Chapitre 14

Initiation aux probabilités

Le texte suivant relate l'expérimentation dans des classes de cinquième année de l'enseignement général (6 heures de mathématique par semaine) d'un cours d'introduction aux probabilités. Nous tenons à remercier ici Messieurs Pierre Lepourcq et Paul Dechamps (respectivement désignés par LP et DP dans la suite) de nous avoir ouvert les portes de leur classe.

La séquence ayant servi de support au cours est reproduite en fin de chapitre. Elle a été distribuée aux élèves de LP sous forme de photocopies. Chez DP, les élèves ont dû prendre note. Le compte-rendu ne mentionne que les remarques et observations dignes d'intérêt. Les intitulés qui y figurent renvoient le lecteur aux sections homonymes de la séquence.

14.1. Compte-rendu de l'expérience

14.1.1 Expérience 1

14.1.1.1 Temps consacré

- DP : 1 séance
- LP : 1 séance

14.1.1.2 Remarques et observations

- Les élèves prétendent qu'il y a une chance sur deux d'avoir pile *parce qu'il y a deux possibilités*. Après que le professeur ait donné des contre-exemples (roue coloriée, ...), les élèves se rendent compte de leur erreur. Ils voient que sur 1000 lancers, on n'aura pas exactement 500 fois « pile » et 500 fois « face », mais qu'on va s'en rapprocher.

  Les élèves parviennent à établir la formule :

  $$\text{pourcentage de succès} = \frac{\text{nombre de succès}}{\text{nombre d'expériences}} \cdot 100$$

  Quelques-uns ont, à ce niveau, encore un peu de mal à comprendre la notion de fréquence. Plus précisément, ils pensent que la fréquence doit se calculer par paquets de 5 lancers indépendamment des lancers successifs.

  Cependant, un élève dit :

  > *Ce ne sont pas 5 lancers en plus qui changeraient de manière significative le pourcentage trouvé.*

  tandis qu'un autre fait remarquer que les fréquences obtenues se rapprochent de 50%.

- L'idée que tout le monde devrait obtenir le même intervalle après 50 expériences est fortement ancrée, mais tout le monde comprend vite que ce n'est pas le cas.

  Il est clair dans tous les esprits qu'au fur et à mesure de l'avancement de l'expérience, cet intervalle se reserre autour de la fréquence finale en partant, au début de l'expérience, de $[0, 100]$.

  La morphologie du diagramme permet de vite se rendre compte de la raison pour laquelle les intervalles successifs obtenus sont emboîtés et de plus en plus petits.

- En ce qui concerne la figure 14.2 (voir la séquence reproduite en fin de chapitre), certains élèves graduent leur intervalle de 0 à $0,8$ en invoquant qu'aucune des fréquences calculées n'est hors de cette fourchette. D'autres graduent de 0 à 1 en justifiant qu'une fréquence est, par définition, toujours comprise entre ces deux valeurs extrêmes. Les premiers en sont toujours à l'intériorisation du problème (première phase de Sfard), tandis que les seconds ont atteint la phase de condensation.

  Intériorisation et condensation

  Un élève pense même à construire la parallèle à l'axe des abscisses d'ordonnée $0,5$ pour bien mettre en évidence les oscillations de la fréquence autour de $0,5$.
- Pour exprimer la probabilité de succès en fonction de la fréquence, les élèves suggèrent de faire tendre le nombre d'expériences vers l'infini :

$$\mathbb{P}(\text{succès}) = \lim_{n\to+\infty} (\text{fréquence de succès après } n \text{ expériences})$$

14.1.2 Expérience 2

14.1.2.1 Temps consacré

- DP : 1 séance
- LP : $\frac{3}{4}$ séance

14.1.2.2 Remarques et observations

Avant l'expérience, la plupart des élèves pensent que les probabilités de succès et d'échec valent toutes deux $\frac{1}{2}$. Les autres élèves pensent qu'il n'en n'est rien mais sans pouvoir expliquer pourquoi et sans quantifier les probabilités.

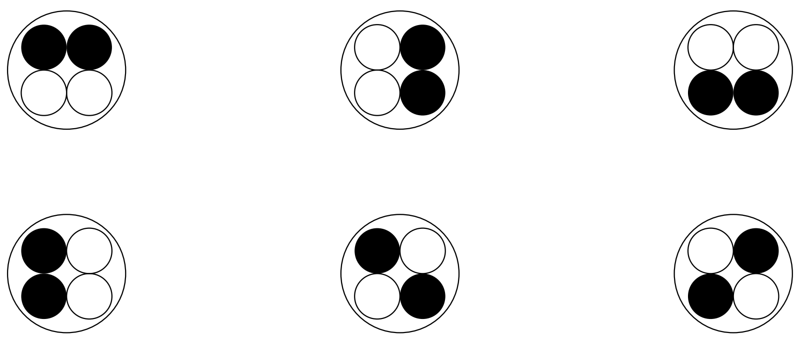
Conjecturer

Une fois les petits cylindres distribués, les élèves reportent leurs résultats sur le diagramme succès-échec. Un élève dit : *on gagne plus souvent qu'on ne perd, et pourtant il n'y a que deux possibilités !*

Un autre élève (qui pensait au début que $\mathbb{P}(\text{succès}) = \mathbb{P}(\text{échec}) = \frac{1}{2}$) n'admet pas ces valeurs et pense qu'on finirait par obtenir environ 50% si on répétait l'expérience suffisamment longtemps.

Les élèves s'interrogent et voient que les résultats tournent autour de 70% de succès. Le professeur fait remarquer qu'avec les pièces, on connaissait la probabilité à l'avance. Ici, était-il possible de prévoir le résultat ?

Un volontaire se présente au tableau et dessine les 6 configurations suivantes :



Il conclut que 4 configurations sur les 6 sont gagnantes, et que la réponse correcte est donc de 66%.

14.1.3 Expérience 3

14.1.3.1 Temps consacré

- DP : $\frac{1}{2}$ séance
- LP : $\frac{1}{2}$ séance
  Les élèves de LP ont eu à préparer l'exercice à domicile.

14.1.3.2 Remarques et observations

Dans le cas du « pile ou face », on pouvait prévoir grâce à la symétrie de la pièce, tandis que dans le cas du cylindre, la prédiction était possible en représentant tous les cas.

Pour le lancer de la punaise, les élèves comprennent que seule l'expérience permet de connaître la probabilité (prédiction impossible, ou en tous cas très difficile).

14.1.4 Le problème bien ciblé

14.1.4.1 Temps consacré

- DP : $\frac{1}{2}$ séance
- LP : $\frac{2}{3}$ séance

14.1.4.2 Remarques et observations

Les probabilités pour les 5 premières roues sont trouvées sans problème. LP demande en plus des questions posées la probabilité de tomber entre deux zones. Un élève répond :

C'est possible, mais peu probable !

Puis vient la question de la roue partagée en trois zones. Notons qu'ici, les élèves de DP ont eu à résoudre le problème avec trois secteurs de même amplitude.

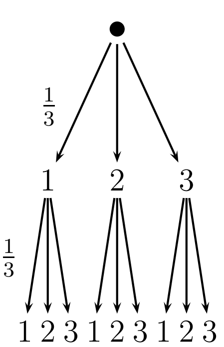
A la deuxième question, les élèves transforment naturellement le « ou » en « + ». LP ajoute que le « ou » correspond à ne pas avoir fait de séparation entre les deux zones. Le calcul de la probabilité de la troisième zone voit naître deux stratégies :

- complémentarité avec les deux autres zones (la somme doit faire $\frac{12}{12}$)
- même méthode que pour les deux autres zones (et on calcule alors $\frac{150}{360}$)

Les élèves comprennent immédiatement que les deuxième et troisième questions sont équivalentes.

La notion d'arbre n'est naturelle pour personne et doit être introduite « artificiellement » par les professeurs :

- Chez DP, on cherche $\mathbb{P}(1\ 1)$, et le professeur fait un dessin avec ses élèves :

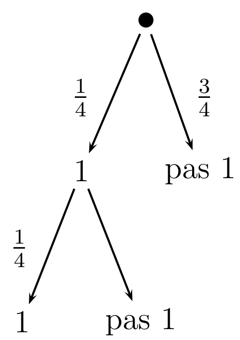


La feuille représente « le tiers du tiers », à savoir $\frac{1}{9}$. DP tire alors des élèves la multiplication des probabilités le long d'un chemin. Les élèves modélisent eux-mêmes la question 7 de la façon suivante :

$$\mathbb{P}(1\ 2 \text{ ou } 2\ 1) = \mathbb{P}(1\ 2) + \mathbb{P}(2\ 1) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

DP remarque que l'on aurait pu se contenter de dessiner les chemins utilisés.

- Les élèves de LP proposent des réponses éclectiques à la question 5. A cette occasion, LP fait une digression pour introduire la loi du produit. Dans un premier temps, il envisage deux lancers successifs d'une pièce tout d'abord truquée, puis non truquée. Il s'aide d'arbres et fait notamment construire :



14.1.5 En selle !

14.1.5.1 Temps consacré

- DP : $1,25$ séance
- LP : 2 séances

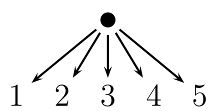
14.1.5.2 Remarques et observations

Ce problème s'est avéré plus délicat que nous ne l'avions prévu. En observant les réactions des élèves de DP, nous avons été amenés à affiner notre séquence. Les modifications portent sur la manière de passer d'un arbre complet à un arbre concis.

Conséquemment, les élèves de LP ont eu l'occasion de se livrer plus tôt à ce genre d'exercice (voir l'arbre du *problème bien ciblé*).

Chez DP

Très peu d'élèves dessinent un arbre. Cependant, certains commencent à écrire toutes les combinaisons possibles de 5 chevaux, mais abandonnent et passent vite à un arbre complet. Peu à peu, les élèves se mettent tous à dessiner ceci :



sans bien en comprendre le sens (notamment celui de la racine).

Ils poursuivent le dessin de l'arbre complet et trouvent assez rapidement les probabilités suivantes :

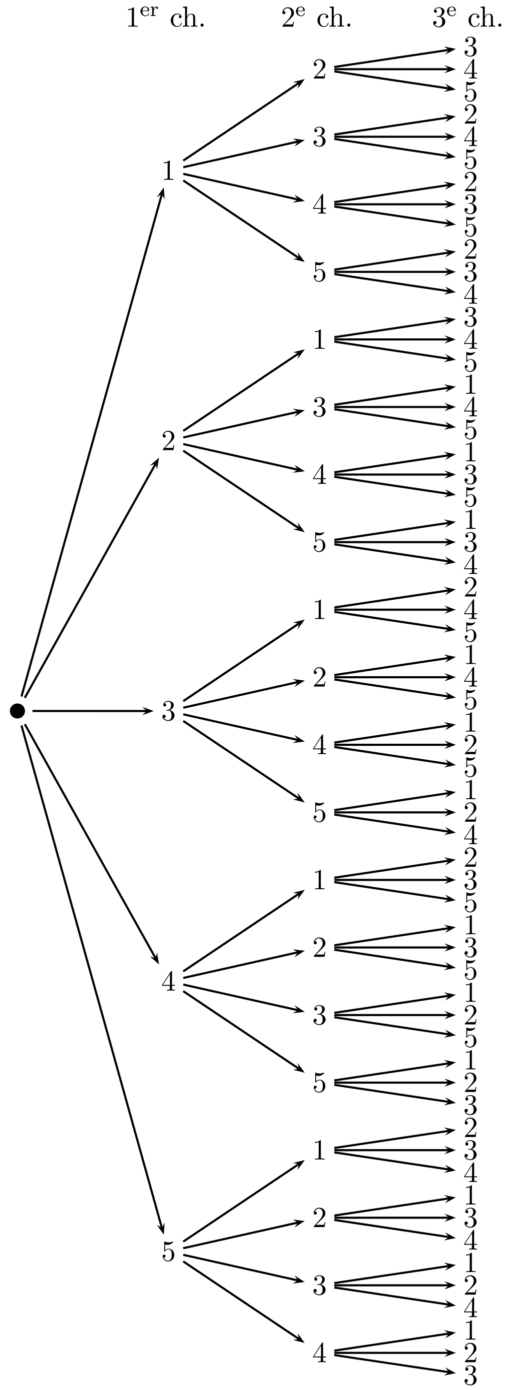
- $\frac{1}{5}$ pour que le cheval n°1 arrive en premier lieu,
- $\frac{1}{4}$ pour que le cheval n°2 arrive en deuxième lieu dans le cas où le n°1 est arrivé premier,
- $\frac{1}{3}$ pour que le cheval n°3 arrive en troisième lieu dans le cas où le n°1 est arrivé premier et où le n°2 est arrivé deuxième.

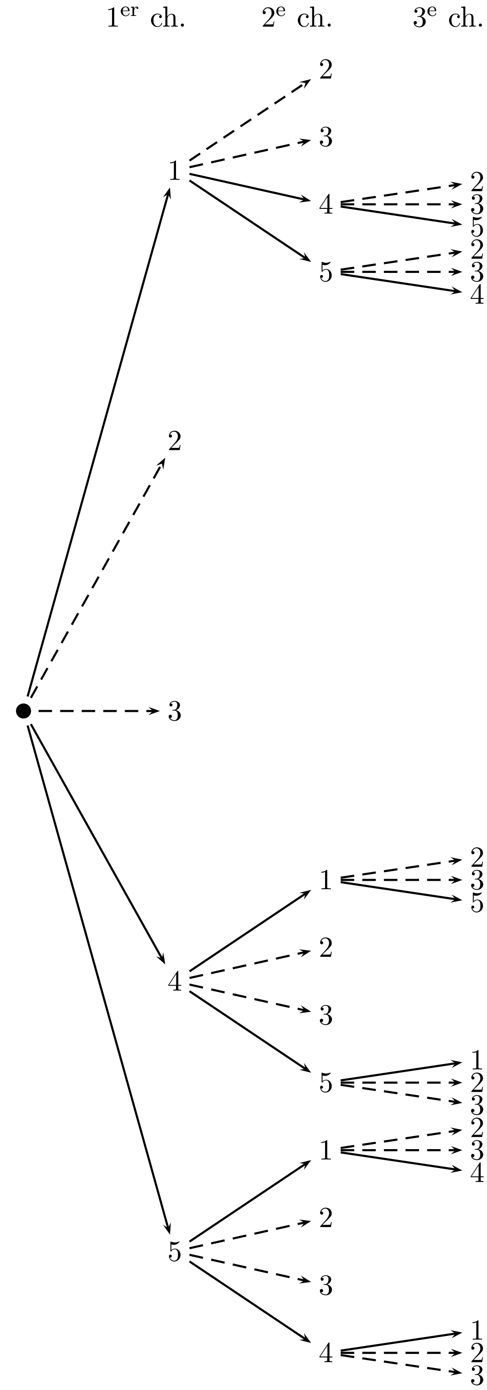
Ils remarquent après hésitations que $\mathbb{P}(1,2,3) = \mathbb{P}(2,4,1) = \cdots = \frac{1}{60}$.

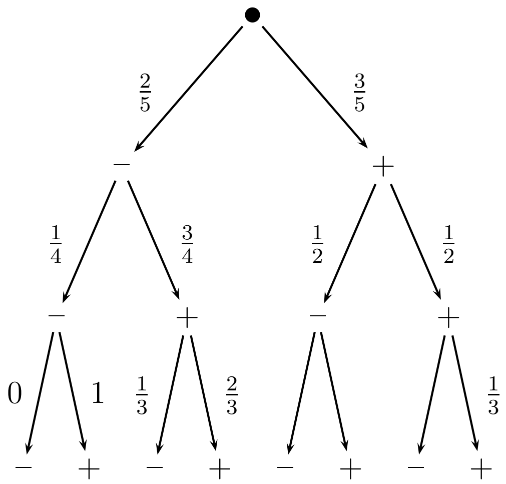
En ce qui concerne le tiercé dans le désordre, DP précise que seule la partie utile de l'arbre mérite d'être employée. Un élève trouve assez vite $\frac{1}{10}$ mais sans arbre, en écrivant toutes les combinaisons possibles de 1, 2 et 3.

$$\mathbb{P}(123, 132, \cdots, 321) = \mathbb{P}(123) + \mathbb{P}(132) + \cdots + \mathbb{P}(321) = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$$

On en revient alors aux arbres. Les configurations suivantes sont données par DP :







Une fois l'arbre dessiné, les élèves ont bien du mal a calculer les probabilités sur chacune des branches !

DP fait remarquer que seule la probabilité du chemin de droite nous intéresse.

$$\mathbb{P}(123 \text{ dans le désordre}) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

Cette partie du cours laisse des élèves perplexes.

Chez LP

Un seul élève tente de dessiner un arbre concis ! Tous les autres travaillent tous sur des arbres complets (beaucoup commettent la faute de garder les cinq chevaux à chaque étage).

Remarquons que pour calculer la probabilité du tiercé 3-2-5 dans l'ordre, un élève cherchait cette séquence dans les feuilles de son arbre (les feuilles sont regroupées en triplets, et il espérait trouver la séquence dans l'ordre parmi ces triplets).

Les élèves progressent dans la résolution du problème, mais ils se dégagent difficilement de l'arbre complet. Beaucoup d'élèves n'aiment pas la méthode concise, et certains la comprennent péniblement :

Si on fait une petite erreur, tout tombe à l'eau.

Une élève se demande comment on peut s'en sortir avec plus de chevaux.

14.1.6 Une première synthèse

14.1.6.1 Temps consacré

- DP : $1,5$ séance
- LP : $\frac{3}{4}$ séance

14.1.6.2 Remarques et observations

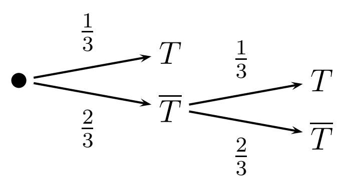
Le problème des multiples de 3

Il est à remarquer que les élèves n'ont pas encore le réflexe de construire des arbres concis.

Ils ont également éprouvé des difficultés à comprendre que l'événement contraire de TT n'est pas $\overline{T}\,\overline{T}$.

Un élève de LP est surpris que la somme des probabilités des événements représentés par des feuilles soit égale à 1.

LP donne le complément d'informations et dessine l'arbre suivant :



Il explique qu'ici aussi, la somme des probabilités des feuilles vaut 1.

14.1.7 Wilgame

14.1.7.1 Temps consacré

- DP : $\frac{1}{2}$ séance
- LP : $1,5$ séance

14.1.7.2 Remarques et observations

La partie la plus intéressante de la résolution de ce problème est la première question. Nous ne nous intéresserons qu'à celle-là. La manière de l'aborder ayant été fondamentalement différente dans les deux classes, nous avons jugé bon d'en faire deux récits distincts.

__**Chez DP**__

Un arbre concis est construit et les conventions suivantes sont prises :

- l'événement « la boule tirée fait partie des cases cochées » est noté O,
- l'événement « la boule tirée ne fait pas partie des cases cochées » est noté N.

Les élèves travaillent d'eux-mêmes. Pour le rang 1, l'arbre suivant apparaît très vite :

$$\begin{array}{ccccc} & 1^{\text{er}}\text{ tirage} & 2^{\text{e}}\text{ tirage} & 3^{\text{e}}\text{ tirage} & 4^{\text{e}}\text{ tirage} \\ \bullet & \xrightarrow{\frac{1}{3}} O & \xrightarrow{\frac{2}{7}} O & \xrightarrow{\frac{3}{13}} O & \xrightarrow{\frac{1}{6}} O \end{array}$$

Cependant, la probabilité de $\frac{1}{3}$ sur la première branche n'est pas claire pour tout le monde.

$$\mathbb{P}(\text{rang } 1) = \mathbb{P}(O\ O\ O\ O) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{273} = \frac{11}{3003}$$

Par analogie avec le rang 1, les élèves croient tous que seul *un* chemin est gagnant au rang 2. Ils se rendent compte, après réflexion, que quatre chemins sont intéressants.

Les autres probabilités sont calculées sur le même modèle.

Après ce problème, DP a soumis ses élèves à une interrogation que nous analysons au chapitre 19.

Chez LP

Probabilité de gagner au rang 1

Les élèves aidés de LP construisent l'arbre suivant dans lequel G et $\overline{G}$ désignent respectivement des numéros gagnant et non gagnant. Le $\overline{G}$ est admis après discussion — la plupart des élèves avaient considéré que le numéro subsidiaire était gagnant. Le calcul des probabilités s'effectue sans peine.

$$\bullet \xrightarrow{\frac{4}{15}} G \xrightarrow{\frac{3}{14}} G \xrightarrow{\frac{2}{13}} G \xrightarrow{\frac{1}{12}} G \xrightarrow{\frac{11}{11}} \overline{G}$$

La probabilité de l'événement représenté vaut $\frac{11}{15015}$. Une discussion s'engage alors pour comprendre pourquoi cette probabilité n'est pas égale à la valeur [1] du « joueur invétéré ». Les élèves arrivent rapidement à la conclusion que le numéro non gagnant n'a pas nécessairement été coché en dernier lieu et qu'il y a cinq cas possibles.

Remarquons que les élèves qui avaient considéré le numéro subsidiaire comme gagnant avaient trouvé une probabilité égale à $\frac{11}{3003}$ en ne considérant qu'un seul des cinq cas possibles et n'avaient pas raisonné plus loin.

L'arbre est complété de la manière suivante :

$$\bullet \xrightarrow{\frac{4}{15}} G \xrightarrow{\frac{3}{14}} G \xrightarrow{\frac{2}{13}} G \xrightarrow{\frac{1}{12}} G \xrightarrow{\frac{11}{11}} \overline{G}$$

$$\bullet \xrightarrow[\frac{4}{15}]{} G \xrightarrow[\frac{3}{14}]{} G \xrightarrow[\frac{11}{13}]{} \overline{G} \xrightarrow[\frac{2}{12}]{} G \xrightarrow[\frac{1}{11}]{} G$$

LP fait remarquer que les deux événements représentés ont la même probabilité de se produire (seul l'ordre des facteurs du numérateur change) et la réponse vient sans peine, sans construire l'arbre complet :

$$\text{Pr(gagner au rang 1)} = 5 \times \frac{11}{15015} = \frac{11}{3003}$$

Probabilité de gagner au rang 2

Des élèves sont envoyés au tableau.

LP insiste sur le « au moins » et propose d'envisager deux cas :

(a) 4 numéros gagnants plus le subsidiaire,

(b) 3 numéros gagnants, le subsidiaire et un perdant.

Cas (a)

Après quelques hésitations, un élève construit l'arbre que voici :

$$\bullet \xrightarrow{\frac{4}{15}} G \xrightarrow{\frac{3}{14}} G \xrightarrow{\frac{2}{13}} G \xrightarrow{\frac{1}{12}} G \xrightarrow{\frac{1}{11}} S$$

Il en déduit aisément la probabilité de l'événement associé au cas (a) :

$$5 \times \frac{1}{15015} = \frac{1}{3003}$$

Un autre élève est envoyé au tableau pour la suite.

[1] Les valeurs fournies dans l'énoncé permettent ici de construire un raisonnement cohérent.

<u>Cas (b)</u>

L'arbre erroné suivant est d'abord construit :

$$\bullet \xrightarrow{\frac{3}{15}} G \xrightarrow{\frac{2}{14}} G \xrightarrow{\frac{1}{13}} G \xrightarrow{\frac{1}{12}} S \xrightarrow{\frac{11}{11}} P$$

L'élève justifie son $\frac{3}{15}$ par le fait qu'on a besoin de trois numéros gagnants, il rectifie vite son erreur en remplaçant les fractions $\frac{3}{15}$, $\frac{2}{14}$ et $\frac{1}{13}$ par $\frac{4}{15}$, $\frac{3}{14}$ et $\frac{2}{13}$ et en déduit la probabilité de l'événement représenté : $\frac{2}{3003}$.
Les élèves concluent que, vu la valeur donnée dans l'énoncé, l'événement associé au cas (b) doit être composé de 20 événements élémentaires ayant la même probabilité de se produire que celui représenté ci-dessus.

Mais pourquoi 20 ? LP fait alors dénombrer toutes les permutations de G G G S P, ce qui mène à la solution.

Les autres probabilités sont calculées sans peine en raisonnant comme précédemment.

14.1.8 Le problème de la bonne tranche

14.1.8.1 Temps consacré

- DP : 2 séances
- LP : 2 séances

14.1.8.2 Remarques et observations

Pour répondre à la première question, les élèves de DP ne disposaient pas de l'arbre distribué aux élèves de LP (voir figure 14.3), certains ont dessiné un arbre semblable à celui que nous suggérions pour répondre à la deuxième question (et dont ils ne disposaient pas non plus), d'autres ont encore calculé la probabilité en fonction du nombre de feuilles.

DP et LP ont tous deux donné la deuxième question sous deux formes :

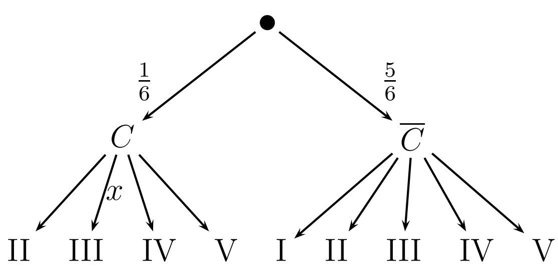
- *Quelle est la probabilité pour qu'un chômeur pris au hasard fasse partie de la classe III ?*
- *Quelle est la probabilité pour qu'une personne fasse partie de la classe III sachant que c'est un chômeur ?*

La seconde formulation a l'avantage d'utiliser l'expression « sachant que ».

Pour calculer la probabilité qu'une personne prise au hasard soit un chômeur, les élèves comprennent vite qu'il suffit d'additionner les probabilités du type $\mathbb{P}(*, C)$. On trouve $\mathbb{P}(C) = 0,16666\ldots$.

Ecrire ce nombre sous forme de fraction fut pénible. De même que le calcul de $\mathbb{P}(\overline{C})$, LP a dû rappeler une fois encore que la somme des deux valait 1.

L'arbre suivant est construit au tableau :



Péniblement, les élèves de DP trouvent et résolvent l'équation $\frac{1}{6} \cdot x = 0,6$. Ils ne parviennent pas sans aide à écrire la loi des probabilités conditionnelles. Paradoxalement, ceci n'a pas posé de problème chez LP.

Soulignons que nous avons ici affaire à un passage du procédural au structural .

Du procédural au structural

DP introduit ensuite la notion d'indépendance en comparant $\mathbb{P}(III|C)$ et $\mathbb{P}(III)$, puis $\mathbb{P}(V|C)$ et $\mathbb{P}(V)$ (les événements III et C sont dépendants, V et C ne le sont pas). Il donne d'emblée la loi du produit. Sa démonstration laisse perplexe la plupart des élèves qui n'avaient pas encore bien cerné la notion d'indépendance.

14.1.9 Un problème au format familial

14.1.9.1 Temps consacré

- DP : $\frac{1}{2}$ séance
- LP : $\frac{1}{2}$ séance

14.1.9.2 Remarques et observations

DP dément l'affirmation de l'un de ses élèves :

> *avoir un garçon sachant que le premier enfant n'est pas une fille, ça revient au même que d'avoir deux garçons.*

Les deux premières questions se résolvent sans problème, la troisième cause plus de soucis aux élèves de DP. Ils l'abordent en appliquant la formule des probabilités conditionnelles, sans remarquer que les événements sont indépendants.

À cette occasion, précisons que nous avons observé chez les élèves une difficulté à comprendre que $\mathbb{P}(FG \text{ ou } FF) = \mathbb{P}(F)$.

LP introduit ici la notion d'événements indépendants. Lorsqu'il demande aux élèves des exemples d'événements *dépendants*, un long silence s'installe !

14.1.10 Retour dans la forêt

14.1.10.1 Temps consacré

- DP : $\frac{1}{2}$ séance
- LP : $\frac{1}{2}$ séance

14.1.10.2 Remarques et observations

Ce problème n'a pas engendré d'ennui particulier.

14.1.11 Petit appétit, la mouche fait son nid

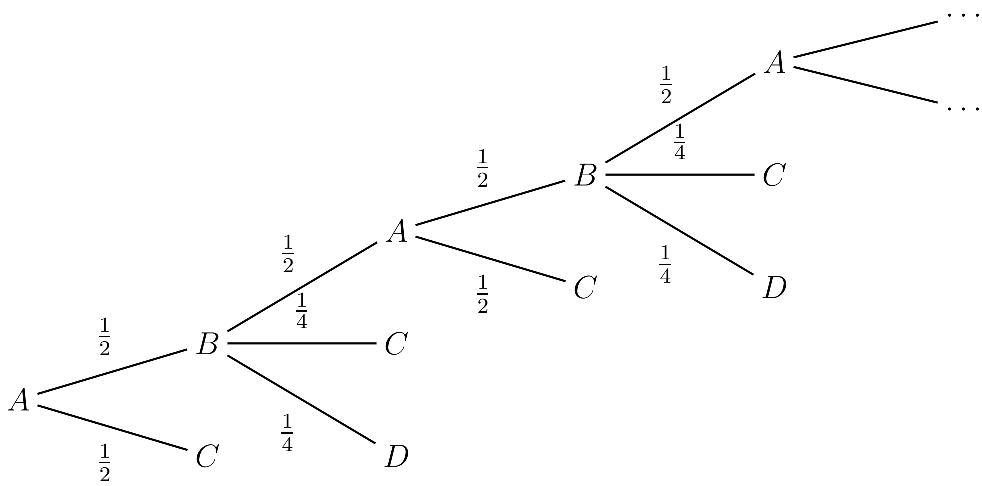
14.1.11.1 Temps consacré

- DP : quelques minutes
- LP : $\frac{1}{2}$ séance

14.1.11.2 Remarques et observations

DP, faute de temps, résout le problème lui-même au tableau. Les élèves n'interviennent pas.

LP dessine l'arbre suivant d'après des suggestions d'élèves :



La classe, aidée de son professeur, entreprend le calcul de la probabilité que la mouche se fasse manger en C sachant qu'elle est partie de A.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{mourir en } C \text{ si départ de } A)\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\cdots\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\cdots\\
&= \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\left(\frac{1}{2}\right)^8+\cdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots\right] \\
&= \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^2+\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^3+\cdots\right] \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

Les élèves ont été assez actifs durant ce long calcul, soutenus en cela par LP qui les a notamment guidés en faisant remarquer que la régularité dans l'arbre devait se traduire par une régularité dans les calculs.

Changement de registre

Après ces calculs, LP a demandé si on aurait pu trouver une probabilité égale à $\frac{7}{6}$, certains élèves n'ont pas trouvé cela étrange. Ce n'est qu'après réflexion que quelqu'un s'est souvenu qu'une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1 ! ! !

Ce dernier comportement nous semble symptomatique d'une difficulté à terminer l'étape de condensation.

Pour calculer la deuxième probabilité, tous les élèves ont repris des calculs similaires à ceux qui précèdent, personne n'a pensé à se servir du résultat ci-dessus.

C'est sur remarque insistante de LP, qu'une élève a finalement déterminé que cette probabilité vaut

$$\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right)\cdot 2=\frac{2}{3}.$$

14.1.12 Epilogue

Faute de temps, la partie intitulée « Annexe » n'a pu être vue en classe.

Notons enfin que DP a effectué avec sa classe, à la suite de notre séquence, quelques exercices supplémentaires, plus systématiques, pendant deux ou trois heures de cours.

LP a soumis ses élèves à la même interrogation que DP précédemment. Nous l'analysons au chapitre 19.

14.2. La séquence de cours

0. Introduction

La probabilité d'obtenir « pile » (ou « face ») lorsqu'on joue avec une pièce non truquée est égale à $\frac{1}{2}$. Mais d'où vient ce $\frac{1}{2}$? Cette probabilité vaut-elle encore $\frac{1}{2}$ si on joue avec une pièce truquée ? Si non, comment peut-on la déterminer ?

Au départ d'expériences simples, nous allons tenter de répondre à ces différentes questions puis, au travers de problèmes, nous établirons peu à peu les bases du calcul des probabilités.

1. Mise en train

1.1 Expérience 1

Travaillez par petits groupes !

Au jeu de « pile ou face », décidons d'appeler SUCCÈS *l'apparition de « pile » et* ÉCHEC *l'apparition de « face ». Jouez cinquante fois à « pile ou face » avec une pièce non truquée, en répondant progressivement aux questions suivantes.*
Pour compléter le diagramme ci-après, vous partez du point marqué « début », vous renforcez un trait vers la droite en cas de succès et un trait vers la gauche en cas d'échec.

- Au fur et à mesure du déroulement de l'expérience, complétez le diagramme, et répondez aux questions suivantes :
  1. Quel est le pourcentage de succès après
     - 5 lancers ?
     - 10 lancers ?
     - 15 lancers ?
     - 20 lancers ?

     Ce pourcentage vous est donné par :

     $$\frac{\text{nombre de succès}}{\text{nombre d'expériences}} \cdot 100$$

     Si on omet de multiplier par 100, on obtient un nombre appelé FRÉQUENCE (il ne figure pas dans le diagramme). Complétez le tableau suivant :

n	5	10	15	20
Fréquence				

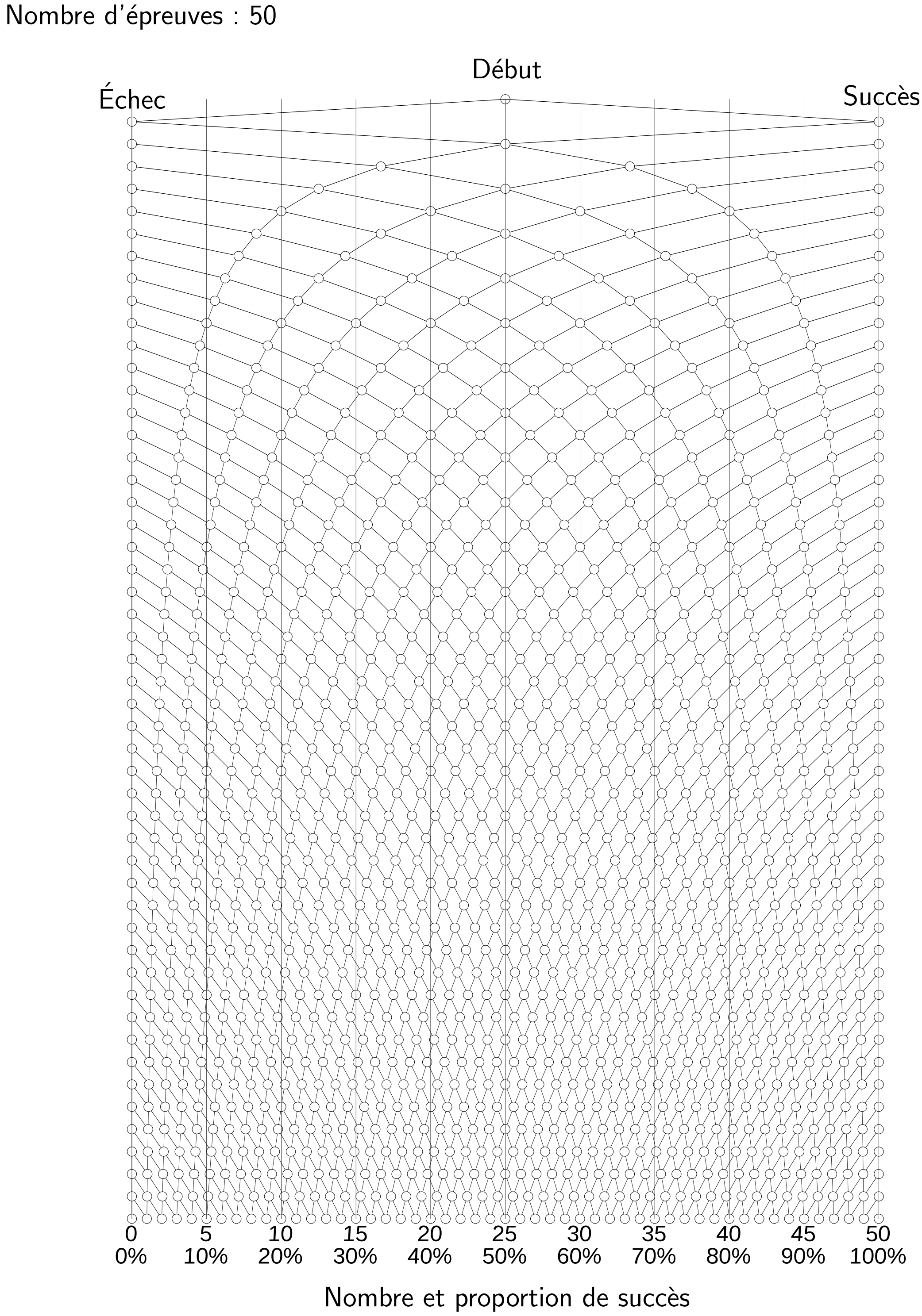


Diagramme extrait de [75]

Figure 14.1

2. Après 20 lancers, peut-on déterminer l'intervalle le plus petit possible comprenant la fréquence de succès après 50 lancers ? Si oui, quel est-il ? (le diagramme échec-succès vous sera utile pour répondre à cette question)

3. Répondez aux questions 1 et 2 après
   - **30 lancers** pourcentage : fréquence : intervalle :
   - **40 lancers** pourcentage : fréquence : intervalle :
   - **49 lancers** pourcentage : fréquence : intervalle :
4. Comment évolue l'intervalle déterminé à la question 2 lorsque le nombre de lancers augmente ?

5. Effectuez le dernier lancer, et vérifiez l'appartenance de la fréquence finale aux intervalles trouvés.

- Complétez la grille figurant au tableau et recopiez tous les résultats ci-dessous.

Groupe d'élèves n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de succès										
Nombre d'échecs										

- Considérons maintenant l'ensemble des résultats de la classe comme étant ceux d'une expérience unique ayant consisté en cinq cents lancers d'une pièce dans l'ordre où ils figurent au tableau. Calculez les fréquences de succès pour les 50 premiers lancers, pour les 100 premiers, . . ., pour les 500 lancers.

n	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
Fréquence de succès après n lancers										

- Reportez vos résultats sur le graphique suivant après avoir gradué les axes de manière adéquate.

Figure 14.2

- Comment se comporte la suite des fréquences obtenues ?

  Ce résultat est-il surprenant ? Était-il prévisible ?

Définir une notion

- Déduisez une première définition de la *probabilité d'obtenir « pile » lors du jet d'une pièce truquée ou non.*

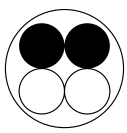
1.2 Expérience 2

Cette expérience nécessite un matériel particulier, demandez-le à votre professeur.

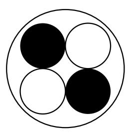
> *Deux billes noires et deux billes blanches sont enfermées dans un tube cylindrique transparent dont le diamètre est tel que les quatre billes se placent nécessairement aux sommets d'un carré lorsqu'on dépose le tube verticalement sur une table. Dans ces conditions, deux TYPES de configuration sont possibles pour les quatre billes :*
>
> - *on appelle SUCCÈS le cas où les deux billes noires se touchent,*
> - *on appelle ÉCHEC le cas où les deux billes noires sont diamétralement opposées.*
>
> *Répondez aux questions suivantes.*

Exemples
La configuration 1 ci-dessous est un succès, l'autre est un échec.

1



2



Conjecturer

- Lorsque l'on secoue le tube, que vaut selon vous la probabilité d'un succès ?
  Et celle d'un échec ?
  Pour infirmer ou confirmer votre intuition, secouez le tube 50 fois et dénombrez les succès et les échecs. Si vous en éprouvez le besoin, remplissez un diagramme succès–échec.
- Complétez la grille figurant au tableau et reportez-la ci-dessous.

Groupe n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de succès										
Nombre d'échecs										

- Considérons maintenant l'ensemble des résultats de la classe comme étant ceux d'une expérience unique ayant consisté en cinq cents jeux dans l'ordre où ils figurent au tableau. Calculez les fréquences de succès pour les 50 premiers jeux, pour les 100 premiers, ..., pour les 500 jeux.

n	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
Fréquence de succès après n lancers										

- Comment se comporte la suite des fréquences obtenues ? Comparez ce résultat à votre première intuition.

Conjecturer

> Lorsque nous cherchons à déterminer une probabilité, deux points de vue peuvent être adoptés.
> Dans certains cas, il est possible de *calculer* — et donc de prévoir — la probabilité sans passer par le relevé expérimental des fréquences.
> Il est raisonnable — voire indispensable — dans d'autres cas d'adopter comme probabilité la fréquence observée après la réalisation d'un grand nombre d'expériences.

- Dans le cas présent, il était possible de calculer la probabilité d'un échec et d'un succès. Tentez de bâtir un raisonnement pour y arriver.
- Que vaut la somme des probabilités d'un succès et d'un échec ?

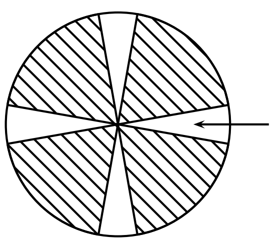
1.3 Expérience 3

> Si on lançait une punaise 50 fois, comment pourrait-on calculer la probabilité qu'elle tombe « pointe en l'air » ?

2. Véritable entrée en matière

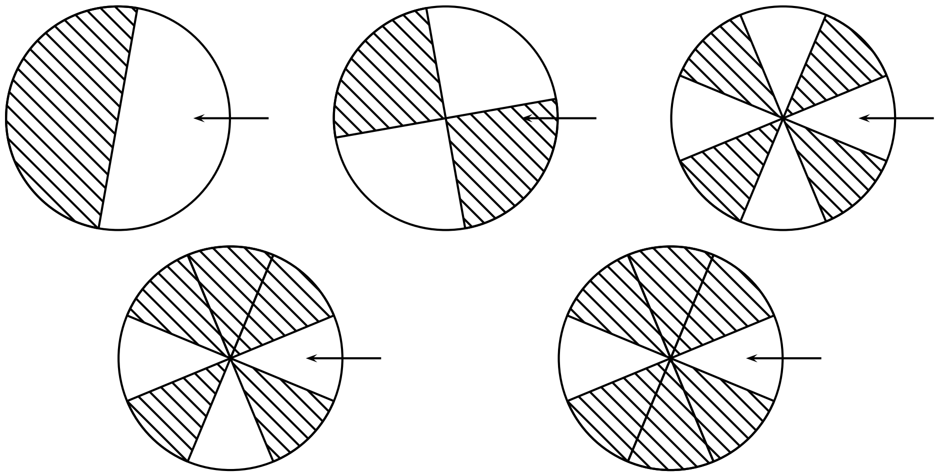
2.1 Un problème bien ciblé !

Problème 2.1

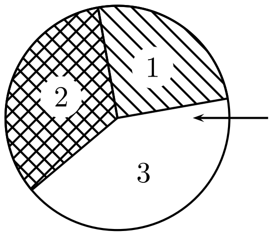


À la foire, l'un des jeux proposés est de faire tourner une roue semblable à ce modèle autour de son centre, et de regarder quelle zone est désignée par le curseur fixe.
Répondez aux questions ci-dessous.

- Quelle est la probabilité que le curseur désigne une zone sombre pour chacune des roues suivantes ?



- Jouons maintenant avec la roue suivante :



L'amplitude de l'angle définissant la zone :
  - n° 1 est de 90°,
  - n° 2 est de 120°,
  - n° 3 est de 150°.

Quelle est la probabilité que le curseur :

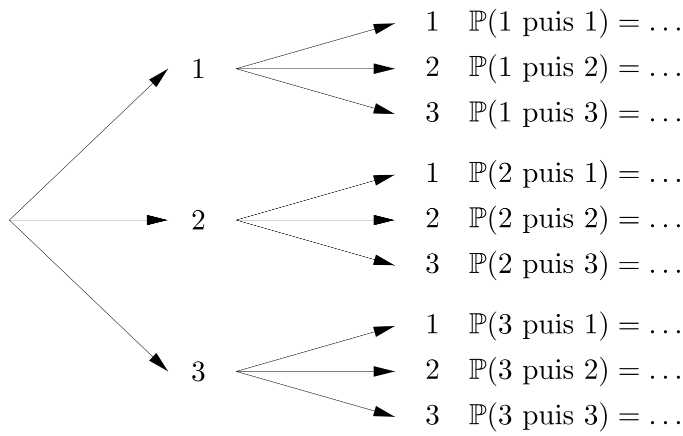
1. indique la zone 1 ? la zone 2 ? la zone 3 ?
2. indique l'une des zones 1 *ou* 2 ?
   Peut-on déduire cette probabilité de celles qui ont été calculées ci-avant ?
3. n'indique *pas* la zone 3 ?
4. indique l'une des zones 1, 2 ou 3 ?

Modélisation

Pour répondre aux questions suivantes, nous vous suggérons d'utiliser des arbres. Le modèle présenté ci-dessous est complet, certaines parties sont inutiles. Pour chaque question, essayez de construire un arbre le plus concis possible.

- Jouons maintenant deux fois de suite avec la dernière roue. Quelle est la probabilité :

1. que le curseur indique deux fois de suite la zone 1 ?
2. que le curseur indique d'abord la zone 1, puis la zone 2 ?
3. que le curseur indique la zone 1 et la zone 2, dans un ordre quelconque, lors des deux jeux successifs ?



2.2 En selle pour le problème du tiercé !

PROBLÈME 2.2 *On fait courir 5 chevaux et tous les classements à l'arrivée ont la même probabilité de se produire.*

- *Quelle est la probabilité d'obtenir le tiercé dans l'ordre ?*
- *Et si l'ordre n'a pas d'importance ?*
- *Dans le cas où l'ordre n'a pas d'importance, quelle est la probabilité d'avoir choisi un cheval faisant partie du tiercé et deux perdants ?*

Ici aussi, nous vous suggérons d'utiliser des arbres les plus concis possibles.

2.3 Synthèse

Un peu de vocabulaire

Expérience aléatoire et événement élémentaire

Une expérience est dite aléatoire si elle peut avoir plusieurs issues appelées *événements élémentaires*.

Exemple : le jet d'un dé dont on examine la face supérieure. Les événements élémentaires sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Événements composés

Un événement composé est constitué d'événement(s) élémentaire(s).

Exemple : lors du jet d'un dé, l'événement A « obtenir un résultat pair » s'écrit $A = \{2, 4, 6\}$ et est constitué des événements élémentaires 2, 4 et 6.

Événement contraire

L'événement contraire d'un événement A est celui qui se réalise quand A ne se réalise pas et qui ne se réalise pas quand A se réalise. On le notera $\overline{A}$.

Exemple : lors du jet d'un dé, l'événement contraire de A « obtenir un résultat pair » est l'événement $\overline{A}$ « ne pas obtenir un résultat pair ». $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$.

Autre exemple : ci-dessus, dans le problème « bien ciblé », nous avons déjà rencontré des événements contraires. À la question 3, l'événement « ne pas indiquer la zone 3 » est contraire à l'événement « indiquer la zone 3 ».

Fréquence

La fréquence d'un événement est le rapport

$$\frac{\text{nombre d'apparitions de l'événement}}{\text{nombre de réalisations de l'expérience}}$$

Probabilité

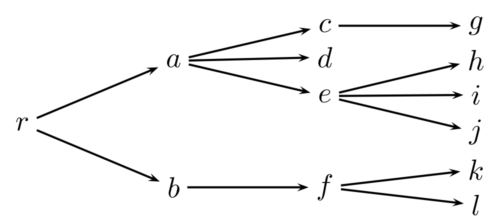
La probabilité d'un événement est la limite de sa fréquence lorsque le nombre d'expérimentations tend vers l'infini.

Remarquons que certaines probabilités peuvent se calculer sans passer par la fréquence.

Oui, nous pouvons lire les arbres !

Dans les activités proposées ci-dessus, nous avons utilisé des arbres. Apprenons à mieux les comprendre.

Dans l'arbre qui suit, r est appelé la RACINE, d, g, h i, j, k et l sont appelés les FEUILLES. D'une manière générale, toutes les lettres désignent des NŒUDS.



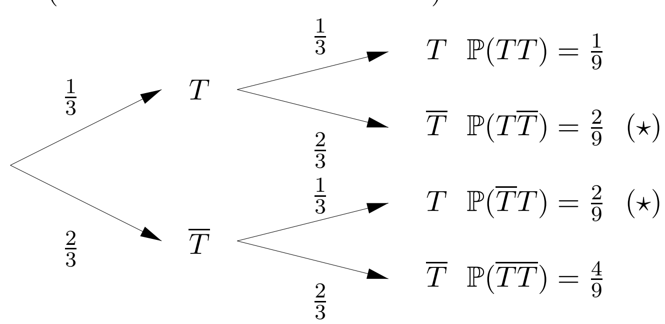
Lorsqu'un arbre modélise une expérience aléatoire, chaque nœud représente un événement élémentaire ou composé.

Tout événement n'est cependant pas représenté par un nœud !

Ainsi, le nœud e représente l'événement composé de h, de i et de j. Le nœud a représente l'événement composé de d, h, i et j.

L'événement composé de g, j et k n'est, quant à lui, représenté par aucun nœud.

Penchons-nous à présent sur le problème de deux lancers successifs d'un dé dont on observe la face supérieure. Les événements élémentaires sont ici TT, $T\overline{T}$, $\overline{T}T$ et $\overline{TT}$ où T représente « être un multiple de 3 » (et $\overline{T}$ son événement contraire).



On remarque que *la somme de toutes les probabilités figurant sur les feuilles vaut 1 ($\star\star$)*. Pour calculer la probabilité d'un événement représenté par une feuille, on a multiplié les probabilités se trouvant sur les branches du chemin liant la feuille à la racine.

Notons A l'événement TT. Son contraire est l'événement composé de toutes les autres feuilles de l'arbre.

La probabilité de cet événement est (en tenant compte de ($\star\star$)) $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = \frac{8}{9}$. On peut aussi la calculer en additionnant les probabilités des événements $T\overline{T}$, $\overline{T}T$ et $\overline{T}\overline{T}$.

Dégager une loi

À présent, calculons la probabilité d'obtenir exactement un résultat multiple de trois sur les deux lancers. Appelons B cet événement, il est constitué des feuilles marquées ($\star$).

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(T\overline{T}) + \mathbb{P}(\overline{T}T) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

Quelques règles

- Une probabilité appartient toujours à l'intervalle $[0, 1]$ (ceci découle de la propriété similaire pour la fréquence qui, elle, est triviale).
- La probabilité d'un événement composé d'une expérience aléatoire est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.
- En particulier, la somme des probabilités de tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire vaut 1.
- La probabilité de l'événement contraire de A est $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$. C'est une conséquence des règles précédentes.
- Dans un arbre, la probabilité d'un événement représenté par un nœud est égale au produit des probabilités apparaissant sur les branches successives du chemin qui le relie à la racine. La probabilité de l'événement représenté par cette dernière vaut 1.

2.4 Le problème du Wilgame

PROBLÈME 2.3 *Au pays de Mathland, le jeu du Wilgame se pratique à l'aide de grilles constituées de 15 cases numérotées de 1 à 15, dont cinq doivent être cochées.*
Lors d'un tirage, 4 numéros dits « gagnants » et un numéro dit « subsidiaire » sont extraits d'une urne. Vous êtes gagnant au rang :

- *1 si vous avez coché les 4 numéros gagnants,*
- *2 si vous avez coché au moins 3 des 4 numéros gagnants et le subsidiaire,*
- *3 si vous avez coché exactement 3 des 4 numéros gagnants sans le subsidiaire.*

Vous êtes perdant dans tous les autres cas.
Un joueur invétéré prétend que la probabilité de gagner vaut $\frac{11}{3003}$ au rang 1, $\frac{41}{3003}$ au rang 2, $\frac{180}{3003}$ au rang 3 et que celle de perdre vaut $\frac{2772}{3003}$.

- Vérifiez que les affirmations du joueur invétéré sont correctes.
- Pourquoi la somme des probabilités est-elle plus grande que 1 ?
- Comment pourrait-on modifier les règles pour que cette somme soit égale à 1 ?
- Adaptez les probabilités calculées par le joueur invétéré pour les rendre conformes aux nouvelles règles.

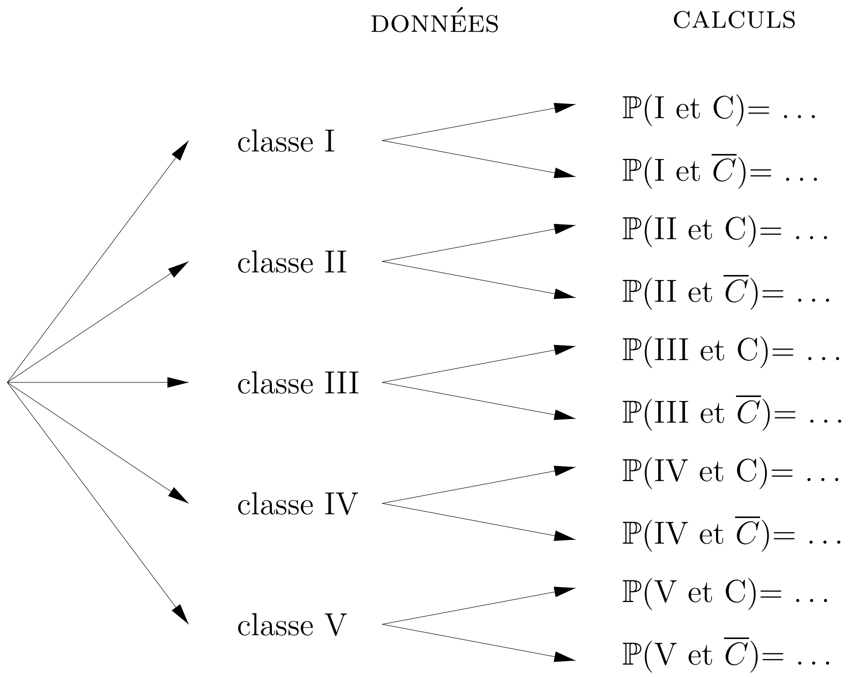


Figure 14.3

3. La grosse pièce

3.1 Le problème de la bonne tranche

PROBLÈME 3.1 *Le tableau ci-dessous résume la situation du chômage en Mathland :*

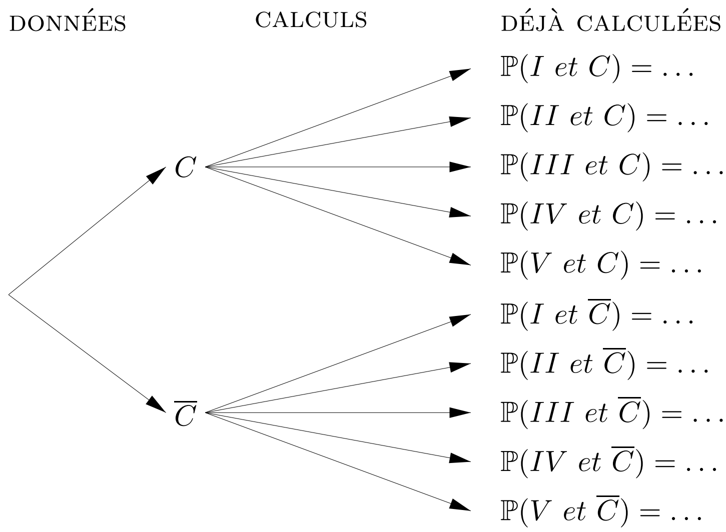
Classe	*Tranche d'âge*	*Répartition*	*Proportion de chômeurs*
I	*0–15 ans*	*34%*	*0*
II	*15–25 ans*	*25%*	1/5
III	*25–35 ans*	*15%*	2/5
IV	*35–45 ans*	*10%*	3/10
V	*>45 ans*	*16%*	1/6

On demande la probabilité

1. *pour qu'un habitant pris au hasard soit un chômeur faisant partie de la classe III,*
2. *pour qu'un chômeur pris au hasard fasse partie de la classe III.*

Pour répondre à la première question, complétez l'arbre qui suit (où C représente un chômeur et $\overline{C}$ représente un non chômeur) :

Pour répondre à la deuxième question, complétez un deuxième arbre :



Calculons la probabilité qu'un chômeur pris au hasard fasse partie de la classe II. Vous ferez de même pour répondre à la question 2.

Nous savons que $\mathbb{P}(II\ et\ C) = 0,05$. Or, la probabilité d'être chômeur ($\frac{1}{6}$) doit être multipliée par la probabilité x qu'un chômeur appartienne à la classe II, afin de trouver la probabilité $(0,05)$ qu'un habitant soit un chômeur appartenant à la classe II.

Ainsi $x = \frac{0,05}{1/6} = 0,3$. Par conséquent :

Dégager une loi

$$\mathbb{P}(II \text{ sachant que } C) = \frac{\mathbb{P}(II\ et\ C)}{\mathbb{P}(C)}$$

3.2 Le retour de la synthèse

Pour une expérience aléatoire donnée on note $\mathbb{P}(A|B)$ la probabilité qu'un événement A se réalise sachant qu'un événement B s'est réalisé.

Ce qui précède nous permet d'écrire :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \text{ et } B)}{\mathbb{P}(B)} \text{ ou encore : } \mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)$$

L'avantage de la dernière formulation est d'être valide même lorsque $\mathbb{P}(B) = 0$

3.3 Un problème au format familial

PROBLÈME 3.2 *On estime que la probabilité d'avoir un garçon est* $\frac{515}{1000}$*, d'où celle d'avoir une fille est* $\frac{485}{1000}$*.*
Que pouvez-vous dire, pour les familles de deux enfants, de la probabilité d'avoir :

- *deux garçons ?*
- *un garçon et une fille ?*
- *un garçon sachant que le premier enfant est une fille ?*
- *un garçon sachant que le premier enfant n'est pas une fille ?*

3.4 L'ultime synthèse

Vocabulaire et règle

Événements indépendants

Deux événements sont indépendants lorsque la réalisation de l'un n'influence pas la réalisation de l'autre.

Dans le problème précédent, l'événement A : « le deuxième enfant est un garçon » est indépendant de l'événement B : « le premier enfant est une fille », ce qui se traduit de deux manières équivalentes ([2]) :

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \text{ et } \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|\overline{B})$$

Loi du produit

Si deux événements A et B sont indépendants, on déduit de la formule des probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

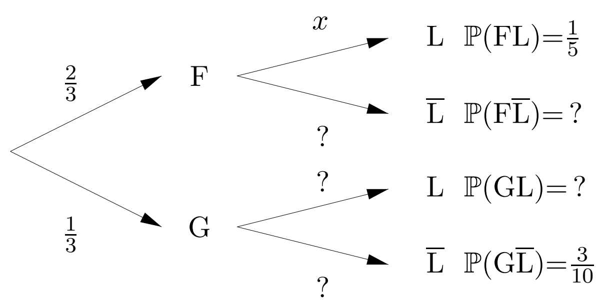
d'où découle la loi du produit, que nous avons déjà eu l'occasion d'utiliser à maintes reprises dans nos arbres :

Si les événements A et B sont indépendants, alors $\mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

Retour dans la forêt

Complétons notre manuel de lecture des arbres. Considérons une classe mixte constituée de deux fois plus de filles que de garçons, et contenant 20% de filles à lunettes ainsi que 30% de garçons sans lunettes.

On choisit une fille au hasard, et on demande de calculer la probabilité qu'elle porte des lunettes.



La probabilité recherchée est :

$$x = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{10}$$

([2]) La démonstration de cette équivalence se trouve en annexe

Questions subsidiaires :

- complétez l'arbre,
- calculez la probabilité qu'un élève choisi au hasard porte des lunettes,
- calculez la probabilité qu'un élève portant des lunettes soit une fille.

Flashback sur le problème de la bonne tranche

Dans le « problème de la bonne tranche », les événements « appartenir à la classe V » et « être chômeur » étaient indépendants.

En effet, $\mathbb{P}(V|C) = \mathbb{P}(V) = 0,16$. De manière équivalente, $\mathbb{P}(V|C) = \mathbb{P}(V|\overline{C}) = 0,16$.

Par contre, être chômeur n'était pas indépendant de la tranche d'âge, car pour ce faire, il aurait fallu :

$$\mathbb{P}(C|I) = \mathbb{P}(C|II) = \mathbb{P}(C|III) = \cdots$$

3.5 Petit appétit, la mouche fait son nid

intégration de compétences multiples

Problème 3.3 *Une mouche parcourt les arêtes d'un tétraèdre ABCD. En chaque sommet, elle choisit de se diriger vers l'un des trois autres sommets en respectant les probabilités de transition données dans le tableau suivant (la première colonne indique les sommets de départ) :*

	A	*B*	*C*	*D*
A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
B	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
C	0	0	1	0
D	0	0	0	1

La mouche commence son périple en A ou en B. Aux sommets C et D se cachent de grosses araignées qui avalent la mouche si elle passe à leur portée.
Quelle est la probabilité que ce soit l'araignée du sommet C qui gobe la mouche :

- *si celle-ci part de A ?*
- *si celle-ci part de B ?*

4. Annexe

Nous proposons ici une illustration puis une preuve de l'équivalence :

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|\overline{B}) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$$

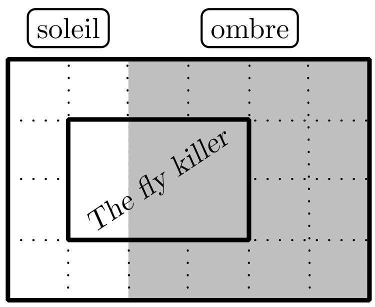
Cette équivalence n'est vraie que dans le cas où $\mathbb{P}(B) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{B}) \neq 0$.

L'illustration

La figure ci-après représente une table, la partie de droite (ombrée sur la figure) est à l'ombre tandis que la partie de gauche est exposée aux rayons du soleil. Au centre de cette table, on a placé un papier tue-mouches (*The fly killer*).
Une mouche, tellement minuscule que nous l'assimilerons à un point, épuisée par un long vol, décide d'aller s'y reposer. Inconsciente du danger qui la menace et peu soucieuse de son bronzage, on suppose qu'elle a la même probabilité de se poser en n'importe quel endroit de la table.

Appelons :

- A l'événement « la mouche se pose sur le papier tue-mouches »,
- B l'événement « la mouche se pose au soleil »,
- $\overline{B}$ l'événement « la mouche se pose à l'ombre ».



$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{aire du papier tue-mouches}}{\text{aire de la table}} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\text{aire du morceau de papier tue-mouches exposé au soleil}}{\text{aire du morceau de table exposé au soleil}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

On constate que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$, les événements A et B sont donc *indépendants*. En effet, la fraction de table recouverte de papier tue-mouches est identique que l'on considère l'entièreté de la table ou uniquement la partie de table exposée au soleil ($\frac{1}{4}$).

Cette fraction reste donc la même si l'on considère la partie de table à l'ombre.

Ce qui nous permet de dire que $\mathbb{P}(A|\overline{B}) = \frac{1}{4}$.

Ainsi donc :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) \Longrightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|\overline{B})$$

Par un raisonnement analogue, on pourrait voir que

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|\overline{B}) \Longrightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$$

et donc que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|\overline{B})$$

... dans le cas de l'exemple que nous traitons.

La preuve

formalisation

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|\overline{B}) \quad &\iff \quad \frac{\mathbb{P}(A \text{ et } B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \text{ et } \overline{B})}{\mathbb{P}(\overline{B})} \\
&\iff \quad \frac{\mathbb{P}(A \text{ et } B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \text{ et } \overline{B})}{1-\mathbb{P}(B)} \\
&\iff \quad \mathbb{P}(A \text{ et } B) \cdot (1-\mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A \text{ et } \overline{B}) \cdot \mathbb{P}(B) \\
&\iff \quad \mathbb{P}(A \text{ et } B) - \mathbb{P}(A \text{ et } B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \text{ et } \overline{B}) \cdot \mathbb{P}(B) \\
&\iff \quad \mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(A \text{ et } B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \text{ et } \overline{B}) \cdot \mathbb{P}(B) \\
&\iff \quad \mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(B) \cdot \big(\mathbb{P}(A \text{ et } B) + \mathbb{P}(A \text{ et } \overline{B})\big) \\
&\iff \quad \mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A) \\
&\iff \quad \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A) \\
&\iff \quad \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)
\end{aligned}$$

Références

[106], [75], [154], [95], [97], [92], [104], [140], [148].