Troisième partie

Séquences d'enseignement

Chapitre 12

Du discret au continu : l'intégrale

12.1. Présentation générale

Ce chapitre est consacré à la description et l'analyse d'une séquence d'enseignement, expérimentée dans diverses classes de 6^{e} transition durant le 3^{e} trimestre de l'année scolaire 1997-1998. Après concertation avec les enseignants disposés à accueillir l'expérience dans leurs classes, le choix du sujet à enseigner s'est porté sur *l'intégrale* et le *théorème fondamental de l'analyse*.

12.1.1 Des objectifs en termes de compétences

L'objectif principal de l'expérimentation était d'étudier sur le terrain les questions liées à la mise au point d'une séquence d'enseignement en accord avec les conceptions de A. Sfard décrites au chapitre 10. La méthodologie de l'enseignement prévu s'est donc inscrite dans ce que nous avons appelé la *problématisation du cours de mathématiques* (cfr. chapitre 11) : des situations-problèmes sont l'occasion de dégager des procédures de calcul ou de raisonnement, puis de faire progresser ces procédures vers des stades de plus en plus conceptuels.

Dès le début de l'expérience, il a été convenu de construire l'intégrale en terme d'évaluation de certaines grandeurs par encadrements de plus en plus précis, et donc d'insister autant sur le processus d'approximation lui-même que sur le passage à la limite qui lui fait suite.

Dans ce contexte, l'outil technique retenu a été la notion de somme de Darboux, puisque l'aspect « encadrement d'une grandeur » y est fondamental.

Ces choix arrêtés, les principales compétences à atteindre au point de vue disciplinaire ont été définies. L'enseignement à mettre au point devait rendre chaque élève capable :

- d'encadrer par des sommes de Darboux certaines quantités dont l'expression élémentaire est un produit d'un type particulier (telles que l'énergie électrique, le travail, la distance parcourue, l'aire, ...),
- d'écrire l'intégrale associée à la valeur exacte d'une quantité approchée par une somme de Darboux,
- de se servir d'une calculatrice ou d'un logiciel pour calculer la valeur d'une somme de Darboux,
- de déterminer une borne supérieure de l'erreur commise en approchant une intégrale par une somme de Darboux,
- d'identifier les aspects linéaires (par rapport aux fonctions à intégrer, aux bornes d'intégration, ...) de l'intégrale,
- de justifier et d'utiliser à bon escient le théorème fondamental de l'analyse qui relie l'évaluation d'une intégrale au calcul d'une primitive.

La place à réserver aux situations-problèmes et la définition des compétences disciplinaires appropriées ont assuré la cohérence du projet à travers toutes les étapes de son évolution.

12.1.2 Une mise au point par étapes

La mise au point de l'ensemble de la séquence d'enseignement a été réalisée en plusieurs étapes.

Première étape : la construction d'un scénario, au départ de situations-problèmes pertinentes, et en accord avec l'évolution d'un stade procédural à un stade structural.

Ce scénario a été découpé comme suit. Les deux premières sections, intitulées :

- Quelques situations initiales,
- Comment discrétiser un phénomène continu ?

ont été consacrées à la phase d'*intériorisation*, c'est-à-dire de première familiarisation avec le processus à étudier.

Les quatre sections suivantes, intitulées :

- Le contrôle de l'approximation,
- Une définition procédurale de l'intégrale,
- Un théorème miraculeux ou naturel ?
- Réinvestissement,

ont été consacrées à la phase de *condensation*. Pour mémoire, cette phase cruciale dans le schéma d'A. Sfard consiste à faire évoluer le processus étudié vers un statut (idéal) de concept, à travers diverses séquences pédagogiques construites autour de quelques problèmes-clefs.

La dernière section, intitulée :

- Une synthèse théorique,

a été entièrement consacrée à la phase de *réification*, qui est celle qui fixe, ordonne et structure en termes conceptuels les résultats de toutes sortes accumulés dans les deux phases précédentes.

Deuxième étape : la rédaction d'un texte complet et autonome — c'est-à-dire qui se suffise à lui-même — adaptable à la fois aux élèves et aux enseignants, et qui soit en accord avec le scénario précédemment mis au point.

Cet aspect de l'expérience a été l'un des plus difficiles à gérer, à cause des contraintes multiples, et parfois contradictoires, qu'il a fait naître.

Ainsi, au début de la séquence, il est apparu qu'il valait mieux ne pas s'encombrer d'hypothèses techniques lorsque l'objectif prioritaire était de maîtriser un processus de discrétisation relativement subtil. Mais il devenait alors périlleux d'écrire un texte qui, la phase d'intériorisation une fois dépassée, pouvait paraître imprécis, sinon incorrect. Il convenait à tout le moins d'isoler dans la suite de la séquence quelques moments privilégiés où ces questions de précision dans les hypothèses devaient trouver des réponses appropriées.

Une autre contrainte est apparue dans la nécessité de fournir des solutions institutionnalisées ([1]) à certains problèmes — afin qu'elles soient à la disposition de tous les élèves — sans pour autant désamorcer l'intérêt de ces problèmes.

En fait, et de manière assez naturelle, c'est la définition d'un *style*, qui parvienne à assumer et à dépasser à la fois toutes les contraintes liées à la problématisation, qui s'est retrouvée au cœur de toutes les difficultés de rédaction.

Troisième étape : l'expérimentation dans les classes.

Comme signalé plus haut, un consensus s'est établi dès les premiers contacts avec les enseignants quant à l'objectif de cette étape de l'expérience : confronter le schéma de problématisation du cours à la réalité quotidienne des classes, et corriger en conséquence la première rédaction de la séquence d'enseignement.

L'observation a donc essayé de répondre à ces objectifs, et a été dès lors essentiellement qualitative : critique de l'efficacité à court terme du schéma, révision du vocabulaire, de la phraséologie, du style et du contenu des notes, relevé des comportements caractéristiques des élèves, ... Dans ce contexte, et vu la taille réduite de l'échantillon, il n'a pas été possible d'utiliser des méthodes d'investigation statistique, de comparaison avec des groupes témoins, ...

D'autre part, la méthodologie toute particulière à mettre en œuvre avec les élèves, en regard des exigences multiples de la problématisation, a interféré avec la rédaction du texte jusqu'à le faire modifier pendant l'expérience elle-même. En effet, les changements de rythmes entre les activités de résolution de problèmes, les institutionnalisations de certaines solutions, les approches théoriques, ... ont été parfois bien difficiles à stabiliser dans les classes.

Le but de cette phase expérimentale était en tous cas de tester un prototype de séquence d'enseignement sur le terrain, en s'adaptant à toute une série de nouvelles contraintes propres à la vie d'une classe : le niveau moyen des connaissances, la sensibilité particulière à tel ou tel aspect d'un problème, le temps disponible, le respect des programmes, ...

Quatrième étape : la révision du texte à la suite de l'expérimentation dans les classes.

([1]) Au sens donné à ce mot dans le chapitre 5.

Le texte complet de cette révision est l'objet de la dernière section de ce chapitre. La comparaison de ce nouveau texte avec les extraits des différentes versions qui ont été distribuées aux élèves lors de l'expérimentation — et qui sont reproduites dans les compte-rendus de l'expérience ci-après — permettra de mesurer le chemin parcouru. Il n'en reste pas moins à expérimenter encore cette nouvelle version, avant de la modifier peut-être à nouveau : rien n'est jamais acquis ou définitif dans l'enseignement d'un sujet tel que l'intégrale !

12.2. L'organisation pratique de l'expérience

12.2.1 Quelques renseignements généraux

L'expérience s'est déroulée dans trois classes de sixième transition ou technique, sous la conduite d'enseignants chevronnés :

- une classe de sixième transition générale (option de mathématiques à 6 périodes par semaine), composée de 10 élèves et prise en charge par Chantal Terryn (du 20 avril au 8 mai 1998),
- une classe de sixième transition générale (option de mathématiques à 6 périodes par semaine), composée de 22 élèves et prise en charge par Luc Terryn (du 20 avril au 14 mai 1998),
- une classe de sixième technique de qualification (chimie) (option de mathématiques à 4 périodes par semaine), composée de 7 élèves et prise en charge par Yves Hanssens (du 4 mai au 29 mai 1998).

Dans le cas de la classe de Yves Hanssens, et pour des raisons d'organisation des cours propres à l'établissement scolaire concerné, seules 3 heures sur les 4 ont été consacrées au projet qui nous intéresse. En tenant compte de la grille horaire des divers professeurs et des congés scolaires du mois de mai, le nombre d'heures effectivement consacrées au projet s'est trouvé réparti comme suit :

- Chantal Terryn : 13 heures,
- Luc Terryn : 20 heures,
- Yves Hanssens : 10 heures.

Durant la totalité de ces heures de cours, l'un d'entre nous au moins était présent à titre d'observateur (silencieux) dans les classes. Ainsi, Frédéric Pourbaix a assisté à toute l'expérience dans la classe de Chantal Terryn, et Philippe Tilleuil a fait de même dans les classes de Luc Terryn et de Yves Hanssens ; Guy Noël a aménagé son emploi du temps pour suivre quelques cours dans les classes de Chantal et Luc Terryn.

Cette répartition ne tient pas compte d'un certain nombre d'heures de cours qui ont été consacrées ultérieurement à des activités classiques de fixation du calcul intégral.

12.2.2 Méthodologie

Lors du travail par *situations-problèmes*, les élèves se sont regroupés de la manière suivante :

- dans la classe de Chantal Terryn : par groupes de 2, 3 ou 4 élèves (bancs assemblés),
- dans la classe de Luc Terryn : par groupes de 2 ou 4 élèves (bancs alignés),
- dans la classe de Yves Hanssens : un groupe de 3 et un groupe de 4 élèves (bancs assemblés).

La plupart du temps, la lecture de textes mathématiques s'est faite individuellement, mais il y a eu quelques essais d'une pratique différente chez Luc Terryn et Yves Hanssens (cfr. ci-dessous le compte-rendu détaillé). Les synthèses théoriques ont presque toujours été prises en charge par les professeurs.

En général, les textes ont été distribués section par section de telle sorte que des éléments de solution d'un problème puissent être présentés le cas échéant dans la section qui suivait celle où ce problème était posé. Malheureusement, il n'a pas été possible de disposer de matériel informatique (ordinateurs munis de tableurs ou de logiciels spécialisés) : seules des calculatrices scientifiques ont été utilisées par les élèves.

Il reste à signaler qu'indépendamment de la mise en œuvre du projet, un cours sur le calcul des primitives — sans relation signalée avec la notion d'intégrale — avait déjà eu lieu dans les trois classes au début du deuxième trimestre. Ceci explique que le calcul des primitives n'a quasiment pas été développé dans les séquences dont il est question ici.

12.3. Un compte-rendu de l'expérimentation : la phase d'intériorisation

Avertissement. *Cette section et les deux suivantes sont consacrées à un compte-rendu de l'expérimentation dans les classes. Ce compte-rendu est à chaque fois précédé d'extraits des notes de cours fournies aux élèves. Il n'a pas été jugé utile de livrer ici l'entièreté de ces notes* ([2])*. Seules les parties dont l'effet dans les classes a été le plus marqué ont été reproduites ; les points de suspension « …… » signalent des parties omises. A titre documentaire, les notes dans leur version complète comportaient 75 pages* ([3])*.*

([2]) Au départ d'un noyau commun, ces notes ont souvent évolué dans des directions différentes suivant les desiderata des trois enseignants concernés.

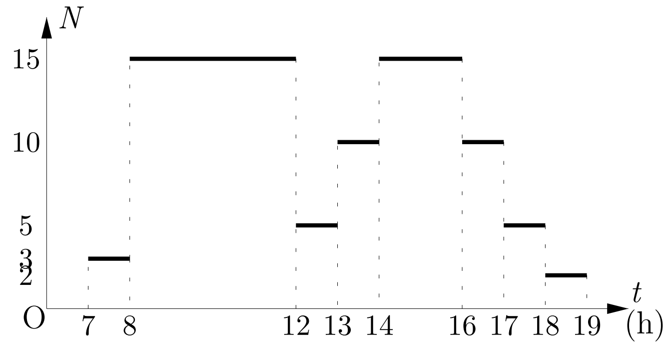
([3]) Mais la version simplifiée distribuée aux élèves de Yves Hanssens ne comptait qu'une trentaine de pages.

12.3.1 Extraits des notes fournies aux élèves concernant la section 1 : « Quelques situations initiales »

Deux situations élémentaires

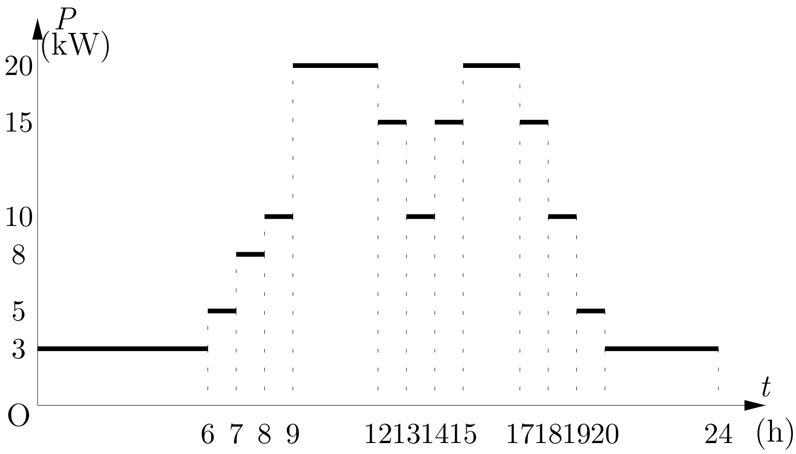
Problème 1 *Dans une entreprise de taille moyenne spécialisée dans la vente par correspondance, le traitement des bons de commande est assuré par un service du département « Comptabilité », qui comporte 15 employés. On estime qu'un employé traite 10 bons de commande en 1 heure. Le graphique ci-dessous décrit le nombre N d'employés présents en fonction du moment de la journée, les premiers employés arrivant à 7 heures du matin (il en faut !) et les derniers quittant le bureau vers 19 heures.*

On demande de représenter heure par heure, dans un tableau ainsi que graphiquement, la quantité de bons de commande traités dans le département depuis le début de la journée.



Les compagnies d'électricité établissent la facture de leurs clients en fonction de l'énergie électrique qu'ils consomment. Cette énergie électrique dépend de la puissance demandée par les différents appareils électriques et du temps pendant lequel cette puissance est demandée. Si, par exemple, une ampoule électrique d'une puissance de 60 watts reste allumée pendant 5 heures dans une maison, elle consomme une énergie de 300 wattheures, ou de 0,3 kilowattheures (en symbole : 300 Wh ou 0,3 kWh.) Si le kilowattheure est facturé à 4,80 F (hors T.V.A.), un tel éclairage coûte donc 1,44 F.

Problème 2 *Dans l'atelier d'un travailleur indépendant, la puissance électrique nécessaire à faire fonctionner les différentes machines est décrite dans le graphique ci-dessous en fonction du moment de la journée.*



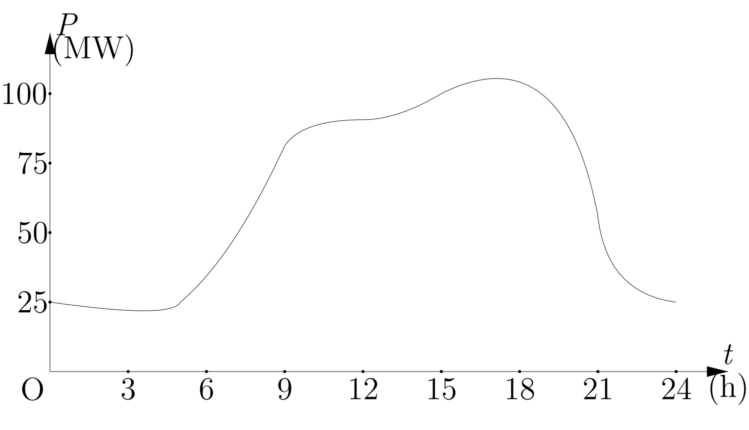
On demande de représenter heure par heure, dans un tableau, ainsi que graphiquement, l'énergie électrique consommée dans cet atelier depuis le début de la journée.

Un problème : la consommation d'énergie électrique d'une ville

La demande en puissance électrique varie d'après le moment de la journée. Dans certains cas — par exemple, celui de l'atelier considéré ci-dessus — cette demande est relativement constante sur des périodes de temps appropriées, et ne varie que par paliers.

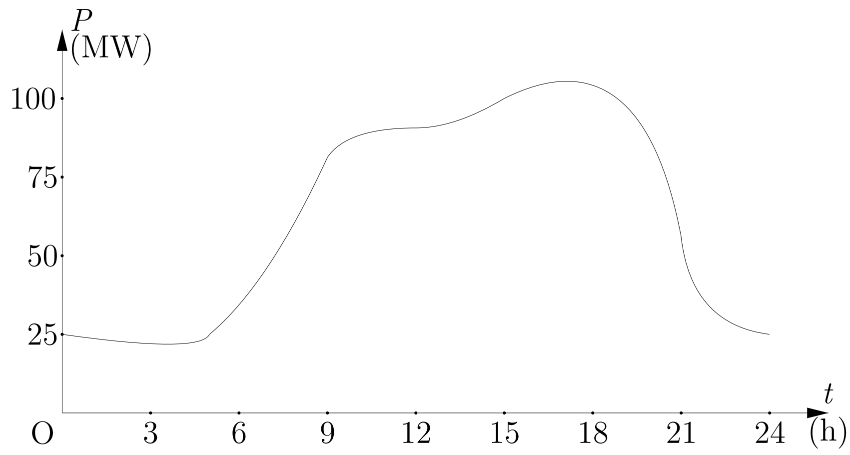
Mais lorsqu'on considère la consommation électrique à une plus grande échelle — par exemple, à l'échelle d'une ville — vu le grand nombre de consommateurs, la demande totale varie constamment, et il n'est plus possible de distinguer des paliers. Une telle demande peut se visualiser à l'aide d'une courbe continue, comme le propose le problème suivant.

Problème 3 *La puissance électrique nécessaire dans une ville de taille moyenne est décrite en fonction du moment de la journée dans le graphique ci-dessous (1 MW (megawatt) vaut 10^6 watts).*



On demande de calculer l'énergie consommée par cette ville pendant une journée, ainsi que le coût de cette énergie. Pour mémoire, le kilowatt-heure est facturé à 4,80 F, hors T.V.A.

Problème 3 *(Version détaillée) La puissance électrique nécessaire dans une ville de taille moyenne est décrite en fonction du moment de la journée dans le graphique ci-dessous (1 MW (megawatt) vaut 10^6 watts).*



On demande

1. *de découper la journée en intervalles de temps — même très petits — pendant lesquels la puissance électrique demandée ne varie pas de plus de dix megawatts, c'est-à-dire pendant lesquels la puissance électrique demandée peut être raisonnablement* encadrée *par des puissances* constantes*,*
2. *d'en déduire un* encadrement correspondant *de l'énergie consommée par cette ville pendant une journée, ainsi que du coût de cette énergie (pour mémoire, le kilowattheure est facturé à 4,80 F, hors T.V.A.),*
3. *de* raffiner *ce processus, jusqu'à en déduire une valeur approchée à 100 megawattheures près, et à 10 megawattheures près (si possible ...), de l'énergie consommée par cette ville pendant une journée.*

12.3.2 Commentaires et remarques

Le temps consacré en classe à l'étude de la section 1 s'est réparti comme suit :

- CT ([4]) : 3 séances de 50 minutes,
- LT : 4 séances de 50 minutes,
- YH : 2 séances de 50 minutes.

Dès le premier cours, nous avons observé des difficultés diverses relatives à la lecture et la compréhension des énoncés :

- au cours de la résolution du problème 1 chez CT et LT, un élève a calculé « la quantité de bons de commande traités heure par heure » en oubliant de lire « depuis le début de la journée »,
- au cours des résolutions des problèmes 2 et 3, la confusion a été fréquente entre puissance et énergie.

Des difficultés systématiques à mettre en œuvre la notion d'*encadrement* ont été relevées. La mise en évidence de ce type de difficulté chez CT et LT a entraîné la modification de l'énoncé du problème 3 : c'est cette version que l'on trouve en première position dans les extraits ci-dessous, et qui a été la seule employée ensuite chez YH (avec succès). Chez LT et CT, la version détaillée de l'énoncé du problème 3 n'a été fournie aux élèves qu'après une bonne vingtaine de minutes, au vu des directions prises à la lecture de la première version ; l'effet en fut une plus grande homogénéité dans la suite du travail. Notons encore qu'un des groupes de CT était arrivé à une bonne approximation, mais sans pouvoir la comparer à la valeur exacte. Une intervention de l'enseignant mettant l'accent sur la signification de ce contrôle a montré aux élèves concernés l'utilité d'un encadrement.

Les sources probables de cette difficulté observée chez les élèves de CT et LT peuvent être diverses : le peu de pratique antérieure des encadrements, l'absence de références à un encadrement dans les problèmes 1 et 2, ...

Mais les conséquences de cette difficulté sur la suite de l'expérience n'ont pas été négligeables : certains élèves se sont repliés sur d'autres modes d'approximation (trapèzes, moyennes, ...) dont ils ont eu du mal à se dégager par la suite, les enseignants ont perdu pas mal de temps à réorienter le travail de ces élèves, le problème 3 n'a été complètement achevé que dans quelques groupes, ...

([4]) Afin d'alléger un peu la transcription, les abréviations suivantes sont utilisées systématiquement dans la suite : CT : pour Chantal Terryn, LT : pour Luc Terryn, YH : pour Yves Hanssens.

Dès ces toutes premières activités, un contraste s'est marqué entre la culture scolaire des élèves, selon qu'ils appartenaient à l'enseignement technique ou à l'enseignement général. De par l'expérience gagnée dans leurs cours techniques, les élèves de YH étaient manifestement plus à l'aise avec la résolution de problèmes, la manipulation de tableaux, graphiques et formules, ... Les élèves de l'enseignement général rencontraient à ce sujet des difficultés sensibles.

Signalons enfin qu'à ce stade-ci, l'image mentale d'aire ou de surface sous une courbe n'est apparue qu'épisodiquement chez les élèves, suivant une intention affichée dans la construction du cours.

12.3.3 Extraits des notes fournies aux élèves concernant la section 2 : « Comment discrétiser un phénomène continu ? »

Un processus de discrétisation en escaliers

Il s'agit de reconnaître les caractéristiques essentielles du processus qui a permis de résoudre le dernier problème de la section précédente.

La question était d'évaluer un nombre — l'énergie électrique consommée en un jour — associé à une grandeur variable au cours de la journée : la puissance électrique demandée. Il est fondamental d'expliciter ce que veut dire « associé » dans la phrase précédente. Cela signifie très exactement que *dans le cas particulier où la puissance demandée est* ***constante*** *durant un intervalle de temps fixé, l'énergie consommée pendant cet intervalle de temps est le* ***produit*** *de la puissance demandée par la durée de l'intervalle de temps.* C'est le fait que l'énergie soit « *associée* » *de cette façon-là* à la puissance qui sous-tend tout le processus en jeu !

Ceci précisé, le processus consiste à décomposer la journée de 24 heures de telle sorte que sur chaque sous-intervalle de cette décomposition, la puissance électrique — *a priori* variable avec le temps — puisse être assimilée raisonnablement à une constante.

La décomposition du domaine d'une fonction de façon à assimiler cette fonction à une fonction constante sur chaque sous-intervalle de la décomposition est ce qu'on appelle *un processus de discrétisation en escaliers* de la fonction en question. Ce processus de discrétisation permet de remplacer la fonction donnée par une fonction constante par morceaux qui en constitue une « bonne approximation ».

Pour le problème de l'énergie électrique, ce processus de discrétisation permet de remplacer un seul produit (énergie = puissance × temps) — qui n'a plus de signification dès que la puissance n'est pas constante — par une *somme de produits*. On a ainsi obtenu une valeur approchée de cette énergie en l'encadrant par des sommes du type

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot \triangle t_i$$

où P_i est une certaine valeur de la puissance — choisie pour majorer ou minorer selon le cas la puissance réelle sur l'intervalle de temps $\triangle t_i$ — et n est le nombre d'intervalles de temps nécessaires pour découper de manière adaptée les 24 heures d'une journée.

Cette construction d'une approximation d'un nombre à partir de la discrétisation d'une fonction se révèle être un outil particulièrement approprié dans tout un ensemble de problèmes. Ces problèmes ont une caractéristique commune : leur relation initiale avec un « produit élémentaire ».

La notion de somme de Darboux

La définition de subdivision d'un intervalle.

On appelle *subdivision (en n parties)* de l'intervalle $[a; b]$ la donnée d'une suite ordonnée de $n + 1$ points

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{i-1} < a_i < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$$

Les n sous-intervalles

$$[a; a_1] = [a_0; a_1], [a_1; a_2], \ldots, [a_{i-1}; a_i], \ldots, [a_{n-1}; a_n] = [a_{n-1}; b]$$

qui apparaissent ainsi sont appelés les intervalles *sous-jacents* à la subdivision.

La définition de sommes de Darboux.

On considère une fonction $f(x)$ définie sur un intervalle $[a; b]$ et une subdivision $D : a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{i-1} < a_i < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ de cet intervalle. On appelle **somme de Darboux inférieure** pour la fonction $f(x)$ et la subdivision D le nombre $s(f(x); D)$ défini par

$$s(f(x); D) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$$

où, quel que soit $1 \leqslant i \leqslant n$, le nombre x_i est défini comme celui qui donne à la fonction $f(x)$ sa *plus petite valeur* sur le sous-intervalle $[a_{i-1}; a_i]$. On note souvent $\triangle x_i$ la longueur $a_i - a_{i-1}$ du sous-intervalle $[a_{i-1}; a_i]$ dans lequel se trouve le nombre x_i. Cela permet d'écrire la définition précédente sous la forme

$$s(f(x); D) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \triangle x_i$$

Pareillement, on appelle **somme de Darboux supérieure** pour la fonction $f(x)$ et la subdivision D le nombre $S(f(x); D)$ défini par

$$S(f(x); D) = \sum_{i=1}^{n} f(X_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$$

où, quel que soit $1 \leqslant i \leqslant n$, le nombre X_i est défini comme celui qui donne à la fonction $f(x)$ sa *plus grande valeur* sur le sous-intervalle $[a_{i-1}; a_i]$. On note encore $\triangle X_i$ la longueur $a_i - a_{i-1}$ du sous-intervalle $[a_{i-1}; a_i]$ dans lequel se trouve le nombre X_i. Cela permet d'écrire la définition précédente sous la forme

$$S(f(x); D) = \sum_{i=1}^{n} f(X_i) \cdot \triangle X_i$$

On a évidemment $\triangle x_i = a_i - a_{i-1} = \triangle X_i$.

. . . .

(Le cas des fonctions monotones.)

. . . .

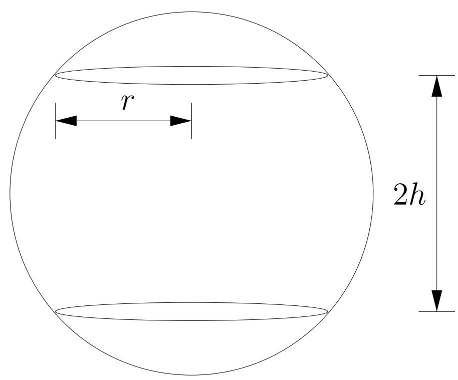
Quelques problèmes d'encadrement d'une grandeur par des sommes de Darboux

. . . .

(Le surplus du consommateur.)

. . . .

Problème 4 *On considère un tonneau sphérique, c'est-à-dire une sphère coupée par deux plans parallèles équidistants du centre de la sphère. On connaît la hauteur $2h$ du tonneau ainsi que le rayon r de son couvercle.*



On demande de décrire des encadrements de plus en plus précis du volume de ce tonneau.

. . . .

(La mesure des aires. Les sommes trapézoïdales.)

. . . .

12.3.4 Commentaires et remarques

Le temps consacré en classe à l'étude de la section 2 s'est réparti comme suit :

- CT : 3 séances de 50 minutes,
- LT : 3 séances de 50 minutes,
- YH : 4 séances de 50 minutes.

Cette section était la première à demander de la part des élèves une lecture autonome d'un texte théorique, bien qu'il ne s'agisse encore ici que de définitions et de notations. Et des embarras de lecture ont encore une fois été relevés, notamment au niveau des notations (symbole de sommation σ, ...). De plus, certains élèves ont rencontré des difficultés à évoquer correctement certains prérequis (fonctions croissantes ou décroissantes par exemple), ou à porter un regard critique sur le souvenir qu'ils avaient de ces prérequis.

Le niveau de concentration des élèves de CT et LT a été généralement faible. Lors des activités de mise au point du vocabulaire théorique, une bonne part des élèves étaient inattentifs, discutaient de sujets étrangers au cours, ...Paradoxalement, et malgré un chahut permanent dans une classe voisine, les élèves de YH ont été capables de travailler de manière continue, c'est-à-dire sans interruption pendant deux séances consécutives, avec une attention qui ne fut presque jamais prise en défaut.

Le problème du tonneau sphérique

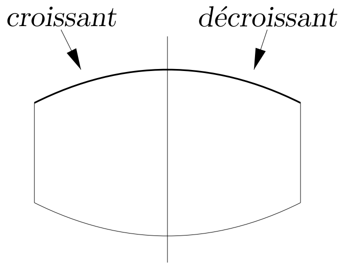
Plusieurs difficultés significatives nous ont frappés à l'occasion de ce problème :

- les élèves ne l'ont associé aux problèmes précédents qu'avec peine,
- ils n'ont découvert que très lentement la nécessité d'y faire apparaître une fonction,
- ils ont eu bien de la peine à déterminer l'expression algébrique de la fonction en question ; dans un premier temps, ils ont même eu recours systématiquement à des mesures pratiquées sur des dessins à l'échelle pour obtenir les rayons des cylindres utiles sans établir aucun lien *a priori* entre la situation étudiée et — par exemple — le théorème de Pythagore.

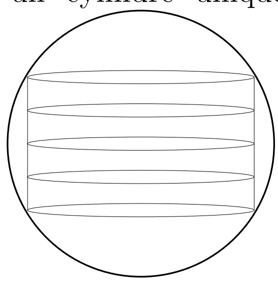
En plus des difficultés précédentes, des difficultés d'interprétation des notations (par exemple $2h$ pour la hauteur du cylindre au lieu de h), et des difficultés à évoquer certaines formules élémentaires telles que celles du volume du cylindre ont été observées.

Certaines modélisations peu opportunes se sont révélées à partir de dessins caractéristiques :

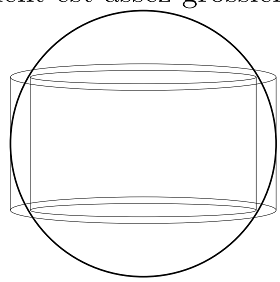
sur base de ce dessin, l'élève voulait réaliser deux calculs qu'il imaginait complètement différents :



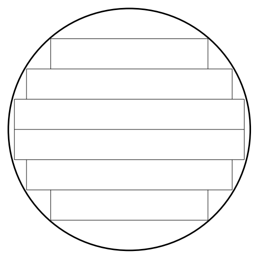
ce découpage-ci n'apporte rien par rapport à un cylindre unique :



l'approximation qui résulte de cet encadrement est assez grossière :



Mais le dessin ci-contre a indiqué le début de la maîtrise du processus chez les élèves concernés :



Toutes proportions gardées, venir à bout d'un tel ensemble de difficultés a pris plus de temps dans les classes de CT et LT que dans celle de YH.

12.4. Un compte-rendu de l'expérimentation : la phase de condensation

12.4.1 Extraits des notes fournies aux élèves concernant la section 3 : « Le contrôle de l'approximation »

. . . .

(Sommes de Darboux et mesure d'aire. Sommes de Darboux et encadrements associés à une fonction monotone.)

. . . .

Encadrements et sommes de Darboux

Si le calcul de sommes de Darboux a été entrepris pour approcher une grandeur G — s'il s'agit, par exemple, de calculer l'aire délimitée par le graphe d'une fonction $f(x)$, les verticales $x = a$, $x = b$ et l'horizontale $y = 0$ — alors on déduit de la construction des sommes de Darboux inférieure et supérieure une *inégalité d'encadrement* : $s(f(x); D) \leqslant G \leqslant S(f(x); D)$ et on interprète la différence $S(f(x); D) - s(f(x); D)$ comme une *mesure de la précision de l'approximation* de G par chacune des sommes de Darboux $s(f(x); D)$ ou $S(f(x); D)$, puisque

$$\begin{aligned} G - s(f(x); D) &\leqslant S(f(x); D) - s(f(x); D) \\ S(f(x); D) - G &\leqslant S(f(x); D) - s(f(x); D) \end{aligned}$$

Problème 5 *On veut calculer l'aire G du triangle curviligne délimité par l'intervalle $[0; 1]$ sur l'axe des x, la verticale $x = 1$ et le graphe de la fonction $f(x) = x^2$.*

1. *Déterminer une mesure de la précision de l'approximation de l'aire G par chacune des sommes de Darboux correspondant aux subdivisions de l'intervalle $[0; 1]$ décrites ci-dessous*
   - D_1 : $a_i = i \cdot \frac{1}{10}$ *pour* $0 \leqslant i \leqslant 10$,
   - D_2 : $a_i = i \cdot \frac{1}{10^2}$ *pour* $0 \leqslant i \leqslant 10^2$,
   - *etc.*
2. *Situer ces différentes valeurs de $s(x^2; D)$ et de $S(x^2; D)$ sur la droite réelle.*
3. *Expliciter cette mesure de précision lorsque la subdivision choisie D de l'intervalle $[0; 1]$ est formée de sous-intervalles de longueur constante mais non nécessairement égale à $\frac{1}{10^n}$?*
4. Majorer *cette mesure de précision lorsque la subdivision D choisie de l'intervalle $[0; 1]$ est formée de sous-intervalles de longueur* non constante *?*

5. *Comment peut-on généraliser tout ce qui précède au cas d'une fonction* $f(x)$ monotone *sur un intervalle* $[a; b]$. *Plus précisément, comment peut-on* majorer *la mesure de l'approximation* $S(f(x); D) - s(f(x); D)$ *lorsque la fonction* $f(x)$ *considérée est monotone et que la subdivision* D *choisie de l'intervalle* $[a; b]$ *est quelconque ?*

12.4.2 Extraits des notes fournies aux élèves concernant la section 4 : « Une définition procédurale de l'intégrale »

Comment mesurer la précision de l'approximation dans le cas des fonctions monotones ?

Les fonctions croissantes : le cas d'une subdivision régulière.

Si $f(x)$ est une fonction *croissante* sur l'intervalle $[a;b]$ muni de la subdivision *régulière* D définie par

$$D = \left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right)_{0 \leqslant i \leqslant n}$$

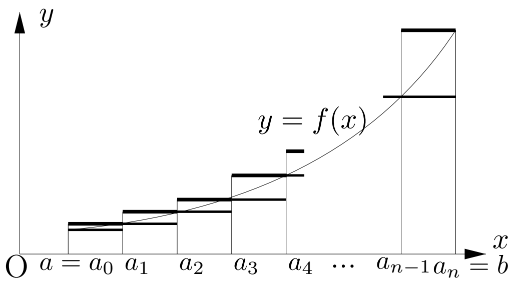
on établit une formule de mesure de l'approximation en explicitant les sommes de Darboux qui y apparaissent :

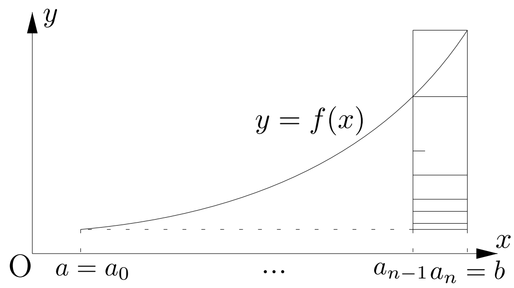
$$\begin{aligned} S(f(x);D) - s(f(x);D) &= \sum_{i=1}^{n} f(a_i) \cdot (a_i - a_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(a_{i-1}) \cdot (a_i - a_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(a_i) - f(a_{i-1})) \cdot (a_i - a_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(a_i) - f(a_{i-1})) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (f(a_i) - f(a_{i-1})) \end{aligned}$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot (f(a_1) - f(a_0) + f(a_2) - f(a_1) + \cdots + f(a_n) - f(a_{n-1}))$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot (-f(a_0) + f(a_n)) = \frac{b-a}{n} \cdot (f(b) - f(a))$$

On visualise ce raisonnement grâce à l'interprétation des sommes de Darboux en termes de mesure d'aires. Il suffit en effet de translater les petits rectangles appropriés au-dessus d'un sous-intervalle quelconque de la subdivision, par exemple $[a_{n-1}; a_n]$:





Les fonctions croissantes : le cas d'une subdivision quelconque.

Si la longueur des sous-intervalles de la subdivision considérée n'est plus constante, on ne sait obtenir qu'une *majoration* de l'erreur.

Plus précisément, on définit la *maille* δ d'une subdivision quelconque

$$D : a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{i-1} < a_i < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$$

par

$$\delta = \max\{a_i - a_{i-1} : 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

On calcule alors

$$\begin{aligned} S(f(x);D) - s(f(x);D) &= \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\cdot(a_i - a_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(a_{i-1})\cdot(a_i - a_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(f(a_i) - f(a_{i-1}))\cdot((a_i - a_{i-1})) \end{aligned}$$

Or, comme la fonction $f(x)$ est croissante, on a $\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n\ :\ f(a_i) - f(a_{i-1}) \geqslant 0$. D'autre part, suivant la définition de maille : $\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n\ :\ a_i - a_{i-1} \leqslant \delta$. On en déduit

$$S(f(x);D) - s(f(x);D) = \sum_{i=1}^{n}(f(a_i) - f(a_{i-1}))\cdot((a_i - a_{i-1})) \leqslant \sum_{i=1}^{n}(f(a_i) - f(a_{i-1}))\cdot\delta$$

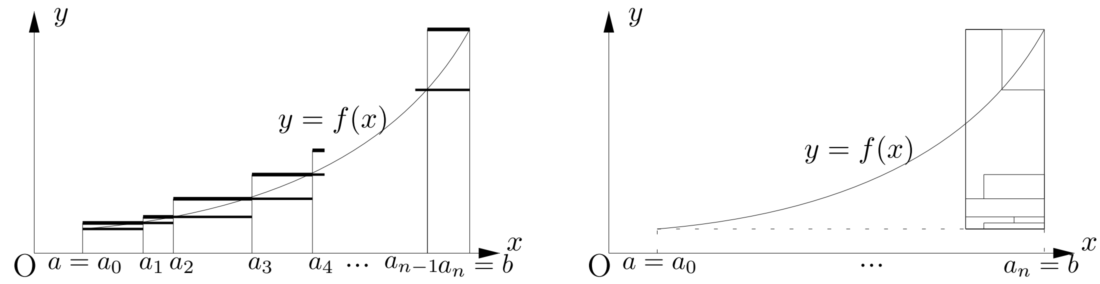
Mais, — et comme dans le cas d'une subdivision régulière — on a alors

$$\sum_{i=1}^{n}(f(a_i) - f(a_{i-1}))\cdot\delta = (f(a_n) - f(a_0))\cdot\delta = (f(b) - f(a))\cdot\delta$$

de telle sorte que finalement, la majoration attendue s'écrit

$$0 \leqslant S(f(x); D) - s(f(x); D) \leqslant (f(b) - f(a)) \cdot \delta$$

On visualise encore ce raisonnement en termes de mesure d'aires. On translate les petits rectangles appropriés jusqu'à ce que leur bord droit se trouve à la verticale du point d'abscisse a_n. La somme de leurs aires ne peut pas s'exprimer par une formule simple, mais ne peut que se majorer par l'aire $(f(b) - f(a)) \cdot \delta$ d'un grand rectangle :



. . . .

(Les fonctions décroissantes.)

. . . .

Conclusion : la mesure de la précision de l'approximation pour une fonction monotone.

Si $f(x)$ est une fonction *monotone* sur l'intervalle $[a; b]$ muni d'une subdivision quelconque D de maille δ, on a une formule de mesure de la précision de l'approximation :

$$0 \leqslant S(f(x); D) - s(f(x); D) \leqslant |f(b) - f(a)| \cdot \delta$$

Le membre de droite de cette formule permet de retrouver celui obtenu dans le cas d'une subdivision régulière puisque, si

$$D = \left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right)_{0 \leqslant i \leqslant n}$$

est une telle subdivision, sa maille δ est alors donnée par

$$\delta = \frac{b-a}{n}$$

Un exemple.

On considère la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0; 1]$, et les subdivisions régulières $D_n = \left(i \cdot \frac{1}{10^n}\right)_{0 \leqslant i \leqslant 10^n}$. La maille d'une telle subdivision est $\frac{1}{10^n}$, d'où

$$0 \leqslant S(x^2; D_n) - s(x^2; D_n) \leqslant (1 - 0) \cdot \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10^n}$$

et même, puisque les subdivisions sont régulières,

$$S(x^2; D_n) - s(x^2; D_n) = \frac{1}{10^n}$$

Ainsi, pour calculer à un centième près l'aire du triangle curviligne délimité par l'intervalle $[0; 1]$ sur l'axe des x, la verticale $x = 1$ et le graphe de $f(x) = x^2$ (cfr. le problème 5), il faut *au moins* utiliser une subdivision du type

$$D_2 = \left(i \cdot \frac{1}{10^2}\right)_{0 \leqslant i \leqslant 10^2}$$

. . . .

(Un autre exemple.)

. . . .

Une définition de l'intégrale

La notion de raffinement d'une subdivision.

Si D est une subdivision d'un intervalle $[a; b]$, un *raffinement* D' de la subdivision D est n'importe quelle subdivision de l'intervalle $[a; b]$ qui contient *au moins* les mêmes points que ceux de D, ce qu'on note assez naturellement $D \subset D'$.

. . . .

(Un exemple de raffinement. L'effet du raffinement d'une subdivision.)

. . . .

La notion d'emboîtement de subdivisions.

On définit une *suite emboîtée* $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de subdivisions* de l'intervalle $[a; b]$ en demandant que

- quel que soit $n \in \mathbb{N}$: D_n soit une subdivision de l'intervalle $[a; b]$,
- quel que soit $n \in \mathbb{N}$: $D_n \subset D_{n+1}$.

. . . .

(Un exemple d'emboîtement.)

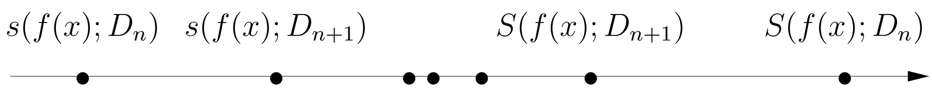
. . . .

L'effet d'un emboîtement de subdivisions.

On déduit immédiatement des résultats précédents une *chaîne d'encadrements* :

$$\cdots \leqslant s(f(x); D_n) \leqslant s(f(x); D_{n+1}) \leqslant \cdots \leqslant S(f(x); D_{n+1}) \leqslant S(f(x); D_n) \leqslant \cdots$$

qui détermine une suite d'intervalles fermés emboîtés $[s(f(x); D_n); S(f(x); D_n)]$ sur la droite réelle :



Une définition d'intégrale.

Pourvu que la fonction $f(x)$ soit monotone sur l'intervalle $[a; b]$, on dispose d'une formule de mesure de la précision de l'approximation ou de l'encadrement :

$$0 \leqslant S(f(x); D_n) - s(f(x); D_n) \leqslant |f(b) - f(a)| \cdot \delta_n$$

où δ_n est la maille de la subdivision D_n. Comme cette formule est valable quel que soit l'entier naturel n, on en tire

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} s(f(x); D_n) = \lim_{n\to\infty} S(f(x); D_n)$$

En d'autres termes, et sous les hypothèses retenues, les sommes de Darboux inférieure et supérieure sont d'autant plus proches les unes des autres que la maille des subdivisions qui les définissent est proche de 0, ce qui correspond exactement à ce que la plupart des problèmes déjà rencontrés ont permis d'observer expérimentalement.

On considère une fonction $f(x)$ monotone sur un intervalle $[a; b]$.
A une suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subdivisions emboîtées de l'intervalle $[a; b]$ dont les mailles δ_n tendent vers 0 :

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$$

on associe le nombre réel appelé intégrale de $f(x)$ de a à b, *noté $\int_a^b f(x)dx$, et défini par*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} s(f(x); D_n) = \lim_{n\to\infty} S(f(x); D_n)$$

En ce sens, l'intégrale d'une fonction $f(x)$ entre a et b est la valeur « exacte » de la grandeur que les sommes de Darboux se contentaient d'encadrer. A ce stade de la construction, cette valeur exacte est le résultat d'un processus d'approximations successives.

Quelques exemples élémentaires de calcul d'une intégrale

Il s'agit de calculer

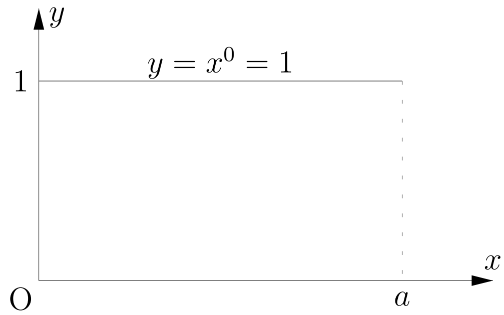
$$\int_0^a x^N dx$$

pour les premières valeurs entières de l'exposant N.

Deux cas triviaux.

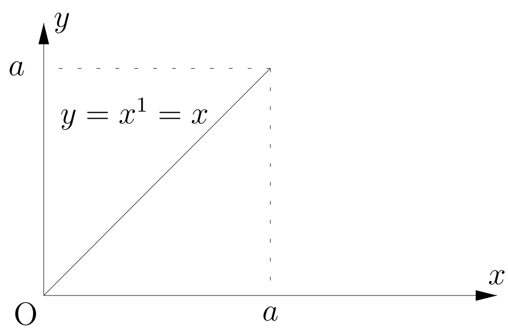
Dès qu'on interprète l'intégrale en termes de mesure d'aire, il est bien clair que

$$\int_0^a 1dx = a \cdot 1 = a$$



et

$$\int_0^a xdx = \frac{1}{2}a \cdot a = \frac{a^2}{2}$$



Si k est un nombre réel (positif), on obtient pareillement

$$\int_0^a kxdx = \frac{1}{2}a \cdot ka = \frac{ka^2}{2}$$

Un calcul plus général.

On considère la suite de subdivisions régulières emboîtées $D_n = \left(i \cdot \frac{a}{10^n}\right)_{0 \leqslant i \leqslant 10^n}$, de mailles $\delta_n = \frac{a}{10^n}$. Il est clair que $\lim\limits_{n \to \infty} \delta_n = 0$. On calcule alors

$$S\left(x^N; D_n\right) = \sum_{i=1}^{10^n} \left(i \cdot \frac{a}{10^n}\right)^N \cdot \frac{a}{10^n} = \left(\frac{a}{10^n}\right)^{N+1} \cdot \sum_{i=1}^{10^n} i^N$$

Mais on ne sait poursuivre le travail que si on dispose d'une formule permettant de calculer la somme $\sum_{i=1}^{p} i^N$ des N^e puissances des p premiers nombres entiers ... Les formules calculant la somme de puissances données des p premiers nombres entiers ont été obtenues de diverses façons dans le courant du XVII^e^ siècle. Pour les premières puissances, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} i &= \frac{p(p+1)}{2} \\
\sum_{i=1}^{p} i^2 &= \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} \\
\sum_{i=1}^{p} i^3 &= \frac{p^2(p+1)^2}{4} \\
\sum_{i=1}^{p} i^4 &= \frac{p(p+1)(2p+1)(3p^2+3p-1)}{30} \\
\sum_{i=1}^{p} i^5 &= \frac{p^2(p+1)^2(2p^2+2p-1)}{12} \\
&\mathit{etc}\ \ldots
\end{aligned}$$

A titre documentaire, une formule qui calcule une telle somme dans le cas d'une puissance *arbitraire* a été obtenue par J. Bernoulli (1654-1705) ; cette formule générale ne sera pas utilisée dans la suite.

Problème 6 *A l'aide de ce qui précède, calculer* $\int_0^a x^N dx$ *comme* $\lim_{n\to\infty} S(x^N; D_n)$

- *d'abord pour $N = 1$, et comparer avec le résultat déjà obtenu plus haut,*
- *ensuite pour $N = 2$, 3, 4 et 5.*

Conjecturer *en conséquence une formule générale pour* $\int_0^a x^N dx$. *Faire de même pour* $\int_a^b x^N dx$ *lorsque* $0 < a < b$.

12.4.3 Commentaires et remarques

Le temps consacré en classe à l'étude des sections 3 et 4 s'est réparti comme suit :

- CT : 4 séances de 50 minutes,
- LT : 6 séances de 50 minutes,
- YH : 2 séances de 50 minutes.

A ce stade de l'expérience, les enseignants ont commencé à reprendre les classes en main de manière plus directive, pressés qu'ils étaient par le peu de temps disponible encore pour achever les matières de l'année.

Les notions théoriques.

Le rythme de lecture des passages théoriques s'est donc accéléré, l'explication des difficultés étant (presque toujours) prise en charge par l'enseignant.

LT a organisé une *lecture dirigée* des parties théoriques des sections 3 et 4 à partir de la projection de transparents. Il isolait les passages essentiels dans le texte et posait diverses questions de compréhension immédiate. L'objectif était de mettre en valeur ce que pouvait signifier une lecture active et critique d'un texte mathématique.

Des difficultés quant à l'interprétation numérique et graphique des formules sont à nouveau apparues. Par exemple, la notation :

$$a_i = a + i.\frac{b-a}{n}$$

pour i entier compris entre 0 et n, a posé problème. Quant LT a demandé d'expliciter le lien entre la démonstration graphique de la formule :

$$S(f(x); D) - s(f(x); D) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$$

où f est une fonction croissante sur l'intervalle $[a; b]$ et la démonstration algébrique de cette formule, les réponses ont été lentes à venir et peu précises.

Alors que les élèves de YH étaient particulièrement actifs dans les phases de résolution de problèmes, ils ont manifesté un blocage psychologique vis-à-vis de la lecture d'un texte. Ce blocage ne s'est pas dissipé lorsque la lecture a été précédée d'une explication détaillée du contenu des notes dans un respect scrupuleux de leur structure, des notations, ... Cette difficulté majeure de lecture a été très clairement exprimée par un élève : « *Je comprends quand vous expliquez, mais quand je lis, je comprends que dalle !!!* »

Le problème de l'aire sous x^2 et l'effet des raffinements de subdivisions.

Le problème a été presque entièrement résolu sous la direction des enseignants. Il était en effet important d'arriver rapidement à bout de calculs numériques illustrant de manière simple et convaincante l'effet des raffinements de subdivisions.

Ce problème n'a plus été retenu dans les notes distribuées aux élèves de YH, en partie pour gagner du temps, mais surtout parce qu'au vu du succès des problèmes précédents, celui-ci n'avait plus rien d'indispensable.

12.4.4 Extraits des notes fournies aux élèves concernant la section 5 : « Un théorème miraculeux ou naturel ? »

Quelques calculs de limites et leurs conséquences

A la suite du problème 6, il s'agit de calculer $\int_0^a x^N dx$ pour les premières valeurs entières de l'exposant N. On utilise à cet effet la suite de subdivisions régulières emboîtées $D_n = \left(i \cdot \frac{a}{10^n}\right)_{0 \leqslant i \leqslant 10^n}$ de l'intervalle $[0; a]$, de mailles $\delta_n = \frac{a}{10^n}$, pour lesquelles on a bien $\lim\limits_{n \to \infty} \delta_n = 0$. On calcule alors

$$S\left(x^N; D_n\right) = \sum_{i=1}^{10^n} \left(i \cdot \frac{a}{10^n}\right)^N \cdot \frac{a}{10^n} = \left(\frac{a}{10^n}\right)^{N+1} \cdot \sum_{i=1}^{10^n} i^N$$

On pose désormais, afin d'alléger les notations :

$$p = p(n) = 10^n$$

d'où $S\left(x^N; D_n\right) = \left(\frac{a}{p}\right)^{N+1} \cdot \sum_{i=1}^{p} i^N$. On a alors :

$$\lim_{n \to \infty} p = \lim_{n \to \infty} p(n) = \lim_{n \to \infty} 10^n = +\infty$$

Le cas $N = 2$.

La formule auxiliaire $\sum_{i=1}^{p} i^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$ permet de calculer

$$\begin{aligned}
S\left(x^2; D_n\right) &= \left(\frac{a}{p}\right)^3 \cdot \sum_{i=1}^{p} i^2 \\
&= \left(\frac{a}{p}\right)^3 \cdot \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} \\
&= \frac{a^3}{3} \cdot \frac{p}{p} \cdot \frac{p+1}{p} \cdot \frac{2p+1}{p} \\
&= \frac{a^3}{3} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{2p}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\int_0^a x^2 dx = \lim_{n\to\infty} S\left(x^2; D_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a^3}{3} \cdot 1 \cdot \left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{2p}\right)$$
$$= \frac{a^3}{3} \cdot \lim_{p\to\infty} \left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{2p}\right)$$
$$= \frac{a^3}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{a^3}{3}$$

. . . .

(Le cas $N = 3$. Le cas $N = 4$. Le cas $N = 5$. Un retour en arrière : le cas $N = 1$.)

. . . .

Le calcul de $\int_a^b x^N dx$ pour $0 < a < b$.

On observe d'abord que, puisque $0 < a < b$ et $N \in \mathbb{N}$, la fonction $f(x) = x^N$ est croissante sur l'intervalle $[a; b]$. On utilise la suite de subdivisions régulières emboîtées $D_n = \left(a + i \cdot \frac{b-a}{10^n}\right)_{0 \leqslant i \leqslant 10^n}$ de l'intervalle $[a; b]$, de mailles $\delta_n = \frac{b-a}{10^n}$ pour lesquelles on a bien $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$. On calcule alors

$$S\left(x^N; D_n\right) = \sum_{i=1}^{10^n} \left(a + i \cdot \frac{b-a}{10^n}\right)^N \cdot \frac{b-a}{10^n} = \sum_{i=1}^{p} \left(a + i \cdot \frac{b-a}{p}\right)^N \cdot \frac{b-a}{p}$$

où on a posé, comme auparavant : $p = p(n) = 10^n$, avec donc $\lim_{n\to\infty} p = \lim_{n\to\infty} 10^n = +\infty$.

L'essentiel du travail consiste alors à développer $\left(a + i \cdot \frac{b-a}{p}\right)^N$ suivant les puissances de i. Comme on va le voir déjà dans le cas particulier de $N = 2$, ce développement est un peu long et nécessite *toutes* les formules auxiliaires intermédiaires.

On commence par développer le carré dans

$$S\left(x^2; D_n\right) = \sum_{i=1}^{p} \left(a + i \cdot \frac{b-a}{p}\right)^2 \cdot \frac{b-a}{p}$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \left(a^2 + 2a \cdot \frac{b-a}{p} \cdot i + \left(\frac{b-a}{p}\right)^2 \cdot i^2\right) \cdot \frac{b-a}{p}$$

On distribue le facteur $\frac{b-a}{p}$ et, après regroupement, on met en évidence les facteurs communs des sommes de mêmes puissances de i :

$$\begin{aligned} S\left(x^2;D_n\right) &= \sum_{i=1}^{p} a^2\cdot\frac{b-a}{p}+\sum_{i=1}^{p}2a\left(\frac{b-a}{p}\right)^2\cdot i+\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{b-a}{p}\right)^3\cdot i^2 \\ &= a^2\cdot\frac{b-a}{p}\sum_{i=1}^{p}1+2a\left(\frac{b-a}{p}\right)^2\sum_{i=1}^{p}i+\left(\frac{b-a}{p}\right)^3\sum_{i=1}^{p}i^2 \end{aligned}$$

On utilise alors les deux formules auxiliaires $\sum_{i=1}^{p} i=\frac{p(p+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^{p} i^2=\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$, — sans oublier que $\sum_{i=1}^{p}1=p$ — pour obtenir :

$$\begin{aligned} &S\left(x^2;D_n\right) \\ &= \frac{a^2(b-a)}{p}\cdot p+2a\left(\frac{b-a}{p}\right)^2\cdot\frac{p(p+1)}{2}+\left(\frac{b-a}{p}\right)^3\cdot\frac{p(p+1)(2p+1)}{6} \\ &= a^2(b-a)+a(b-a)^2\cdot\frac{p}{p}\cdot\frac{p+1}{p}+\frac{(b-a)^3}{3}\cdot\frac{p}{p}\cdot\frac{p+1}{p}\cdot\frac{2p+1}{2p} \\ &= a^2(b-a)+a(b-a)^2\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{p}\right)+\frac{(b-a)^3}{3}\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{p}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2p}\right) \end{aligned}$$

On achève alors comme dans les calculs précédents :

$$\begin{aligned} &\int_a^b x^2dx \\ &= \lim_{n\to\infty} S\left(x^2;D_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{a^2(b-a)+a(b-a)^2\cdot\left(1+\frac{1}{p}\right)+\frac{(b-a)^3}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{p}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2p}\right)\right\} \\ &= \lim_{p\to\infty}\left\{a^2(b-a)+a(b-a)^2\cdot\left(1+\frac{1}{p}\right)+\frac{(b-a)^3}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{p}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2p}\right)\right\} \\ &= a^2(b-a)+a(b-a)^2\cdot 1+\frac{(b-a)^3}{3}\cdot 1\cdot 1 \\ &= \frac{3a^2b-3a^3+3ab^2-6a^2b+3a^3+b^3-3b^2a+3ba^2-a^3}{3} \\ &= \frac{b^3-a^3}{3}=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3} \end{aligned}$$

. . . .

(Une formule conjecturale pour $\int_a^b x^N dx$. Une formule conjecturale d'additivité.)

. . . .

Un théorème miraculeux

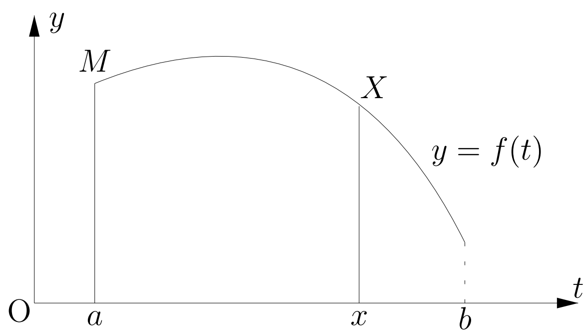
La notion de fonction d'accumulation.

On considère une fonction $f(t)$ d'une variable t définie sur l'intervalle $[a;b]$. On appelle *fonction d'accumulation associée à la fonction* $f(t)$ *sur l'intervalle* $[a;b]$: la fonction, notée $A(x)$, d'une (autre) variable x, définie sur le *même* intervalle $[a;b]$ par

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Si on interprète l'intégrale en termes de mesure d'aires, la fonction d'accumulation $A(x)$ associée à la fonction $f(t)$ sur l'intervalle $[a;b]$ est la *fonction* de la variable x qui décrit la mesure de l'aire délimitée par

- le graphe de $y = f(t)$,
- l'horizontale $y = 0$,
- la verticale (fixe) $t = a$,
- et la verticale $t = x$, *variable avec l'abscisse* x.



$$A(x) = \int_a^x f(t)dt = Aire(aMXx)$$

Une remarque et quelques exemples.

Si $A(x)$ est une fonction d'accumulation définie sur l'intervalle $[a;b]$, on a *toujours* :

$$A(a) = 0$$

En se limitant à ce qui a été *démontré* jusqu'ici, on peut calculer les fonctions d'accumulation associées à la fonction $f(t) = t^N$, sur l'intervalle $[a;b]$ avec $0 < a < b$, tant que $N = 1$, 2, 3, 4 ou 5. On trouve

$$f(t) = t \qquad : \qquad A(x) = \int_a^x tdt = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$f(t) = t^2 \quad : \quad A(x) = \int_a^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

$$f(t) = t^3 \quad : \quad A(x) = \int_a^x t^3 dt = \frac{x^4}{4} - \frac{a^4}{4}$$

$$f(t) = t^4 \quad : \quad A(x) = \int_a^x t^4 dt = \frac{x^5}{5} - \frac{a^5}{5}$$

$$f(t) = t^5 \quad : \quad A(x) = \int_a^x t^5 dt = \frac{x^6}{6} - \frac{a^6}{6}$$

Le miracle . . .

A partir des résultats déjà obtenus, on peut imaginer qu'un petit miracle ait lieu en ce qui concerne le calcul des intégrales, et cette impression résulte de l'enchaînement de trois observations.

- Si on parvient à déterminer la *fonction* d'accumulation associée à une fonction $f(t)$ sur un intervalle $[a;b]$, alors on pourra — par définition ! — évaluer n'importe quelle intégrale de la fonction $f(t)$ sur n'importe quel intervalle contenu dans l'intervalle $[a;b]$.
- Lorsqu'on veut étudier les variations d'une fonction donnée — ici, il s'agirait d'une fonction d'accumulation — une stratégie relativement efficace consiste à calculer d'abord la *dérivée* de cette fonction.
- Dans les cas où des fonctions d'accumulation ont été explicitement calculées, on obtient

$$\begin{array}{lclcl}
f(t) = t & : & A(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{a^2}{2} & \longrightarrow & A'(x) = \dfrac{2x}{2} - 0 = x \\
f(t) = t^2 & : & A(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{a^3}{3} & \longrightarrow & A'(x) = \dfrac{3x^2}{3} - 0 = x^2 \\
f(t) = t^3 & : & A(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{a^4}{4} & \longrightarrow & A'(x) = \dfrac{4x^3}{4} - 0 = x^3 \\
f(t) = t^4 & : & A(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{a^5}{5} & \longrightarrow & A'(x) = \dfrac{5x^4}{5} - 0 = x^4 \\
f(t) = t^5 & : & A(x) = \dfrac{x^6}{6} - \dfrac{a^6}{6} & \longrightarrow & A'(x) = \dfrac{6x^5}{6} - 0 = x^5
\end{array}$$

On déduit de ces observations l'énoncé d'un théorème qu'il s'agirait de démontrer :

> *si $A(x)$ est la fonction d'accumulation associée à une fonction $f(t)$ sur un intervalle $[a;b]$, alors*
> $$A'(x) = f(x)$$

Mais un tel théorème aurait des conséquences suffisamment remarquables pour qu'on le qualifie de miraculeux. En effet, la relation $A'(x) = f(x)$ permettrait de relier entre eux deux processus de calculs *a priori* différents, à savoir :

- le processus inverse de la dérivation, qui obéit à des règles de calcul simples et efficaces, mais qui n'a pas d'interprétation ni de signification géométrique, physique, ou autres,
- le processus d'intégration, dont l'étendue des applications géométriques, physiques, économiques ou autres est manifeste, mais qui — en dehors du calcul numérique — ne se laisse pas facilement réduire à des algorithmes de calcul simples.

. . . .

(La notion de primitive.)

. . . .

La démonstration du miracle

Cette démonstration va s'effectuer en deux parties.

Lemme.

On considère une fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle $[a;b]$, avec $a \neq b$. Si m et M sont deux nombres tels que, quel que soit $x \in [a;b]$:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

alors on a aussi

$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leqslant M$$

. . . .

(Démonstration du lemme.)

. . . .

Théorème.

Si $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la fonction d'accumulation associée à une fonction $f(t)$ continue sur un intervalle $[a;b]$, alors

$$A'(x) = f(x)$$

Preuve du théorème.

Par définition de dérivée d'une fonction, il s'agit de calculer

$$A'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

On suppose d'abord $h > 0$. D'après la formule d'additivité, on a

$$A(x+h) - A(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

d'où

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Notons alors

- x_0 : un nombre qui donne à la fonction $f(x)$ sa plus petite valeur sur l'intervalle $[x; x+h]$,
- X_0 : un nombre qui donne à la fonction $f(x)$ sa plus grande valeur sur l'intervalle $[x; x+h]$,

On a donc, quel que soit $t \in [x; x+h]$:

$$f(x_0) \leqslant f(t) \leqslant f(X_0)$$

On applique alors le lemme précédent à la fonction $f(t)$ sur l'intervalle $[x; x+h]$:

$$f(x_0) \leqslant \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)dt \leqslant f(X_0)$$

On en déduit un encadrement de $\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)dt$:

$$f(x_0) \leqslant \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \leqslant f(X_0)$$

Dès lors

$$\lim_{h \to 0} f(x_0) \leqslant \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \leqslant \lim_{h \to 0} f(X_0)$$

ou

$$\lim_{h\to 0} f(x_0) \leqslant A'(x) \leqslant \lim_{h\to 0} f(X_0)$$

Or, comme x_0 et $X_0 \in [x; x+h]$, on a $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0) = f(x)$ et $\lim\limits_{h\to 0} f(X_0) = f(x)$ puisque la fonction $f(x)$ est continue sur l'intervalle $[a; b]$. On a ainsi

$$f(x) \leqslant A'(x) \leqslant f(x)$$

c'est-à-dire

$$A'(x) = f(x)$$

On raisonne de manière analogue dans le cas où $h < 0$. Cela achève alors la démonstration du théorème.

Remarque.

La démonstration ci-dessus n'est pas complète au sens où, par exemple, la formule d'additivité n'a pas été démontrée et, plus généralement, l'existence même de la fonction $\int\limits_a^x f(t)dt$ n'a pas été établie sous les hypothèses mentionnées dans le théorème. Elle n'en contient pas moins les grandes idées d'une démonstration mathématique rigoureuse et complète.

Corollaire.

Lorsque $a > 0$, et quel que soit le nombre réel α,

- *si $\alpha \neq -1$:*

$$\int\limits_a^x t^\alpha dt = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

- *si $\alpha = -1$:*

$$\int\limits_a^x \frac{1}{t} dt = \ln x - \ln a = \ln \frac{x}{a}$$

Preuve du corollaire.

En vertu du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, il suffit de vérifier que

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' &= x^\alpha \\ (\ln x - \ln a)' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

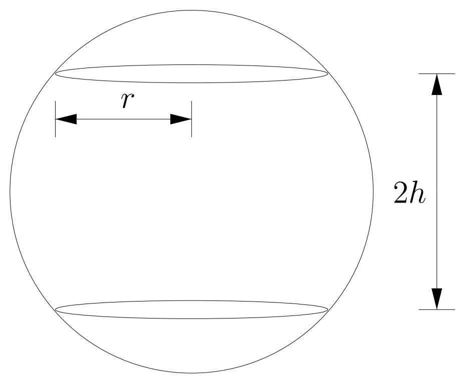
Cela ne présente pas de difficulté nouvelle !

12.4.5 Extraits des notes fournies aux élèves concernant la section 6 : « Réinvestissement »

Avec le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, on dispose d'un outil puissant pour résoudre un très grand nombre de problèmes. On retrouve ici — entre autres — le problème du tonneau sphérique (cfr. problème 4).

Le volume d'un tonneau sphérique

Problème 7 *On considère un tonneau sphérique, c'est-à-dire une sphère coupée par deux plans parallèles équidistants du centre de la sphère. On connaît la hauteur $2h$ du tonneau ainsi que le rayon r de son couvercle.*



On demande de calculer le volume de ce tonneau.

L'aire évanouissante

Problème 8 *On considère la figure curviligne délimitée par l'intervalle $[0;\pi]$ sur l'axe des x, l'intervalle $[0;1]$ sur l'axe des y, la verticale $x = \pi$ et le graphe de $f(x) = \cos x$. On demande de calculer une mesure de l'aire de cette figure.*

La linéarité de l'intégrale

Problème 9 *A l'aide du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, démontrer les deux propriétés suivantes :*

1. *si $f(t)$ et $g(t)$ sont deux fonctions continues définies sur l'intervalle $[a; b]$, alors*

$$\int_a^x (f(t) + g(t))\, dt = \int_a^x f(t)dt + \int_a^x g(t)dt$$

2. *si $f(t)$ est une fonction continue définie sur l'intervalle $[a; b]$ et k un nombre réel, alors*

$$\int_a^x k \cdot f(t)dt = k \cdot \int_a^x f(t)dt$$

Décrire une interprétation géométrique de chacune de ces propriétés.
Quelle(s) relation(s) y a-t-il entre ces deux propriétés et les calculs à réaliser dans les problèmes 7 et 8 ?

Remarque.

Les deux propriétés ci-dessus expriment ce qu'on appelle la *linéarité* de l'intégrale, par rapport aux opérations d'addition et de multiplication par un nombre réel, qui font de l'ensemble des fonctions continues définies sur un intervalle $[a; b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ un *espace vectoriel réel* (de dimension infinie).

. . . .

(Une question de secondes (accélérations et freinages).)

. . . .

12.4.6 Commentaires et remarques

Le temps consacré en classe à l'étude des sections 5 et 6 s'est réparti comme suit :

- CT : 3 séances de 50 minutes,
- LT : 7 séances de 50 minutes,
- YH : 3 séances de 50 minutes.

A ce stade de l'expérience, les enseignants ont continué à mener les classes de manière directive.

Les notions théoriques.

Assez souvent, LT a ajouté son interprétation personnelle des notions à celles des notes, ce qui dans un premier temps a posé quelques problèmes de synthèse aux élèves.

A plusieurs occasions encore, les efforts de concentration des élèves ont été bien insuffisants. Ainsi, lorsque peu après l'étude du théorème fondamental, LT a demandé à ses élèves de lui fournir une primitive ([5]) de $f(x) = \frac{1}{x}$, il a dû littéralement se fâcher pour obtenir une réaction, alors que la réponse explicite était quasi écrite au tableau. Cet effet de déconcentration n'a été que très peu observé chez les élèves de YH, qui sont peut-être influencés dans ce contexte par les exigences de rentabilité immédiate propres aux cours techniques.

YH n'a pas fourni *a priori* le résultat du théorème fondamental mais a entamé un calcul général de la dérivée de la fonction d'accumulation, pour aboutir au résultat miraculeux : si $A(t) = \int_a^t f(x)dx$, alors $A'(t) = f(t)$.

Il a mené ensuite une discussion avec les élèves sur le bien-fondé des notations utilisées dans les notes concernant la démonstration de ce théorème fondamental. Lors de toutes les discussions théoriques, il a justifié systématiquement les écritures littérales au départ d'exemples numériques, ce qui semblait une pratique reconnue, et que les élèves ont manifestement appréciée.

Les problèmes de calcul de $\int_0^a x^N dx$, $\int_a^b x^N dx$, $\int_0^\pi \cos x \ dx$, . . .

Pour ces problèmes, la direction du travail a été prise en charge par les enseignants.

([5]) Pour mémoire, le calcul des primitives avait été étudié dès le second trimestre, quelques mois auparavant.

Pour donner une idée du caractère inattendu de certaines difficultés de lecture des élèves : la locution « l'intervalle $[0;1]$ » utilisé dans ce problème pour indiquer un bord vertical d'une surface a freiné la compréhension de la question. Dès que cette difficulté inattendue a été surmontée, les élèves ont souhaité que l'on utilise plutôt « la verticale $x = 0$ » ou « l'axe des y ».

Une élève de LT, peu active auparavant, mais qui avoua (!) avoir travaillé son cours pendant le week-end précédent, participa de manière pertinente aux discussions relatives au calcul de $\int_0^\pi \cos x \; dx$. En particulier, dans le cadre de l'extension de l'intégrale aux fonctions négatives, elle traduisit la question en termes de sommes de Darboux et parvint ainsi à la résoudre complètement et sans difficulté.

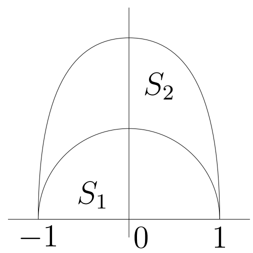
D'autres remarques ...

Le temps étant de plus en plus compté, beaucoup de prolongements des résultats n'ont pas pu être abordés. Deux exemples parmi d'autres permettent de mesurer la perte de sens qui en a résulté.

- Les différentes interprétations géométriques de la linéarité de l'intégrale n'ont pas été rencontrées. Ainsi, l'égalité :

$$\int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}dx = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$$

n'a pas reçu son interprétation géométrique *non* évidente : $S_2 = S_1$, puisque $\int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}dx = S_1 + S_2$ et $2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = 2S_1$



- Pareillement, la formule qui donne le volume du tonneau sphérique :

$$\frac{4}{3}\pi h^3 + 2\pi r^2 h$$

n'a pas été traduite comme somme du volume de la sphère et de celui du cylindre inscrits au tonneau.

12.5. Un compte-rendu de l'expérimentation : la phase de réification

La section 7, consacrée à une synthèse théorique générale (indépendance par rapport à la subdivision, démonstrations diverses,...), a seulement — faute de temps — fait l'objet d'un exposé magistral d'une heure par P. Tilleuil auprès des élèves de CT et LT. Les élèves ont reçu les photocopies des transparents qui servaient de support à cet exposé.

12.6. Des conclusions . . . préliminaires

Comme le compte-rendu précédent permet de s'en rendre compte, l'expérimentation dans les classes a fourni un ensemble assez diversifié d'observations, tant sur le plan disciplinaire que méthodologique. L'interprétation de ces résultats doit permettre d'améliorer la mise au point de la séquence d'enseignement. Mais avant de détailler la nouvelle version de cette séquence, il a semblé intéressant de relever d'abord quelques réactions globales des élèves et des enseignants, ainsi que de préciser quelques unes de nos premières conclusions.

12.6.1 Quelques réactions des élèves

Un débat/bilan animé par l'un d'entre nous a permis aux élèves de LT d'exprimer leurs impressions générales sur l'expérience. Les remarques suivantes ont figuré parmi les plus fréquentes :

- le manque de préparation à ce genre d'activités dans les années antérieures a été fortement souligné,
- des difficultés rencontrées lors du travail numérique sur les problèmes ont été relevées,
- un très grand nombre d'interventions ont été associées à la difficulté de lecture d'un texte scientifique, mais en des termes souvent contradictoires ; par exemple, le texte fourni a été considéré comme trop long et l'on a par ailleurs souhaité qu'il contienne plus d'exemples, de commentaires et de paraphrases,
- la lecture dirigée, à partir de la projection de transparents a été bien appréciée.

12.6.2 Quelques réactions des enseignants

Les enseignants déplorent que les limitations en termes de temps disponible aient eu des effets négatifs sur l'expérience :

- certains aspects caractéristiques de la séquence ont parfois été sacrifiés (le retour explicite sur quelques problèmes significatifs, la reconstruction théorique, ...),
- la récriture dans l'urgence des sections 4 et 5, pour répondre aux difficultés — mal cernées — des élèves n'a plus permis a certains enseignants de faire une lecture critique préalable des nouvelles notes, et les a handicapés dans l'organisation de la suite du cours.

Par ailleurs, à travers leurs réponses aux examens oraux, les élèves semblent avoir maîtrisé — mais *après* le cours — un certain nombre de notions fondamentales (sommes de Darboux, mailles et raffinements d'une subdivision, processus de convergence, ...). Au dire des enseignants, les exercices de fixation réalisés après l'expérience y auraient contribué de manière importante.

12.6.3 Parmi nos premières conclusions ...

L'observation des élèves en classe a éclairé notre réflexion sur quelques points cruciaux :

- la problématisation, en tant que méthode d'enseignement, est un révélateur pertinent des difficultés de certains élèves quant à l'acquisition ou au développement de compétences nouvelles,
- cette problématisation multiplie aussi les paramètres que l'enseignant doit prendre en compte, et contribue ainsi à complexifier son travail.

La problématisation semble d'autant plus aisée que les élèves ont une « culture scolaire » qui soit en accord avec ce mode d'enseignement. En ce sens, des activités du type *laboratoire de mathématiques* ou de simulation à l'aide de moyens informatiques, permettraient peut-être à des élèves de l'enseignement général d'acquérir une culture qui soit comparable — dans les domaines qui nous importent — à celle des élèves de l'enseignement technique.

Dans ce contexte, il semble assez clair qu'il faut proposer aux enseignants des méthodologies à la fois simples et précises d'accompagnement des élèves, et que ces méthodologies prennent en compte les nécessaires changements dans les rythmes d'apprentissage associés à la problématisation, ainsi que l'équilibre à réaliser entre ces rythmes.

Au niveau des élèves, les obstacles associés aux activités de lecture semblent majeurs et incontournables. Ils posent des questions qui parfois dépassent l'enseignement des mathématiques, mais dont notre travail ne pourra évidemment pas faire l'économie.

La prise en compte détaillée de l'ensemble de ces informations (avec les réponses qu'il convient d'apporter aux questions qu'elles soulèvent) est une préoccupation importante sous-jacente à la suite de ce travail.

12.7. Postérité : une nouvelle version des notes de cours

Le texte qui suit est une version remaniée (et complète) du cours sur l'intégrale. Ce nouveau texte a profité de l'expérience précédente dans deux directions.

D'abord, le ***scénario*** *a été simplifié. Au lieu d'une table des matières assez systématique et lente en 7 sections, nous avons adopté un découpage plus nerveux en 3 sections, recentrées chacune sur une étape fondamentale de l'apprentissage. La progression suivant les phases décrites par A. Sfard s'en retrouve accentuée.*

Ensuite, le ***style*** *des notes a évolué. Nous avons modéré notre ambition de fournir un texte complet et autonome, adaptable en tant que tel aux élèves et aux enseignants. Sur le terrain, cette exigence s'est en effet révélée trop contraignante tant pour la pratique des enseignants que pour la communication avec les élèves, et cela sur de seules questions de formes. Le document est maintenant conçu comme une* ***trace essentielle*** *de la problématisation du cours, qui réunit et structure les questions et les résultats, sans être exhaustif. Le document se présente donc — assez naturellement — sous une forme décrite dans le cadre des outils pédagogiques (cfr. la quatrième partie de ce travail). Cette forme nous semble suffisamment significative pour que nous en reprenions ici les caractéristiques essentielles. On retrouve ainsi dans chaque section quatre types d'activités :*

- *des* ***questions*** *: elles servent d'introduction au thème principal de la section, l'aspect procédural y est souvent prépondérant,*
- *des* ***synthèses*** *: elles développent et mettent en valeur la transition entre le stade procédural et le stade structural dans le thème en question,*
- *des* ***exercices*** *: ils permettent de vérifier que les étapes de compréhension élémentaire du thème sont franchies,*
- *des* ***problèmes*** *: ils sont d'un niveau de difficulté plus significatif, et sous-entendent souvent une bonne maîtrise conceptuelle du thème étudié.*

L'ordre des activités qui semble ainsi induit ne veut pas être contraignant : une synthèse peut très bien être fractionnée en différentes parties proposées au moment opportun, par exemple après un exercice ou un problème approprié. Dans le même ordre d'idées, la liste d'exercices et de problèmes peut être étoffée au gré des intérêts des élèves et du professeur. La forme du document laisse — autant que faire se peut — suffisamment de liberté à l'enseignant dans son projet de construction du cours, tout en lui fournissant un cadre de référence solide pour lui permettre de tenter des expériences constructives.

Nous n'avons pas trouvé de raisons de modifier la méthodologie déjà préconisée auparavant. L'essentiel du projet étant mieux mis en valeur, il devrait en résulter une meilleure gestion du temps et une plus grande liberté d'organisation pour les élèves et surtout pour le professeur.

Section 0. Introduction

Le sujet de ce document est la notion d'**intégrale**.

Comme pour n'importe quel sujet en mathématiques, celui-ci se comprend mieux au départ de situations-problèmes. Ces questions initiales, dès qu'elles sont bien explorées, permettent de développer des intuitions et des images mentales, de découvrir ou d'apprécier des propriétés, et de suggérer, quand le besoin s'en fait sentir, les résultats théoriques essentiels. C'est donc ce mode d'approche qui est privilégié dans la suite.

Le texte est divisé en trois sections.

La première section s'intitule « Une longue somme de petits produits ». Elle est consacrée à la mise en évidence d'un processus d'approximation de certaines grandeurs dans des contextes variés. Ce processus est formalisé par la définition de ce qu'on appelle des **sommes de Darboux**.

La deuxième section a pour titre : « Du contrôle à la prévision ... exacte ». Elle étudie le processus d'approximation mis au point dans la première section, jusqu'à en dégager une définition de l'**intégrale**. Cette définition décrit la valeur exacte de ce que les sommes de Darboux ne permettaient que d'encadrer.

La troisième section s'intitule « Un miracle ... très naturel ». Elle développe un nouveau mode d'évaluation de l'intégrale, souple et rapide, connu sous l'appellation de **calcul des primitives**.

Section 1. Une longue somme de petits produits

Avant d'entamer cette section, chacun devrait être capable :

- de modéliser une caractéristique d'un phénomène à l'aide d'une fonction d'une variable,
- de se servir d'une calculatrice ou d'un logiciel de type *tableur* (EXCEL, ...) pour effectuer des sommes et des produits de nombres.

1.1 Une question initiale : la consommation d'énergie électrique

Les compagnies d'électricité établissent la facture de leurs clients en fonction de l'énergie électrique qu'ils consomment. Cette *énergie* électrique dépend de la *puissance* demandée par les différents appareils électriques et du *temps* pendant lequel cette puissance est demandée. Plus précisément, lorsque la puissance demandée est **constante** sur un intervalle de temps fixé, alors l'énergie consommée pendant cet intervalle de temps est définie par la formule :

$$\text{puissance demandée} \times \text{durée de l'intervalle de temps},$$

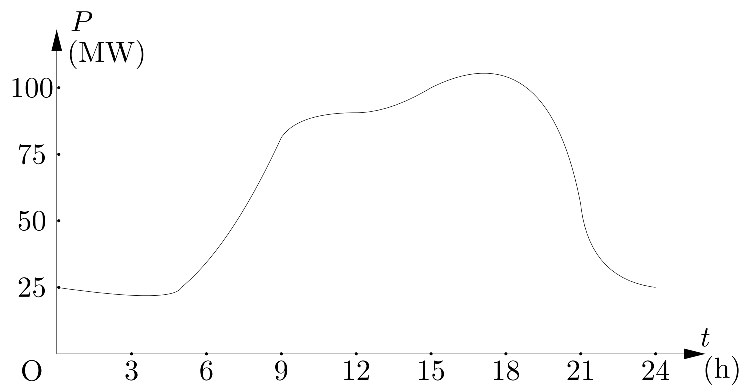
ces grandeurs étant exprimées dans des unités convenables.

Exemple. Si une ampoule électrique d'une puissance de 60 watts reste allumée pendant 5 heures dans une maison, elle consomme une énergie de 300 wattheures, ou de 0,3 kilowattheures (en symbole : 300 Wh ou 0,3 kWh.) Si le kilowattheure est facturé à 4,80 F (hors T.V.A.), un tel éclairage coûte donc 1,44 F.

Mais la demande en puissance électrique varie d'après le moment de la journée. Dans certains cas — par exemple, lorsque peu d'appareils électriques sont concernés — cette demande est relativement constante sur des périodes de temps appropriées, et ne varie d'une période de temps à l'autre que par paliers. Mais lorsqu'on considère la consommation électrique à une plus grande échelle — par exemple à l'échelle d'une ville — la demande totale varie constamment à cause du très grand nombre d'appareils et de consommateurs impliqués, et il n'est plus possible de distinguer des paliers. Une telle demande de puissance électrique peut alors se visualiser à l'aide d'une courbe continue.

Question 1 *La puissance électrique nécessaire à l'ensemble des activités d'une ville de taille moyenne est décrite en fonction du moment de la journée dans le graphique ci-contre.*

(1MW = 10^6W)



On demande :

- *d'abord, de* surestimer *la valeur de l'énergie consommée par cette ville pendant une journée,*
- *ensuite, de* sous-estimer *cette même valeur,*
- *enfin, de raffiner ce processus de telle sorte qu'on puisse en déduire un encadrement raisonnable du coût de l'énergie consommée par cette ville pendant une journée, le kilowattheure étant facturé à 4,80 F, hors T.V.A.*

Remarque. Pour réaliser des calculs suffisamment précis, un agrandissement du graphique ci-dessus (sur papier millimétré) peut être utile. Une expression explicite de la puissance comme fonction du temps rend encore de meilleurs services ; en voici une :

$P(t) = -0,2906165437 \cdot 10^{-6} \cdot t^9 + 0,00003076843301 \cdot t^8 - 0,001342038667 \cdot t^7 + 0,03107383835 \cdot t^6 - 0,4097902563 \cdot t^5 + 3,064475374 \cdot t^4 - 12,23848620 \cdot t^3 + 23,85276352 \cdot t^2 - 18,37307744 \cdot t + 25$.

Mais cette expression est assez *instable* : il vaut mieux ne pas remplacer les coefficients qui y apparaissent par des valeurs approchées ...

1.2 Une synthèse : la notion de somme de Darboux

Comment discrétiser un phénomène continu ?

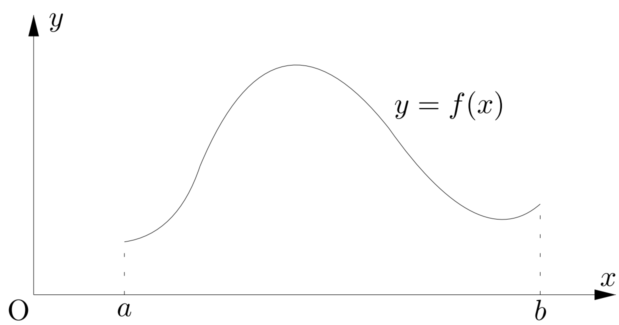
La question précédente demandait de déterminer l'énergie électrique consommée par une ville connaissant la puissance électrique nécessaire à tout moment. Or, on ne dispose que de cette définition : lorsque la puissance demandée est **constante** sur un intervalle de temps fixé, alors l'énergie consommée pendant cet intervalle de temps est **définie** par la formule « puissance demandée × durée de l'intervalle de temps ». Hélas, le seul renseignement dont on dispose ici est celui de la puissance électrique en tant que fonction **non constante** du temps.

L'idée qui permet néanmoins d'apporter une solution au problème comporte deux étapes caractéristiques :

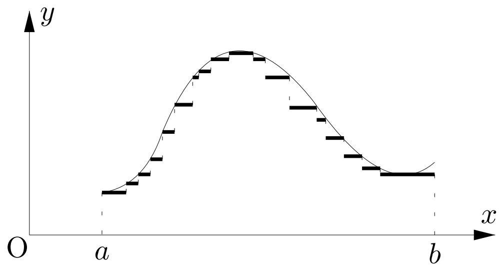
- sur **un** intervalle de temps **suffisamment petit**, il y a moyen de sous-estimer ou de surestimer raisonnablement la puissance électrique par une puissance **constante** ; sur un tel intervalle de temps, le calcul de l'énergie se ramène au calcul d'un **produit élémentaire**,
- on peut **décomposer** toute la journée en un nombre — éventuellement très élevé — de tels intervalles de temps ; l'énergie électrique totale est alors la **somme** des produits élémentaires correspondants.

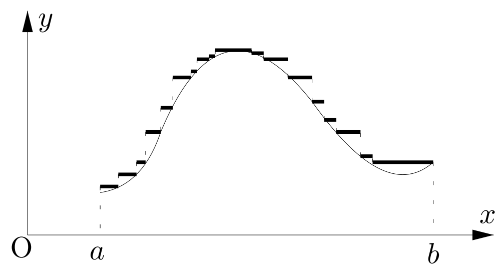
La décomposition du domaine d'une fonction de telle sorte que l'on puisse assimiler cette fonction à une fonction constante sur chaque sous-intervalle de la décomposition est ce qu'on appelle **un processus de discrétisation « en escaliers »**. Ce processus de discrétisation permet de remplacer la fonction donnée par une fonction constante par morceaux qui en constitue une « bonne approximation ».

Ainsi, la fonction dont le graphe est fourni ci-dessous :



peut être remplacée par une fonction constante par morceaux, ou « en escaliers », qui la sous-estime ou surestime :





Ce processus de discrétisation permet alors d'obtenir une valeur approchée de l'énergie électrique à évaluer en l'encadrant par l'une ou l'autre somme du type $\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot \triangle t_i$, où :

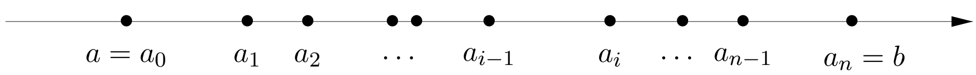
- n est le nombre d'intervalles de temps nécessaires pour découper de manière appropriée les 24 heures d'une journée,
- et, pour chaque valeur de l'indice i, P_i est une valeur de la puissance, choisie pour majorer ou minorer selon le cas la puissance réelle sur l'intervalle de temps $\triangle t_i$.

Comme on va le vérifier à de nombreuses reprises, cette construction d'un encadrement d'un nombre à partir de la discrétisation d'une fonction est un outil très performant : il ramène le calcul de bon nombre de grandeurs à l'évaluation de **(longues) sommes de produits élémentaires**.

La définition de subdivision d'un intervalle

On appelle **subdivision** (en n parties) de l'intervalle $[a;b]$ la donnée d'une suite ordonnée de $n+1$ points :

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{i-1} < a_i < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$$



Les n sous-intervalles $[a;a_1] = [a_0;a_1]$, $[a_1;a_2]$, ..., $[a_{i-1};a_i]$, ..., $[a_{n-1};a_n] = [a_{n-1};b]$ qui apparaissent ainsi sont appelés les intervalles *sous-jacents* à la subdivision. On définit la **maille** δ d'une subdivision quelconque $D : a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{i-1} < a_i < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ par

$$\delta = \max\{a_i - a_{i-1} : 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

C'est la longueur du plus grand intervalle sous-jacent à la subdivision. Une **subdivision régulière** est une subdivision dont tous les intervalles sous-jacents sont de même longueur ; ainsi une subdivision régulière de l'intervalle $[a;b]$ en n parties est donnée par

$$D := \left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right)_{0 \leqslant i \leqslant n}$$

et sa maille vaut $\delta = \frac{b-a}{n}$.

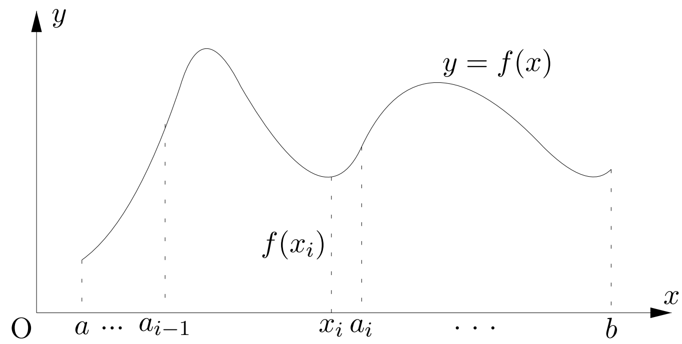
La définition de sommes de Darboux

On considère une fonction $f(x)$ définie sur un intervalle $[a;b]$, et une subdivision $D : a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{i-1} < a_i < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ de cet intervalle.

On appelle **somme de Darboux inférieure** ([6]) pour la fonction $f(x)$ et la subdivision D le nombre $s(f(x);D)$ défini par

$$s(f(x);D) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$$

où, quel que soit $1 \leqslant i \leqslant n$, x_i est un nombre dont l'image $f(x_i)$ est **minimum** parmi les valeurs de la fonction sur le sous-intervalle $[a_{i-1};a_i]$:

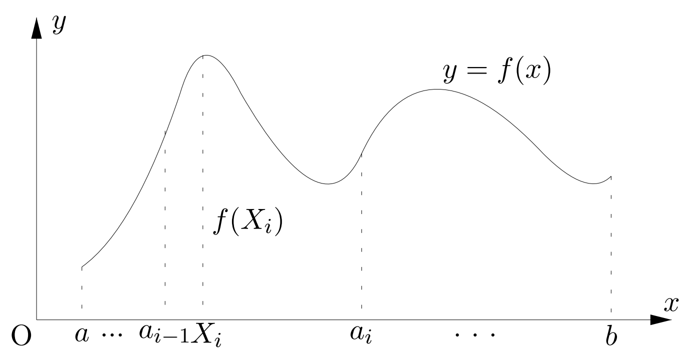


On note souvent $\triangle x_i$ la longueur $a_i - a_{i-1}$ du sous-intervalle $[a_{i-1};a_i]$ dans lequel se trouve le point x_i. Cela permet d'écrire la définition précédente sous la forme $s(f(x);D) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \triangle x_i$.

Pareillement, on appelle **somme de Darboux supérieure** pour la fonction $f(x)$ et la subdivision D le nombre $S(f(x);D)$ défini par

$$S(f(x);D) = \sum_{i=1}^{n} f(X_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$$

où, quel que soit $1 \leqslant i \leqslant n$, X_i est un nombre dont l'image $f(X_i)$ est **maximum** parmi les valeurs de la fonction sur le sous-intervalle $[a_{i-1};a_i]$:



([6]) Suite aux travaux de G. F. B. Riemann (1826-1866) consacrés à la mise au point d'une théorie de l'intégrale, le mathématicien français J.-G. Darboux (1842-1917) proposa de partir de l'idée d'encadrement pour justifier les résultats de Riemann et introduisit à cet effet les sommes qui, depuis, portent son nom.

On note encore $\triangle X_i$ la longueur $a_i - a_{i-1}$ du sous-intervalle $[a_{i-1}; a_i]$ dans lequel se trouve le point X_i. Cela permet d'écrire la définition précédente sous la forme $S(f(x); D) = \sum_{i=1}^{n} f(X_i) \cdot \triangle X_i$. On a évidemment $\triangle x_i = a_i - a_{i-1} = \triangle X_i$.

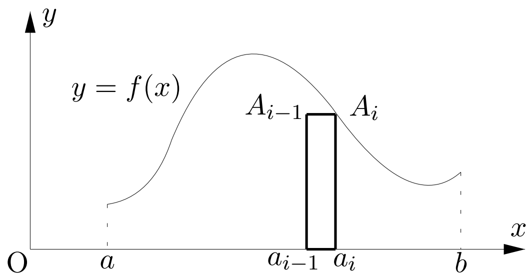
Sommes de Darboux et encadrement

Si le calcul de sommes de Darboux est entrepris pour approcher une grandeur G, alors on déduit évidemment de la construction de ces sommes une **inégalité d'encadrement**

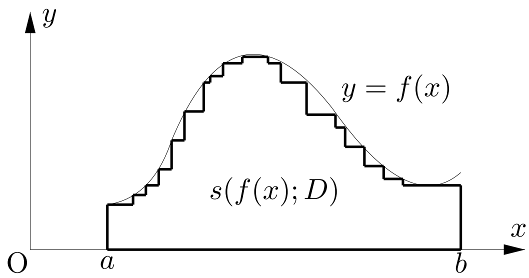
$$\boxed{s(f(x); D) \leqslant G \leqslant S(f(x); D)}$$

Sommes de Darboux et mesure d'aire

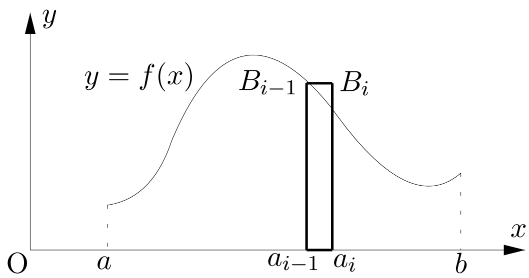
Dans une somme de Darboux inférieure, chaque terme du type $f(x_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$ **représente** la mesure de l'aire du rectangle $a_{i-1}A_{i-1}A_i a_i$ correspondant :



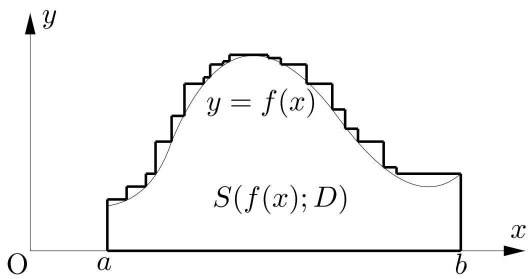
et la somme $s(f(x); D) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$ **s'interprète** alors comme la mesure de l'aire d'une figure polygonale :



Pour une somme de Darboux supérieure, et de manière tout à fait analogue, chaque terme du type $f(X_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$ **représente** la mesure de l'aire du rectangle $a_{i-1}B_{i-1}B_i a_i$ correspondant :



et la somme $S(f(x); D) = \sum_{i=1}^{n} f(X_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$ **s'interprète** encore comme la mesure de l'aire d'une (autre) figure polygonale :



Remarque. Une somme de Darboux **n'est pas** une mesure d'aire, de la même manière que l'énergie n'est pas l'aire d'une surface limitée par une puissance. Mais une somme de Darboux peut toujours **s'interpréter** comme une mesure d'aire. Beaucoup de problèmes dans lesquels il n'est fait aucune référence à une surface peuvent être résolus en termes de sommes de Darboux et acquérir ainsi — *a posteriori* — une interprétation géométrique nouvelle et éclairante.

1.3 Quelques exercices

Dans les exercices suivants, il est vivement conseillé de réaliser les calculs numériques à l'aide d'un tableur (EXCEL, …) afin de pousser le plus loin possible la précision dans les encadrements.

Dans les exercices 1 et 2, la fonction à utiliser est fournie — ou quasiment fournie — dès l'énoncé tandis que dans l'exercice 3, il faut d'abord créer une fonction associée à la grandeur à déterminer.

Exercice 1 **1)** *On considère le triangle curviligne délimité par l'intervalle* $[0;1]$ *sur l'axe des* x*, la verticale* $x=1$ *et le graphe de* $f(x)=x^N$ *, où* $N=2$ *, 3, 4 ou 5 (au choix). On demande de fournir un encadrement suffisamment précis de l'aire de ce triangle curviligne.*

Comment conjecturer en conséquence la valeur exacte de cette aire pour la valeur de N *choisie ?*

2) *On considère le fuseau délimité par l'intervalle* $[-1;1]$ *sur l'axe des* x *et le graphe de* $f(x)=\sqrt{1-x^2}$*. On demande de de fournir un encadrement suffisamment précis de l'aire de ce fuseau.*

On comparera l'encadrement obtenu avec sa valeur exacte que l'on peut calculer directement.

3) *On considère le triangle curviligne délimité par l'intervalle* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ *sur l'axe des* x*, l'intervalle* $[0;1]$ *sur l'axe des* y *et le graphe de* $f(x)=\cos x$*. On demande de fournir un encadrement suffisamment précis de l'aire de ce triangle curviligne.*

Comment conjecturer en conséquence la valeur exacte de cette aire ?

4) *On considère le trapèze curviligne délimité par l'intervalle* $[0;1]$ *sur l'axe des* x*, les verticales* $x=0$ *et* $x=1$ *et le graphe de* $f(x)=e^x$*. On demande de fournir un encadrement suffisamment précis de l'aire de ce trapèze curviligne.*

Une introduction à l'exercice 2. (7)Un capital C placé à un taux d'intérêt annuel i procure après t années de placement à intérêts composés un revenu total décrit par la formule : $C\cdot(1+i)^t$. Pour certains types de biens — la valeur financière d'une propriété, par exemple — il est assez naturel de concevoir que l'accroissement de valeur n'a pas lieu tous les ans, ou à des intervalles de temps réguliers, mais bien de manière continue : on parle alors de capitalisation continue. Un capital C placé à un taux d'intérêt annuel i procure après t années de placement à intérêts continus un revenu total décrit par la formule :

(7) Cet exercice est extrait de : F. W. Luttmann — *Selected applications of mathematics in finance and investment* ; EDC/Project UMAP, unit 381 ; 1979.

$$\lim_{n\to\infty} C\cdot\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt} = C\cdot e^{it}$$

Si la facture d'une fourniture quelconque, à règler dans t années, doit représenter alors un montant $F(t)$, sa valeur actuelle $A(t)$ dans un régime à intérêt continu vérifie donc la relation

$$A(t)\cdot e^{it} = F(t)$$

où i est le taux d'intérêt annuel.

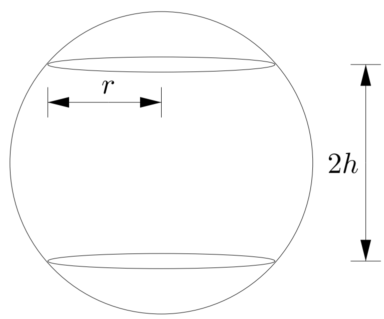
Exercice 2 *Déterminez un encadrement de la rentabilité d'une centrale hydro-électrique (en termes de valeur actuelle sous un taux d'intérêt continu à 6 %) , sachant que le coût de construction est estimé à 2 milliards de francs belges, que sa durée de rentabilité est de 20 ans, et que le revenu* annuel *d'exploitation après t années est donné en francs belges par la formule*

$$F(t) = 40\cdot 10^6\cdot\sqrt{t}$$

Est-il judicieux de commencer la construction d'une telle centrale ?

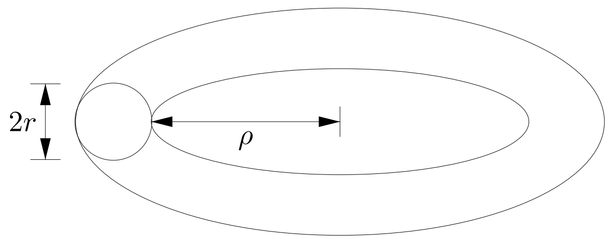
Exercice 3 **1)** *On considère un tonneau sphérique, c'est-à-dire une sphère coupée par deux plans parallèles équidistants du centre de la sphère.*

On note $2h$ la hauteur du tonneau et r le rayon de son couvercle.
On demande de fournir un encadrement suffisamment précis du volume de ce tonneau, si $2h = 1$ m et $r = 40$ cm.



2)

On note $2r$ le diamètre de la section d'un tore de révolution, et ρ le rayon du cercle de gorge.
On demande de fournir un encadrement suffisamment précis du volume de ce tore lorsque $2r = 5$ cm et $\rho = 45$ cm.



Remarque. Le premier énoncé de l'exercice 3 ci-dessus est prolongé dans la question initiale de la section 2 ci-après.

1.4 Les compétences à atteindre à la fin de cette section

A la fin de cette première section — et dans le cadre d'un problème où une fonction est associée à l'évaluation d'une grandeur — chacun devrait être capable :

- de discrétiser les variations de la fonction sur l'intervalle dans lequel la variable varie, c'est-à-dire de construire une subdivision de cet intervalle appropriée à l'évaluation de la grandeur en question,
- d'en déduire un encadrement de la grandeur en question par des sommes de Darboux,
- d'évaluer ces sommes de Darboux à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel et, le cas échéant, d'améliorer l'encadrement en modifiant la subdivision.

1.5 Quelques problèmes

Les énoncés qui suivent sont des problèmes : leur niveau de difficulté est sensiblement plus élevé que celui des exercices, en particulier au niveau de la création d'une fonction associée à la grandeur à évaluer. Encore une fois, il est vivement conseillé de réaliser les calculs numériques à l'aide d'un tableur (EXCEL, ...) afin de pousser le plus loin possible la précision dans les résultats.

Le problème suivant est connu sous le nom de « problème de l'aiguille de Buffon ».

Problème 1

Dans une chambre, le parquet est formé de longues lattes parallèles, dont les joints sont donc équidistants et séparés d'une distance d. On jette en l'air une aiguille de longueur ℓ inférieure à d, de telle sorte qu'elle tombe sur le parquet.

Lorsque l'angle de position de l'aiguille (par rapport à la direction des joints) est fixé, il est assez facile de déterminer toutes les positions du centre de masse de l'aiguille pour lesquelles celle-ci coupe un joint.

On demande d'évaluer la probabilité p pour que l'aiguille tombe sur un des joints du parquet (indépendamment de son angle de position), si par exemple $d = 10$ cm et $\ell = 4$ cm.

Une introduction au problème 2. Dans l'espace à trois dimensions, la position du centre de masse (ou isobarycentre) G d'un système de n points matériels $\{P_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ de masses respectives $\{m_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ est décrit par la formule :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OP_1} + m_2\overrightarrow{OP_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{OP_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

où O est un point quelconque.

Problème 2

On demande de fournir un encadrement suffisamment précis de la hauteur du centre de masse d'un cône solide de hauteur h, de demi-angle d'ouverture α et de densité volumique (masse par unité de volume) ρ.

On peut particulariser les données en posant $h = 0{,}4$ m , $\alpha = 20^o$ et $\rho = 2$ kg/m^3.

Une remarque. La position du centre de masse de n points matériels s'interprète comme la *moyenne* (pondérée par leurs masses) des positions de ces points matériels : la notion de moyenne en statistique, ou d'espérance mathématique en probabilités, est une traduction — adaptée à ces disciplines — de la notion de centre de masse en physique. De manière analogue, la notion de variance en statistique et en probabilités est une traduction de la notion de moment d'inertie en physique.

Problème 3

1) *On demande de fournir un encadrement suffisamment précis de la longueur de l'arc de courbe d'équation $y = k \cdot \sqrt{1-x^2}$ d'origine $(-1;0)$ et d'extrémité $(1;0)$ suivant des valeurs (au choix) du nombre positif k.*

Si $k = 1$, on comparera l'encadrement obtenu avec la valeur exacte de la longueur demandée, que l'on peut alors calculer directement.

2) *On demande de fournir un encadrement suffisamment précis de la longueur de l'arc de parabole « semi-cubique » $y = x^{\frac{3}{2}}$ d'origine $(0;0)$ et d'extrémité $(1;1)$.*

Une remarque. Une des premières solutions du problème de la longueur de l'arc de parabole « semi-cubique » est due à P. de Fermat (1601-1665). Il était particulièrement fier de sa solution, parce qu'il avait réalisé que le calcul en termes de sommes de Darboux ([8]) permettait d'évaluer **de manière générale** la longueur d'un arc de courbe, en dépassant ainsi la seule évaluation des aires et des volumes, auxquelles ces sommes étaient jusque là exclusivement cantonnées.

Une autre remarque. Le premier énoncé du problème 3 est quasiment celui qui fait l'objet de la fiche 2 du chapitre 11.

Section 2. Du contrôle à la prévision . . . exacte

2.1 Une question initiale : une estimation au litre près

Pour mémoire, cette question prolonge le premier énoncé de l'exercice 3 de la section précédente.

Question 2

On considère un tonneau sphérique, c'est-à-dire une sphère coupée par deux plans parallèles équidistants du centre de la sphère. On note $2h$ la hauteur du tonneau et r le rayon de son couvercle.

On demande de calculer le volume de ce tonneau au litre près, *si $2h = 1$ m et $r = 40$ cm.*

([8]) Fermat ne s'exprimait évidemment pas ainsi, mais l'idée était parfaitement analogue.

Remarque. Il est intéressant de ne considérer d'abord que des subdivisions régulières, c'est-à-dire dont la longueur des intervalles sous-jacents est constante. Dans ce cas, la *lisibilité* des feuilles de calcul peut livrer des propriétés intéressantes.

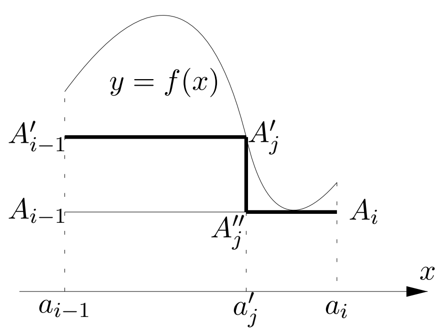
2.2 Une synthèse : pourquoi le contrôle mène-t-il à l'exactitude ?

Comment resserrer l'encadrement ?

Si D est une subdivision d'un intervalle $[a;b]$, un **raffinement** D' de la subdivision D est n'importe quelle subdivision de l'intervalle $[a;b]$ qui contient *au moins* les mêmes points que ceux de D, ce qu'on note assez naturellement

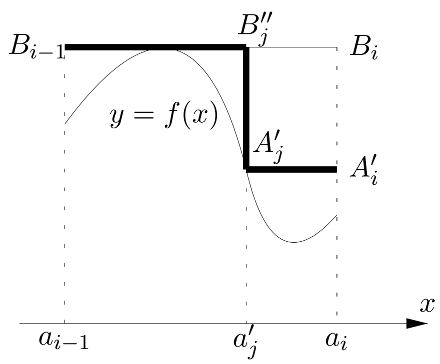
$$D \subset D'$$

Raffiner une subdivision donnée permet de *resserrer l'encadrement* d'une grandeur fourni par des sommes de Darboux. Plus précisément, ajouter *un seul point* à une subdivision *augmente* la somme de Darboux inférieure (ou la laisse inchangée) :



$$\text{Aire}\,(a_{i-1}A_{i-1}A_ia_i) \leqslant \text{Aire}\left(a_{i-1}A'_{i-1}A'_jA''_jA_ia_i\right)$$

et *diminue* la somme de Darboux supérieure (ou la laisse inchangée) :



$$\text{Aire}\,(a_{i-1}B_{i-1}B_ia_i) \geqslant \text{Aire}\left(a_{i-1}B_{i-1}B''_jA'_jA'_ia_i\right)$$

On vérifie facilement que cette propriété est vraie quel que soit le signe de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a;b]$.

En conclusion, on a donc obtenu une *inégalité de resserrement* :

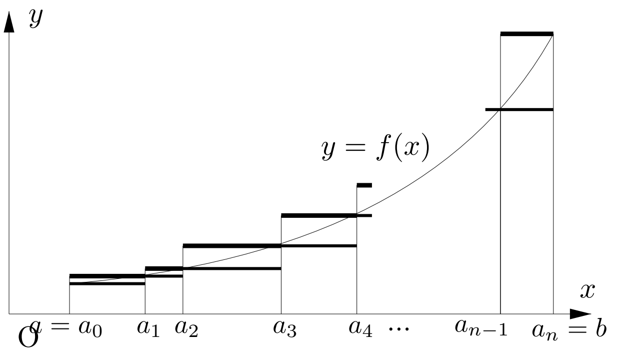
$$D \subset D' \implies s(f(x);D) \leqslant s(f(x);D') \leqslant S(f(x);D') \leqslant S(f(x);D)$$

Une classe de fonctions

On se limitera presqu'exclusivement dans la suite à ne plus considérer que des fonctions définies sur un intervalle $[a;b]$ et **monotones** — c'est-à-dire croissantes ou décroissantes — sur cet intervalle.

Pourquoi ? Parce que les sommes de Darboux sont alors très faciles à calculer ! Plus précisément, si $f(x)$ est une fonction *croissante* sur l'intervalle $[a;b]$, à toute subdivision $D : a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{i-1} < a_i < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ de cet intervalle correspond alors

la somme de Darboux inférieure :
$s(f(x);D) = \sum_{i=1}^{n} f(a_{i-1}) \cdot (a_i - a_{i-1})$
et la somme de Darboux supérieure :
$S(f(x);D) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$



Pareillement, si $f(x)$ est une fonction *décroissante* sur l'intervalle $[a;b]$, à toute subdivision $D : a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{i-1} < a_i < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ de cet intervalle correspond la somme de Darboux inférieure :

$$s(f(x);D) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$$

et la somme de Darboux supérieure :

$$S(f(x);D) = \sum_{i=1}^{n} f(a_{i-1}) \cdot (a_i - a_{i-1})$$

Cette restriction aux fonctions monotones n'a rien de dramatique ! Pour la plupart des fonctions usuelles ([9]), on peut toujours décomposer l'intervalle où on les étudie en sous-intervalles sur lesquels ces fonctions seront soit croissantes, soit décroissantes : les racines de la dérivée première de ces fonctions sont bien utiles à cet effet.

Néanmoins, le choix d'un ensemble de fonctions dont les sommes de Darboux soient exploitables n'est pas innocent ! Une discussion un peu plus approfondie de la signification de ce choix est entamée à la fin de la section 3.

Comment contrôler l'erreur ?

Si $f(x)$ est une fonction *croissante* sur l'intervalle $[a;b]$ muni de la subdivision *régulière* $D = \left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, on établit une formule de mesure d'erreur en explicitant les sommes de Darboux :

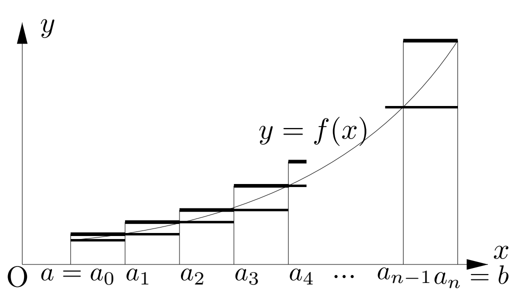
([9]) Et cela couvre toutes les fonctions étudiées dans les questions, exercices et problèmes de ce cours.

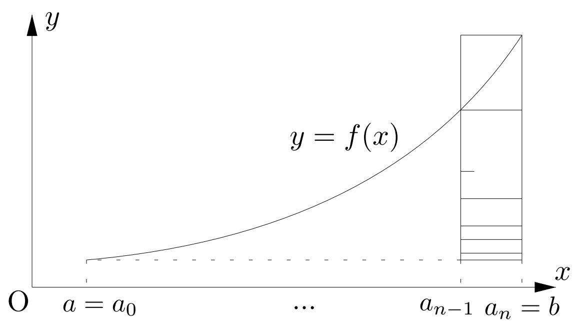
$$\begin{aligned}
S(f(x);D) - s(f(x);D) &= \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\cdot(a_i - a_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(a_{i-1})\cdot(a_i - a_{i-1})\\
&= \sum_{i=1}^{n} (f(a_i) - f(a_{i-1}))\cdot(a_i - a_{i-1})\\
&= \sum_{i=1}^{n} (f(a_i) - f(a_{i-1}))\cdot\frac{b-a}{n}\\
&= \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} (f(a_i) - f(a_{i-1}))
\end{aligned}$$

$$= \frac{b-a}{n}\cdot(f(a_1) - f(a_0) + f(a_2) - f(a_1) + \cdots + f(a_{n-1}) - f(a_{n-2}) + f(a_n) - f(a_{n-1}))$$

$$= \frac{b-a}{n}\cdot(-f(a_0) + f(a_n)) = \frac{b-a}{n}\cdot(f(b) - f(a))$$

On visualise ce raisonnement et son résultat grâce à l'interprétation des sommes de Darboux en termes de mesure d'aires. Il suffit en effet de translater les petits rectangles appropriés au-dessus d'un sous-intervalle quelconque de la subdivision, par exemple $[a_{n-1}; a_n]$:





Un calcul absolument analogue dans le cas d'une fonction *décroissante* sur l'intervalle $[a; b]$ donne comme résultat :

$$S(f(x);D) - s(f(x);D) = \frac{b-a}{n}\cdot(f(a) - f(b))$$

En conclusion, l'erreur lors de l'encadrement d'une grandeur G par les sommes de Darboux $s(f(x);D)$ et $S(f(x);D)$ se calcule grâce à la formule :

$$S(f(x);D) - s(f(x);D) = |f(b) - f(a)|\cdot\delta$$

pourvu que $f(x)$ soit une fonction*monotone* sur l'intervalle $[a; b]$ dont D est une subdivision *régulière* de maille $\delta = \frac{b-a}{n}$.

Une définition de l'intégrale

De manière assez sommaire, l'intégrale est la valeur exacte de la grandeur que les sommes de Darboux se contentent d'encadrer. Plus précisément, lorsqu'on considère :

- une fonction $f(x)$ **monotone** sur un intervalle $[a;b]$,
- la **suite** $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de **subdivisions régulières** de l'intervalle $[a;b]$ définies par

$$D_n = \left(a + i \cdot \frac{b-a}{10^n}\right)_{0\leqslant i\leqslant 10^n}$$

on appelle alors **intégrale de** $f(x)$ **de** a **à** b, le nombre réel noté ([10]) $\int_a^b f(x)dx$, et défini par :

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} s(f(x);D_n) = \lim_{n\to\infty} S(f(x);D_n)$$

Ainsi l'intégrale d'une fonction $f(x)$ entre a et b est bien la valeur « exacte » de la grandeur que les sommes de Darboux se contentaient d'encadrer : **cette valeur exacte est le résultat final d'un processus d'approximations successives**.

Les questions que pose cette définition de l'intégrale

La définition précédente mérite trois commentaires en réponse à trois questions assez naturelles.

Pourquoi introduire cette *suite* de subdivisions régulières ?

Parce qu'elle constitue une *suite emboîtée de subdivisions* de l'intervalle $[a;b]$, ce qui signifie que :

- quel que soit $n \in \mathbb{N}$: D_n est une subdivision de l'intervalle $[a;b]$,
- quel que soit $n \in \mathbb{N}$: $D_n \subset D_{n+1}$.

Comme on l'a montré plus haut, il en résulte, à chaque nouvelle valeur de $n \in \mathbb{N}$, un resserrement de l'encadrement :

$$\cdots \leqslant s(f(x);D_n) \leqslant s(f(x);D_{n+1}) \leqslant \cdots \leqslant S(f(x);D_{n+1}) \leqslant S(f(x);D_n) \leqslant \cdots$$

Tout est donc en place pour qu'une convergence soit imaginable !

([10]) La notation $\int_a^b f(x)dx$ de l'intégrale s'est définitivement imposée avec J. Fourier (1768-1830), mais des formes diverses préexistaient depuis les inventeurs du calcul intégral : I. Newton (1642-1727) et G. W. Leibniz (1646-1716), pour ne pas citer Fermat, déjà évoqué plus haut, et bien d'autres mathématiciens ...Les extrémités a et b de l'intervalle sur lequel s'effectue l'intégration sont souvent appelés les *bornes d'intégration* de l'intégrale. Plus spécifiquement, le nombre a est appelé la borne gauche ou borne inférieure de l'intégrale, et le nombre b, la borne droite ou borne supérieure de l'intégrale.

Est-on bien sûr que $\lim\limits_{n\to\infty} s(f(x);D_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} S(f(x);D_n)$ existent ?

Chacune des sommes de Darboux $s(f(x);D_n)$ est un nombre réel, de telle sorte que $(s(f(x);D_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite de nombres réels.*

Les subdivisions $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant emboîtées, cette suite est *croissante* : c'est une traduction de la « partie gauche » des inégalités de resserrement.

Cette suite est aussi *majorée* : la somme de Darboux *supérieure* $S(f(x);D_1)$ fournit un majorant tout à fait acceptable.

Or, c'est une propriété fondamentale des nombres réels : toute suite croissante majorée dans $\mathbb{R}$ y admet une et une seule limite. Toutes les conditions sont donc réunies pour que $\lim\limits_{n\to\infty} s(f(x);D_n)$ existe.

Le raisonnement est analogue dans le cas de la suite $(S(f(x);D_n))_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes de Darboux supérieures, sauf qu'on évoque alors le fait que toute suite décroissante minorée dans $\mathbb{R}$ y admet une et une seule limite.

Dans les deux cas, la convergence est acquise !

Pourquoi les deux limites $\lim\limits_{n\to\infty} s(f(x);D_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} S(f(x);D_n)$ sont-elles égales ?

C'est une conséquence immédiate de la possibilité de contrôler l'erreur. En effet, puisque les hypothèses faites permettent d'écrire :

$$S\left(f(x);D_n\right) - s\left(f(x);D_n\right) = \frac{b-a}{10^n}\cdot|f(b)-f(a)|$$

on en déduit :

$$\lim_{n\to\infty}\left(S\left(f(x);D_n\right) - s\left(f(x);D_n\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{10^n}\cdot|f(b)-f(a)|\right) = 0$$

Il n'y a donc pas d'ambiguïté dans la convergence !

En fait, tous ces raisonnements ne font que **formaliser** ce que les questions, exercices et problèmes rencontrés jusqu'ici ont permis d'**observer** à de nombreuses reprises.

2.3 Quelques exercices

Les deux exercices suivants prolongent l'exercice 1 : le premier est encore numérique, et nécessite l'usage d'un tableur (EXCEL, ...), le second demande des calculs de limites de suites.

Exercice 4

1) *On demande de calculer* $\int\limits_0^1 x^N dx$ *pour* $N = 2$, 3, 4 *ou* 5 *avec une précision de l'ordre de* 10^{-2}.

En particulier, quelle est la maille de la subdivision à employer, et combien de sommes faudra-t-il effectuer pour obtenir le résultat souhaité ; comment ces résultats évoluent-ils s'il s'agit de calculer $\int_0^2 x^N dx$ *pour* $N = 2, 3, 4$ *ou* 5 *avec le même ordre de précision ?*

2) *On demande de calculer* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ *avec une précision de l'ordre de* 10^{-3}*. Quelle est la maille de la subdivision à employer, et combien de sommes faudra-t-il effectuer pour obtenir le résultat souhaité ?*

3) *On demande de calculer* $\int_0^1 e^x dx$ *avec une précision de l'ordre de* 10^{-3}*. Quelle est la maille de la subdivision à employer, et combien de sommes faudra-t-il effectuer pour obtenir le résultat souhaité ?*

Exercice 5

1) *Calculer* $\int_0^1 x^N dx$ *pour* $N = 0, 1, 2, 3, 4$ *ou* 5*.*

Pour les mêmes valeurs de N*, généraliser ensuite le mode de calcul à* $\int_0^b x^N dx$ *et* $\int_a^b x^N dx$ *(en supposant que* $0 < a < b$*).*

2) *Calculer* $\int_0^1 e^x dx$*.*

Généraliser ensuite le mode de calcul à $\int_0^b e^x dx$ *et* $\int_a^b e^x dx$ *(en supposant toujours que* $0 < a < b$*).*

Indications. Pour la première partie de l'exercice précédent, il est utile de disposer d'une formule permettant de calculer la somme des mêmes puissances des N premiers nombres entiers. De telles formules ([11]) ont été obtenues de diverses façons dans le courant du XVII[e] siècle. Pour les premières puissances, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} i &= \frac{N(N+1)}{2} \\
\sum_{i=1}^{N} i^2 &= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \\
\sum_{i=1}^{N} i^3 &= \frac{N^2(N+1)^2}{4} \\
\sum_{i=1}^{N} i^4 &= \frac{N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1)}{30}
\end{aligned}$$

([11]) Cfr. aussi l'exemple 6.5.7 du chapitre 6.

$$\sum_{i=1}^{N} i^5 \quad = \quad \frac{N^2(N+1)^2(2N^2+2N-1)}{12}$$

Pour la seconde partie du même exercice, la formule de sommation des N premiers termes d'une suite géométrique rend un service analogue.

2.4 Les compétences à atteindre à la fin de cette section

A la fin de cette deuxième section, chacun devrait être capable (au moins) :

- d'écrire l'intégrale donnant la valeur exacte d'une grandeur encadrée par des sommes de Darboux,
- de déterminer ou d'évaluer (une borne supérieure de) l'erreur commise en encadrant une intégrale par des sommes de Darboux.
- de calculer la valeur exacte d'une intégrale comme limite d'une suite dans des cas raisonnablement simples.

2.5 Quelques problèmes qui s'enchaînent

Dans beaucoup de situations concrètes, les subdivisions que l'on est amené à utiliser ne sont pas régulières (cfr. par exemple les subdivisions qui apparaissent naturellement dans la question 1). Que devient la notion d'intégrale si on souhaite y admettre des subdivisions *non régulières* ?

L'interprétation des sommes de Darboux en termes de mesures d'aires suggère que *quel que soit* le type de subdivisions initialement choisi, le résultat final du processus d'approximations successives sera toujours le même : à savoir la mesure d'une aire convenable sous le graphe d'une fonction. La question de trancher si l'intégrale dépend du type de subdivisions initialement choisi est donc de peu d'intérêt si on n'est pas bien conscient de ce que

- l'intuition numérique d'une éventuelle convergence,
- l'intuition géométrique (ou graphique) d'une éventuelle convergence,

peuvent suggérer des résultats ... complètement faux !

Un exemple d'intuition numérique trompeuse. Si n est un entier naturel, on considère $F(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$ et on demande d'évaluer le nombre $F := \lim_{n\to\infty} F(n)$.

Un tableur fournit bien vite $F(1000) = 7,4854708\ldots$, $F(2000) = 8,1783681\ldots$, etc ce qui laisse imaginer que F est un nombre de taille raisonnable, plus que certainement inférieur à 100, et probablemnt même (par exemple) à 30. Or, on établit facilement en regroupant et en minorant que $F(2^p) > 1 + p \cdot \frac{1}{2}$. Cette inégalité montre que la suite n'est donc pas bornée, mais surtout qu'*aucun* calcul numérique ne permet de s'en rendre compte : pour vérifier numériquement que $F > 30$, à raison d'un million d'opérations à la seconde, il faudrait plus de 8000 années de calcul !

Un exemple d'intuition géométrique trompeuse. On peut approcher — avec une résolution optique de loin supérieure à celle de l'oeil humain — un cercle de rayon 1 par un polygone dont tous les angles sont droits.

Évidemment, un tel polygone possède un très grand nombre de très petits côtés. Néanmoins, quand un tel polygone est visuellement indiscernable du cercle, son périmètre donne une approximation ... assez catastrophique du périmètre du cercle. En effet, *quelle que soit* la finesse de l'approximation géométrique du cercle par ce polygone, son périmètre vaut invariablement (au moins) 8, alors que le périmètre du cercle en question égale $2 \cdot \pi = 6,283185\ldots$. L'erreur relative est d'au moins 25 %.

Par contre, la mesure de l'aire de ce même polygone est une excellente approximation de la mesure de l'aire du cercle !

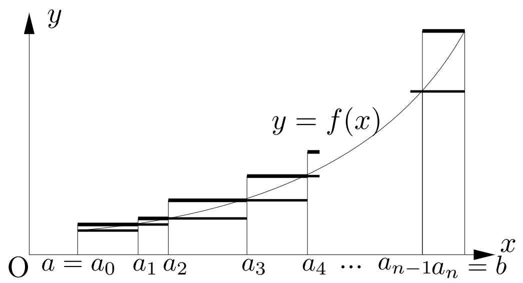
Les énoncés suivants proposent de construire une démonstration relativement simple de ce que « toutes les intégrales sont les mêmes ! »

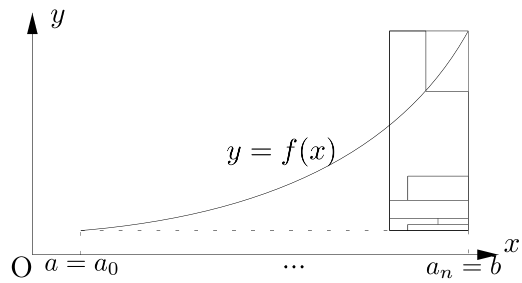
Problème 4

On considère une fonction $f(x)$ définie et monotone sur un intervalle $[a;b]$. Démontrer que si D est une subdivision quelconque de cet intervalle, de maille δ, alors :

$$S\left(f(x); D\right) - s\left(f(x); D\right) \leqslant |f(b) - f(a)| \cdot \delta$$

Indication. Une traduction formelle de l'illustration suivante permet de régler la question :





Problème 5

On considère toujours une fonction $f(x)$ définie et monotone sur un intervalle $[a;b]$. On considère de plus une suite emboîtée $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subdivisions de cet intervalle telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \delta\left(D_n\right) = 0$$

où $\delta\left(D_n\right)$ est la maille de la subdivision D_n.

Démontrer alors que les deux limites $\lim\limits_{n\to\infty} s(f(x); D_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} S(f(x); D_n)$ existent et sont égales.

Une notation. En conséquence du résultat précédent, on note $\int(f(x); D_n)$ la valeur commune des deux limites $\lim\limits_{n\to\infty} s(f(x); D_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} S(f(x); D_n)$. Ce nombre dépend *a priori* du choix de la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subdivisions qui sert à le définir.

Problème 6

On considère encore une fonction $f(x)$ définie et monotone sur un intervalle $[a;b]$, et — cette fois-ci — deux *suites emboîtées $(D'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(D''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subdivisions de cet intervalle telles que :*

$$\lim_{n\to\infty} \delta\left(D'_n\right) = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \delta\left(D''_n\right) = 0$$

où $\delta(D'_n)$ et $\delta(D''_n)$ désignent les mailles des subdivisions correspondantes.

A l'aide de la nouvelle suite emboîtée $(D'_n \cup D''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subdivisions de l'intervalle $[a;b]$, démontrer que :

$$\int \left(f(x); D'_n\right) = \int \left(f(x); D''_n\right)$$

Conclusion. En d'autres termes :

$$\int_a^b f(x)dx = \int (f(x); D_n)$$

et cela, quel que soit le choix de la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subdivisions emboîtées pour laquelle $\lim_{n\to\infty} \delta(D_n) = 0$.

Toutes ces intégrales sont donc bien les mêmes !

Section 3. Un miracle . . . très naturel

3.1 Une question initiale : comment jauger une citerne ?

La question suivante est une occasion de lectures, d'observations, de traitements, de critiques et d'interprétations de formules.

Question 3

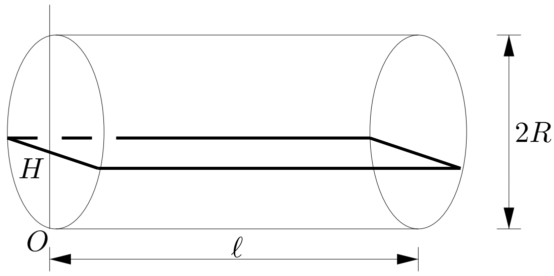
1) *Dans un repère orthonormé, on considère le cercle de rayon R et de centre $(R;0)$ dont l'équation est donc $(x-R)^2 + y^2 = R^2$.*

Si $0 \leqslant h \leqslant 2R$, pour quelle(s) raison(s) (exclusivement) géométrique(s) *la formule suivante est-elle vraie*

$$2\int_0^h \sqrt{2Rx - x^2}dx = \theta R^2 - (R-h)\sqrt{2Rh - h^2}$$

où $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ est l'angle défini par $\cos\theta = \frac{R-h}{R}$?

2) *Une citerne est constituée d'un cylindre d'axe* horizontal *de longueur ℓ dont le diamètre des faces latérales égale $2R$. En tant que fonction de la hauteur $h = OH$, le volume $V(h)$ du liquide contenu dans cette citerne est donné par l'expression :*



$$V(h) = \ell \left\{ R^2 \arccos \frac{R-h}{R} - (R-h)\sqrt{2Rh - h^2} \right\}$$

Dans le but d'étalonner une jauge pour ce type de citerne, on demande d'étudier les variations de cette fonction et d'en déduire le graphe avec une précision suffisante.

3.2 Une synthèse : un nouveau point de vue sur l'intégrale

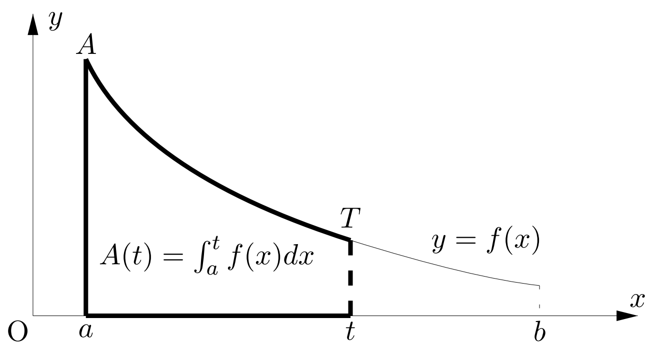
La notion de fonction d'accumulation

Si $f(x)$ est une fonction monotone sur un intervalle $[a; b]$, l'expression

$$A(t) = \int_a^t f(x)dx$$

considérée comme fonction de la borne supérieure d'intégration $t \in [a; b]$, est appelée la **fonction d'accumulation** associée à la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a; b]$.

Lorsqu'on interprète l'intégrale en termes de mesure d'aires, la fonction $A(t)$ décrit donc « l'accumulation d'aire » de la verticale (fixe) $x = a$ jusqu'à la verticale $x = t$, *variable avec l'abscisse* t.



Une observation remarquable

Si $f(x) = x^N$ avec $N = 0, 1, 2, 3, 4$ ou 5, le calcul de la fonction d'accumulation correspondante a été l'objet de l'exercice 5 :

$$A(t) = \int_a^t x^N dx = \frac{t^{N+1}}{N+1} - \frac{a^{N+1}}{N+1}$$

L'étude des variations d'une fonction conduit bien souvent à en calculer la dérivée. Dans le cas présent, on trouve immédiatement :

$$A'(t) = \frac{(N+1)t^N}{N+1} - 0 = t^N$$

Ce genre de coïncidence — retomber sur la fonction originelle en dérivant une fonction d'accumulation — peut être confirmé sur d'autres exemples : $f(x) = e^x$ (cfr. encore l'exercice 5), $f(x) = \sqrt{2Rx - x^2}$ (cfr. la question 3), ...

Tout cela suggère d'évaluer de manière générale l'intégrale de la dérivée d'une fonction.

Un résultat naturel ... ou miraculeux ?

Théorème.

Si $F(x)$ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[a;b]$ et dont la dérivée est monotone sur cet intervalle, alors :

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

Démonstration.

On considère la décomposition régulière D_n de l'intervalle $[a;b]$ définie par $a_i = a + i \cdot \frac{b-a}{10^n}$ avec $0 \leqslant i \leqslant 10^n$. Sur chaque intervalle $[a_{i-1}; a_i]$ de cette subdivision, le théorème de Lagrange ([12]) donne — avec les notations habituelles — la relation :

$$F'(x_i) \leqslant \frac{F(a_i) - F(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}} \leqslant F'(X_i)$$

ou

$$F'(x_i) \cdot (a_i - a_{i-1}) \leqslant F(a_i) - F(a_{i-1}) \leqslant F'(X_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$$

Dès lors

$$\sum_{i=1}^{10^n} F'(x_i) \cdot (a_i - a_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{10^n} (F(a_i) - F(a_{i-1})) \leqslant \sum_{i=1}^{10^n} F'(X_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$$

c'est-à-dire

$$s(F'(x); D_n) \leqslant F(b) - F(a) \leqslant S(F'(x); D_n)$$

Le résultat attendu s'obtient alors en passant à la limite pour $n \to \infty$.

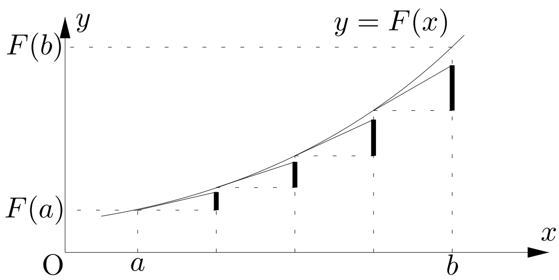
C.Q.F.D.

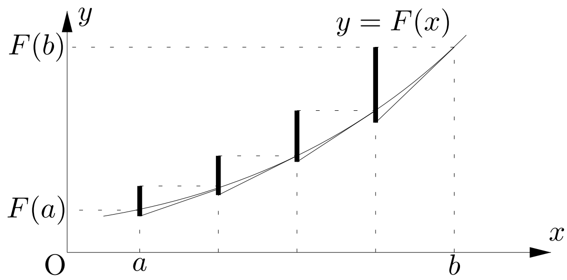
([12]) Le théorème de J.-L. Lagrange (1736-1813) ou des accroissements finis, étudié en $5^{\text{ème}}$, s'énonce comme suit. On considère une fonction $\varphi(x)$ continue et dérivable sur un intervalle $[\alpha;\beta]$ (avec $\alpha < \beta$). S'il existe deux nombres m et M tels que, quel que soit $x \in [\alpha;\beta]$: $m \leqslant \varphi'(x) \leqslant M$, alors on a aussi :

$$m\,(\beta - \alpha) \leqslant \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) \leqslant M\,(\beta - \alpha)$$

Son interprétation graphique est classique.

Remarques. L'interprétation graphique de ce résultat — par exemple pour une fonction croissante — ne fait qu'en traduire la démonstration. Il suffit d'observer que les segments verticaux « épais » ci-dessous sont de longueur égale à $F'(x_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$ pour le dessin de gauche, et $F'(X_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$ pour le dessin de droite :





Le théorème précédent, un peu miraculeux en ce qu'il met en évidence l'intérêt de la *dérivée* dans le calcul d'une intégrale, est célébré — à juste titre — comme « **le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral** ».

Mais la démonstration de ce résultat fait voir qu'il n'y a là rien de bien miraculeux ! On y perçoit au contraire une relation naturelle entre somme et différence, entre produit et quotient : la dérivée est en effet un(e) (limite d'un) **quotient** de **différences** et l'intégrale une (limite d'une) **somme** de **produits**.

La notion de primitive

Le théorème fondamental peut aussi s'écrire de manière un peu plus « réaliste » : si $f(x)$ est une fonction monotone sur l'intervalle $[a; b]$ *telle qu'on puisse trouver une fonction* $F(x)$ *vérifiant la relation* $F'(x) = f(x)$ *en tout point de cet intervalle*, alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Afin d'abréger cet énoncé, on introduit la notion de primitive d'une fonction. Si $f(x)$ est une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$, on appelle *primitive* ([13]) de $f(x)$ n'importe quelle fonction $F(x)$ définie et dérivable sur ce même intervalle, et qui vérifie la relation $F'(x) = f(x)$. Une fonction est dite *primitivable* si elle admet une primitive.

La fonction $F(x) = x^2$ est une primitive de la fonction $f(x) = 2x$ puisque $(x^2)' = 2x$, mais la fonction $F(x) = x^2 + 1$ est une *autre* primitive de la fonction $f(x) = 2x$, puisqu'on a aussi $(x^2 + 1)' = 2x$.

La fonction $f(x) = x$ est primitivable, de primitive $F(x) = \frac{x^2}{2}$.

Proposition.

*Si une fonction $f(x)$ admet une primitive $F(x)$, alors **toutes** les primitives de $f(x)$ sont de la forme $F(x) + C$, où C est une constante arbitraire.*

([13]) On parle parfois aussi d'*intégrale indéfinie* au lieu de primitive ; elle est alors notée $\int f(x)dx$, sans mention de bornes d'intégration.

Démonstration. Si $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont deux primitives arbitraires de la fonction $f(x)$, on a donc par linéarité de la dérivation, et quel que soit $x \in [a;b]$:

$$(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Or, toute fonction continue et dérivable sur un intervalle $[a;b]$ et dont la dérivée y est identiquement nulle est *nécessairement constante* sur cet intervalle.

C'est une conséquence immédiate du théorème de Lagrange déjà cité. En effet, si $\varphi(x)$ est une telle fonction, dès que $u < v$ ce théorème fournit l'encadrement :

$$0 \leqslant \varphi(v) - \varphi(u) \leqslant 0$$

sur l'intervalle $[u;v] \subset [a;b]$ puisque par hypothèse on peut y prendre $m = M = 0$. Cela établit que, quels que soient u et $v \in [a;b]$, on a toujours $\varphi(u) = \varphi(v)$: la fonction $\varphi(x)$ est donc bien constante sur l'intervalle $[a;b]$.

C.Q.F.D.

Fonction d'accumulation et primitives

Le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral montre que la valeur d'une intégrale peut s'obtenir autrement que comme limite d'une somme de produits : à partir d'une lecture « à l'envers » du calcul des dérivées.

Plus précisément, dès qu'on considère une fonction $f(x)$ monotone sur un intervalle $[a;b]$, si $A(t) = \int_a^t f(x)dx$ est la fonction d'accumulation correspondante et si $F(t)$ est une primitive de $f(t)$, alors le théorème fondamental s'écrit sous la forme :

$$A(t) = \int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a)$$

La fonction d'accumulation est donc la primitive qui s'annule pour $t = a$. Le calcul d'une intégrale se ramène ainsi au calcul de la différence de deux valeurs d'une primitive. C'est là un point de vue tout à fait nouveau quant au calcul d'une intégrale, et dont l'efficacité est remarquable !

Exemple. Si $0 < a < b$, on souhaite calculer $\int_a^b \frac{1}{x}dx$. Or, on sait que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, c'est-à-dire que la fonction $F(x) = \ln x$ est *une* primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$. On en déduit immédiatement, grâce à tout ce qui précède :

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$$

3.3 Quelques exercices

Exercice 6

1) *Calculer* $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$. *Comparer avec les résultats de l'exercice 4.*

2) *Calculer* $\int\limits_{0}^{\pi} \cos x dx$, $\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx$ et $\int\limits_{0}^{2\pi} \cos x dx$.

Toutes les conditions d'application du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral sont-elles bien remplies ? Comment résoudre les cas litigieux ?

Exercice 7

1) *Par un raisonnement (exclusivement) géométrique, calculer* $\int\limits_{-t}^{+t} \sqrt{1-x^2}dx$.

Contrôler ensuite *le résultat à l'aide du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, après avoir vérifié si les conditions d'application en sont bien remplies.*

2) *Y a-t-il moyen de transposer la partie* géométrique *du raisonnement précédent au calcul de* $\int\limits_{-t}^{+t} 2\sqrt{1-x^2}dx$ *? Pourquoi ?*

3) *La* définition *d'intégrale permet-elle de déduire la valeur de* $\int\limits_{-t}^{+t} 2\sqrt{1-x^2}dx$ *de celle de* $\int\limits_{-t}^{+t} \sqrt{1-x^2}dx$ *? Détailler.*

Exercice 8

La puissance électrique $P(t)$ *(exprimée en MW) nécessaire à l'ensemble des activités d'une ville de taille moyenne est décrite en fonction du moment* t *de la journée (*$t \in [0;24]$ *exprimé en heures) par :*

$$\begin{aligned} P(t) = & - 0,2906165437 \cdot 10^{-6} \cdot t^9 + 0,00003076843301 \cdot t^8 - 0,001342038667 \cdot t^7 \\ & + 0,03107383835 \cdot t^6 - 0,4097902563 \cdot t^5 + 3,064475374 \cdot t^4 \\ & - 12,23848620 \cdot t^3 + 23,85276352 \cdot t^2 - 18,37307744 \cdot t + 25 \end{aligned}$$

Quel est le coût de l'énergie consommée par cette ville pendant une journée, le kilowatt-heure étant facturé à 4,80 F, hors T.V.A. ?

Comparer avec le résultat obtenu dans la question 1.

Toutes les conditions d'application du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral sont-elles bien remplies ? Formuler une solution théorique de ce problème.

Exercice 9

1) *On considère un tonneau sphérique, c'est-à-dire une sphère coupée par deux plans parallèles équidistants du centre de la sphère. Si $2h$ désigne la hauteur du tonneau et r le rayon de son couvercle, calculer son volume.*

Donner une interprétation géométrique du résultat.

Comparer avec les résultats obtenus dans l'exercice 3 et la question 2, où $2h = 1$ m et $r = 40$ cm.

2) *On note $2r$ le diamètre de la section d'un tore de révolution, et ρ le rayon du cercle de gorge. Calculer le volume de ce tore de révolution.*

Donner une interprétation géométrique du résultat. Comparer avec le résultat obtenu dans l'exercice 3, où $2r = 5$ cm et $\rho = 45$ cm.

3) *Toutes les conditions d'application du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral sont-elles bien à chaque fois remplies ? Comment résoudre les cas litigieux ?*

Les deux exercices suivants sont consacrés aux propriétés de linéarité de l'intégrale : par rapport aux bornes d'intégration (exercice 10), et par rapport aux fonctions à intégrer (exercice 11).

Exercice 10

On considère une fonction $f(x)$ monotone sur l'intervalle $[a; b]$. Si $a < c < b$ et si la fonction $f(x)$ est primitivable, démontrer la formule :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Quelle est l'interprétation géométrique de cette formule ?

Comparer avec les résultats correspondants de l'exercice 5.

Exercice 11

1) *On considère une fonction $f(x)$ monotone sur l'intervalle $[a; b]$. Si k est un nombre réel et si la fonction $f(x)$ est primitivable sur cet intervalle, démontrer que la fonction $k \cdot f(x)$ est aussi monotone et primitivable sur ce même intervalle.*

Établir ensuite la formule :

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Quelle est l'interprétation géométrique de cette formule, en rapport par exemple avec l'exercice 7.

2) *On considère deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ monotones sur l'intervalle $[a; b]$. Montrer d'abord que si ces deux fonctions sont primitivables sur cet intervalle, leur somme est aussi primitivable sur cet intervalle.*

Démontrer alors que, si $f(x)+g(x)$ est de plus monotone sur l'intervalle $[a;b]$, alors :

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Quelle est l'interprétation géométrique de cette formule ?

Une conséquence remarquable du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral est que tout résultat important en termes de calcul de dérivée doit avoir un correspondant en termes de calcul d'intégrale. C'est ce qu'essaient de mettre en évidence les deux exercices suivants.

Exercice 12

1) *On considère deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ dérivables sur l'intervalle $[a;b]$. Démontrer que si les trois fonctions $f'(x)\cdot g(x)$, $f(x)\cdot g'(x)$ et $(f(x)\cdot g(x))'$ sont monotones sur cet intervalle, alors on a la formule d'« intégration par parties » :*

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx$$

2) *Utiliser le résultat précédent pour calculer $\int_1^t \ln x dx$.*

Exercice 13

1) *On considère une fonction $f(x)$ primitivable sur l'intervalle $[a;b]$, et une fonction $\varphi(t)$ dérivable sur un intervalle I tel que $\varphi(I)=[a;b]$. Montrer qu'alors la fonction $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ est primitivable sur l'intervalle I.*

2) *On considère une fonction $f(x)$ monotone et primitivable sur l'intervalle $[a;b]$, et une fonction $\varphi(t)$* croissante *et dérivable sur un intervalle $[\alpha;\beta]$ avec $\varphi(\alpha)=a$ et $\varphi(\beta)=b$. Démontrer que si la fonction $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ est monotone sur l'intervalle $[\alpha;\beta]$, alors on a la formule de « changement de variables » :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$$

Énoncer et démontrer le résultat correspondant dans le cas où la fonction $\varphi(t)$ est décroissante *et dérivable sur un intervalle $[\alpha;\beta]$.*

3) *Utiliser le résultat précédent pour calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.*

Comparer, en l'adaptant, ce résultat avec celui de l'exercice 7.

3.4 Les compétences à atteindre à la fin de cette section

A la fin de cette troisième et dernière section, chacun devrait être capable (au moins) :

- de démontrer le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral,
- de calculer des intégrales de fonctions simples à l'aide du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, en justifiant les différentes étapes du calcul,
- d'identifier et d'utiliser les aspects linéaires du calcul intégral, aussi bien par rapport aux fonctions à intégrer que par rapport aux bornes d'intégration de l'intégrale,
- de calculer des intégrales de fonctions simples à l'aide des méthodes spécifiques du calcul intégral : par parties, ou par changement de variables.

3.5 Quelques problèmes

Le problème suivant prolonge l'étude de « l'aiguille de Buffon »entamée dans le problème 1 de la section 1.

Problème 7

Dans une chambre, le parquet est formé de longues lattes parallèles, dont les joints sont donc équidistants et séparés d'une distance d. On jette en l'air une aiguille de longueur ℓ inférieure à d, de telle sorte qu'elle tombe sur le parquet.

On demande d'évaluer la probabilité p pour que l'aiguille tombe sur un des joints du parquet (indépendamment de son angle de position).

Comment déduire de ce résultat une méthode (probabiliste) d'estimation du nombre π ?

Le problème suivant prolonge le deuxième énoncé du problème 3.

Problème 8 *Quelle est la longueur de l'arc de parabole « semi-cubique » $y = x^{\frac{3}{2}}$ d'origine $(0;0)$ et d'extrémité $(1;1)$.*

Le problème suivant prolonge la remarque intitulée « Un exemple d'intuition numérique trompeuse » dans la section 2. Il fournit un encadrement valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ du nombre $F(n)$ au lieu d'un minorant pour les seules puissances de 2.

Problème 9 *Si n est un entier naturel, on considère $F(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$. A l'aide d'intégrale(s) de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, démontrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$:*

$$\frac{1}{n} + \ln n \leqslant F(n) \leqslant 1 + \ln n$$

3.6 Ce n'est qu'un au revoir ...

Il y a primitives et primitives

Toutes les fonctions usuelles ne sont pas *primitivables aussi simplement qu'on pourrait le souhaiter.*

Par exemple, il y a moyen de montrer que les fonctions $f(x) = \sqrt{x}e^x$ ou $f(x) = \sqrt{\frac{1-\ell x^2}{1-x^2}}$, rencontrées respectivement dans l'exercice 2 et dans la première partie du problème 3, n'ont *aucune* primitive qui s'exprime sous forme de « fonctions élémentaires » (c'est-à-dire en termes d'opérations algébriques portant sur des fractions rationnelles, des fonctions trigonométriques, exponentielles, leurs composées ou leurs réciproques).

Néanmoins, comme ces deux fonctions sont définies et monotones sur des intervalles convenables, leur intégrale existe sur ces intervalles, et donc la fonction d'accumulation correspondante existe pareillement ! Et il y a même moyen de montrer que cette fonction d'accumulation est dérivable, et que sa dérivée redonne bien la fonction initiale !

Les « fonctions élémentaires » sont donc loin d'être les seules fonctions réellement utiles, même dans la résolution de problèmes concrets ...

Les défauts de la monotonie

Pourquoi avoir limité l'étude de l'intégrale aux seules fonctions monotones ?

Il y a eu au moins deux raisons à cela :

- sur des sous-intervalles convenables de leur domaine de définition, la plupart des fonctions usuelles se restreignent à des fonctions monotones,
- la construction de l'intégrale pour ces fonctions est rapide et simple, en particulier la formule d'erreur lors de l'encadrement d'une grandeur par des sommes de Darboux — et on sait que c'est un des pivots de la théorie — s'obtient presque sans effort.

Mais à l'usage, le choix se révèle vite pénible à assumer ! Les énoncés des exercices comportent de nombreuses hypothèses qui ne sont pas nécessairement vérifiées par les fonctions à intégrer, et on ne se sort pas toujours d'affaire en décomposant ces fonctions sur des « intervalles de monotonie »... En fait, les fonctions monotones se comportent déjà bien mal vis-à-vis des opérations les plus élémentaires. Ainsi la somme de deux fonctions monotones n'est pas nécessairement une fonction monotone : les deux fonctions $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$ sont monotones sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, mais leur somme $f(x) + g(x) = \sin x + \cos x$ n'est plus monotone sur cet intervalle ([14]).

Il serait donc utile de disposer d'une classe de fonctions qui soit au moins stable pour les opérations élémentaires d'addition, de multiplication par un nombre, éventuellement de composition, etc ..., et qui recouvre la plupart des fonctions dont on a pratiquement et théoriquement besoin.

([14]) Bien sûr, cette somme redevient monotone sur chacun des deux sous-intervalles $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$. Mais tout ne se termine pas toujours aussi bien : on peut construire deux fonctions monotones sur l'intervalle $[0; 1]$ dont la somme présente une *infinité non dénombrable* d'extremums sur cet intervalle. Ce genre de monstres met en évidence que les fonctions monotones ne s'entendent pas très bien avec l'addition !

C'est ce que propose de faire le dernier problème de ce cours. Il offre ainsi l'occasion de relire toute la partie théorique — y compris les exercices 6 à 13, et les problèmes 4 à 6 — en critiquant et approfondissant la construction et les propriétés de l'intégrale qui y sont étudiées. Peut-on rêver d'un meilleur exercice de synthèse ... ?

Le dernier problème.

On considère l'ensemble des fonctions à dérivée bornée sur un intervalle $[a;b]$: une fonction $f(x)$ appartient à cet ensemble si elle est dérivables sur l'intervalle en question et s'il existe une constante (positive) k telle que, quel que soit $x \in [a;b]$, on ait $|f'(x)| \leqslant k$.

1) *Si $f(x)$ est une fonction à dérivée bornée sur l'intervalle $[a;b]$ et D une subdivision quelconque de cet intervalle, montrer que dans tout intervalle sous-jacent à cette subdivision il existe toujours un point dont l'image est minimum (resp. maximum) parmi les valeurs de la fonction sur l'intervalle.*

En déduire que les sommes de Darboux inférieure $s(f(x);D)$ et supérieure $S(f(x);D)$ sont toujours bien définies pour les fonctions à dérivées bornées.

2) *Si $f(x)$ est une fonction à dérivée bornée (de constante k) sur l'intervalle $[a;b]$ et D une subdivision quelconque de maille $\delta(D)$ de cet intervalle, démontrer la formule de calcul d'erreur :*

$$0 \leqslant S(f(x);D) - s(f(x);D) \leqslant k \cdot (b-a) \cdot \delta(D)$$

En déduire une définition de l'intégrale d'une fonction à dérivée bornée sur un intervalle, ainsi que l'indépendance de l'intégrale par rapport au choix d'une suite emboîtée de subdivisions.

3) *Adapter aux fonctions à dérivée bornée sur un intervalle les résultats de linéarité de l'intégrale, ainsi que les formules d'intégration par parties et de changement de variables (cfr. les exercices 10, 11, 12* et *13).*

Des extensions de la notion d'intégrale à des ensembles de plus en plus vastes de fonctions seront — pour tous ceux que cela intéresse — l'objet de cours plus approfondis, dans les années ultérieures. A titre documentaire, voici deux exemples de tels ensembles, dans un ordre de généralité croissante.

- L'ensemble des fonctions lipschitziennes sur un intervalle $[a;b]$: une fonction $f(x)$ appartient à cet ensemble s'il existe une constante (positive) k telle que : $\forall u, v \in [a;b] \ : \ |f(u) - f(v)| \leqslant k\,|u-v|$.
  La théorie obtenue à l'issue du dernier problème ci-dessus s'étend presque sans changement à cet ensemble de fonctions (strictement) plus large que celui des fonctions à dérivées bornées. Mais la démonstration du bien-fondé de certaines définitions ou hypothèses devient parfois plus technique.
- L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle.
  Intuitivement, c'est un ensemble de fonctions qui doit convenir pour définir l'intégrale. En effet, l'idée de base est qu'une fonction $f(x)$ continue sur un intervalle peut toujours être assimilée au voisinage de n'importe quel point ξ de cet intervalle à une fonction *constante* égale ([15]) à $f(\xi)$. Or, cette idée constitue le fondement d'un processus de discrétisation « en escaliers » pour de telles fonctions.

([15]) Une calculatrice graphique permet de s'en convaincre : il suffit de zoomer sur l'axe des x au

Malheureusement, les démonstrations à produire pour rendre compte du bien-fondé de cette intuition dans la construction de l'intégrale deviennent vite trop nombreuses dans le cadre d'un cours d'initiation.

Section 4. En guise de conclusion

Ce cours n'achève donc en rien un apprentissage de ce qu'est l'intégrale en mathématiques.

La version élémentaire du calcul intégral qui a été proposée ici n'est pas pour autant vaine ! Son objectif était de montrer comment et pourquoi une théorie mathématique se forme lentement et doit toujours évoluer, problèmes après problèmes. Ainsi, en mathématiques, comme dans la plupart des sciences, les hypothèses les plus générales et les théories les plus efficaces ne se découvrent qu'après beaucoup de tâtonnements.

Cela prend du temps, mais ce temps-là n'est jamais perdu : c'est le prix de l'intelligence !

voisinage du point d'abscisse t, **sans changer d'échelle sur l'axe des** y. Au fur et à mesure de l'évolution du processus, la portion de graphe visible se redresse jusqu'à presque devenir horizontale ... C'est une manière très visuelle d'introduire la célèbre définition de la continuité en ε , δ.