11.7. Fiche N° 6 : Le duopoly de Cournot

11.7.1 L'énoncé

Problème 11.7.1 *Les firmes* 1 *et* 2 *sont concurrentes, elles fabriquent en un an le même produit en des quantités* q_1 *et* q_2.
Le prix du marché pour une quantité unitaire *du produit est une fonction* P *de la quantité totale* $q_1 + q_2$. *Plus la quantité totale présente sur le marché est grande, plus le prix du marché baisse. Il y a aussi un plafond de* a *unités à ne pas dépasser, afin de ne pas noyer le marché. Ainsi, le prix unitaire pour une quantité totale de* x *unités est donné par la formule* $P(x) = a - x$, *vraie tant que* $x < a$ *(le prix est nul sinon). Quelles quantités les deux firmes doivent-elles produire cette année afin de gagner le plus possible l'une et l'autre, compte tenu de ce que la production de* q *unités entraîne pour la firme productrice un coût évalué à* cq, *où* c *est une constante ?*

Contexte mathématique

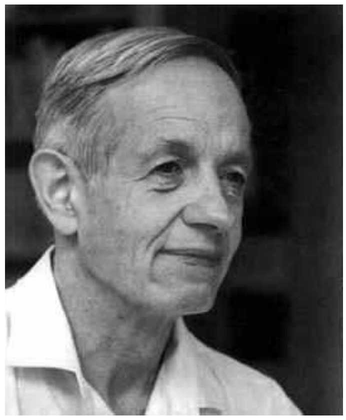
Nous nous intéressons ici à une version ultra-simplifiée d'un modèle de compétition entre deux firmes développé par l'économiste A.A. Cournot en 1838.

Antoine A. Cournot, pionnier de l'économie mathématique, naît le 28 août 1801 à Gray, en France. Il étudie les mathématiques à la Sorbonne notamment, en compagnie de Dirichlet. Il obtient un poste à l'Académie de Paris, puis une chaire d'analyse à Lyon. En 1838, il devient inspecteur général de l'éducation publique et meurt à Paris en 1877.

Antoine Augustin COURNOT

Cournot anticipe de près d'un siècle — mais dans le seul contexte d'un cas particulier — la notion d'équilibre développée par le prix Nobel d'économie J.F. Nash .

L'année 1928 voit la naissance de John F. Nash aux USA. Il étudie les mathématiques au Carnegie Institute of Technology et présente une thèse sur les jeux non-coopératifs à *Princeton. A partir de 1952, il enseigne au MIT, mais est bientôt victime de crises de schizophrénie. Il guérit en 1974 et remporte le prix Nobel d'économie — conjointement avec Selten — en 1994 grâce à un article écrit 45 ans plus tôt.*



John Forbes NASH

Le problème est un problème d'extremum en deux variables. Les fonctions à maximiser sont du second degré, les méthodes classiques sont donc applicables. La situation peut éventuellement aussi être rencontrée à l'occasion de l'étude du calcul des dérivées.

Contexte scolaire

Ce contexte est déterminé d'après le contexte mathématique.

Contexte méthodologique

La situation est plutôt un problème d'application. Le fait que deux variables soient présentes ne permet pas de l'utiliser en vue d'introduire la notion d'extremum, que ce soit en quatrième ou en cinquième année.

11.7.2 Les moyens nécessaires

Les prérequis

Les seuls prérequis sont de nature algébrique. Ils portent essentiellement sur les extrema d'un trinôme du second degré.

11.7.3 Exemple de résolution

Puisqu'aucune des deux firmes ne désire noyer le marché, les quantités produites q_1 et q_2 sont des réels appartenant tous deux à l'intervalle $[0, a[$.

Le profit de la firme i ($i \in \{1, 2\}$) est donné par la formule :

$$\begin{aligned} u_i(q_1, q_2) &= q_i P(q_1 + q_2) - c q_i \\ &= q_i (P(q_1 + q_2) - c) \\ &= q_i (a - q_1 - q_2 - c) \end{aligned}$$

Mettre en équation

Il s'agit de trouver un couple (q_1^*, q_2^*) qui soit la meilleure option pour les deux firmes parmi les couples (q_1, q_2) possibles. Un tel couple s'appelle un *équilibre de Nash*.

En fait, nous cherchons (q_1^*, q_2^*) tel que :

$$\forall q_1 \in [0, a[\ : \ u_1(q_1^*, q_2^*) \geqslant u_1(q_1, q_2^*)$$

et

$$\forall q_2 \in [0, a[\ : \ u_2(q_1^*, q_2^*) \geqslant u_2(q_1^*, q_2)$$

Ces inéquations expriment que le couple (q_1^*, q_2^*) est le plus avantageux pour les deux firmes simultanément.

Chacune des inéquations fournit une relation entre q_1^* et q_2^*. A l'aide des deux relations, on déduit les valeurs de ces inconnues.

Dans une classe de quatrième, nous tenons compte de ce que les deux fonctions u_1 et u_2 sont du second degré. Plus tard, certains préfèrent utiliser le calcul des dérivées. Dans les deux cas, il est bon d'exploiter la *symétrie* présente dans l'énoncé.

Première méthode Posons $q_1 = x$.

Calculer un extremum

$$\begin{aligned} u_1(x, q_2^*) &= x(a - x - q_2^* - c) \\ &= (a - q_2^* - c)x - x^2 \end{aligned}$$

Ce trinôme du second degré prend son maximum en $q_1^* = \frac{a - q_2^* - c}{2}$.
En utilisant la symétrie de la situation, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} q_1^* = \frac{a-q_2^*-c}{2} \\ q_2^* = \frac{a-q_1^*-c}{2} \end{cases}$$

Deuxième méthode Posons $q_1 = x$ et considérons la fonction f donnée par $f(x) = u_1(x, q_2^*) = x(a - x - q_2^* - c)$.

Déterminons le maximum de f :

Déterminer un extremum

$$f'(x) = a - 2x - q_2^* - c$$
$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{a-q_2^*-c}{2}$$
$$q_1^* = \frac{a-q_2^*-c}{2}$$

Vu la symétrie de la situation, les réponses cherchées satisfont aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} q_1^* = \frac{a-q_2^*-c}{2} \\ q_2^* = \frac{a-q_1^*-c}{2} \end{cases}$$

La suite de la résolution est commune aux deux méthodes.

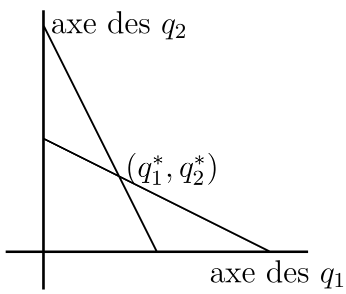
Nous avons un système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 2q_1^* + q_2^* = a - c \\ q_1^* + 2q_2^* = a - c \end{cases}$$

Résoudre dans des cadres différents

que nous pouvons en parallèle résoudre algébriquement et géométriquement (dans un plan muni d'un axe des q_1 et d'un axe des q_2).

La droite donnée par la première équation passe par les points $(\frac{a-c}{2}, 0)$ et $(0, a - c)$. La droite donnée par la seconde équation passe quant à elle par les points $(a - c, 0)$ et $(0, \frac{a-c}{2})$.



Le point d'intersection des deux droites est l'équilibre de Nash, et ses coordonnées sont données par :

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{3}$$

Cette solution vérifie bien la condition $q_1^* + q_2^* < a$, le marché n'est pas noyé !

Référence

[74].