

11.5. Fiche N° 4 : Des pavages du plan

11.5.1 L'énoncé

PROBLÈME 11.5.1 *Réalisez des pavages du plan en utilisant les formes polygonales mises à votre disposition. Dessinez — au choix — l'un des pavages réalisés.*

Contexte mathématique

Les pavages du plan sont connus depuis belle lurette, et cela par les civilisations les plus diverses. On ne peut pas ne pas rappeler par exemple la présence dans l'Alhambra de Grenade de mosaïques correspondant aux 17 groupes d'isométries de pavages périodiques (voir [17]) et réalisées par les Maures à l'époque où ils occupaient l'Espagne. D'emblée nous percevons donc les pavages, en particulier les pavages polygonaux, à la fois comme objets d'étude et comme moyen d'accès à l'étude des groupes de transformations. Ils partagent ces caractéristiques avec les pavages de l'espace, mais aussi avec les polyèdres, les méthodes et les résultats de ces diverses théories ayant bien des points communs.

Qu'ils soient du plan ou de l'espace, les pavages n'intéressent pas seulement le mathématicien. Le physicien, cristallographe en particulier, est aussi un grand « consommateur » de réseaux, de polyèdres et de groupes discrets d'isométries. De plus, la mise en évidence par Roger PENROSE, [118], dans les années septante, de pavages non périodiques remarquables, ayant des symétries locales d'ordre 5, a été suivie quelques années plus tard de la découverte par les cristallographes de quasi-cristaux qui du point de vue géométrique ont des propriétés analogues mais ont de plus des propriétés physiques particulièrement intéressantes.

Ainsi, les pavages du plan ne sont pas seulement connectés à des théories mathématiques fondamentales, ils sont aussi directement liés à des applications scientifiques et techniques de premier plan.

Contexte scolaire

Les pavages du plan et de l'espace fournissent des situations exploitables à des niveaux très divers, dans une optique d'enseignement en spirale. En faire une étude systématique serait certainement un plat trop copieux qui deviendrait aussi indigeste que d'autres sujets. Par contre, y revenir à maintes reprises, par le biais de problèmes variés, permet de rencontrer de nombreux sujets énoncés dans les programmes. Dès le secondaire inférieur, il est ainsi possible de manipuler des polygones et des isométries à des niveaux différents de formalisation.

Les aspects esthétiques, voire ludiques des activités susceptibles d'être élaborées autour des pavages du plan sont de nature à motiver les élèves, non seulement pour « plancher » sur des résultats géométriques, mais aussi pour pratiquer des démarches inductives et déductives. La constatation de l'existence de pavages ayant des propriétés semblables peut aussi être exploitée en vue de réaliser une synthèse concernant les isométries du plan et, par là-même, à introduire la structure de groupe (de transformations), comme le prévoit le nouveau programme du troisième degré.

Contexte méthodologique

La fiche ⁽²⁾ proposée ici n'a pas pour objectif d'effectuer une étude exhaustive des pavages du plan, ni même une étude restreinte aux pavages de la catégorie des pavages archimédiens. Elle décrit une possibilité d'activités dans une classe du premier degré, en mettant particulièrement en évidence les compétences mises en œuvre. Celles-ci relèvent à la fois des socles de compétence et des compétences terminales, ce qui n'a rien d'étonnant car il serait complètement absurde de considérer qu'il y aurait une coupure entre les deux types de compétences et que les compétences terminales ne se rencontrent pas avant le troisième degré. Au premier degré, tout au plus devons-nous insister sur le fait qu'il s'agit alors de compétences « à développer » plutôt que « à atteindre ».

Notre fiche n'épuise donc pas le sujet. Vu l'aspect largement ouvert du problème posé, il est plus que jamais hors de question d'en proposer une solution « modèle ». Aussi trouvera-t-on ci-dessous uniquement une *simulation* de ce que *pourrait être* l'activité d'une classe du premier degré en présence de la situation-problème qui est proposée. Les compétences qui seront sollicitées sont mises en évidence soit dans le corps du texte, en écrivant certains mots en PETITES CAPITALES, soit par des notes en marge.

Conditions de travail au départ : des groupes de 4 élèves disposant de formes polygonales diverses et d'une surface libre d'au moins 1m sur 2m.

Le professeur indique que le travail s'organisera en différentes étapes qui seront précisées au fur et à mesure des besoins, que celles-ci se dérouleront tantôt en groupes, tantôt collectivement et que l'étape finale sera un travail individuel à domicile.

⁽²⁾ Cette fiche a pour origine un texte inédit de Yolande Noël-Roch (IESPECF Mons).

11.5.2 Les moyens nécessaires

Les prérequis

Ils concernent essentiellement les polygones réguliers à 3, 4, ..., n côtés mais sont très limités : l'élève doit simplement être capable de distinguer des polygones d'après leur forme. Un peu de pratique du Logo pourrait s'avérer utile.

Du matériel

Des polygones réguliers ayant tous même longueur de côté. Prévoir au moins des triangles, des carrés, des pentagones, des hexagones et des octogones. Choisir environ 5 cm comme longueur des côtés pour obtenir des ébauches de pavages de taille « raisonnable ».

Les instruments de dessin :

Ils sont classiques : règle et compas.

11.5.3 Exemple de résolution

11.5.3.1 Première étape

Chaque groupe doit d'abord se mettre d'accord sur le matériel dont il souhaite disposer, en tenant compte du fait que tous les groupes doivent pouvoir travailler. Après accord, un élève est désigné par chaque groupe, il va chercher ce matériel en une fois.

Le rôle du professeur jusqu'ici :

- mettre les polygones en vrac de manière à ce que tous les types de polygones soient visibles, sans donner aucune précision sur leur régularité ni leur nombre ;
- choisir les groupes ou les laisser se former aussi librement que possible ;
- distribuer l'énoncé écrit à chaque groupe ;
- préciser le déroulement global et la première étape ;
- attendre les délégués de groupe auprès du matériel.

Sauf pour constituer les groupes, le rôle du professeur a été à peu près muet. Il accueille maintenant chaque délégué de groupe et juge si la collecte de polygones est raisonnable. Il n'intervient que si une demande entrave les possibilités des groupes suivants. S'il intervient, il justifie son intervention. Par exemple si le premier groupe menace d'emporter tous les polygones ayant même forme. Par contre, il n'intervient pas si une seule forme est choisie et qu'il en reste pour les suivants.

Il est possible que certains élèves perçoivent les triangles comme étant « plus petits » que les octogones et qu'ils n'imaginent pas immédiatement que les « petits » et les « grands » polygones peuvent être mélangés dans un pavage. La différence de grandeur en surface occulterait donc l'égalité en longueur. Le professeur n'intervient pas : il profitera plus tard du travail d'un groupe pour mettre les choses au point. L'essentiel ici est d'apprécier les images suscitées par le matériel *avant toute manipulation de celui-ci*.

Dès que tous les groupes disposent de leur matériel, ils réalisent librement ce qui leur paraît répondre au problème. Les groupes plus rapides sont simplement encouragés à construire plusieurs exemples. Pour faire patienter un groupe, le professeur peut distribuer une grande feuille blanche et demander de reproduire l'exemple jugé « le plus beau », le pavage étant reproduit en dessinant au crayon les contours des polygones utilisés. Les dessins constituent des documents utiles pour la suite de l'exploitation et les polygones libérés sont réinvestis dans de nouveaux pavages.

Apprécier des grandeurs en vue de réaliser un choix

Réaliser des pavages, créer, imaginer

Dessiner

Pendant cette étape du travail, le rôle du professeur consiste à encourager un groupe sans lui donner aucun renseignement mathématique, à enregistrer (sans les commenter) les initiatives exploitables dans la suite, à inciter par exemple à « faire quelque chose de beau » ou « quelque chose de plus varié ». Si un groupe améliore sa perception du problème et a besoin de matériel supplémentaire, il est invité à bien réfléchir à sa demande (il ne peut en faire qu'une) et elle est satisfaite dans la mesure du possible.

S'organiser

Il est souhaitable que chaque groupe réalise au moins deux ébauches de pavage avant de passer à l'étape suivante.

11.5.3.2 Deuxième étape

Observer

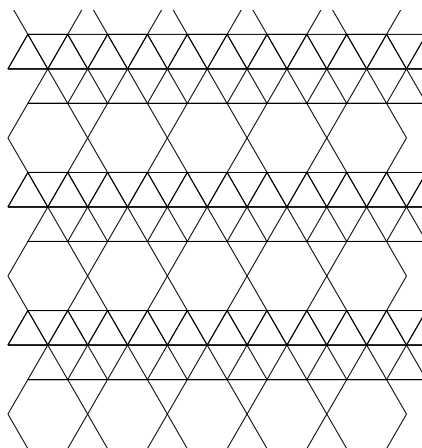
Rassembler de la documentation

Tout le monde regarde les pavages réalisés par tous les groupes. Les groupes se reforment immédiatement ensuite. Chaque groupe peut poser des questions ou commenter le travail d'un autre groupe. Pour le prochain cours, chaque groupe rassemblera des pavages. Pour cela, chacun regardera autour de lui et notera les « vrais » pavages qu'il rencontrera, cherchera des représentations (publicités, photos, ...) de pavages et les apportera. Au début du prochain cours, chaque groupe choisira un document (parmi ceux qu'il aura rassemblés) et l'affichera au tableau.

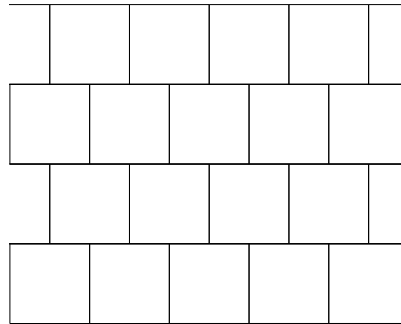
La confrontation des productions des différents groupes permet aux élèves de prendre conscience d'éléments qui leur auraient échappé et de ce qu'une GRANDE LIBERTÉ leur est laissée dans la recherche.

Ainsi, un groupe qui a manqué d'IMAGINATION ou d'AUDACE peut constater

- qu'on peut utiliser des formes différentes dans le même pavage,



- qu'un sommet d'un polygone peut toucher un autre polygone ailleurs qu'en un sommet,



• ...

La recherche de pavages peut alors être relancée. Les élèves peuvent aussi tirer parti des documents qui auront été apportés : des photos de très beaux pavements, décors muraux ou autres, peuvent même dépasser la notion habituelle de pavage mais cela n'est pas gênant ici.

Si nous ne sommes pas en fin de cours, le temps encore disponible est exploité à une recherche nouvelle, enrichie par l'ÉCHANGE D'IDÉES, et à la représentation sur papier de quelques pavages réalisés. Ces dessins peuvent être de deux types :

- soit des SCHÉMAS qui serviront dans la suite pour SE METTRE D'ACCORD sur ce que LA CLASSE CONSIDÉRERA COMME UN PAVAGE,
- soit des dessins plus SOIGNÉS.

Communiquer

Schématiser,
s'accorder

En ne donnant à ce stade aucune information à ce sujet, il est possible de laisser « foncer » un élève en pleine CRÉATIVITÉ ... mais aussi de laisser DESSINER AVEC SOIN un élève moins imaginaire.

Si des polygones ne sont pas disponibles en assez grand nombre, un « modèle » dont on trace les contours permet d'escamoter pour le moment la difficulté technique du dessin. Des modèles sont prêts à d'éventuels demandeurs en fin de leçon.

11.5.3.3 Troisième étape

Chaque groupe dispose des documents réalisés précédemment en classe ou à domicile. Il choisit parmi ces documents celui qu'il désire afficher au tableau. Lorsque l'affichage est terminé, chaque groupe explique son choix.

Un groupe peut rencontrer une grosse difficulté pour fixer son choix puisque plusieurs critères de valeur peuvent s'opposer : travail *personnel*, *belle photo*, dessin *soigné*, dessin *original*, ... Autant de critères acceptables qu'il est intéressant de DISCUTER AU SEIN DU GROUPE.

Auto-
évaluation d'un
groupe

Chaque groupe justifie son choix, éventuellement sa difficulté de choisir. D'autres pavages réalisés par les élèves sont ainsi ajoutés. Le professeur intervient alors pour en ajouter encore, en puisant dans ce que les élèves ont apporté. Il affiche enfin un (des) pavage(s) supplémentaire(s), en fonction des éléments qu'il veut mettre en évidence dans la quatrième étape. Celle-ci se déroule collectivement.

11.5.3.4 Quatrième étape

Quelles sont les figures qui sont utilisées sur les dessins ? Toutes les formes ont-elles été utilisées ? Existe-t-il des ressemblances, des différences entre les pavages ? Etions-nous d'accord sur ce qu'est un pavage ?

Le déroulement collectif doit permettre cette fois de mettre au point certaines notions mathématiques ainsi que le vocabulaire relatifs à la situation. Des remarques des élèves vont être exploitées. En voici quelques vraisemblables :

- Je ne savais pas qu'on pouvait faire ça !
- Jules n'a utilisé que des triangles, Jim a utilisé des triangles et des carrés.
- Paul n'a pas placé les carrés comme Virginie.
- Une sorte de polygone n'a pas été utilisée.
- C'est Louis qui a utilisé le plus de formes différentes.

Les élèves COMMUNIQUENT leurs impressions. Le professeur décide de les noter lui-même . . . ou de les faire noter mais la crainte de devoir ÉCRIRE ne doit pas arrêter un élève. Les élèves ANALYSENT des dessins pour en dégager des composantes (triangle, carré, . . .), ils RECONNAISSENT UNE PROPRIÉTÉ (segments de même longueur, façons de réaliser des pavages, en exigeant ou non que les sommets ne puissent toucher que des sommets, . . .).

Ceci n'est possible que si le professeur a su rester discret en début d'activité : si un groupe dit qu'il ne comprend pas bien ce qu'on demande, il ne faut pas se mettre à « définir rigoureusement » ce qu'est un pavage mais temporiser en faisant allusion à un pavement, à un mur de briques, en répondant par une question (n'a-t-il jamais joué avec un puzzle ? des briques Lego ?).

Rédiger

Analyser

Fixer une propriété

Certains élèves peuvent exprimer leur frustration d'avoir eu moins de succès que d'autres : « Si on avait su qu'on pouvait ..., on aurait ... Si on avait eu plus de figures, on aurait ... » C'est l'occasion de relancer traîtreusement une recherche plus difficile qui favorisera les « raisonneurs » et d'introduire un travail technique qui favorisera les « soigneux ». La COMMUNICATION et l'ANALYSE de la première partie de la recherche nous ont donc contraints à NOUS METTRE D'ACCORD sur un mot contenu dans l'énoncé et peu précis dans le langage courant : quels « pavages » recherchons-nous ? Cette INSTITUTIONNALISATION permet au professeur d'orienter la cinquième étape, soit vers la recherche des pavages dits réguliers, soit vers la recherche des pavages réguliers ou semi-réguliers ⁽³⁾, (encore faudrait-il, pour être rigoureux, préciser la régularité en les sommets du pavage, ce dont nous ne nous soucions pas dans ce texte!)

11.5.3.5 Cinquième étape

Dans nos nouveaux pavages, les sommets d'un polygone ne peuvent toucher un autre polygone qu'en un sommet, deux côtés qui se touchent doivent coïncider sur toute leur longueur. Chaque groupe doit écarter les pavages éventuellement déjà dessinés et ne répondant pas à cette contrainte. Chaque groupe doit compléter sa collection de polygones en en dessinant ou découpant de nouveaux, de manière à pouvoir rechercher

- des pavages utilisant une seule sorte de polygones,
- des pavages utilisant plusieurs sortes de polygones.

Ce nouveau problème est lancé en travail de groupes pour deux raisons :

- la quantité de matériel nécessaire,
- la possibilité pour le groupe de confier les dessins et découpages les plus délicats aux plus adroits du groupe, une ORGANISATION du travail qui fait gagner du temps et apprend à COLLABORER,
- la difficulté d'interpréter positivement des essais voués à l'échec : trop d'élèves isolés se décourageraient vite face aux « pavages impossibles ».

Exploiter un
échec

Le professeur devra gérer ici successivement deux sous-étapes fort différentes.

Dans la première (le dessin et le découpage de nouveaux polygones), il devra observer l'estimation de la tâche par le groupe et sa répartition au sein du groupe. Après un démarrage dans tous les groupes, certains échecs apparaîtront, tant dans l'organisation que dans l'exécution du travail. Une intervention sera nécessaire pour RECONNAÎTRE LES DONNÉES du problème : tous les côtés de tous les polygones doivent avoir même longueur puisqu'on doit pouvoir les « assembler ».

Analyser

⁽³⁾ Le lecteur intéressé peut consulter la bibliographie mentionnée à la fin de cette fiche. Il trouvera en particulier une classification des pavages réguliers et semi-réguliers dans une monographie du GEM, [18].

Pour utiliser en même temps les polygones déjà disponibles et les polygones construits, la longueur des côtés est donc imposée par le matériel du professeur. Certains polygones sont plus faciles à dessiner que d'autres : on limitera les exigences à la réalisation aux instruments de carrés, triangles et hexagones. Les autres polygones seront reproduits à partir d'un modèle prêté par le professeur.

Les souvenirs de l'école primaire seront les bienvenus et on mettra simplement l'accent sur l'adéquation du compas pour reproduire des longueurs égales. Cette partie avantage les élèves SOIGNEUX et ADROITS DANS LE MANIEMENT DES INSTRUMENTS DE DESSIN. Une répartition équitable de matériel sera assurée (matériel créé par les groupes et matériel du professeur) avant d'entamer la nouvelle recherche de pavages. Une certaine imprécision dans les tracés et les découpages seront les bienvenus dans la suite, pour motiver certains raisonnements. Il serait donc malheureux de mettre exagérément l'accent sur la précision.

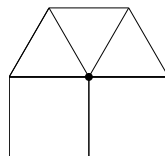
Dans la seconde sous-étape (la réalisation de nouveaux pavages), le professeur de nouveau relativement muet au début, sera très attentif aux diverses tentatives, de manière à choisir le moment du retour au travail collectif. Il suggérera une nouvelle tentative, rappellera éventuellement une CONSIGNE DONNÉE plus tôt mais ne fournira aucun jugement. Nos élèves de 12 ans n'ont pas été souvent stimulés à essayer de réaliser des choses impossibles et il est inutile de les laisser tous longtemps dans cette situation en espérant qu'ils raisonnent seuls pour la clarifier. Le professeur devra donc encourager habilement une recherche et en mettre une autre en attente pour maintenir un temps suffisant d'intérêt dans tous les groupes. Il devra choisir le moment de faire démarrer une SYNTHÈSE des travaux.

En prévision de cette exploitation collective, le professeur aura préparé quelques dessins de nœuds de pavages, c'est-à-dire des polygones assemblés autour d'un sommet commun de manière à constituer un circuit fermé (la somme des angles au sommet commun vaut 360°). Ces nœuds étaient restés bien cachés jusqu'ici.

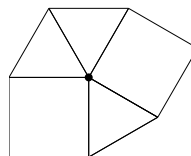
Les travaux réalisés permettent de nouveau des comparaisons : on ANALYSE les dessins en considérant spécialement les sommets. Des constats d'échecs et différentes configurations sont notées :

- personne n'a obtenu un pavage avec les seuls pentagones
- ... ni en n'utilisant que des octogones
- voici par contre plusieurs configurations autour d'un point :

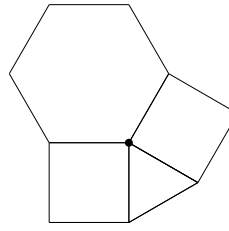
– carré–carré–triangle–triangle–triangle



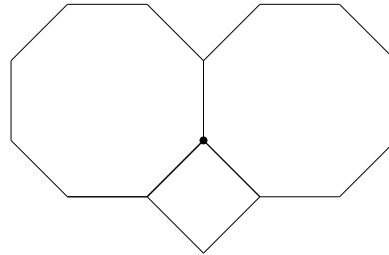
– carré–triangle–carré–triangle–triangle



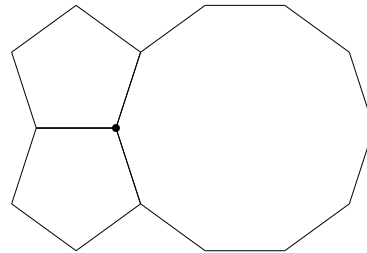
- carré–triangle–carré–hexagone.



- octogone–carré–octogone.

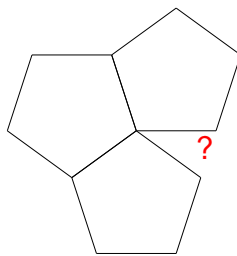


- pentagone–décagone–pentagone.

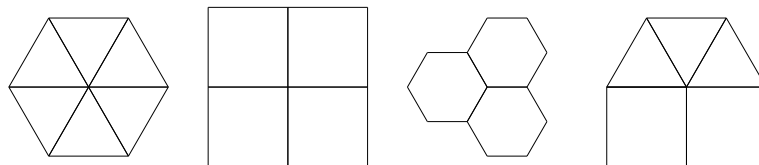


- éventuellement d'autres grâce à la documentation du professeur.

Il s'agit alors de mettre de l'ordre dans ces constatations. On assemblera 3 pentagones pour constater qu'on ne peut « fermer le tour » avec aucun polygone disponible.



On comparera à ce qui se passe en assemblant 6 triangles, 4 carrés, 3 hexagones, 2 carrés et 3 triangles, ...



Tant mieux si les polygones découpés par les élèves sont moins précis et moins maniables que le matériel du professeur : cela peut créer le doute sur certains assemblages. Comment savoir si nous avons une chance de réussir en utilisant un pentagone ou d'autres polygones, y compris des polygones dont nous ne disposons pas pour le moment ?

L'idée d'utiliser des polygones non disponibles et une certaine difficulté de réalisation précise oblige à RAISONNER, à RECONNAÎTRE UNE PROPRIÉTÉ qui permet de pronostiquer que « ça marchera » ou que « ça ne marchera pas ». La manipulation met LA NOTION de tour EN RAPPORT AVEC LE PROBLÈME POSÉ : lorsqu'on utilise un seul type de polygones, on doit pouvoir couvrir la surface autour d'un point avec un certain nombre de secteurs de même amplitude.

Les élèves qui ont travaillé auparavant en LOGO savent qu'on exécute un tour en 360° . Pour les autres, le pavage omniprésent des feuilles quadrillées permet de DÉDUIRE l'angle de 360° à couvrir. La DÉMARCHE INVERSE donne la valeur des angles des triangles équilatéraux et des hexagones réguliers. On peut aussi trouver autrement les valeurs dans les hexagones à partir de celles des triangles. C'est le moment de PRÉCISER ensemble un peu de VOCABULAIRE : triangle équilatéral, pentagone régulier, polygone régulier, en attirant l'attention sur SEGMENTS DE MÊME LONGUEUR ET SECTEURS DE MÊME AMPLITUDE.

Pour pouvoir paver autour d'un point avec des polygones d'un seul type, IL FAUT que 360° soit un multiple des angles de ces polygones. Ainsi apparaît l'ébauche d'un tableau :

polygone régulier	nombre de côtés	angle	nombre de polygones	assemblage
triangle	3	60°	6	$6 \times 60 = 360$
carré	4	90°	4	$4 \times 90 = 360$
pentagone	5	?	2	$2 \times ? < 360$
			3	$3 \times ? < 360$
			4	$4 \times ? > 360$
hexagone	6	120°	3	$3 \times 120 = 360$
octogone	8	?	2	$2 \times ? < 360$
			3	$3 \times ? > 360$
...		

Si les élèves ont auparavant travaillé en LOGO, ils calculent facilement les valeurs manquantes dans ce tableau. En effet, pour dessiner les polygones, ils ont utilisé les angles extérieurs. Dans le cas du pentagone régulier par exemple, la tortue passe d'un côté au suivant en tournant de 72° (PARCE QUE $360 : 5 = 72$). Les élèves peuvent en DÉDUIRE que les angles qui les intéressent cette fois valent 108° (PARCE QUE $180 - 72 = 108$). Ils ASSOCIENT alors trois propriétés :

- les pentagones réguliers ont des angles de 108° ,
- 108 n'est pas un diviseur de 360,
- il est impossible d'assembler des pentagones réguliers autour d'un point.

S'ils n'ont pas cette expérience, le tableau permet d'INDUIRE que les amplitudes des angles (intérieurs) semblent augmenter avec le nombre de côtés. La superposition des polygones découpés confirme le fait. Après avoir EXPLICITEMENT ACCEPTÉ cette propriété, nous en DÉDUISONS que les amplitudes sont strictement comprises entre 90 et 120 pour le pentagone. Nous ne les calculons pas mais cette information SUFFIT pour conclure à l'impossibilité de paver. Dans ce cas, les élèves ASSOCIENT

Induire

- la liste des diviseurs de 360,
- la double inégalité « $90 < \text{amplitude} < 120$ » (sans que cette écriture soit utilisée nécessairement !).
- il est impossible de paver en n'utilisant que des pentagones réguliers.

Si certains assemblages sont douteux (par manque de précision), un calcul simple confirmera par exemple la validité de la configuration

hexagone – carré – triangle – carré

sous la forme

$$120^\circ + 90^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 360^\circ$$

11.5.3.6 Sixième étape

Un pavage est **régulier** si les sommets de chaque polygone ne touchent que des sommets d'autres polygones et s'il est formé avec un seul type de polygones réguliers. Quels sont les pavages réguliers déjà réalisés ? En existe-t-il d'autres ?

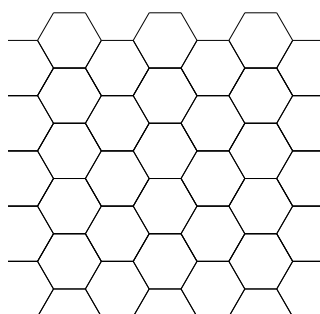
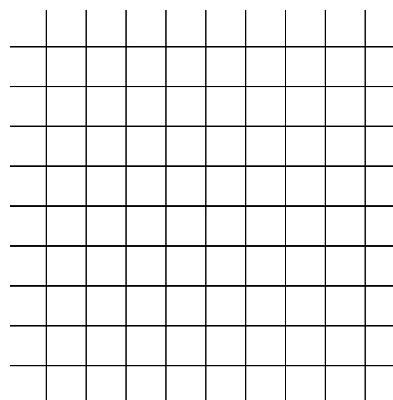
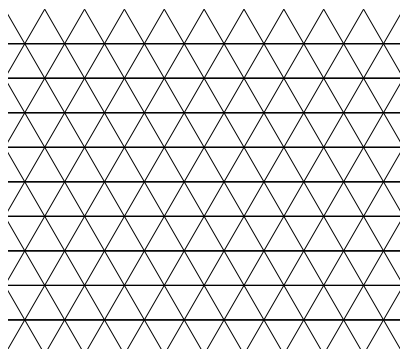
Le professeur contrôlera d'abord ici l'aptitude des élèves à LIRE. Éventuellement, l'énoncé sera expliqué avant de laisser un temps de recherche individuelle.

Lire un énoncé

Le professeur observera qui réclame des polygones découpés, il invitera les élèves à raisonner sans manipulation et ne distribuera quelques polygones qu'aux élèves qui sont complètement bloqués. Il permettra les échanges d'idées en petits groupes. Il attendra raisonnablement pour laisser à quelques élèves la possibilité de TRANSFÉRER à d'autres polygones le RAISONNEMENT effectué dans le cas du pentagone.

Le professeur aide la classe à RECONNAÎTRE LE PROBLÈME dans le tableau ébauché précédemment :

- Nous pouvons paver régulièrement à l'aide de triangles, à l'aide de carrés, à l'aide d'hexagones.
- Nous savons qu'il est impossible de paver régulièrement avec des pentagones parce l'angle du pentagone régulier n'est pas un diviseur du tour.
- Il reste à envisager des polygones à 7, 8, 9, ... côtés.
- Nous savons que les amplitudes grandissent en même temps que le nombre de côtés des polygones. Ainsi, les amplitudes dans les polygones à 7, 8, 9, ... côtés sont supérieures à 120 (mais aussi inférieures à 180, mesure de l'angle plat en degrés).
- Nous connaissons tous les diviseurs de 360. Ce sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.
- Il est impossible de paver régulièrement avec une seule sorte de polygones réguliers à plus de 6 côtés puisque aucun nombre strictement compris entre 120 et 180 n'est un diviseur de 360. Les premier et dernier points ci-dessus nous permettent de DÉDUIRE la SYNTHÈSE cherchée : *il existe exactement trois pavages réguliers du plan.*



La dernière étape est un peu la cerise sur le gâteau. Il ne s'agit plus de faire progresser la connaissance mathématique, mais de faire réaliser par les élèves un travail soigné et plaisant.

11.5.3.7 Septième étape

(Travail à domicile) :

Sur une feuille blanche dont le plus petit côté mesure au moins 30 cm, dessinez un beau pavage qui utilise au moins deux sortes de polygones.

Faire prendre conscience du matériel nécessaire :

- Une feuille A4 est insuffisante pour réaliser le travail. Deux feuilles assemblées seront donc acceptées mais le travail devra être soigné.
- Les polygones ne peuvent pas être trop grands, sinon nous n'aurons qu'un tout petit morceau de pavage.
- Il sera utile de réaliser plusieurs pavages pour choisir celui que nous voulons dessiner.

Après cette ANALYSE du travail, le professeur précise qu'une présentation soignée et la beauté seront les critères d'APPRÉCIATION du travail. Il distribue un stencil sur lequel les élèves disposent d'un modèle de polygone de chaque type. Les élèves sont libres de les reproduire et découper pour réaliser leur travail, d'embellir leur pavage selon leur goût. Seule contrainte : le résultat devra laisser bien apparent les tracés des polygones. Ceux-ci devront être précis et l'ensemble soigné.

11.5.4 Prolongements possibles

L'activité précédente s'est terminée par la construction, d'une part, de « nœuds de pavage », d'autre part, des trois pavages réguliers et de certains pavages semi-réguliers.

Mais tous les cas n'ont pas nécessairement été rencontrés. *A fortiori* n'aura-t-on pas procédé à une classification exhaustive des pavages semi-réguliers.

Des prolongements possibles, dont certains ne seraient rencontrés qu'au deuxième ou au troisième degrés, pourraient porter sur les questions suivantes :

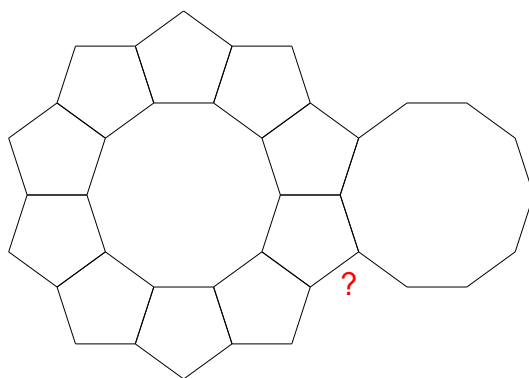
- A-t-on déterminé *tous* les nœuds de pavage possibles ?

En plus de ceux qui figurent dans le texte, il faut noter les nœuds suivants :

- triangle – triangle – triangle – triangle – hexagone
- triangle – hexagone – triangle – hexagone
- triangle – carré – triangle – dodécagone
- carré – hexagone – dodécagone
- triangle – dodécagone – dodécagone

- Tout nœud de pavage peut-il être prolongé en un pavage ?

Le nœud pentagone – décagone – pentagone ne le permet pas : s'il est possible d'ajuster dix pentagones autour d'un décagone, il n'est par contre pas possible d'entourer un pentagone d'une chaîne constituée alternativement de pentagones et de décagones.



Le nœud triangle – carré – triangle – dodécagone ne peut pas non plus être prolongé en un pavage.

- Déterminer tous les pavages semi-réguliers possibles.
En plus des trois pavages réguliers, on doit trouver 8 pavages semi-réguliers.
- Déterminer les isométries d'un pavage régulier ou semi-régulier.
- ...

Références

[17], [18], [40], [51], [86], [118] [133].