6.4. Approcher

Dans la section intitulée « Numériser », nous examinerons notamment les conséquences sur le calcul à la machine de la nécessité inévitable de réaliser des approximations. Ici, nous adopterons un point de vue plus général. Nous examinerons d'abord le phénomène fréquent de rejet des approximations, ensuite nous rappellerons quelques inégalités intéressantes. Enfin, nous décrirons la « philosophie générale du phénomène d'approximation ».

6.4.1 Le rejet des approximations

« *Approcher* » est une activité fondamentale en mathématique et dans la plupart des disciplines scientifiques. Il n'est pas une expérience de physique dont les résultats ne doivent être accompagnés d'un « calcul d'erreurs ». Il n'est pas un sondage d'opinion dont les résultats ne soient accompagnés, eux aussi, d'une « marge d'erreur ». Et cependant, la mathématique élémentaire — mais peut-être pas seulement elle — semble éprouver une aversion à l'égard des approximations, comme si elles étaient incompatibles avec la rigueur !

La forme la plus banale de ce rejet des approximations est aussi la plus insidieuse car apparemment, elle ne les cache pas. Mais elle ne permet pas de les manipuler en tant que telles. Un véritable « boycott » des inégalités et des encadrements aboutit à leur remplacement par de fausses égalités. π vaut à peu près 3,1416 ... à moins que ce ne soit 3,14 ou $\frac{22}{7}$. Et l'on calcule des valeurs immanquablement différentes de celles que l'on cherche en oubliant *in fine* de mettre ce fait en évidence, ce qui ne développe certainement pas l'esprit critique des élèves.

Ainsi, un des premiers principes à rappeler est le suivant :

> Il n'est de véritable approximation qu'accompagnée d'un majorant de l'erreur commise, c'est-à-dire d'une incertitude.

Un calcul d'incertitudes ou d'encadrements — fût-il rudimentaire — doit en conséquence accompagner la manipulation d'approximations.

Avec des conséquences — il est vrai — mineures, l'horreur des inégalités prend une forme caricaturale quand elle va jusqu'à utiliser le signe $=$ non pour une relation d'équivalence mais pour une relation d'ordre. Un exemple relevant de l'enseignement secondaire — ou tout au moins qui en relevait il y a encore quelques années — concerne la divisibilité. Ne désignait-on pas la relation « a est multiple de b » par la notation $a = \mathcal{M}b$? Mais si l'on a simultanément $6 = \mathcal{M}2$ et $10 = \mathcal{M}2$ ... on ne peut cependant en déduire $6 = 10$. Un autre exemple — qui relève pour sa part de l'enseignement supérieur — apparaît quand on parle d'« infiniment petits ». Par exemple la relation « f est infiniment petit par rapport à x^5 » est encore souvent notée $f = o(x^5)$, ce qui donne lieu au même phénomène que ci-dessus. La notation utilisée par les physiciens, $x = 1.32m \pm 0.005m$ est du même tonneau : elle ne signifie rien d'autre que $1.315m \leqslant x \leqslant 1.325m$ ou $x \in [1,315m; 1,325m]$. Dans ces différents cas, les égalités ne sont que des appartenances.

Dans d'autres circonstances encore, l'on s'efforce de dissimuler des inégalités. C'est notamment le cas en analyse mathématique, alors que ce domaine traite essentiellement des problèmes d'approximation. Ainsi, après avoir défini ce qu'est la limite d'une fonction (ou d'une suite), ce qui utilise — explicitement ou non — des inégalités, on constate une certaine tendance à « escamoter » les démonstrations des résultats fondamentaux (limites d'une somme ou d'un produit de fonctions) pour appliquer directement ces résultats à des recherches de limites qui ne sont dès lors plus que des manipulations algébriques d'égalités. C'est l'essence même de l'analyse mathématique qui est ainsi mise en cause.

Autre exemple : la célèbre formule des *accroissements finis* s'énonce le plus souvent sous la forme d'une égalité :

> *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle fermé $[a, b]$. Il existe un point $c \in [a, b]$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.*

Ce théorème est incontestablement correct. Mais l'égalité qui y figure est sans intérêt car le nombre c est généralement inconnu et cette égalité ne permet donc pas de calculer $f(b) - f(a)$. Cependant, le théorème est fondamental. Il permet de trouver soit des encadrements de $f(b) - f(a)$, soit des majorations de $|f(b) - f(a)|$. On peut par exemple supposer que pour tout $x \in [a, b]$ on a $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ et énoncer la formule des accroissements finis sous la forme

$$m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$$

On obtient ainsi un énoncé certainement plus utile que le précédent et sans doute plus intuitif. Il signifie par exemple que si une automobile roule pendant 2h à une vitesse toujours comprise entre 40 km/h et 90 km/h, alors la distance parcourue est comprise entre 80 km et 180 km. L'interprétation analogue de l'énoncé traditionnel consisterait à affirmer qu'au cours du voyage, la vitesse instantanée a été en au moins un instant égale à la vitesse moyenne, sans que l'on puisse dire en quel instant. Dans ce cas, l'inégalité a un côté opérationnel que n'a pas l'égalité.

Étant donné l'importance de l'analyse mathématique dans les applications,

> la maîtrise de la manipulation des inégalités, des valeurs absolues, des encadrements doit être considérée comme une compétence (disciplinaire) terminale essentielle.

Le phénomène de rejet des approximations que nous avons signalé montre qu'une méthodologie de l'apprentissage de l'emploi des inégalités reste à élaborer.

6.4.2 Quelques inégalités

Les premières manipulations d'inégalités peuvent apparaître dès le premier degré de l'enseignement secondaire. Elles expriment que l'ordre est *compatible* avec l'addition et la multiplication : quels que soient les nombres ([3]) a, b et c,

$$a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c \text{ (compatibilité avec l'addition)}$$

Si le nombre c est positif, alors

$$a \leqslant b \Rightarrow a.c \leqslant b.c \text{ (compatibilité avec la multiplication)}$$

Ces faits élémentaires relèvent plutôt des *socles de compétences* que des compétences terminales. Ils permettent la détermination d'encadrements pour une somme, une différence, un produit, un quotient. De tels exercices ne peuvent être négligés. Par exemple, on constate qu'un trop grand nombre d'adultes — même cultivés — commettent des erreurs de rangement quand ils doivent comparer des fractions.

Les calculs d'encadrements débouchent nécessairement sur l'usage de la fonction *valeur absolue*. L'équivalence

$$a - r \leqslant x \leqslant a + r \Leftrightarrow |x - a| \leqslant r$$

est actuellement loin d'être maîtrisée par les élèves du degré supérieur. Elle intervient dans presque tout raisonnement d'analyse mathématique.

Diverses inégalités importantes peuvent assez aisément être établies

L'inégalité triangulaire

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

et

$$||a| - |b|| \leqslant |a - b|$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz

Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont deux vecteurs du plan ou de l'espace, et $\vec{x} \cdot \vec{y}$ est leur produit scalaire, alors

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leqslant \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

Cette inégalité est équivalente au fait que le cosinus est toujours compris entre -1 et $+1$.

([3]) A ce stade il s'agit évidemment de nombres réels mais ce fait peut rester implicite.

L'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique

Si a et b sont des nombres positifs, alors

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$$

On la déduit immédiatement de $(a-b)^2 \geqslant 0$.

Certaines inégalités résultent de manipulations algébriques

Par exemple, si x est un nombre positif, il n'est guère difficile d'obtenir l'encadrement

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \leqslant \sqrt{1+x} \leqslant 1+\frac{x}{2}$$

D'autres inégalités découlent de l'étude d'une fonction particulière

Par exemple, de la convexité de l'exponentielle, on déduit que si $0 < x$ et $0 \leqslant a \leqslant 1$, alors

$$e^{ax} \leqslant 1 + a(e^x - 1)$$

De là, quelques manipulations permettent d'obtenir l'*inégalité de Young* qui généralise l'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique : si x et y sont deux nombres positifs et $0 \leqslant a \leqslant 1$, alors

$$x^a \cdot y^{1-a} \leqslant ax + (1-a)y$$

Des inégalités de ce type sont susceptibles de permettre une procéduralisation de l'apprentissage de la notion de limite. Par exemple, de $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \leqslant \sqrt{1+x} \leqslant 1+\frac{x}{2}$, nous pouvons déduire

$$\left|\frac{\sqrt{1+x}}{1+\frac{x}{2}} - 1\right| \leqslant \frac{x^2}{4+2x} \leqslant \frac{x^2}{4}$$

Il est alors possible de mettre en évidence de façon opérationnelle que le quotient $\frac{\sqrt{1+x}}{1+\frac{x}{2}}$ tend vers 1 en calculant effectivement une valeur de x en-dessous de laquelle on est sûr que $\left|\frac{\sqrt{1+x}}{1+\frac{x}{2}} - 1\right| \leqslant 10^{-1}$. On remplace ensuite 10^{-1} par 10^{-2}, puis 10^{-3}, etc. Dans un tel contexte, l'emploi d'un tableur peut se révéler très utile.

6.4.3 Un changement de cadre

Réaliser une approximation a souvent lieu à travers un changement de cadre. On modifie en effet les objets que l'on manipule. Par exemple, on remplace des nombres réels quelconques par des nombres à deux décimales. Ou bien on remplace des fonctions continues quelconques par des fonctions polynômiales.

Chaque fois qu'on réalise une approximation, trois questions doivent retenir l'attention :

Quels objets veut-on approcher ?

Par quels autres objets ?

Comment mesure-t-on la qualité de l'approximation ?

EXEMPLE 6.4.1 *Je mesure des longueurs avec un mètre gradué en millimètres. Les objets que je vais estimer sont les nombres réels qui mesurent des longueurs quelconques. Les nombres qui servent à approcher sont des nombres ayant au maximum trois décimales. En approchant un réel, je vais quitter le cadre des nombres réels et évoluer dans le cadre — très différent — de ces nombres.*
Mon approximation est la meilleure possible si je choisis le nombre à trois décimales le plus proche possible du nombre à évaluer. (Parfois deux choix sont possibles.) La distance entre un réel et un nombre ayant au plus trois décimales sert à mesurer la qualité de l'approximation.

EXEMPLE 6.4.2 *Je dois étudier une fonction f au voisinage d'un point x_0. Pour faciliter les calculs, je cherche la fonction affine qui approche la fonction f le mieux possible au voisinage de x_0.*
Le meilleur choix possible apparaît être la fonction affine $g : x \mapsto f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0)$, car c'est la seule fonction affine $x \mapsto mx + p$ pour laquelle la différence $f(x) - g(x)$ est négligeable devant $x - x_0$.
On dit que f et g sont tangentes en x_0. Le calcul de la limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{x-x_0}$ sert à mesurer la qualité de l'approximation. Seules les fonctions dérivables en x_0 se laissent approcher de cette manière. Nous sommes ainsi passés du cadre des fonctions dérivables en x_0 à celui des fonctions affines.

Des exemples de ce type peuvent être multipliés. Des changements de cadre liés à des approximations sont utilisés pour résoudre de nombreux problèmes.

Citons notamment ceux qui consistent à *linéariser* ou à *discrétiser*.

6.4.4 Linéariser

On linéarise un problème chaque fois qu'on remplace, comme dans l'exemple précédent, une fonction par une approximation affine de cette fonction en un point. Le procédé est courant en physique, l'exemple le plus connu étant celui qui consiste à remplacer $\sin\theta$ par θ lorsque l'angle θ (exprimé en radians) est « petit ». Cette approximation est d'autant meilleure que les fonctions $\sin x$ et x ne sont pas seulement tangentes mais mêmes osculatrices en 0 : la différence $\sin x - x$ n'est pas seulement négligeable devant x, mais elle l'est aussi devant x^2.

Linéariser un problème ne permet de se faire une idée des solutions de ce problème qu'au voisinage d'un point. Les solutions construites sont locales. Si les problèmes posés sont eux-mêmes de nature locale, une linéarisation peut être la meilleure méthode. Ainsi, déterminer les extrema *locaux* d'une fonction est — évidemment — un problème local. On le résout en cherchant les points où la dérivée s'annule, ce qui revient à dire que la meilleure approximation affine est une fonction constante.

Parfois le problème posé est de nature globale mais trop complexe pour être résolu de façon satisfaisante. Une linéarisation permet alors de déterminer des solutions au voisinage d'un point fixé, ce qui est loin d'être dénué d'intérêt. Par exemple l'étude des petits mouvements d'un pendule ou celle des oscillations d'un système de points matériels autour d'une position d'équilibre constituent de bonnes approches locales des problèmes globaux correspondants.

On parvient aussi dans certains cas à résoudre un problème global en enchaînant plusieurs linéarisations.

EXEMPLE 6.4.3 *Les biologistes étudient l'évolution de populations d'animaux en construisant des modèles permettant de trouver l'effectif d'une population au cours d'une année à partir de l'effectif au cours de l'année précédente. Certains de ces modèles sont linéaires bien que le problème global de l'évolution de la population au cours de plusieurs années consécutives ne le soit pas.*

Un problème de ce type a fait l'objet de la séquence d'enseignement décrite au chapitre 13.

EXEMPLE 6.4.4 *Considérons le problème de rechercher les zéros d'une fonction dérivable f. La méthode de Newton consiste à remplacer la fonction f par une approximation affine en un point x_0 dont on a des raisons de croire qu'il n'est pas trop éloigné d'un zéro. On détermine alors le zéro x_1 de cette fonction affine $f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$. Puis on itère le procédé à partir de x_1. On construit ainsi une suite $(x_n)_n$ dont on peut montrer sous des conditions assez générales qu'elle converge (et même assez rapidement) vers un zéro de f.*

Cet exemple est un cas particulier d'application d'un théorème de *point fixe*. Le plus simple des théorèmes de cette famille permet de trouver — par approximations — la solution d'une équation du type $f(x) = x$. Le principe de la méthode est ultra-simple : on part d'une valeur x_0, puis on calcule $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, etc. Si la fonction f vérifie une inégalité du type $|f(x') - f(x'')| \leqslant k|x' - x''|$ où k est une constante positive inférieure à 1 et indépendante de x' et x'', alors cette suite converge vers une solution de l'équation $f(x) = x$. Par exemple, pour trouver une solution de l'équation $\cos x = x$, on peut partir de $x_0 = 0$, calculer $x_1 = \cos 0 = 1$, $x_2 = \cos 1$, etc. Chaque pression sur la touche `cos` de la calculatrice fournit l'approximation suivante de la solution.

6.4.5 Discrétiser

Discrétiser un problème est en quelque sorte le « linéariser par morceaux ». La méthode est d'emploi très fréquent.

Exemple 6.4.5 *La définition de l'intégrale d'une fonction f repose sur la construction d'une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f. Cette fois, il ne s'agit pas d'une approximation locale mais globale. On n'utilisera donc pas les fonctions affines tangentes mais d'autres fonctions affines liées à la fonction f.*

Le procédé est suffisamment connu pour que nous ne nous y attardions pas ici. Il a au surplus fait l'objet d'une séquence d'enseignement décrite au chapitre 12.

Exemple 6.4.6 *Une méthode due à Euler permet de trouver une solution approchée d'un système d'équations différentielles du type*

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y) \\ y' = g(t, x, y) \end{cases}$$

Plus précisément, elle permet de trouver une approximation affine par morceaux de la solution qui pour $t = t_0$ prend la valeur $\binom{x_0}{y_0}$. La méthode consiste à choisir un incrément h de la variable t et à faire comme si les dérivées x' et y' étaient constantes entre t_0 et $t_0 + h$. On détermine alors les valeurs de x et y en $t_1 = t_0 + h$ par

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0, y_0) \\ y_1 = y_0 + hg(t_0, x_0, y_0) \end{cases}$$

On itère ensuite le procédé.

Pour résoudre un problème global par une discrétisation, il ne suffit pas d'approcher les solutions à l'aide d'un modèle discret, il faut encore prouver que lorsqu'on fait tendre l'incrément h vers 0, la suite de solutions approchées obtenues converge vers la solution exacte. La démonstration de cette convergence n'est pas nécessairement la partie la plus facile du travail. Elle relève du changement de cadre réciproque de « discrétiser ».