

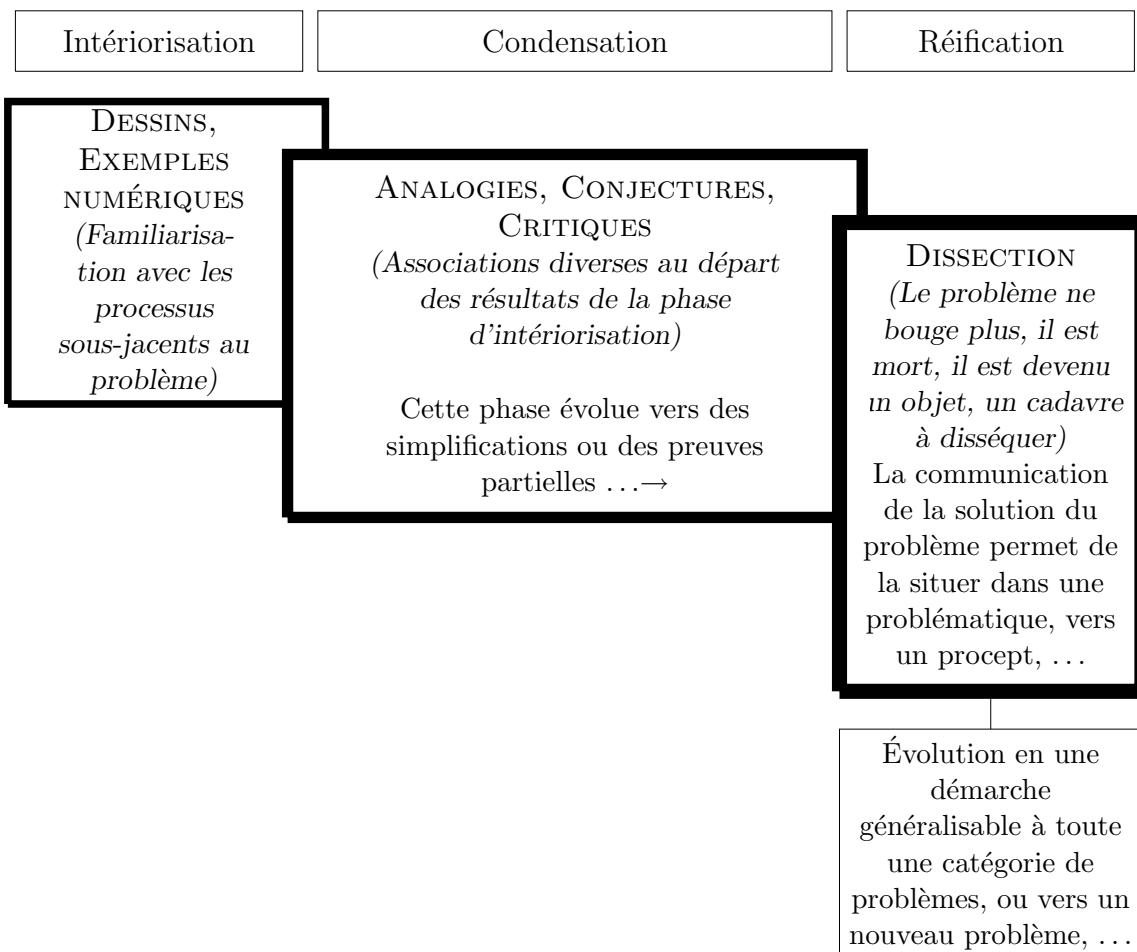
Chapitre 8

Le point de vue psychologique

8.1	Une modélisation de résolution d'un problème	178
8.2	Une taxonomie d'objectifs cognitifs	184
8.3	Les niveaux de van Hiele	186
8.3.1	Le modèle	187
8.3.2	Les propriétés du modèle	189
8.3.3	Les phases de l'apprentissage	191
8.3.4	L'expérimentation	192
8.4	Une conclusion provisoire	196

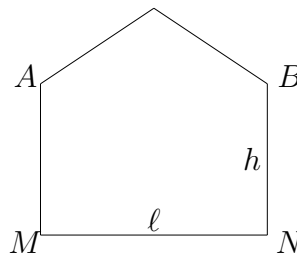
8.1. Une modélisation de résolution d'un problème

Au paragraphe 3.3.1, nous avons présenté la description due à A. Sfard de l'évolution du procédural au structural. Le schéma ci-après présente une adaptation de cette description au cas d'une résolution de problème. Illustrons ce schéma par un exemple.



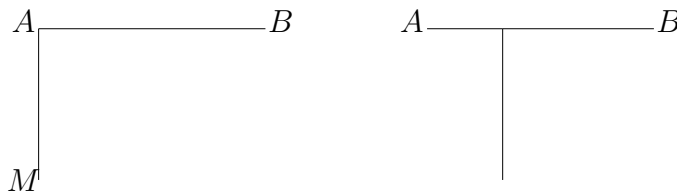
EXEMPLE 8.1.1 ⁽¹⁾ : LE PROBLÈME DE LA GOUTTIÈRE (d'après une idée de F. Buekenhout).

Énoncé. Comment raccorder en T ou en Y les sorties de gouttières lorsqu'elles débouchent à la même hauteur sur le pignon d'une maison, pour que la longueur totale des tuyaux utilisés soit minimale ?



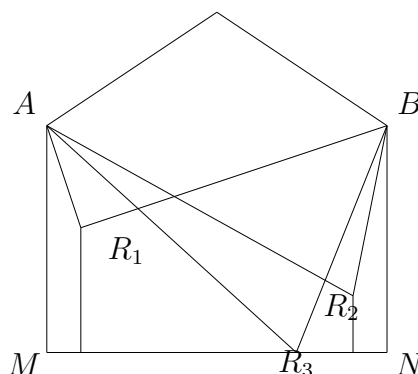
L'étape d'intériorisation.

1. **Notations.** L'énoncé du problème ne comporte aucune mesure privilégiée. On se permet donc de noter $|MN| = l$ et $|AM| = |BN| = h$.
2. **Première observation.** Tous les raccords du type suivant



sont de longueur $l + h$. Y en a-t-il de plus court ?

3. **Simulation numérique.** Quelques essais graphiques/numériques permettent de se convaincre qu'il y a en effet des raccords plus courts que ceux de longueur $l + h$.



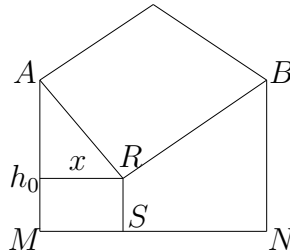
⁽¹⁾ Cette rédaction ne résume que très succinctement les étapes éventuelles de résolution du problème. Ce résumé est néanmoins relativement objectif : il décrit le cheminement du rédacteur lorsqu'il s'est employé à trouver une solution lui-même.

L'étape de condensation.

1. **Apparition d'une fonction.** L'exemple du raccord en R_3 ci-dessus fait apparaître les triangles *rectangles* AMR_3 et BNR_3 . C'est là une configuration plus simple que celles en R_1 ou R_2 , et qui suggère surtout — si besoin est — le recours au théorème de Pythagore pour calculer les distances appropriées. On peut en tirer :
 - un tableau de valeurs pour l'expression de la longueur totale de tuyaux en fonction de la distance $|MR| = x$, quand on suppose toujours que le raccord R est situé au sol, en choisissant par exemple $l = 12$ et $h = 5$, etc ...
 - l'expression algébrique de cette fonction, à savoir

$$G(x) = \sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{(l - x)^2 + h^2}$$

2. **Un premier résultat ... ?** Le tableau de valeur ci-dessus montre — si la géométrie de la situation ne l'a pas encore fait — que le problème « admet un axe de symétrie » : la médiatrice MN . De plus, ce même tableau suggère que la fonction $G(x)$ admet un *minimum* en $x = \frac{l}{2}$. L'étude de la dérivée de $G(x)$ permet de confirmer assez facilement cette conjecture.
3. **Une analogie qui fait avancer les choses.** Comme tout semble bien compris lorsque le raccord est à hauteur nulle, on reprend le *même* raisonnement en supposant cette fois-ci que le raccord est situé à une hauteur h_0 quelconque.



On obtient pour la fonction $G_0(x)$ qui décrit alors la longueur totale de tuyaux

$$\begin{aligned} G_0(x) &= |AR| + |RS| + |RB| \\ &= \sqrt{(h - h_0)^2 + x^2} + h_0 + \sqrt{(h - h_0)^2 + (l - x)^2} \end{aligned}$$

où x est l'« abscisse » $|MS|$. Quant à la recherche d'un extremum, tous les calculs se trouvent être *formellement analogues* à ceux réalisés dans l'étape précédente, de telle sorte que — quelle que soit la hauteur h_0 — la fonction $G_0(x)$ admet encore et toujours un minimum pour $x = \frac{l}{2}$.

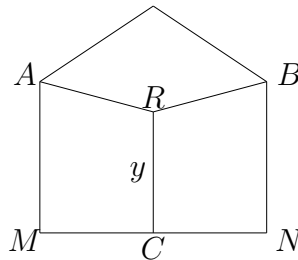
4. **Le problème devient moins difficile ...** Les calculs précédents s'interprètent de manière très simple : un *lieu* des points où *doit* se situer le raccord R si on veut que la longueur totale de tuyaux soit minimale est la médiatrice du segment $[MN]$.
5. **... Et tout semble correct !** On observe en effet que si $h_0 = h$:

$$G_0(x) = \sqrt{(h-h)^2 + x^2} + h + \sqrt{(h-h)^2 + (l-x)^2} = x+h+(l-x) = h+l$$

On retrouve ainsi une situation considérée dans l'étape d'intériorisation.

6. **Le coup de grâce.** Il reste à déterminer la « bonne » position du point R sur la médiatrice du segment $[MN]$. Cela revient à déterminer un (éventuel ?) minimum de la fonction

$$D(y) = y + 2\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + (h-y)^2}$$



Cela ne présente plus guère de difficultés sérieuses : à partir de la dérivée de la fonction $G_0(x)$, on trouve comme seule valeur possible

$$y = h - \frac{l}{2\sqrt{3}}$$

dont il reste à discuter la plausibilité ⁽²⁾ ...

L'étape de réification.

Si le problème semble sur le point de s'achever, les résultats obtenus laissent néanmoins insatisfait : on ne comprend pas pourquoi la solution n'est pas aussi géométrique que l'énoncé le laissait imaginer. L'étape de réification se propose d'*aller au fond des choses* et de démontrer géométriquement les résultats obtenus.

1. **Est-ce vraiment si compliqué ?** Si on revient sur les calculs concernant la fonction $D(y)$ et sa dérivée, on observe que

⁽²⁾ En particulier dans le cas où $h < \frac{l}{2\sqrt{3}}$...

$$D'(y) = 0 \iff \frac{2(h-y)}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + (h-y)^2}} = 1$$

qui fournit une égalité bien plus intéressante que la valeur de y qu'on en a tirée plus haut :

$$(h-y)\sqrt{3} = \frac{l}{2}$$

ou

$$\frac{h-y}{\frac{l}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30^\circ$$

Ainsi

$$\widehat{ARC} = \widehat{CRB} = \widehat{ARB} = 120^\circ$$

D'où vient cette soudaine simplicité ?

- On sait que le point de raccordement R est nécessairement à la verticale du point C , milieu du segment $[MN]$.
 - Il s'agit donc de déterminer un point R tel que la somme de ses distances aux *trois* points *fixes* A , B et C soit minimale.
 - Un tel point s'appelle le *point de Steiner* ⁽³⁾ du triangle ABC , et se caractérise facilement à l'aide d'une analogie mécanique. Si on place en chacun des points A , B et C une poulie et qu'on relie en étoile trois masses identiques en faisant passer chaque fil de l'étoile par une des poulies, la position d'équilibre du système ⁽⁴⁾ s'obtient lorsque la résultante des forces appliquée au point de jonction de l'étoile est nulle ⁽⁵⁾, ce qui n'a lieu que si les fils de l'étoile forment entre eux des angles égaux : chacun d'entre eux vaudra donc 120° .
2. **Une solution elliptique.** On peut enfin se demander — en dehors de tout calcul — pourquoi le point de raccordement R correspondant à une longueur de tuyaux *minimale* est *toujours* situé sur la médiatrice du segment $[MN]$. Or, à une hauteur h_0 fixée, la question revient à minimiser la seule somme $|AR| + |BR|$. D'autre part, il faut savoir qu'une ellipse est le lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux points fixes — les foyers — est constante. On peut alors raisonner comme suit, en considérant toutes les ellipses dont les points A et B sont les *foyers*.

⁽³⁾ Un tel point est parfois appelé point de Fermat, ou de Toricelli. Il a une importance essentielle dans la théorie des réseaux de toutes sortes à cause de la propriété de minimum de distance qui le caractérise. Cfr. [61], exercice 186 et [34].

⁽⁴⁾ Sous la seule action de la pesanteur.

⁽⁵⁾ Des raisonnements analogues s'appliquent à certaines surfaces formées à partir de films de savon, et la notion de point de Steiner y intervient à nouveau.

- Chaque position du point R sur l'horizontale de hauteur h_0 détermine une ellipse dont la longueur du grand axe égale $|AR| + |BR|$.
- La plus petite de ces ellipses est toujours celle qui admet l'horizontale en question comme *tangente*.
- Dans ce cas, le point R est situé sur le *petit axe* de l'ellipse, qui est la médiatrice du segment $[AB]$.

C'est bien ce qu'on souhaitait établir !

3. **En route vers de nouvelles aventures . . .** Le problème peut évoluer vers une variante plus corsée : il suffit de supposer que les points A et B ne sont plus situés à la même hauteur . . .

8.2. Une taxonomie d'objectifs cognitifs

La taxonomie d'objectifs cognitifs en mathématique élaborée par Régis Gras, [80], a été élaborée vers 1978 dans le cadre d'un courant d'idées qui, à la suite des travaux de Bloom, cherchait au maximum à opérationnaliser les *objectifs* attribuables à un enseignement de mathématique et à les classer selon le niveau de difficulté des opérations mentales qu'il amène les élèves à mettre en œuvre.

Si le vocabulaire a changé, on peut considérer que le contenu du mot *objectif* de l'époque était sensiblement équivalent à celui du mot *compétence* aujourd'hui. Cependant, la pression en vue de l'opérationnalisation fut à ce point forte que les chercheurs furent amenés à passer au stade des *micro-objectifs*, plus faciles à élaborer et surtout à évaluer. Il leur est ainsi arrivé de découper la matière — suivant les principes de l'enseignement programmé de type Skinnerien — en micro-boulettes censées être plus faciles à avaler et digérer par l'élève.

Si cette méthode permet sans doute d'acquérir des connaissances techniques relativement limitées, elle s'est dans la suite révélée plutôt inefficace pour ce qui est de l'apprentissage de concepts globaux. Nous pouvons en particulier considérer que

La résolution de problèmes est une compétence globale dont l'acquisition suppose celle de compétences subordonnées, mais ne peut s'atomiser en une myriade de compétences microscopiques.

Après quelques années, l'enseignement par micro-objectifs fut abandonné et les taxonomies qui avaient été élaborées simultanément entrèrent en sommeil. Le moment est peut-être venu de les réveiller au moins partiellement, en essayant de les inscrire dans la description du processus d'apprentissage effectuée au chapitre 3 et poursuivie dans le présent chapitre. Les taxonomies répartissent en effet les activités mentales en différents niveaux dont — comme par hasard — les premiers relèvent du stade procédural, les derniers du stade conceptuel.

Il s'agit donc d'affiner l'analyse du processus de transition du procédural vers le structural. Il s'agit aussi de contrôler le type d'activités soumises aux élèves en veillant à varier les niveaux de complexité. Il est important à cet égard de remarquer que le niveau taxonomique d'un énoncé ne dépend pas uniquement de celui-ci, mais aussi et peut-être surtout, de l'élève, de ses acquis, de ses aptitudes. Il en résulte qu'il est très difficile de donner des exemples concrets sans se référer à une situation scolaire particulière, ce qui sortirait du cadre qui est le nôtre.

Régis Gras distingue cinq niveaux taxonomiques.

Niveau A : Connaissance des outils de préhension de l'objet et du fait mathématiques

On rangera dans cette catégorie la connaissance du vocabulaire et des faits mathématiques élémentaires, ceux-ci pouvant aller jusqu'à l'exécution d'algorithmes simples.

Niveau B : Analyse de faits et transposition

Mettre un problème en équation, faire un graphique, changer de registre, ce sont des activités qui peuvent intervenir lors d'une phase d'intériorisation. Elles permettent de s'approprier un problème, pas encore de le résoudre.

Niveau C : Compréhension des relations et des structures

Ce niveau relève clairement du stade conceptuel (il en sera de même des suivants). Il s'agit de mettre en relation des concepts variés, de raisonner, d'appliquer un résultat à des situations familières.

Niveau D : Synthèse et créativité

Construire des démonstrations et des exemples, résoudre des problèmes, généraliser. L'élève qui atteint ce niveau d'activité est un élève qui ne se contente pas d'avoir des connaissances, il est efficace.

Niveau E : Critique et évaluation

Être capable d'évaluer et de s'auto-évaluer, choisir une méthode de résolution, critiquer une procédure, une démonstration, construire des contre-exemples.

Parallèlement à ce découpage en niveaux, R. Gras répartit aussi l'activité mathématique en classes, qu'il caractérise par des verbes :

Heuristique : bricoler, tâtonner, chercher.

Traductive : changer de langage, représenter, transposer.

Classificateur : organiser, discerner, identifier.

Calculatoire : dénombrer, algorithmiser.

Logique : prouver, convaincre, déduire.

Technique : soigner, préciser.

Réinvestissement : analyser, traduire, morcéler.

Créative : inventer, imaginer, exemplariser.

Critique : interpréter, évaluer, valider, invalider, optimiser.

Prédictive : estimer, induire, prévoir, conjecturer.

Cette approche est sans doute plus facile à mettre en relation avec la matière que celle basée sur les niveaux cognitifs. Elle n'en est pas non plus disjointe.

8.3. Les niveaux de van Hiele

8.3.1 Le modèle

Les VAN HIELE distinguent 5 niveaux de pensée. Ils les expliquent dans le cadre de la géométrie.

Niveau 0

Ce niveau est purement visuel. Les figures sont jugées d'après leur apparence globale. Leurs propriétés ne sont pas reconnues et encore moins énoncées. L'individu ne pourra donc dire que les angles d'un rectangle sont droits ou que les côtés sont deux à deux parallèles. Par contre, il distinguera un carré d'un rectangle et les considérera comme des entités différentes. A ce niveau, un carré n'est donc pas un rectangle et un losange n'est pas un parallélogramme.

Niveau 1

L'élève distingue maintenant les propriétés de certaines figures. Il est donc capable d'effectuer certaines analyses. Il reconnaît qu'un carré, comme un rectangle, a quatre angles droits. Une figure peut se reconnaître à ses propriétés : si j'informe l'élève que la figure tracée au tableau possède quatre angles droits, il accepte que ce soit un rectangle, même si elle n'est pas tracée avec soin. Mais il n'établit pas de relations entre les propriétés : de ce que les côtés de ce quadrilatère sont deux à deux parallèles, il ne déduit pas des égalités d'angles. De même, la propriété « être un carré » n'entraîne pas la propriété « être un rectangle ». Ainsi, la déduction n'est pas encore disponible.

Niveau 2

A ce niveau, les propriétés s'ordonnent, elles se déduisent les unes des autres. C'est le stade du « je sais que ... je déduis que ». L'élève toutefois n'est pas encore en mesure de comprendre des argumentations comportant plusieurs inférences successives. Il peut éventuellement comprendre le passage de chaque ligne à la suivante. Il ne comprend pas pour autant ce qu'est une démonstration. Quant aux figures elles sont maintenant *définies* par leurs propriétés, elles peuvent être l'objet de classifications. Un carré est reconnu comme étant un rectangle.

Niveau 3

Cette fois, l'élève comprend ce que sont un axiome, un théorème, une définition. Il est capable de se mouvoir dans un système axiomatique. Il peut élaborer lui-même des démonstrations. Il a assimilé la différence entre condition nécessaire et condition suffisante, il distingue un théorème de sa réciproque.

Niveau 4

L'existence du dernier niveau est controversée. P. VAN HIELE dans certains textes ou certaines déclarations (voir [152]) fait part de ses hésitations. Dans [156], après avoir décrit les niveaux 0 à 3, il déclare « *on peut probablement ainsi distinguer 5 niveaux de pensée en géométrie* » mais il s'abstient de décrire le 5^e niveau. Celui-ci serait le niveau à atteindre pour accepter que les axiomes d'une théorie n'ont pas une vérité absolue, que des systèmes axiomatiques différents, voire contradictoires, peuvent coexister. En particulier admettre l'existence de géométries non euclidiennes supposerait d'atteindre ce niveau.

Ce qui semble clair, c'est que ce niveau ne concerne guère les étudiants du secondaire, et que les expériences menées dans cet enseignement ne pourraient que difficilement le mettre en évidence. C'est sans doute pour cela que son existence même est parfois mise en doute.

Les niveaux qui viennent d'être décrits sont parfois appelés respectivement les niveaux de la reconnaissance, de l'analyse, de l'ordonnancement, de la déduction et de la rigueur.

On notera que les niveaux 0 et 1 sont décrits essentiellement en termes d'aptitudes géométriques (reconnaissance de formes et de propriétés), alors que les niveaux 2, 3 et 4 sont décrits essentiellement en termes d'aptitudes au raisonnement. Ceci montre le caractère général de la théorie développée. Cela montre aussi le rôle particulier de la géométrie dans l'apprentissage du raisonnement, tout au moins dans le contexte des mathématiques scolaires de 1960, lequel de ce point de vue, n'a sans doute pas beaucoup changé.

On notera encore que, à l'époque, il n'était évidemment pas question, lorsqu'on considérait des objets géométriques, de faire intervenir des transformations du plan. C'est en termes de propriétés des figures que les deux premiers niveaux sont décrits. Il serait intéressant de voir comment les niveaux se différencient lorsqu'on considère des transformations géométriques. On pourrait également se poser le problème de l'intervention de l'informatique, et en particulier de celle du langage LOGO.

8.3.2 Les propriétés du modèle

Les VAN HIELE ne se contentent pas d'énoncer une suite de niveaux. Ils énumèrent les propriétés de ces niveaux et envisagent le passage d'un niveau à l'autre.

Pour eux, les niveaux ont un caractère absolu, ils ont une réalité psychologique, ils sont indépendants de la méthode d'enseignement utilisée. Cependant, certaines méthodes d'enseignement peuvent contrarier, voire empêcher, le passage d'un niveau au suivant. Il importe donc que l'enseignant soit conscient de l'existence de ces niveaux et qu'il y adapte sa méthodologie.

En particulier il faut tenir compte des points suivants :

1. Les niveaux constituent une suite **FIXE**. Ainsi, un individu donné passe nécessairement par les différents niveaux dans l'ordre indiqué. Pour « fonctionner » au niveau n , cet individu doit avoir développé les stratégies des niveaux précédents. Inutile donc de vouloir « brûler les étapes ».
2. Les niveaux constituent une suite **DISCRÈTE**. Le processus d'apprentissage est discontinu. A certains moments, il apparaît comme stoppé, ensuite il reprend de lui-même. Entretemps, l'élève a « mûri ».
3. Ce qui est implicite (intrinsèque) à un niveau donné devient explicite (extrinsèque) au niveau suivant. Ainsi, au niveau 0, l'enfant reconnaît des figures sans être capable d'expliquer sa démarche. Par contre, au niveau 1, les propriétés des figures sont mises en évidence. De façon plus générale, H. FREUDENTHAL, [72], estime que les moyens d'organisation à un niveau donné deviennent un objet d'étude au niveau suivant.
4. Chaque niveau a ses propres symboles linguistiques et son propre réseau de relations unissant ces symboles. Il en résulte qu'une affirmation peut être correcte à un niveau (« Un carré est un rectangle ») et fautive à un autre niveau.
5. Deux personnes qui raisonnent et s'expriment à des niveaux différents ne peuvent se comprendre. C'est — paraît-il — ce qui arrive souvent dans une classe.

Les conséquences méthodologiques des considérations qui précèdent sont claires : le professeur doit se mettre au niveau de l'élève. Bien sûr,

Il est possible d'enseigner à un élève doué des aptitudes au-dessus de son propre niveau, comme on peut entraîner de jeunes enfants à un calcul de fractions sans leur dire ce que sont des fractions, ou de plus âgés au calcul différentiel et intégral, bien qu'ils ne sachent pas ce que sont une dérivée et une intégrale. Pour apprendre à un élève des techniques au-dessus de son niveau, l'enseignant est amené à lui décrire les actions à effectuer sous forme d'algorithmes qui peuvent être appliqués sans en connaître la signification. Évidemment, l'élève avec qui on aura procédé de la sorte ne saura pas appliquer ses connaissances. Mais il est possible de compenser cette déficience en lui apprenant de la même manière les principales applications. Il y a encore le danger de mélanger les applications, mais ceci aussi peut être empêché par une mémorisation convenable. Dans de nombreux cas, cela sera suffisant, particulièrement s'il n'est pas nécessaire de retenir les connaissances acquises au-delà d'une date fixe, celle de l'examen par exemple. Mais même dans ces cas, il n'est pas certain que la réduction de la matière à un niveau inférieur ne soit pas une méthode plus maladroite que celle qui consisterait à amener l'élève au niveau supérieur. Il peut même arriver qu'un processus d'apprentissage soit entravé ou définitivement stoppé parce que l'élève n'aurait pas eu l'occasion d'atteindre un niveau plus élevé. ⁽⁶⁾

⁽⁶⁾ Cité dans [72].

8.3.3 Les phases de l'apprentissage

Si la suite des niveaux est — selon les VAN HIELE — discrète, la maturation qui permet à un élève de passer d'un niveau au suivant ne l'est pas nécessairement. Elle comporterait plusieurs phases sur lesquelles le professeur peut agir. « *Le but de la didactique est de poser la question de savoir comment ces phases sont parcourues et comment une aide effective peut être fournie à l'élève.* » ([156], p.27).

Cinq phases sont distinguées.

Information

L'élève explore le sujet qui lui est soumis. Il effectue des observations à l'aide d'un « matériel » (expression à prendre au sens large). Il découvre une certaine structure. Le dialogue avec le professeur amène l'introduction d'un vocabulaire spécifique. Des questions sont soulevées. L'enseignant en profite pour déterminer quelle connaissance l'élève a déjà du sujet. L'élève sent dans quelle direction le travail va évoluer.

Orientation dirigée

L'élève explore le sujet à l'aide de matériel élaboré par le professeur de façon à faire apparaître graduellement les structures caractéristiques au niveau considéré. La plus grande partie du matériel sera constituée de tâches courtes provoquant des réponses spécifiques.

Explicitation

Le symbolisme linguistique du niveau considéré est mis en place, le réseau de relations entre ces symboles linguistiques est partiellement élaboré.

Orientation libre

Des tâches plus complexes sont entreprises. Elles peuvent être exécutées de plusieurs façons. Elles sont de nature ouverte. Des repères sont placés dans le champ d'investigation.

Intégration

L'élève doit acquérir une vue d'ensemble du domaine. C'est une phase de synthèse.

A l'issue de cette cinquième phase, un nouveau niveau de pensée est atteint, avec son propre réseau de relations et sa propre intuition.

On remarquera évidemment la parenté entre la description faite par van Hiele et celle due à Sfard même si ces auteurs ne distinguent pas le même nombre d'étapes. Chaque transition d'un niveau au suivant s'apparente à une transition du procédural au structural.

8.3.4 L'expérimentation

Depuis une quinzaine d'années, un certain nombre d'expériences ont été réalisées dans le but de tester la théorie de VAN HIELE. La plupart sont américaines. Elles sont rapportées dans les articles [44], [87], [101], [152] mentionnés dans la bibliographie.

Ces expérimentations avait pour but de vérifier d'une part l'existence des niveaux de VAN HIELE, d'autre part, la possibilité d'attribuer un niveau à chaque élève. Elles ont consisté généralement en questionnaires à remplir par les élèves, parfois en interviews cliniques.

Dans les deux cas, l'élève se voit proposer une série de questions qui sont censées correspondre chacune à un niveau donné. Un élève est classé au niveau n s'il répond correctement à une majorité des questions relatives aux niveaux 0 à n , mais échoue aux questions du niveau $n + 1$. La théorie est validée si un nombre suffisamment grand d'élèves peuvent ainsi se voir attribuer un niveau.

On perçoit immédiatement certaines difficultés du procédé :

- Comment être sûr qu'une question relève bien d'un niveau donné ?
- A quel pourcentage de questions du niveau n un élève doit-il pouvoir répondre pour que l'on puisse raisonnablement considérer qu'il a atteint et peut-être dépassé ce niveau ?
- Quel est le pourcentage d'élèves classables qui est au minimum nécessaire pour qu'on puisse considérer la théorie comme validée ?

Ces difficultés sont réelles et bien connues de tous ceux qui ont un jour essayé d'appliquer une taxonomie. Elles ne doivent pas pour autant faire renoncer à l'entreprise, mais elles doivent inciter les chercheurs à redoubler d'attention et de sens critique, et à rester prudents dans leurs conclusions.

Il n'est guère possible ici de présenter un compte-rendu détaillé de ces expériences. Contentons-nous de quelques indications et des conclusions.

8.3.4.1 Uziskin (1982)

Uziskin étudie une population très importante : plus de 2000 élèves inscrits à un cours de géométrie durant une année. Presque tous ont entre 14 et 17 ans, une petite majorité est en 10^e année (soit la première année du secondaire supérieur).

Ces élèves sont soumis à deux tests, l'un lors de la première semaine de cours, l'autre vers la fin de l'année. Ils reçoivent un questionnaire destiné à évaluer leur niveau de van Hiele, ainsi que d'autres questionnaires plus généraux ayant pour but de les situer par rapport à d'autres critères connus.

Les tests destinés à évaluer le niveau de van Hiele sont identiques au début et à la fin de l'année. Ils comportent cinq questions. Deux critères différents ont été utilisés pour déterminer si un élève a réussi les questions d'un niveau donné : soit réussir trois questions au moins sur cinq, soit réussir quatre questions au moins sur cinq.

Un élève est classé au niveau n s'il vérifie le critère pour les niveaux 0 à n et ne le vérifie pas pour le niveau $n + 1$. Deux classements sont donc possibles selon qu'on utilise le critère 3/5 ou le critère 4/5.

Au surplus, Uziskin tient également compte de ce que le 5^e niveau est un peu problématique. Il effectue une deuxième correction des questionnaires de façon à ne pas tenir compte de ce cinquième niveau. Par exemple un élève ayant satisfait au critère pour les niveaux 1, 2, 3 et 5 ne serait pas classé dans le premier schéma, mais serait classé au niveau 3 dans le second schéma. Chaque questionnaire peut ainsi être corrigé de quatre façons différentes. Et chaque élève a passé deux questionnaires. La masse de données était donc énorme.

Le rapport présenté par Uziskin est très long et détaillé. Il examine de nombreuses questions intéressantes, mais qui nous entraîneraient trop loin. Contentons-nous du tableau ci-dessous, qui indique quel pourcentage d'élèves était classable dans chacun des niveaux lors du test de début d'année, dans le cas où on tient compte du cinquième niveau.

Niveau	-1	0	1	2	3	4	Total
3/5	0.06	0.32	0.21	0.09	0.02	0.01	0.71
4/5	0.3	0.41	0.13	0.4	0	0	0.88

A ceux qui s'étonneraient de voir apparaître ici un niveau -1, signalons qu'on a classé à ce niveau les élèves qui n'atteignent le critère pour aucun niveau.

Passons aux principales conclusions de Uziskin :

- Le cinquième niveau (niveau 4) énoncé par les VAN HIELE, soit n'existe pas, soit n'est pas testable.
Cela résulte de la difficulté qu'a eue l'équipe de Uziskin à rédiger des questions relevant de ce niveau, de l'imprécision de la description de ce niveau par van Hiele. Un nombre substantiellement plus important d'élèves sont classables quand on ignore ce niveau.
- Selon la sévérité du critère utilisé et selon qu'on tient compte ou non du cinquième niveau, entre 65 et 90 % des étudiants ont répondu aux questionnaires de façon telle qu'il a été facile de leur attribuer un niveau.
- Le côté arbitraire du critère utilisé a pour conséquence de modifier le niveau attribué à de nombreux étudiants.

Il est possible dit Uziskin que les étudiants classés au niveau n selon le critère $3/5$ et au niveau $n - 1$ selon le critère $4/5$ soient en transition d'un niveau à l'autre.

- Il y a une très grande variabilité dans le changement de niveau entre le début et la fin de l'année : un tiers des élèves restent au même niveau ou descendent, un tiers montent d'un niveau et un tiers de deux niveaux ou plus.
- Si on utilise les niveaux de van Hiele comme critère, près de la moitié des élèves reçoivent un cours de géométrie qu'ils ont une chance sur deux seulement de réussir.

8.3.4.2 Les autres expériences

Les autres expériences ont porté sur des nombres d'étudiants beaucoup plus faibles, parfois moins de 20. Elles ont parfois été menées de manière très différente.

Ainsi, dans [101], on n'essaye pas d'attribuer un niveau aux élèves pour l'ensemble du domaine « géométrie », mais bien sujet par sujet. Il apparaît ainsi que certains étudiants ont été classés au niveau 0 pour les domaines « triangles rectangles », « similitudes » et « congruences », mais au niveau 1 pour « carrés », « triangles isocèles » et « cercles ».

Une nouvelle question est ainsi posée : le niveau atteint par un élève peut-il dépendre du sujet étudié ? Les critères $3/5$ ou $4/5$ utilisés par Uziskin étaient au fond une façon de moyenner à travers les différents sujets relevant d'un domaine donné. Jusqu'à quelle finesse de décomposition d'un domaine pourrait-on être amené ? A vouloir trop détailler, on risque de perdre le contrôle de ce que l'on fait.

Cependant, cette expérimentation confirme l'existence de niveaux, dans la mesure où, pour chaque sujet, la hiérarchie normale des niveaux est, en gros, respectée.

L'étude relatée dans [44] confirme la nature hiérarchique des niveaux, mais aussi la difficulté de classer certains étudiants qui seraient en transition entre deux niveaux. Elle signale aussi que le niveau attribué à un étudiant ne semble pas strictement lié à l'âge, ni à l'année d'étude. Les niveaux apparaissent comme une structure complexe, faisant intervenir à la fois la matière et le processus de raisonnement.

Enfin, dans [44] le caractère discret de la suite des niveaux est également mis en doute. Les auteurs ont en effet eu l'occasion de constater des phénomènes d'oscillation d'un étudiant entre deux niveaux lors d'une tâche déterminée. Les niveaux leur apparaissent comme plutôt dynamiques que statiques et plus continus que discrets.

La dernière étude publiée, [87], la seule à ne pas être américaine, met directement en cause le caractère discret de la suite des niveaux, ainsi que le fait de chercher à attribuer un niveau et un seul à chaque étudiant. Les auteurs introduisent l'idée de « degré d'acquisition » d'un niveau, en distinguant cinq degrés : aucune acquisition, acquisition faible, intermédiaire, élevée ou complète. Un étudiant pourrait dans ce schéma avoir simultanément une acquisition élevée du niveau n et une acquisition faible du niveau $n + 1$. (Cette idée pourrait sans doute être mise en relation avec les phases d'apprentissage qui étaient évoquées par les VAN HIELE eux-mêmes.)

L'équipe espagnole a donc élaboré une expérience dans laquelle un questionnaire comportant neuf questions de géométrie de l'espace a été soumis à une cinquantaine d'étudiants. A la correction, ils tiennent compte de ce qu'un problème peut être résolu en utilisant des démarches de niveau plus ou moins élevé. Ils déterminent ainsi un type de réponse. Par un processus de pondération assez complexe, ils attribuent finalement à chaque étudiant un degré d'acquisition de chaque niveau.

Ils constatent alors que la hiérarchie des niveaux de van Hiele est confirmée en ce sens que pour presque tous les étudiants, plus le niveau est élevé, plus le degré d'acquisition est faible. Quelques étudiants cependant montrent une meilleure acquisition du niveau 2 que du niveau 1, ce qui devrait susciter de nouvelles recherches. Enfin, les étudiants n'utilisent pas toujours un seul niveau de pensée.

8.4. Une conclusion provisoire

Nous venons de rencontrer plusieurs analyses possibles du processus de passage du procédural au structural et des activités mentales impliquées dans l'apprentissage des mathématiques. Ces analyses, dues à plusieurs auteurs, ont des points communs, sans coïncider. On doit s'attendre à en voir de nouvelles apparaître dans les prochaines années, en espérant qu'elles présentent une vision coordonnée des idées essentielles déjà développées et qu'elles s'appliquent plus aisément aux situations concrètes d'enseignement.

Références

[61], [34], [80], [152], [156], [72], [44], [87], [101].