Chapitre 10

La problématisation du cours de mathématiques

10.1 Un contraste à réduire . . . 212
10.1.1 Deux discours qui s'opposent . . . 213
10.1.2 Ou deux discours qui s'épaulent mutuellement . . . 214
10.2 Une structure commune . . . 215
10.2.1 Une modélisation de séquence d'apprentissage . . . 216
10.3 Plusieurs espèces de problèmes . . . 221
10.3.1 Les problèmes d'introduction . . . 222
10.3.2 Les problèmes d'application . . . 224
10.4 En guise de conclusion . . . 225

L'enseignement des mathématiques ne se propose pas seulement de développer chez les élèves des méthodes de résolution de problèmes. En effet, « faire » des mathématiques, ce n'est pas seulement résoudre des problèmes, c'est aussi dégager de la solution d'un ensemble de problèmes des méthodes nouvelles, dans l'espoir d'en tirer, à terme, la solution de nouveaux problèmes. Cet indispensable travail de synthèse est l'objectif réservé à ce qu'on appelle en général le « cours de théorie ». La question qui se pose alors est de savoir s'il est possible — et comment ? — d'intégrer efficacement la résolution de problèmes à ce cours de théorie, ou, plus précisément, de déterminer comment l'organisation globale du cours de mathématiques peut contribuer à renforcer les compétences des élèves en matière de résolution de problèmes.

10.1. Un contraste à réduire

10.1.1 Deux discours qui s'opposent . . .

Le cours de théorie est en général présenté sous une forme *déductive* : partant de définitions générales (sinon d'axiomes), on en déduit des propriétés, des propositions, des théorèmes et des corollaires, illustrés de ci de là d'exemples ou d'applications *a posteriori*.

Au contraire, la résolution d'un problème est — de par sa nature même — vécue sous une forme *inductive* : à partir d'une étude de cas particuliers, on accède par une suite discontinue d'étapes plus ou moins empiriques à une solution brute, qui mérite souvent un effort de nettoyage avant d'être tout à fait convaincante.

Or, lorsque ces deux formes de progression sont trop distantes l'une de l'autre dans l'organisation du cours, elles engendrent des effets antagonistes dans l'esprit de l'élève, une sorte de conflit entre ce qu'il se sent ou est capable de réaliser lorsqu'il est livré à lui-même dans une résolution d'exercices ou de problèmes, et ce que l'enseignant lui présente comme un discours idéal en mathématique.

Plus précisément, le modèle de progression donné en classe par l'enseignant lorsqu'il est au tableau — qu'il « fait cours », comme on dit — ne correspond qu'à l'état *final* de ce que l'élève doit être capable de (re)produire : une définition « léchée », un théorème bien poli et astiqué, l'enchaînement irréprochable des arguments, . . . Mais ce modèle néglige les états intermédiaires, plus approximatifs et même souvent imparfaits, qui précèdent la fixation d'une théorie et qui ont l'intérêt de mettre en valeur les *raisons d'être* des définitions ou des axiomes et qui légitiment *a priori* les résultats.

Or, ces états intermédiaires sont évidemment essentiels s'il s'agit de promouvoir chez l'élève l'art de la découverte : ce sont eux qui ouvrent les portes, c'est là qu'est la clé de la résolution d'un problème. Les effets de ce contraste trop marqué entre la pratique et la théorie se révèlent fréquemment dans les copies de devoirs, d'interrogations ou de tests. Le cours de théorie y est restitué, sinon utilisé, tel que la mémoire de l'élève l'a figé : sans plus aucun sens critique. Comme il est bien connu, seuls les élèves brillants sont capables de réaliser par eux-même cette transition — particulièrement significative en mathématique — de l'inductif au déductif, d'un faisceau d'idées à son exposition technique.

10.1.2 . . . Ou deux discours qui s'épaulent mutuellement

Il semble donc nécessaire de faire *explicitement* en classe avec les élèves, ce passage d'une pensée inductive à une pensée déductive, c'est-à-dire d'établir les raisons d'être d'une pensée déductive formalisée.

Dans cette optique, quand le professeur anime le cours de théorie, cela signifie qu'il s'emploie à reconstruire un enchaînement théorique avec les élèves, et à les convaincre du bien fondé de cette reconstruction, sans arguments d'autorité, mais bien en tirant de l'expérience antérieure de tout le groupe les raisons qui justifient cette reconstruction. C'est ce qu'on appelle parfois — en didactique des mathématiques — la phase d'*institutionnalisation* du savoir.

Une telle organisation du cours de mathématique se pratique déjà à des degrés variables et depuis plusieurs années chez certains enseignants « militants » de tous les réseaux d'enseignement de la Communauté Française. Parmi les groupes qui se distinguent ainsi, if faut signaler : le Centre de Didactique des Sciences de l'Université de Mons-Hainaut (CDS), le Groupe des Collèges Jésuites/Réflexions sur l'Enseignement des Mathématiques (COJEREM), le Centre Technique et Pédagogique de la Communauté Française (CTPCF), le Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM), la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française (SBPMef) et l'Unité de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (UREM-ULB), sans oublier le Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) que nous avons déjà évoqué ailleurs. Ces groupes s'expriment dans diverses publications dont on peut trouver une liste dans le « Catalogue des publications belges de langue française sur l'Education Mathématique » (CREM ASBL, avril 1998), ou à l'occasion de conférences lors des congrès de la SBPMef, de groupes de contact, de formations continues, . . .

Par ailleurs, cette nouvelle organisation du cours de mathématique est déjà présente dans les programmes d'autres pays, comme on l'a souligné dans le chapitre 1.

C'est au niveau de la reconstruction globale du cours de théorie au départ de la résolution de problèmes qu'il convient donc de développer des modèles efficaces et des exemples détaillés. Comme on vient de le signaler, ces modèles et ces exemples commencent à être relativement bien documentés, en particulier en ce qui concerne les deux premiers degrés de l'enseignement secondaire comme l'illustrent les quatre volumes de la série « De question en question », issus des travaux du GEM (cfr. [155]). Mais des résultats analogues à propos des deux années terminales semblent moins nombreux. Les sections suivantes tentent d'apporter quelques éléments de réflexion à ce sujet, tant au niveau d'un modèle que d'exemples.

10.2. Une structure commune

L'objet de cette section est de montrer que le modèle d'apprentissage du savoir mathématique que nous avons désigné par le « slogan » *du procédural au structural* permet de réconcilier la pratique et la théorie dans le cours de mathématique, c'est-à-dire de construire une théorie déductive au départ d'un acquis inductif.

Le modèle en question a été décrit au chapitre 3. Il s'appuie sur des raisons théoriques liées à l'évolution historique des théories mathématiques et à l'étude des processus d'apprentissage en mathématiques. Nous avons déjà constaté au chapitre 8 que le modèle de Sfard peut être transposé à la résolution d'un problème. Nous allons ci-dessous le réutiliser à nouveau dans le cadre de la construction d'une séquence d'apprentissage.

10.2.1 Une modélisation de séquence d'apprentissage

Lorsqu'il s'agit d'élaborer ([1]) une séquence d'apprentissage sur un thème du programme, il convient — comme souligné plus haut — de mettre en valeur les raisons d'être des définitions ou des axiomes, et de légitimer *a priori* les résultats.

Dans ce contexte, la description par A. Sfard de l'évolution du stade procédural au stade structural permet de préciser les étapes propres à l'apprentissage d'un concept mathématique.

L'étape d'intériorisation.

Elle correspond à une mise en scène du processus ou de la notion qui est au centre du thème ([2]) à aborder. Elle peut se réaliser sur base d'un problème simple, dont les difficultés techniques sont de peu d'importance, mais qui a un caractère mobilisateur, sinon paradoxal ... La résolution de ce problème doit mettre en relief les grandes lignes à venir du thème.

L'étape de condensation.

Elle correspond au développement d'une (ou de plusieurs) problématique(s), c'est-à-dire d'une séquence pédagogique de clarification construite à partir de plusieurs problèmes-clés. Dans ce contexte, un problème est une occasion d'enrichir un processus, de le faire évoluer vers un statut de concept. Cette étape peut être traversée de synthèses partielles, qui permettent par exemple de fixer des règles de calculs qui se sont révélées efficaces, ou de s'accorder sur l'énoncé et même la démonstration d'une propriété. Il est fondamental dans cette étape que les problèmes abordés présentent des aspects aussi diversifiés que possible de l'objet principal d'étude. C'est là une condition essentielle si l'on désire progresser vers un point de vue conceptuel.

L'étape de réification.

Elle organise définitivement tout ce que la problématique a permis de dégager. Cette étape a pour vocation à la fois

- de fixer les résultats et d'y mettre de l'ordre,
- de commencer à créer une nouvelle intuition.

([1]) Et il en est évidemment de même lors de la construction d'une synthèse en classe avec les élèves (institutionnalisation).

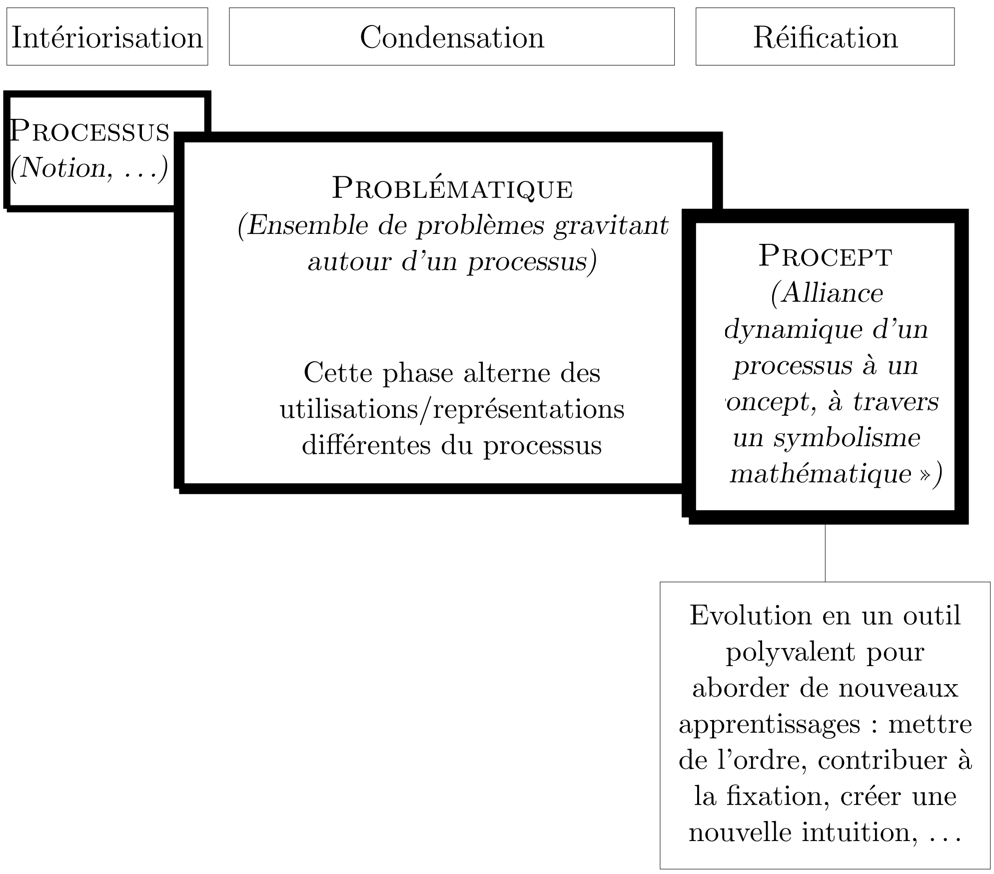
([2]) Ou, si l'on préfère : du chapitre du programme ...

Tous les enseignants savent à quel point les concepts mathématiques sont d'autant plus efficaces qu'ils sont riches d'interprétations diverses. L'étape de réification doit — idéalement — cristalliser les interprétations diverses d'un même concept. Elle y arrivera d'autant mieux que les problèmes retenus dans l'étape de condensation auront été choisis pour cette raison-là. E. Gray et D. Tall (cfr. [83]) ont inventé le terme de « procept » pour définir cet état d'association permanente d'un concept au processus qui l'a fait naître, à travers un symbolisme mathématique approprié. Ainsi

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

désigne à la fois la valeur de cette limite, mais aussi *tout* le processus de calcul de cette limite. Dans l'écriture, $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ c'est le sens du « = » qui crée la difficulté.

Le diagramme ci-dessous résume ce modèle d'évolution. Il est sujet à répétitions : la fin d'une séquence s'accroche au début d'une ou plusieurs autres séquences.



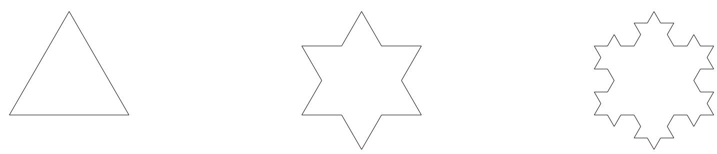
Exemple 10.2.1 Le concept de limite d'une suite numérique

L'étape d'intériorisation.

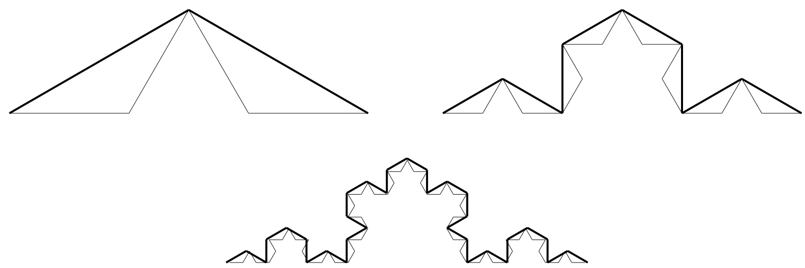
1. **Enoncé (Le problème du flocon de Von Koch.)** Un flocon mathématique s'obtient par le processus suivant. On divise chaque côté d'un triangle équilatéral en trois parties égales. Sur chaque tiers médian, on construit un nouveau triangle équilatéral extérieur. On divise à nouveau chaque côté de l'étoile ainsi obtenue en trois parties égales et sur chaque tiers médian, on construit un nouveau triangle équilatéral extérieur, et ainsi de suite ...

   Quelle est la longueur de la ligne polygonale ainsi obtenue après 2, 3, ...n itérations ?

   Quelle est l'aire délimitée par cette ligne polygonale après 2, 3, ...n itérations ? Que deviennent ces résultats si le processus ne s'arrête jamais ?



2. **Commentaires**
   - Si on suppose que le côté du triangle est de longueur unité, on obtient pour la longueur après n itérations
   $$l_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$$
   tandis que pour l'aire après n itérations, on trouve
   $$\begin{aligned} a_n &= a_0 + 3 \cdot \frac{1}{9}a_0 + 3 \cdot \frac{4}{9^2}a_0 + \cdots + 3 \cdot \frac{4^{n-1}}{9^n}a_0 \\ &= a_0\left(1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4}{9} + \cdots + \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}}\right)\right) \end{aligned}$$
   - Si le processus ne s'arrête jamais, le calcul de l'aire équivaut à évaluer une somme *infinie*, tandis que celui de la longueur revient à calculer un produit *infini*.
   - Si le processus ne s'arrête jamais, le résultat est paradoxal : la ligne polygonale est « de longueur infinie », mais borde une surface d'aire finie, égale aux $\frac{8}{5}$ de l'aire initiale.
   - Le problème fournit un contexte pour établir et discuter la formule qui donne la somme des termes d'une progression géométrique.
   - La géométrie particulière du processus permet d'encadrer « supérieurement » et « inférieurement » les grandeurs étudiées. Ces encadrements peuvent ultérieurement être exploités de façons diverses.



L'étape de condensation.

De nouveaux problèmes sont introduits dans des contextes variés.

1. **Problématique géométrique ou cinématique**
   - **La carpette de Sierpinski.** Un carré unité est divisé en 9 carrés égaux, le carré central est colorié. Les 8 carrés restants sont à leur tour divisés et coloriés suivant le même procédé. Si on continue ainsi indéfiniment, que devient l'aire de la surface blanche ?
   - **L'éponge de Menger.** D'un cube plein de côté unité, on retire les 7 cubes centraux (celui du centre et ceux occupant le centre de chaque face) parmi les 27 cubes résultant de la subdivision de chaque arête du cube initial en trois parties égales. On répète le processus pour chacun des petits cubes restants. Si on continue ainsi indéfiniment, que deviennent le volume et la surface latérale de l'objet ?
   - **Le volume d'une pyramide.** Comment calculer le volume d'une pyramide en la décomposant en deux familles de prismes homothétiques ?
   - **Le problème de la mouche.** Deux locomotives sont distantes de 100 km. Elles roulent l'une vers l'autre à la vitesse de 50 km/h. Une mouche qui se déplace à 100 km/h part d'une des deux locomotives et vole vers l'autre, puis revient vers la première, puis repart vers la seconde, etc. Quelle distance cette mouche aura-t-elle parcourue avant d'être écrasée dans la collision des deux locomotives ?
   - **Paradoxes de Zénon, etc.**
2. **Problématique numérique**
   - **L'écriture décimale des nombres rationnels.** Quelle est la fraction associée à 0,12 681 681 681 681 681 ... ?
   - **La série harmonique et la divergence lente.** La somme infinie

     $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

     est-elle bornée ? Etc.
   - **Le calcul d'approximations rationnelles très rapides de $\sqrt{D}$.** En élevant les inégalités

     $$0 < \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$$

à des puissances suffisamment grandes, construire des approximations rationnelles de $\sqrt{2}$ dont on peut mesurer *a priori* la précision.

- Opérateurs Δ ($\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$), équations linéaires aux différences finies à coefficients constants, etc.

Nous avons déjà constaté que quelle que soit l'activité que l'on considère, l'étape de condensation semble un lieu privilégié de *changements de cadre* et de *changements de registre*. Dans le cas d'une résolution de problème, le changement de cadre ou de registre permet d'évoluer vers une solution. Dans le cas d'une séquence d'apprentissage, le changement de cadre ou de registre participe de façon décisive à l'évolution vers la maîtrise d'un concept.

Par exemple, les problématiques qui ont été proposées ci-dessus mettent en scène le même concept mais dans des cadres différents : géométriques, cinématiques, numériques. L'étude ultérieure des limites de fonctions permet d'y ajouter le registre graphique, etc.

Il ne faut néanmoins pas se cacher que de tous les comportements dont on peut souhaiter la maîtrise par l'élève, ceux associés aux changements de cadres ou de registres semblent — de par leur flexibilité même — les plus difficiles à développer.

L'étape de réification. Une synthèse est élaborée qui fait apparaître notamment les concepts et les résultats principaux. Des prolongements ultérieurs sont préparés.

1. **Concepts**
   - Limite, convergence et divergence d'une suite numérique.
   - Encadrements, caractérisation des nombres réels, ...
   - Le « procept » associé à $\lim_{n\to\infty} a_n = a$
2. **Résultats**
   - Si $|q| < 1$, alors $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1}{1-q}$, et sinon cette limite n'existe pas.
3. **Prolongements**
   - Les limites de suites introduisent l'étude des limites de fonctions.
   - L'opérateur de différence finie prépare de manière numérique la notion de dérivée.
   - Les processus infinis géométriques ouvrent la voie au calcul intégral.

10.3. Plusieurs espèces de problèmes

Il est bien évidemment exclu de proposer n'importe quel problème à n'importe quelle classe. D'une façon générale, on peut affirmer que

> Un problème est lié à une matière en cours d'étude.

Mais ce lien peut lui-même être de nature variable.

10.3.1 Les problèmes d'introduction

Le problème peut servir à introduire une nouvelle tranche de matière, à lui conférer le sens sans lequel l'élève n'a aucune raison de s'y intéresser, en montrant qu'elle permet de répondre à des questions auparavant inabordables. On parle de *situation-problème* pour désigner des problèmes ainsi destinés à l'introduction ou l'étude d'un nouveau sujet. Ce point de vue n'est pas nouveau, puisque Alexis Clairaut, dans [49], veut déjà *… occuper continuellement ses lecteurs à résoudre des problèmes*, considérant qu'*en suivant cette voie, les commençants aperçoivent, à chaque pas qu'on leur fait faire, la raison qui détermine l'inventeur.* (3)

La brochure [9] adopte le même point de vue. Elle constate notamment que

> *C'est dans un champ de contraintes et de nécessités que la construction d'une connaissance, comme solution d'un problème, peut apparaître justifiée et intégrable.*

Plus loin, elle s'interroge :

> *Quelles composantes didactiques doivent constituer les situations–problèmes dont nous devrions jalonner le temps d'enseignement ?*

Elle répond à cette question en décrivant la *démarche scientifique* de façon très proche de la description faite plus haut de ce que nous avons appelé la *méthode axiomatique*, mais en y ajoutant quelques éléments, mentionnés en gras dans l'encadré suivant, qui tiennent compte du rôle des situations-problèmes : introduire de nouvelles connaissances dans une classe. Ainsi, il s'agit

- de partir du questionnement d'une situation, mais **en inscrivant son sens dans une perspective théorique** […] ;
- de modéliser, et donc suspendre provisoirement le seul sens personnel en faveur d'une formalisation **admise par le groupe-classe** ;
- …
- de **participer à l'institutionnalisation [des résultats]**, une objectivation qui est une phase de mise en accord entre les sujets du groupe-classe ;
- **d'expliquer, généraliser, anticiper, prévoir dans des situations comparables et donc élargir le sens du questionnement initial.**

(3) Ces citations sont reprises dans un texte d'Evelyne Barbin, [26].

Les problèmes d'introduction doivent donc être choisis soigneusement. En particulier, la situation d'enseignement doit être suffisamment porteuse de sens pour que l'élève fasse sienne les questions posées. De cette façon, le concept nouveau apparaît comme significatif car c'est un instrument pour résoudre des problèmes.

Un début d'opérationnalisation de ces principes résulte des travaux de divers auteurs ([64], [21]) :

- L'élève doit pouvoir s'engager dans la résolution du problème, il doit pouvoir envisager ce qu'est une réponse possible.
- Les connaissances de l'élève sont en principe insuffisantes pour qu'il résolve immédiatement le problème.
- La situation-problème doit permettre à l'élève de décider si une solution trouvée est convenable ou non.
- La connaissance que l'on désire voir acquérir par l'élève doit être l'outil le mieux adapté à la résolution du problème par l'élève.

La dernière condition doit en particulier éviter que trop d'approches différentes puissent être proposées par la classe, ce qui rendrait la situation ingérable en ne conduisant pas à l'introduction et l'institutionnalisation du point de matière prévu.

10.3.2 Les problèmes d'application

Un problème peut être une application de la matière venant d'être étudiée. Dans ce cas, sa complexité peut être assez grande, mais il ne nécessite normalement pas l'acquisition de nouvelles matières. Les acquis de l'élève doivent suffire, ce qui n'exclut pas une réorganisation éventuelle de ces acquis en vue de trouver la solution ou leur mise en relation avec d'autres acquis antérieurs. Le problème contribue alors au phénomène de compression des connaissances mathématiques de l'élève, ce qui, — normalement — rend celui-ci plus performant.

Un problème de ce type peut éventuellement être traité en plusieurs phases, alternant du travail en classe et du travail à domicile.

10.4. En guise de conclusion

Promouvoir un enseignement qui considère la résolution de problèmes comme une compétence terminale signifie en particulier promouvoir un enseignement qu'on qualifie parfois de « génétique » (4). D'une certaine manière, un tel enseignement prolongerait celui pratiqué déjà au premier degré, et qui s'amorce au second degré du secondaire.

Dans cette approche génétique des matières et des thèmes, il semble important de mettre clairement en évidence les *idées* à la base des problématiques et des concepts, de quasiment décrire certaines *idées* comme des thèmes à part entière ! Cet objectif est bien exprimé par le mathématicien américain W. P. Thurston [145] :

> *We mathematicians need to put far greater effort into communicating mathematical* ideas. *To accomplish this, we need to pay much more attention to communicating not just our definitions, theorems, and proofs, but also our ways of thinking. We need to appreciate the value of different ways of thinking about the same mathematical structure. We need to focus far more energy on understanding and explaining the basic mental infrastructure of mathematics . . . This entails developing mathematical language that is effective for the radical purpose of conveying ideas to people who don't already know them.*

Pour ne citer qu'un exemple : associer la dérivée à un *quotient* particulier, et l'intégrale à un produit particulier permet de situer immédiatement le rôle central du théorème fondamental de l'analyse, qui explicite justement la relation entre produits et quotients « infinitésimaux ». Il en va de même pour la règle de dérivation des fonctions composées ou celle de changement de variables dans une intégrale.

En ce sens, les titres et les sommaires d'un curriculum pourraient cristalliser de telles idées-forces.

Si les contenus des programmes n'ont pas de raisons d'être modifiés radicalement, le *développement* de certains d'entre eux n'en est pas moins sensiblement modifié dès qu'il s'agit de prendre en compte non pas des exigences « académiques », mais bien la logique d'une démarche d'explorations de problèmes (5).

(4) Au sens où il s'agit d'expliquer et d'évaluer les concepts ou les résultats en termes de leur genèse, de leur raisons d'être et de leurs développements ultérieurs, en particulier dans l'environnement des problèmes (mathématiques ou autres) qui les ont fait naître. Cfr. par exemple [147], [67], . . .

(5) Il est probable qu'une telle écriture de programmes implique la disparition de certains thèmes classiques au profit d'une augmentation des exigences dans la maîtrise des thèmes retenus.

Dans ce contexte, un programme pourrait être conçu comme un ensemble de problématiques

- destinées à fournir à l'élève les moyens d'*augmenter son autonomie* tant dans la maîtrise des matières que dans celle des principes et des stratégies utiles à la résolution de problèmes,
- qui respecte évidemment le niveau de compétence visé (par exemple dans le choix d'une option à 2, 4 ou 6 heures/semaine),
- qui accorde une attention suffisante à des thèmes périphériques polyvalents, dans les sciences exactes, les sciences humaines, l'économie, etc ...

Des exemples de rédaction de curriculum de ce type ont été signalés dans le chapitre 1.

Pour conclure, il semble bien que l'*organisation globale* du cours de mathématiques peut contribuer à renforcer les compétences des élèves en matière de résolution de problèmes parce qu'**il est possible de reproduire dans le cours de théorie le « schéma intellectuel » qui gouverne la résolution de problèmes.**

Références

[145], [147], [67], [64], [21], [9], [26], [49], [83], [155].