conception de l'enseignement des mathématiques et en particulier des programmes ? D'abord on essaie de cerner des « mathématiques du citoyen », ou encore une culture mathématique de base. Le danger est que cette culture soit identifiée à des mathématiques du pur quotidien. On y fait une part trop étroite aux probabilités et statistiques.

D'autre part, l'insistance se porte davantage sur des compétences que sur des connaissances, sans pour autant que ces deux notions soient conçues comme indépendantes l'une de l'autre[11]. Les compétences, entre autres pour ce qui concerne les mathématiques, sont le plus souvent la capacité de mobiliser ses connaissances à bon escient. Un effort est fait pour promouvoir cette vue équilibrée des choses. Toutefois, un effet pervers de cette « pédagogie des compétences » est qu'une partie des enseignants pensent encore développer les compétences en elles-mêmes, et parfois même une à la fois.

Enfin un vaste mouvement milite en faveur d'un enseignement par situations-problèmes, qui met en avant autant l'intuition et la créativité que la logique et la rigueur, c'est-à-dire les deux pôles de l'*activité mathématique*. Il y a d'ailleurs un lien naturel entre les compétences et les situations-problèmes, puisque les compétences fondamentales – celles qui sont constitutives de la maturité intellectuelle –, sont aussi celles qui sous-tendent la résolution de problèmes. Par ailleurs on souligne qu'on ne peut enseigner uniquement par problèmes, car il faut organiser des moments de mise en ordre et de synthèse. L'enseignement par problèmes s'avère plus difficile que les autres formes d'enseignement. Il requiert des enseignants un niveau de formation qui est loin d'être toujours atteint actuellement[12].

[11] Cf. J.-P. Cazzaro et al. [2001] et CREM [1995].

[12] Nous ne saurions trop souligner les dangers de cette situation. Sur la notion de compétence, les situations-problèmes et les mathématiques du citoyen, voir entre autres CREM [1995].

Une autre tendance de l'enseignement d'aujourd'hui est la volonté de promouvoir l'usage des moyens informatiques. L'intention est double : d'une part les machines apportent la possibilité de nouvelles explorations (par exemple des fluctuations d'échantillonnage), et d'autre part, en effectuant les tâches de routine (les calculs numériques ou formels), elles libèrent du temps pour les questions de fond.

La référence aux trois éléments clés que sont les mathématiques du citoyen, les compétences, les problèmes, montre que l'intérêt se porte aujourd'hui autant sinon davantage vers la personne de l'élève, ses capacités et son insertion sociale que vers la science mathématique comme corpus de connaissances. On dit, et c'est bien raisonnable, qu'il faut partir de l'élève et de ses connaissances, souvent plus proches du savoir commun que des mathématiques. On dit que l'élève doit *construire son savoir*, bien entendu avec toute l'aide nécessaire du professeur, et sans oublier que les mathématiques constituées, ou certains de ses chapitres, sont le terme de cette construction.

8 Que faire maintenant ?

Revenons à cette idée de partir de l'élève pour aller vers les mathématiques. C'est une idée simple et saine. Mais c'est en même temps une gageure. Car la question n'est plus, comme à l'époque des « mathématiques modernes », d'inculquer une science bien connue, mais plutôt de partir d'un savoir pour en construire un autre. Pour concevoir une ligne directrice de l'enseignement des mathématiques, il ne suffit plus de connaître les mathématiques et de s'appliquer à les exposer clairement depuis le début. Il faut d'abord être familier du savoir de l'élève et chercher par quels aménagements successifs et motivés on pourra en tirer le savoir mathématique souhaité. Dans cette optique, il n'est plus guère question d'inculquer des concepts définitifs.

Comment les choses se présentent-elles ? Le fait le plus important est que la partie du savoir de l'élève qui a vocation de donner naissance au savoir mathématique, cette partie est déjà structurée. Par exemple, lorsqu'un petit enfant réalise qu'un objet solide déplacé peut être ramené à sa position de départ, il rencontre une opération inversible, comme celles dont il est question dans la théorie des groupes. Piaget [1937] a longuement expliqué cela. Lorsque l'enfant met deux bâtonnets bout à bout, il réalise, avant toute mesure et dans le champ des seules grandeurs, une addition de deux longueurs, et cette addition est entre autres commutative. On pourrait multiplier les exemples.

Bien entendu, l'enfant ne théorise pas ces propriétés de structure. Il les vit au niveau purement sensori-moteur. Mais ces structures vécues sont néanmoins les germes d'où sortiront les mathématiques devenues plus tard conscientes et opératoires.

Un deuxième fait important est que ces structures qui sous-tendent les activités psycho-motrices des enfants ne sont que de petits morceaux, des germes des structures évoluées vers lesquelles tend l'enseignement. Mais elles préfigurent celles-ci.

La question centrale qui se pose est donc d'élaborer un fil conducteur qui parte de ces structures embryonnaires pour aboutir aux structures classiques. Pour ce faire, nous proposons dans cette étude de partir des deux opérations que les enfants acquièrent le plus spontanément : d'une part l'addition des grandeurs, première opération binaire interne, et ensuite, grâce à l'itération de la somme, la multiplication d'une grandeur par un nombre naturel, qui est une première opération binaire externe. On a là, dès les premières années de la vie, une préfiguration de la structure linéaire, celle qui exprime la proportionnalité et les phénomènes apparentés.

Partant de là, on suit, pour le dire rapidement, le chemin qui passe par les grandeurs avant toute mesure, par la mesure des grandeurs (les nombres réels positifs), puis par la mesure des grandeurs orientées (les nombres relatifs), et qui aboutit aux vecteurs et aux nombres complexes. Ce parcours n'est pas continu et ne peut pas l'être. En effet, chaque état du savoir, à un moment de la jeunesse, répond à une structure déterminée par un ensemble d'axiomes, et pour passer d'une structure à la suivante, il faut modifier cet ensemble. Or modifier un groupe d'axiomes, c'est changer ou ajouter un axiome, ce qui change brusquement le paysage. Qui plus est, au fil de la construction de ce savoir, des objets ontologiquement nouveaux apparaissent : après les grandeurs, successivement les réels positifs, les relatifs, les vecteurs. En outre, les notions de somme et de produit par un nombre mutent aussi dans le passage d'un type d'objets à un autre. Il est ainsi assez clair que l'idée d'enseigner d'emblée aux enfants des concepts définitifs est impraticable[13].

9 Pourquoi un fil conducteur ?

Nous sommes à pied d'œuvre maintenant pour répondre à la question : *pourquoi a-t-on besoin d'un fil conducteur – ou plutôt de fils conducteurs –, à travers toutes ces matières mathématiques que l'on apprend de la prime enfance à l'âge adulte ?* Les arguments nous paraissent ici simples et forts.

Après tout, et quelle que soit l'importance que l'on accorde à l'acquisition de compétences, on enseigne en classe des matières qui s'enchaînent. Ces matières s'appuient à chaque âge sur un ensemble de structures qui sont des outils de la pensée, des conditions de la compétence. La construction du savoir mathématique forme un tout que l'on souhaite, selon une heureuse expression, parcourir en suivant des spirales. Mais pour réaliser cela, il faut voir comment chaque spire s'articule à la précédente et à la suivante, et aussi d'où viennent et vers où vont ces spirales. C'est pourquoi on a besoin d'études de synthèse qui parcourent tous les niveaux scolaires.

De telles études sont difficiles et demandent des collaborations inhabituelles. Le plus souvent en effet, les recherches sur l'apprentissage des mathématiques élémentaires sont réalisées par des psycho-pédagogues qui ne connaissent pas bien le dessus de la spirale, et les recherches sur l'enseignement plus avancé sont réalisées par des mathématiciens qui en ignorent le dessous.

Qui plus est, les stratifications du système scolaire ne favorisent pas l'émergence d'une conception globale de l'enseignement. En effet, et malgré d'heureuses initiatives récentes[14], les programmes sont toujours élaborés par des commissions distinctes pour les enseignements élémentaire et secondaire, avec des coordinations insuffisantes. En outre, les enseignants des niveaux maternel, primaire, secondaire inférieur et secondaire supérieur sont toujours formés à peu près séparément. Le résultat est que bien souvent un enseignant d'un niveau donné situe difficilement son action dans l'ensemble, ignorant pour l'essentiel comment les élèves qui lui arrivent ont été formés, et ce que ceux qui le quittent vont devoir affronter.

Une vue d'ensemble de la construction mathématique telle qu'elle s'articule au savoir commun et aux autres disciplines intellectuelles est enfin un objectif proprement culturel dont on souhaiterait voir s'approcher tout enseignant, tout étudiant, tout citoyen.

[13] On objectera peut-être que les axiomes ne mutent pas dans leur expression formelle. Par exemple, l'égalité $a + b = b + a$ exprime la commutativité de la somme quels que soient a et b, grandeurs, naturels, réels positifs ou négatifs, vecteurs. Mais l'enseignement ne confine heureusement pas les esprits des élèves au champ des expressions formelles, et celles-ci ne contiennent pas tout le sens des concepts.

[14] Spécialement la promulgation, en Communauté française de Belgique, des *Socles de compétences à 14 ans.*