18.3.3 Un problème concernant la fonction exponentielle en analyse

18.3.3.1 Le contexte du test

Le test a eu lieu le jeudi 3 décembre 1998, de 8 h 50 à 10 h 30 dans une classe de sixième transition de l'école Decroly, à Uccle où, suivant l'organisation propre à l'école, se retrouvaient des élèves d'option à 2 et 4 périodes/semaine en mathématiques, avec M. Francis Michel comme titulaire du cours.

Les élèves, au nombre de vingt et un, ont été regroupés par deux (un élève d'option 2 périodes/semaine avec un élève d'option 4 périodes/semaine) ; un élève de l'option à 4 périodes/semaine a travaillé seul. La résolution du problème devait se concrétiser dans un petit rapport rédigé aussi soigneusement que possible, et remis à la fin des deux périodes consacrées à l'activité.

Le contexte mathématique du problème était celui de l'approximation affine d'une fonction exponentielle décroissante. Les élèves avaient abordé une première fois quelques modèles de croissance exponentielle dans les cours du mois de septembre et octobre, mais n'avaient pas rencontré de cas correspondants de décroissance, ni donc de situations du genre de la décroissance radioactive. Par ailleurs, la notion de fonction décroissante étant connue, le problème proposé était donc un exercice de transposition relativement élémentaire.

Les élèves pouvaient disposer de leurs cours et de leurs calculatrices ([11]). A quelques occasions, le professeur a rappelé ou précisé aux élèves ce qu'il attendait d'eux, en particulier en termes de qualité de rédaction, mais il n'a jamais fourni le moindre élément de réponse dans ses interventions. L'un d'entre nous était présent en classe durant toute la durée du test.

Dans l'ensemble, le test s'est déroulé dans une ambiance de travail satisfaisante, eu égard aux motivations assez variables des élèves vis-à-vis des mathématiques. Si le bruit de fond et le bavardage (discret) n'ont jamais été absents, et si des réactions telles que : « - J'en ai marre ! », ou : « - C'est trop compliqué ! », ont été entendues à quelques reprises, tout cela n'a pas pour autant empêché que le travail se poursuive normalement. Quelques rares essais de collaboration d'un groupe avec l'autre ont été tentés, mais M. F. Michel y a rapidement fait obstacle.

([11]) Il s'agissait généralement de calculatrices scientifiques usuelles (CASIO, TI, ...) et, dans quelques cas de calculatrices graphiques du type HP 48.

Sur les deux périodes de cours dont disposaient les élèves, on peut estimer que les trois quarts ont été occupés à la résolution proprement dite du problème, et qu'un quart a été consacré à la rédaction du rapport.

18.3.3.2 L'énoncé du problème

James Fauxbond est le meilleur agent de sécurité d'une très importante firme qui fabrique des détecteurs de radiations nucléaires. Un soir, son supérieur le convoque dans son bureau.

— James, nous avons un sérieux problème sur le dos ! J'ai l'impression qu'une espèce de réseau d'espionnage industriel s'apprête à faire sortir de l'usine les caractéristiques de notre nouveau détecteur à scintillations.

— Qu'est-ce qui vous fait croire ça, Monsieur ?

— Voilà : en vidant l'armoire d'un technicien qui vient de nous quitter précipitamment, nous sommes tombés par hasard sur trois feuilles de résultats d'expériences. Ce n'est peut-être rien, mais j'ai l'intuition que ces trois feuilles pourraient bien être extraites des résultats d'une ***même*** *expérience menée avec notre tout nouveau détecteur top secret ETAT 52 AP 53. Si c'était vrai, c'est qu'il y a probablement des fuites parmi le personnel spécialisé et il faudrait agir vite.*

— Mais, Monsieur, je ne suis pas très compétent pour ce genre de problème, et ...

— James, il n'est pas question de parler de ça aux physiciens et aux ingénieurs du groupe de recherche : s'il y a des fuites, c'est de là qu'elles proviennent, et il ne faut pas alerter ceux qui en seraient la source. Vous — et vous seul ! – devez me régler ce problème : ***est-il possible que ces trois feuilles de résultats proviennent de la même expérience, et si oui, quelles en sont les caractéristiques ?***

— Mais, Monsieur ...

— Il n'y a pas de « mais », James, j'attends votre rapport complet dans une heure ! Débrouillez-vous ! Voici les feuilles ...

Temps (jours)	Activité (impulsions/min)
138.2	502
138.6	501
139	500
139.4	499
139.8	498
140.2	497
140.6	496

Temps (jours)	Activité (impulsions/min)
0	1000
30	861
60	741
90	638
120	550
150	473
180	407
210	351
240	302
270	260

Temps (jours)	Activité (impulsions/min)
0.2	999
0.4	998
0.6	997
0.8	996
1	995

— *Et rappelez-vous, James, il me faut des certitudes, des preuves, des chiffres ! Pas d'à peu près ! La situation est trop grave !*

18.3.3.3 Un corrigé relatif

Pour faciliter le renvoi aux feuilles de données du problème, nous avons ordonné les tableaux de manière chronologique, c'est-à-dire :

tableau 1 :

Temps (jours)	Activité (impulsions/minute)
0.2	999
0.4	998
etc.	...

tableau 2 :

Temps (jours)	Activité (impulsions/minute)
0	1000
30	861
60	741
etc.	...

tableau 3 :

Temps (jours)	Activité (impulsions/minute)
138.2	502
138.6	501
etc.	...

Pour ce qui concerne les phases d'intériorisation et de condensation dans le corrigé, l'ordre dans lequel les observations sont rapportées n'est en général pas significatif. Il n'en est plus de même pour la phase de réification.

La phase d'intériorisation

L'observation de linéarité : les tableaux 1 et 3 sont associés à des phénomènes linéaires.

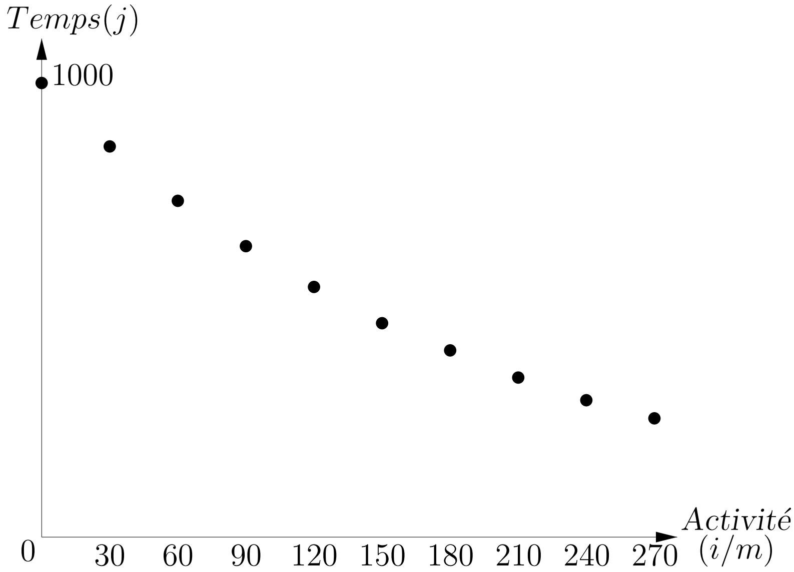
Plus précisément, sur des intervalles de temps identiques à l'intérieur de chaque tableau :

- 0,2 jours pour le tableau 1,
- 0,4 jours pour le tableau 2,

on observe des variations d'activité qui sont constantes, et valent à chaque fois -1 impulsion/minute.

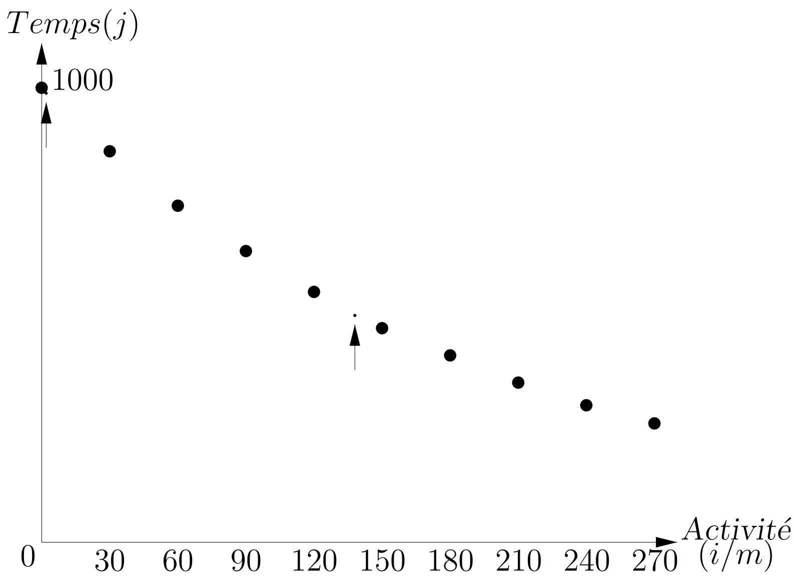
La construction des graphiques correspondant à chaque tableau : les tableaux 1 et 3 donnent lieu à des représentations graphiques qui sont des droites, ce qui n'est pas le cas du tableau 2.

Pour le tableau 2, on obtient en effet le graphique suivant :



La phase de condensation

L'observation d'insertion des graphiques : on peut insérer les positions moyennes correspondant aux tableaux 1 et 3 dans le graphique associé au tableau 2.



En particulier, on n'observe aucun « saut » dans les valeurs de l'activité lors de cette insertion.

L'observation d'approximation en termes de pentes moyennes : l'insertion graphique a un correspondant numérique en termes de pentes moyennes.

Plus précisément, le tableau 1 admet une représentation graphique sous la forme d'une droite de pente ou coefficient angulaire égal à $\frac{-1}{0{,}2} = -5$, tandis que la pente moyenne du graphe correspondant au tableau 2, sur l'intervalle de temps $[0\ ;\ 30]$, vaut $\frac{-139}{30} = -4,6333\ldots$. Ces deux valeurs de pente moyenne sont relativement proches.

Pareillement, le tableau 3 admet une représentation graphique sous la forme d'une droite de pente ou coefficient angulaire égal à $\frac{-1}{0{,}4} = -2,5$, tandis que la pente moyenne du graphe correspondant au tableau 2, sur l'intervalle de temps $[120\ ;\ 150]$, vaut $\frac{-77}{30} = -2,5666\ldots$. Ces deux valeurs de pente moyenne sont encore une fois relativement proches ([12]).

L'observation de distinction de linéarité : les tableaux 1 et 3 ne peuvent pas être associés au même phénomène linéaire.

La raison en est simple : la variation d'activité est la même dans chacun de ces tableaux, alors que l'intervalle de temps sur lequel on la mesure n'est pas le même.

L'observation de non-linéarité : le tableau 2 ne peut pas être associé à un phénomène linéaire.

En effet, sur des intervalles de temps identiques de 30 jours, la variation d'activité n'est pas constante.

Temps (jours)	Δt (jours)	Activité (imp./m)	Δ Act. (imp./m)
0		1000	
30	30	861	-139
60	30	741	-120
90	30	638	-103
120	30	550	-88
150	30	473	-77
180	30	407	-66
210	30	351	-56
240	30	302	-49
270	30	260	-42

On peut ajouter que la variation d'activité elle-même n'est pas linéaire et, plus généralement, qu'aucune variation d'ordre quelconque de cette activité n'est linéaire.

([12]) Ces approximations pourraient voir leur portée quelque peu précisée en raisonnant en terme de concavité de la « courbe » représentative des valeurs du tableau 2.

t (j.)	Δt (j.)	A (i./m)	Δ A (i./m)	Δ^2A …	Δ^3A	Δ^4A	Δ^5A	Δ^6A	Δ^7A	Δ^8A
0		1000								
30	30	861	-139							
60	30	741	-120	19						
90	30	638	-103	17	-2					
120	30	550	-88	15	-2	0				
150	30	473	-77	11	-4	-2	-2			
180	30	407	-66	11	0	4	6	8		
210	30	351	-56	10	-1	-1	-5	-11	-19	
240	30	302	-49	7	-3	-2	-1	4	15	34
270	30	260	-42	7	0	3	5	6	2	-13

L'observation des rapports constants : dans le tableau 2, le rapport entre deux résultats d'activité successifs est approximativement constant.

On convient désormais de noter $A(t)$ l'activité mesurée, en impulsions/minute, à l'instant t mesuré en jours.

t	$A(t)$	rapport $\frac{A(t+30)}{A(t)}$	valeur arrondie du rapport
0	1000		
30	861	0,861	0,861
60	741	0,8606271777 …	0,861
90	638	0,8609986505 …	0,861
120	550	0,8620689655 …	0,862
150	473	0,86	0,86
180	407	0,8604651163 …	0,86
210	351	0,8624078624 …	0,862
240	302	0,8603988604 …	0,86
270	260	0,8609271523 …	0,861

Dans la suite, on note

$$c \ := \ 0,861$$

la valeur retenue de ce rapport constant entre deux valeurs successives de l'activité.

L'observation troublante : dans les tableaux 1 et 3, le rapport entre deux résultats d'activité successifs pourrait éventuellement être assimilé à une constante . . .

Cette observation provient de la volonté de disposer pour tous les tableaux d'informations comparables, mais à ce stade-ci de l'investigation, elle n'est peut-être plus très naturelle. Néanmoins, les valeurs numériques obtenues sont — à première vue — troublantes, en ce qu'elles sont très proches l'une de l'autre . . .

t	$A(t)$	rapport $\frac{A(t+0,2)}{A(t)}$
0.2	999	
0.4	998	0,998998998...
0.6	997	0,998997996...
0.8	996	0,998996991...
1	995	0,9989959839...

t	$A(t)$	rapport $\frac{A(t+0,4)}{A(t)}$
138.2	502	
138.6	501	0,9980079681...
139	500	0,998003992...
139.4	499	0,998
139.8	498	0,997995992...
140.2	497	0,9979919679...
140.6	496	0,9979879276...

En fait, la comparaison des deux tableaux tels qu'ils sont repris ici, n'a pas beaucoup de sens, puisque les échelles de temps ne sont pas les mêmes. Une remarque analogue s'appliquerait à une comparaison avec le tableau reproduit plus haut, tiré de l'observation des rapports constants.

Mais on doit surtout remarquer que, la linéarité paraissant évidente pour chacun de deux tableaux précédents, le rapport entre deux résultats d'activité successifs ne saurait alors jamais être véritablement constant, puisque l'équation qui en résulterait : $\frac{A}{A-1} = \frac{A-1}{A-2}$ serait impossible.

Une première conclusion

De toutes les observations et constructions qui précèdent, on peut dégager une réponse qualitative à la première question, réponse fondée essentiellement sur : la construction des graphiques correspondant à chaque tableau, l'observation d'insertion des graphiques et l'observation d'approximation en termes de pentes moyennes.

Cet ensemble d'observations plaide pour que les trois feuilles de résultats proviennent bien de la même expérience.

Il reste bien sûr à intégrer toutes les autres observations à cette proposition de réponse. C'est un travail plus spécifiquement calculatoire, qui va être réalisé dans la phase de réification ci-après.

Enfin, et en guise de résumé, le diagramme n^o 1 structure toutes les observations déjà relevées ; la ligne pointillée y sépare la phase d'intériorisation de la phase de condensation. La progression du haut vers le bas peut être interprétée en terme de complexité croissante dans la combinatoire des éléments qui fondent les observations.

La phase de réification

Une interprétation de l'observation des rapports constants : cette observation permet d'obtenir une première expression analytique de la fonction qui décrit l'activité, en accord avec les résultats du tableau 2.

Si T est un multiple de 30, l'observation des rapports constants s'écrit :

$$\frac{A(T+30)}{A(T)} = 0,861$$

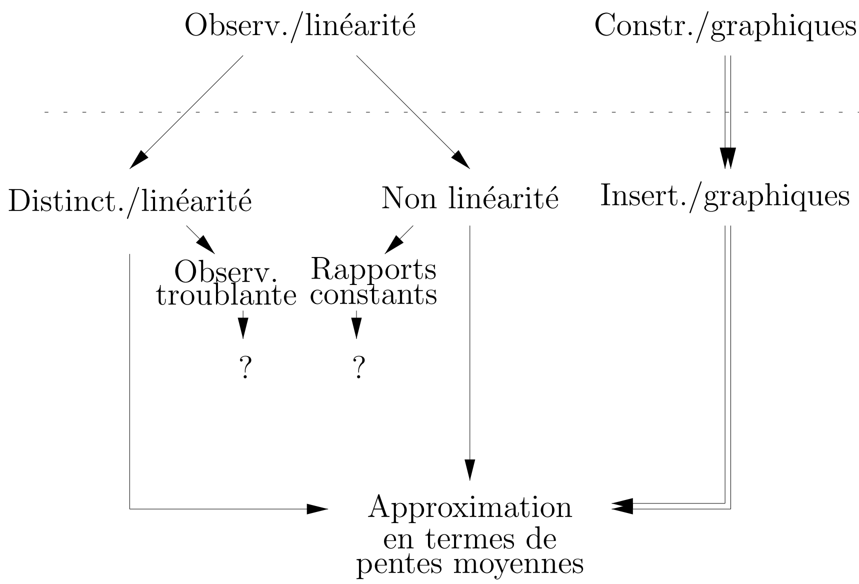


Diagramme nº 1

On en déduit, si n est un nombre entier quelconque :

$$A(T + 30 \cdot n) = 0,861^n \cdot A(T)$$

En vue de s'accorder au tableau 2, cette expression devient $A(30 \cdot n) = 0,861^n \cdot A(0)$, c'est-à-dire

$$A(30 \cdot n) = 1000 \cdot 0,861^n$$

Une comparaison détaillée entre les valeurs fournies et celles que l'expression analytique permet de calculer, illustre le degré de précision de cette expression.

$30 \cdot n$ (jours)	Activité (impulsions/minute)	$A(30 \cdot n)$ (impulsions/minutes)
0	1000	1000
30	861	861
60	741	741,32
90	638	638,27
120	550	549,55
150	473	473,16
180	407	407,39
210	351	350,76
240	302	302,01
270	260	260,03

L'accord de ce modèle avec les changements d'échelles : un changement de variable permet de décrire les trois tableaux de résultats à partir d'une même expression analytique de la fonction $A(t)$.

Si on pose $30 \cdot n = t$ dans l'expression analytique précédente, c'est-à-dire si on y fait le changement de variable $n = \frac{t}{30}$ où t est toujours exprimé en jours, on obtient :

$$A(t) = 1000 \cdot 0,861^{\frac{t}{30}} = 1000 \cdot \left(0,861^{\frac{1}{30}}\right)^t$$

On calcule

$$0,861^{\frac{1}{30}} = 0,9950237304\ldots$$

qu'on arrondit à 0,995. On obtient ainsi une formule qui permet de calculer l'activité $A(t)$ à un instant t quelconque :

$$A(t) = 1000 \cdot 0,995^t$$

A nouveau, une comparaison détaillée entre les valeurs fournies dans les tableaux 1 et 3, et celles que l'expression analytique permet de calculer, illustre le degré de précision obtenu.

t (jours)	Activité (imp./m)	$A(t)$ (imp./m)
0.2	999	999
0.4	998	998
0.6	997	997,01
0.8	996	996,01
1	995	995,02

t (jours)	Activité (imp./m)	$A(t)$ (imp./m)
138.2	502	501,85
138.6	501	500,85
139	500	499,85
139.4	499	498,86
139.8	498	497,86
140.2	497	496,87
140.6	496	495,88

Mais une telle comparaison suggère aussi que la linéarité observée au départ dans ces tableaux devient maintenant relativement « idéale ». En fait, ce seraient les arrondis qui auraient créé la linéarité ...

Une interprétation de l'observation troublante : l'expression analytique de la fonction $A(t)$ en fournit une explication raisonnable.

En effet, on obtient

$$\frac{A(t+0,2)}{A(t)} = \frac{1000 \cdot 0,995^{t+0,2}}{1000 \cdot 0,995^t} = 0,995^{0,2} = 0,9990\ldots$$

Ce rapport est donc bel et bien constant, c'est-à-dire indépendant de t. Cette propriété compense en quelque sorte le défaut de linéarité qui résulte de l'adoption générale de la fonction $A(t)$ pour décrire l'activité.

On obtient pareillement, dans le cas du tableau 3 :

$$\frac{A(t+0,4)}{A(t)} = \frac{1000 \cdot 0,995^{t+0,4}}{1000 \cdot 0,995^t} = 0,995^{0,4} = 0,9980\ldots$$

La conclusion est complètement analogue.

Et l'observation — troublante au départ — devient maintenant tout à fait compréhensible !

Conclusions générales

A la lumière de cette longue discussion, on peut raisonnablement affirmer que les trois feuilles de résultats proviennent bien de la même expérience, et que les principales propriétés observées à cette occasion s'expliquent à partir de la seule expression analytique de l'activité $A(t)$ sous la forme

$$A(t) = 1000 \cdot 0,995^t$$

où t est exprimé en jours, et $A(t)$ en impulsions/minute.

Les réserves que l'on peut être tenté de maintenir dans cette conclusion justifient que le problème soit qualifié d'« ouvert ». On dispose en effet d'une solution qui tient compte de toutes les observations, y compris de celles qui paraissaient troublantes. Mais rien ne permet de savoir *a priori* si la réponse proposée est correcte. **Seule la cohérence de l'argumentation permet de se faire une opinion !**

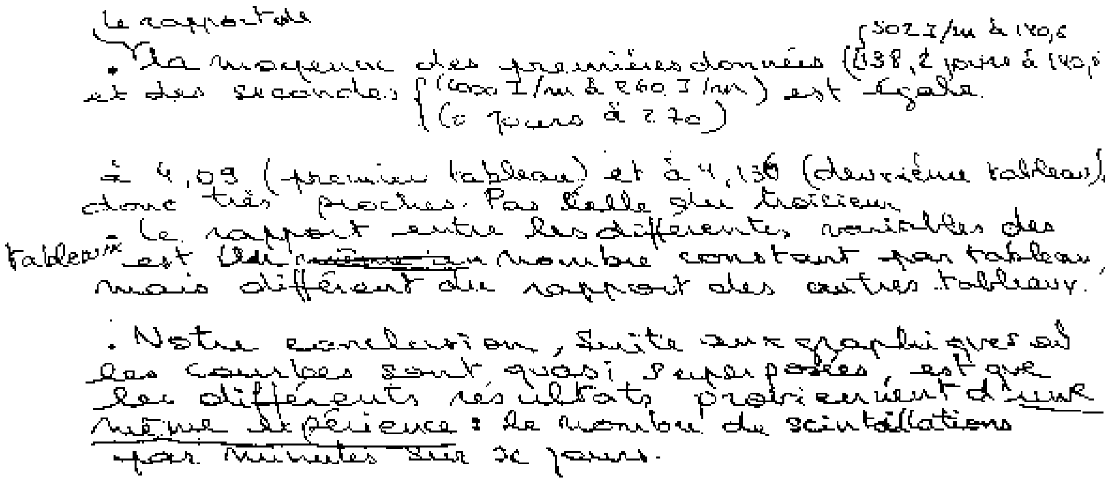
Ce dernier critère permet souvent de détecter le caractère « ouvert » d'un problème.

18.3.3.4 La grille de lecture : son contenu particularisé au problème, et quelques exemples

Une grille de lecture.

Le corrigé relatif suggère de construire une grille de lecture qui s'attache à relever les éléments suivants,

- pour la phase d'intériorisation :
  - les types de calculs (numériques, algébriques, ...) effectivement présents, ou évoqués,
  - les types de représentations graphiques effectivement présentes, ou évoquées ;
- pour la phase de condensation :
  - les observations réalisées, en essayant de les relier à celles énumérées dans le corrigé relatif ;
- pour la phase de réification :
  - les relations explicitées entre les observations réalisées,
  - la structuration logique de la conclusion.


Le rapport de
• ~~La~~ moyenne des premières données (138,2 jours à 140,6) (502 I/mn à 140,6)
et des secondes (1000 I/mn à 260 I/mn) (0 jours à 270) est égale
à 4,09 (premier tableau) et à 4,136 (deuxième tableau), donc très proches. Pas celle du troisième.
• Le rapport entre les différentes variables des tableaux est un nombre constant par tableau, mais différent du rapport des autres tableaux.
• Notre conclusion, suite aux graphiques où les courbes sont quasi superposées, est que les différents résultats proviennent d'une même expérience : le nombre de scintillations par minutes sur 30 jours.

Copie n° 7

Quelques exemples.

Le déroulement de l'expérience a privilégié la recherche d'une solution au problème sur la production d'un rapport. Les commentaires sur les copies sélectionnées concernent donc aussi les brouillons [13] préliminaires, souvent très intéressants et plus fouillés que ces rapports.

Les extraits de copies d'élèves présentés ci-après sont — une dernière fois — l'occasion de quelques commentaires relatifs à la grille de lecture et à sa pertinence.

Une copie difficile.

La copie n° 7 et les brouillons qui l'accompagnent renferment des calculs « incantatoires [14] » : moyennes (et les moyennes en jours sont transformées en minutes, ...), quotient de l'activité par le temps, activité transformée systématiquement en impulsions/jours, ... La conclusion du rapport est exprimée sous une forme d'apparence argumentée, mais en dehors de cela, le rapport est difficile à interpréter. Il ne nous semble pas évident que la phase d'intériorisation ait été atteinte, au sens où les données mêmes du problème ne paraissent pas bien comprises.

Une copie intéressante.

On relève dans les brouillons associés à la copie n° 8 des calculs de différences finies poussés jusqu'au troisième ordre.

[13] La qualité de ces brouillons, trop mauvaise en vue d'une reproduction, n'a pas permis de les insérer ici.

[14] Nous appelons ainsi les calculs qui ne semblent être présents dans les copies que pour donner l'illusion d'un habillage mathématique, sans avoir aucune relation sensée avec le problème.

- La croissance de B et C est constante
- Plus le temps augmente, plus l'activité
diminue.
- Si on trouve le rapport entre l'activité/
minute et le temps, il sera normalement
possible de trouver la réponse.
- Sur les graphiques :
↳ le A forme une parabole
↳ le B et le C forment une droite
Il serait donc possible que le A ne
fasse pas partie de la même expérience
que le B et le C.
- Nous avons pensé calculer la pente
de chaque graphique.
⚠ pas eu le temp de le faire

Copie n° 8

Tous les graphiques présents dans ces brouillons sont ceux du temps considéré comme fonction de l'activité. Les droites qui correspondent aux tableaux 1 et 3 sont correctement représentées, le graphique correspondant au tableau 2 est assimilé à une parabole.

La construction des graphiques correspondant à chacun des tableaux est présenté dans les brouillons. Les calculs de différences finies et les droites associées au tableaux 1 et 3 indiquent que les observations de linéarité, de distinction de linéarité et de non-linéarité ont été faites. Les phases d'intériorisation et de condensation semblent donc bien maîtrisées.

Quelques éléments propres à la phase de réification apparaissent : la conclusion est exprimée sous une forme argumentée, mais les liens entre les arguments sont peu explicités.

Une copie qui va loin ...

On retrouve dans les brouillons de la copie n° 9 des calculs de pentes relatifs aux droites associées aux tableaux 1 et 3, ainsi que des calculs de différences finies relatifs au tableau 2 et ce, jusqu'au deuxième ordre.

Il est tout à fait probable que ce 3 feuilles de résultats
proviennent de la même expérience _ EXPLICATIONS :
Dans le tableau (b), la ~~variation~~ diminution de
l'activité n'est pas constante alors que dans le (a) et
le (c) est l'est _ Cela est dû au fait que dans le
tableau (a) & (c) la variation de temps est trop courte
que pour observer une irrégularité dans la dimi-
nution de l'activité
Pour prouver cela, nous avons d'abord tracé la
courbe du tableau (b) et nous avons observé si les
points du tableau (a) & (c) se trouvaient sur cette
courbe. Comme il y avait 1 certain manque de
précision, nous avons tracé la pente des droite (a) & (c)
qui correspondaient bien ~~à la~~ aux tangeantes de
la courbe (b)
Il y a sûrement moyen d'y arriver par calcule
mais nous n'avons pas eu le temps

Copie n° 9

Des graphes du genre droite et courbe sont esquissés dans ces brouillons, et associés aux tableaux correspondants ; ils sont fournis comme graphes de l'activité en fonction du temps. Un dessin assez soigné du temps considéré comme fonction de l'activité comporte aussi des tracés approximatifs de tangentes aux points utiles. Aucune équation de ces lignes n'est présente.

L'observation de linéarité, la construction des graphiques correspondants à chaque tableau, les observations d'insertion des graphiques, de distinction de linéarité, de non-linéarité sont présentes dans le rapport ou dans les brouillons, ainsi que l'assimilation d'une pente sur un intervalle de temps assez petit à une (pente de) tangente. Les phases d'intériorisation et de condensation sont donc quasiment achevées.

Quant à la phase de réification, des éléments encourageants sont présents : la conclusion repose sur une argumentation relativement valable, même si les justifications sont presque exclusivement qualitatives.

18.3.4 Quelques conclusions (provisoires)

Tant dans l'amorce d'une analyse théorique des questions d'évaluation qu'à travers les expériences résumées ci-dessus, il semble bien que le découpage en trois phases de la résolution d'un problème peut présider à la mise au point d'un corrigé relatif, et fournir une grille de lecture des productions d'élèves.

En se limitant aux problèmes considérés, il est rare que la phase d'intériorisation ne soit pas atteinte. La phase de condensation est celle dont le niveau de développement est — assez naturellement — le plus variable. La phase de réification n'est quasiment jamais achevée, même si dans certains cas, des éléments déterminants soient solidement présents.