Chapitre 5

Des hiérarchies de compétences

5.1. Un paradoxe

Nous avons rappelé dans les chapitres précédents qu'il y a parmi les mathématiciens un très large consensus pour reconnaître les vertus formatrices de la résolution de problèmes. Ajoutons à cela qu'un parcours de la littérature existante fait apparaître une quantité non négligeable d'ouvrages ayant pour but de concrétiser cette idée, tant en proposant des listes de problèmes qu'en conseillant des stratégies à utiliser pour les résoudre. Et cependant, nous devons constater que dans les classes, l'activité de résolution de problèmes reste très limitée. Il convient de rechercher les raisons d'une telle situation. Nous abordons ainsi la troisième des questions posées à la fin du paragraphe 1.4.

5.1.1 Des difficultés dues à l'organisation scolaire

Une première catégorie de difficultés pourrait être liée à l'organisation scolaire elle-même. Une activité de résolution de problèmes se prête mal à une grille horaire découpée en tranches de 50 minutes. Si on veut éviter que l'enseignant ne souffle progressivement la résolution à ses élèves, le travail de ceux-ci doit être au départ peu formalisé. Des discussions par petits groupes doivent pouvoir se dérouler, des déplacements doivent avoir lieu pour consulter de la documentation.

Cependant, le professeur doit conserver le contrôle de la situation, veiller à ce que chaque élève travaille réellement et, au moment opportun, procéder à des synthèses. Tous ces éléments nécessitent que la classe soit organisée d'une façon inhabituelle, à laquelle les enseignants ne sont pas préparés, et qui peut varier considérablement selon les circonstances (âge et nombre des élèves, matériel didactique et documentation disponibles, ...).

5.1.2 Des difficultés liées à certains programmes

La façon dont étaient rédigés jusqu'il y a peu la plupart des programmes d'enseignement n'encourageait pas non plus un tel type d'activités. Même si l'enseignant a toujours la liberté de modifier l'ordre des matières mentionné dans le programme, la tradition veut que l'on n'aborde pas l'enseignement d'une tranche de matière sans avoir au préalable rencontré les prérequis. Or la résolution d'un problème peut entraîner le groupe d'élèves sur des voies qui nécessitent de connaître des résultats qu'ils n'ont jamais rencontrés. C'est même là une façon de motiver les élèves à l'étude de ces résultats qui acquièrent alors le sens qu'un enseignement plus traditionnel ne fournit pas toujours. Il est même possible qu'apparaisse la nécessité de traiter d'un sujet, qui ne figure pas au programme. Pour cette raison, et aussi du fait que l'enseignement par problèmes prend considérablement plus de temps que l'enseignement magistral usuel, il faut admettre que

> Les programmes doivent être très souples et permettre à l'enseignant de moduler l'importance accordée aux différents points selon les circonstances.

5.1.3 Des difficultés d'ordre méthodologique

Mais si les raisons qui viennent d'être évoquées contribuent incontestablement à entraver la pratique de l'enseignement par problèmes, elles ne sont certainement pas les seules, ni peut-être les plus importantes, qui expliquent que cet enseignement ne soit guère pratiqué.

Le fait est que des difficultés fondamentales existent, difficultés qui ont déjà fait l'objet de recherches (voir par exemple [136], [137], [132], [45]), mais n'ont pas encore reçu de réponses vraiment satisfaisantes.

- **Comment, sans lui donner la réponse, aider un élève qui est bloqué dans la résolution ?**

  Les différentes stratégies qui sont mentionnées dans les ouvrages, et dont nous parlerons au chapitre 7, ne sont certainement pas à dédaigner. Bien souvent, elles se révèlent toutefois insuffisantes, pour des raisons inconnues.

- **Comment organiser l'enseignement par problèmes de façon que l'élève transfère naturellement à un nouveau problème une démarche dont il a pu constater qu'elle réussissait dans un premier problème ?**

  C'est tout le problème du transfert. La mise en évidence de différents *cadres ou registres de travail* et de la possibilité de *changer de cadre ou de registre* peut faciliter certains transferts de démarches particulières. Nous traiterons de ces questions au chapitre 6.

  Mais, d'une façon globale, tout ce que l'on peut affirmer actuellement est que, apparemment, chez un élève ayant suffisamment d'entraînement, des transferts s'opèrent, qui lui permettent de progresser dans la résolution. ([1]) Ces transferts sont souvent inconscients, ce qui ne permet évidemment pas de les analyser, encore moins de les provoquer à volonté.

- **Comment organiser l'enseignement par problèmes de façon à couvrir efficacement un curriculum prédéterminé ?**

([1]) L'expérience de la participation d'élèves à des épreuves telles que les *Olympiades Mathématiques Internationales* confirme qu'il est possible de s'entraîner à résoudre des problèmes.

Une suite non organisée de problèmes a beaucoup de chances de ne pas mener à un enseignement cohérent qui mette clairement en évidence les liaisons entre les différents points de la matière à étudier et qui situe l'importance de ces points tant par rapport aux applications que par rapport à l'édifice mathématique global. L'activité de résolution de problème doit céder au moment opportun la place à une phase d'*institutionnalisation* au cours de laquelle l'enseignant fait le point de la situation, rattache les résultats nouveaux aux acquis antérieurs et donne éventuellement des compléments d'information.

> En attribuant comme objectif principal au cours de mathématique d'apprendre à l'élève à résoudre des problèmes, nous ne prétendons pas qu'il soit possible de consacrer l'intégralité du temps disponible à cette activité.

L'équilibre indispensable entre les activités liées à des problèmes et celles — plus traditionnelles — d'institutionnalisation peut être difficile à trouver. Des expériences sont indispensables, *pour chaque point de matière*.

- **Comment évaluer l'aptitude à résoudre des problèmes ?**

  Cette question découle des précédentes : dès lors qu'un phénomène est mal connu, son évaluation est difficile, que ce soit de façon formative ou certificative.

5.1.4 Hiérarchiser les compétences

Les difficultés que nous venons de mentionner montrent la nécessité d'approfondir l'analyse de cette compétence — peut-être un peu trop globale — qu'est l'aptitude à résoudre des problèmes.

Nous rejoignons ainsi C. Thelot qui insiste dans [143] sur la nécessaire *hiérarchisation* des compétences. Dans ce chapitre, nous nous efforcerons de dégager des compétences subordonnées, dont l'apprentissage serait plus facile à organiser et à évaluer. Il ne s'agit toutefois pas d'atomiser les compétences, de façon à éviter que l'enseignement ne se transforme en l'application de recettes *ad hoc*.

Dans la suite de ce chapitre, nous esquisserons plusieurs hiérarchisations des compétences subordonnées à la résolution de problème. De façon plus précise, nous évoquerons quatre points de vue selon lesquels nous pouvons construire une telle hiérarchisation :

- Le point de vue **logico-déductif** s'intéresse à l'organisation logique des contenus d'enseignement.
- Le point de vue des **méthodes mathématiques** dégagera quelques grands principes de modélisation fréquemment utilisés. Il s'agit le plus souvent de *changements de cadre ou de registre*.
- Le point de vue **didactique** s'intéresse aux comportements d'un chercheur, c'est-à-dire de toute personne en situation de recherche, aux *stratégies* développées à cette occasion.
- Le point de vue **psychologique** permet de classer des compétences selon une taxonomie d'objectifs cognitifs.

Nous retrouvons ainsi les divers points de vue déjà rencontrés au chapitre 4, le point de vue mathématique étant en quelque sorte dédoublé, selon que l'on considère les contenus mathématiques ou les méthodes mathématiques.

Les compétences de ces différentes catégories sont encore fort larges. Elles font intervenir elles-mêmes des compétences subordonnées telles que la maîtrise de certains algorithmes ou la manipulations d'instruments de dessin ou de calcul. Ces compétences apparaîtront surtout dans les exemples, *sur le chantier des résolutions de problèmes*.

Nous consacrerons le paragraphe suivant à une réflexion sur les contenus de l'enseignement des mathématiques. Nous ne construirons pas une hiérarchie de ces contenus suivant le point de vue logico-déductif mentionné plus haut. Un tel travail n'aurait guère d'intérêt : si nous nous limitons aux grandes lignes, l'originalité en serait très faible, tout mathématicien étant depuis longtemps conscient des prérequis des différents sujets. Entrer dans les détails, dépasserait le cadre de notre travail.

Les trois paragraphes suivants seront ensuite consacrés à de premières descriptions des trois autres points de vue. Enfin, aux chapitres 6, 7 et 8, nous reviendrons de façon approfondie sur chacun d'entre eux, en associant nos réflexions relatives à la résolution de problèmes à celles consacrées à la hiérarchisation des compétences.

5.2. Des contenus

Il n'est pas nécessaire d'argumenter pour justifier que nous accordons une place importante à la question des contenus de l'enseignement des mathématiques. Il est évidemment impossible d'acquérir une quelconque compétence si une quantité de matière suffisante n'est pas disponible pour servir de support au travail soumis à l'élève.

De plus, nous avons admis au chapitre 1 que l'expression *compétence disciplinaire* possède une signification fort large et qu'elle concerne à la fois les savoirs et les savoir-faire. Nous avons aussi remarqué au chapitre 3 que les savoir-faire (les aspects procéduraux) et les savoirs (les aspects structuraux et conceptuels) ont les uns et les autres un rôle important à jouer dans l'apprentissage d'un sujet donné.

Un des objectifs de notre travail est de mettre au point des ensembles intégrés de savoirs et de savoir-faire pouvant servir de base à la construction des cours de mathématique des différentes filières.

> Il importe donc de déterminer quels sont les contenus suffisamment importants pour être retenus en vue de constituer ces ensembles intégrés de savoirs et de savoir-faire.

Au chapitre 2, nous avons insisté sur le rôle culturel et social de la mathématique. Nous y avons notamment mentionné l'importance d'une bonne culture mathématique pour satisfaire aux nécessités du développement économique et technique de la société.

Par ailleurs, la mathématique et de façon plus générale, les sciences doivent désormais être considérées comme faisant partie de la formation minimale de l'homme cultivé. Dans la société du 21^{e} siècle, l'homme dont la culture générale se limiterait aux aspects littéraires ou artistiques qui caractérisaient la culture humaniste du 19^{e} siècle apparaîtra comme un individu défavorisé et socialement inadapté.

Nous attribuerons au cours de mathématique trois fonctions essentielles :

1. *une fonction de formation de l'esprit destinée à rendre les jeunes gens capables de réagir rationnellement devant une situation problématique,*
2. *une fonction utilitaire destinée à munir tout individu des savoirs et des savoir-faire dont il aura besoin dans ses activités professionnelles ou tout simplement pour comprendre ce qui se passe autour de lui,*
3. *une fonction culturelle destinée à fournir aux hommes et aux femmes les informations qui leur permettront de situer la mathématique dans l'évolution intellectuelle de l'humanité.*

5.2.1 La fonction de formation de l'esprit

Nous ne nous appesantirons pas beaucoup dans ce paragraphe sur l'aspect formation de l'esprit, et cela pour deux raisons :

1. d'une part, le leitmotiv de notre travail est de considérer la résolution de problèmes comme la compétence terminale la plus importante pour le cours de mathématique. Il s'agit bien là de *former l'esprit*.
2. la mathématique est suffisamment riche pour fournir des situations problématiques motivantes et intéressantes dans tous les domaines qu'elle comporte. Le choix des contenus à étudier n'est donc pas fondamental de ce point de vue.

Il importe néanmoins de veiller à ce que les problèmes soumis aux élèves aient une « postérité » en ce sens qu'ils peuvent se rattacher à l'étude de questions mathématiques significatives. Ils peuvent donc jouer un rôle également significatif dans l'introduction, l'illustration ou le prolongement de tels sujets. Ainsi, dans le cadre d'un apprentissage, nous écartons les énoncés qui ont un caractère purement « gratuit », ce qui est indépendant des compétences que leur résolution ferait intervenir. De tels énoncés peuvent toutefois être utilisés dans d'autres circonstances telles que les compétitions mathématiques.

5.2.2 La fonction utilitaire

5.2.2.1 Les statistiques et les probabilités

Compte tenu de l'importance prise par l'outil statistique dans la Société actuelle, il semble indispensable que tous les élèves du secondaire reçoivent dans ce domaine une initiation qui leur permette de prendre connaissance de façon critique des informations chiffrées véhiculées par les *media* à l'occasion de sondages ou d'enquêtes diverses.

L'enseignement des statistiques ne peut en aucun cas se résumer à apprendre quelques recettes de calcul permettant de déterminer les *paramètres statistiques* (moyenne, médiane, écart-type, écart interquartile, etc) d'un tableau de nombres. L'important est que les élèves apprennent la signification profonde de ces paramètres, les circonstances dans lesquelles il vaut mieux en calculer un plutôt qu'un autre. Ils doivent les utiliser pour répondre à des questions pertinentes, notamment en comparant les caractéristiques d'échantillons dont on ignore s'ils sont issus de populations semblables ou non.

EXEMPLE 5.2.1 *Quand on considère la distribution des revenus des habitants d'un pays, quel est le paramètre de position le plus pertinent : la moyenne, la médiane ou le mode ? La réponse est-elle la même pour la Belgique et l'Arabie Saoudite ?*

> La première activité en statistique est d'apprendre à se poser des questions à propos des informations disponibles.

Ceci nécessite de la part du professeur plus qu'une formation aux techniques de la statistique. Il doit aussi être capable de porter une appréciation sensée sur des aspects divers de l'actualité scientifique, économique, politique et sociale et ne pas avoir peur de « mouiller sa chemise ». Ce sujet pourrait faire l'objet de travaux interdisciplinaires, en collaboration avec les enseignants de disciplines très variées : sciences naturelles, sciences économiques, langues, ...

Du point de vue technique, il serait certainement souhaitable que les élèves de la fin du secondaire soient initiés à des outils tels que les tests d'hypothèses ou les intervalles de confiance. Cependant les difficultés conceptuelles liées à ces objets sont connues pour être importantes. Par ailleurs la disponibilité de moyens de calculs puissants constitue un fait récent qui devrait en faciliter une approche procédurale. Une recherche expérimentale est indispensable en vue de déterminer jusqu'où l'initiation pourrait aller et construire une méthodologie qui permette un enseignement, même peu formalisé, de ces questions.

Un apprentissage, même relativement restreint des probabilités, est indispensable pour comprendre les outils statistiques qui semblent indispensables. On rencontre fréquemment des distributions normales ou poissonniennes dans les sciences humaines, les sciences économiques ou naturelles. Ce sont là, avec la distribution binômiale, les exemples les plus importants de variables aléatoires.

Le sujet des *variables aléatoires* est donc « incontournable ».

5.2.2.2 L'algèbre linéaire et l'analyse

Pour les élèves les plus motivés par les mathématiques, pour ceux qui en feront l'usage le plus important dans leurs études ultérieures ou dans leur vie professionnelle, il importe de rencontrer les bases des mathématiques d'aujourd'hui. A côté des statistiques (et probabilités) déjà mentionnées, on ne peut pas ne pas prévoir parmi les compétences disciplinaires, des chapitres importants d'algèbre linéaire (associée à la géométrie, notamment la géométrie de l'espace) et d'analyse.

L'algèbre linéaire et l'analyse mathématique sont d'importants outils de modélisation.

L'algèbre linéaire permet, entre autres, de développer des méthodes en vue de modéliser des phénomènes complexes. Elle est à la base de la plupart des méthodes numériques utilisées par les ordinateurs consacrés aux applications scientifiques et techniques, y compris celles qui permettent de traiter des images. Pour faciliter l'assimilation de l'algèbre linéaire, en même temps que pour montrer sa puissance, il est opportun d'associer son apprentissage à celui de la géométrie de l'espace.

L'analyse permet d'étudier dans leur continuité les phénomènes comportant une composante dynamique. Elle intervient dans la plupart des applications des mathématiques aux domaines de l'ingénieur ou du physicien.

L'algèbre linéaire et l'analyse se complètent et permettent l'approche de concepts et de techniques d'approximations.

Muni d'un bagage substantiel dans ces deux domaines, bagage mis en œuvre notamment lors de la résolution de problèmes, l'élève qui s'oriente vers des études scientifiques ou techniques, sera valablement préparé par l'enseignement secondaire à ses activités ultérieures.

5.2.3 La fonction culturelle

Comme nous l'avons expliqué plus haut, nous pensons qu'une certaine place devrait être accordée à des activités ayant des caractéristiques moins utilitaires, mais constituant une part de la culture générale de l'individu. Le rôle joué dans le développement de la pensée humaine par des sujets tels que la découverte des géométries non euclidiennes ou la démonstration du théorème de Fermat, les retombées quasi-philosophiques de ces découvertes, les questions épistémologiques qu'elles soulèvent, rendent ces sujets aussi importants que de nombreux travaux à caractère non scientifique que l'on considère comme faisant partie du bagage minimum de l'homme cultivé. Leur étude, notamment historique et certainement non exhaustive, constitue une occasion de décrire l'évolution des concepts et des techniques mathématiques. Elle peut aussi constituer une source de problèmes à la portée des élèves.

En un tel domaine, il n'y a aucune raison d'imposer les mêmes sujets d'étude à tous les élèves d'une année déterminée. Il ne conviendrait pas en effet que de tels sujets servent de prérequis pour les années suivantes. Nous pensons que par conséquent il ne s'impose pas de rédiger des propositions précises de sujets à étudier, mais qu'il est préférable de laisser les enseignants choisir eux-mêmes des sujets qui soient à la fois accessibles et motivants pour leurs élèves.

5.3. Le point de vue mathématique

La mathématique est souvent divisée en domaines tels que « Algèbre », « Géométrie », « Analyse », etc. Cependant, les mathématiciens insistent souvent sur l'unité de leur science. Celle-ci se marque notamment par les connexions qui existent entre les différents domaines et qui permettent parfois de résoudre un problème en le transposant d'un domaine dans un autre, c'est-à-dire en en construisant un modèle dans un cadre différent du cadre d'origine.

Nous avons déjà mentionné que de tels transferts peuvent être inconscients et les problèmes que cela suscite. Une façon de rencontrer ces problèmes est de rendre les élèves conscients de la possibilité des transferts et de les organiser. Nous les désignerons souvent par l'expression « changements de cadre », expression popularisée par Régine Douady qui s'exprime ainsi dans [63] :

> *Le changement de cadre est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils et de techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation.*

L'exemple suivant montre comment peut fonctionner un changement de cadre. Il remplace un problème rencontré en statistique mais s'exprimant dans le cadre de la géométrie plane par un problème de projection orthogonale dans un espace de dimension n (identifié à $\mathbb{R}^n$).

EXEMPLE 5.3.1 *Etant donné n points $\binom{x_1}{y_1}, \ldots, \binom{x_n}{y_n}$ de $\mathbb{R}^2$, déterminer la droite de régression de y en x, c'est-à-dire la droite d'équation $y = ax + b$ qui rend minimum l'expression $\sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2$. (Cette droite est aussi connue sous le nom de droite d'approximation par moindres carrés.)*

Le problème posé se situe dans le cadre de la géométrie analytique plane. Il peut se résoudre par une technique de minimisation de la fonction $f(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2$. Une autre méthode consiste à reformuler le problème dans le cadre de la géométrie analytique d'un espace de dimension n. En effet, si

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

sont n points de $\mathbb{R}^2$, alors

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ et } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont trois points de $\mathbb{R}^n$. Avec les notations ci-dessus, le problème consiste à trouver les valeurs de a et b qui rendent minimum la distance dans $\mathbb{R}^n$ du point y au point $ax + bu$. Or lorsque a et b varient, le point $ax + bu$ parcourt un plan de $\mathbb{R}^n$. La distance de y à $ax + bu$ est alors minimum si $ax + bu$ est la projection orthogonale de y sur ce plan, c'est-à-dire si le vecteur $y - (ax + bu)$ est orthogonal à la fois à x et u.

Utilisant le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$, nous arrivons ainsi directement au système d'équations dites « normales »

$$\begin{cases} a(x.x) + b(x.u) = x.y \\ a(u.x) + b(u.u) = u.y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a\sum_{i=1}^n x_i^2 + b\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

dont la résolution fournit les valeurs cherchées pour a et b.

Cet exemple se situe à un niveau conceptuel relativement élevé puisqu'il fait intervenir un espace de dimension n. L'avantage réside clairement dans une plus grande efficacité liée au remplacement des calculs par des idées et aux possibilités de généralisation que cette méthode comporte. Par contre, l'application d'une technique de minimisation, soit par dérivation, soit par considération de fonctions du second degré, aurait permis de résoudre le problème en restant à un niveau plus procédural, sans doute mieux adapté à certaines circonstances. Tout dépend des objectifs recherchés par delà la seule résolution du problème.

Il ne nous sera pas possible de passer en revue tous les changements de cadre possibles et imaginables car, comme ci-dessus, ils sont souvent très directement liés au problème étudié. Nous noterons d'abord une définition très générale formulée dans [63] :

Définition 5.3.2 *Un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations.*

Un changement de cadre doit donc comporter le remplacement des objets, ou des relations ou des images mentales présentes initialement par d'autres entités analogues. A priori, rien n'impose qu'il modifie le niveau de conceptualisation utilisé, mais cela peut arriver si les objets nouvellement introduits se situent à un niveau conceptuel plus élevé que les objets initiaux.

Les changements de cadre sont des compétences d'ordre mathématique, de haut niveau, auxquelles viendront s'adjoindre de nombreuses compétences subordonnées. Au chapitre 6, nous examinerons plus particulièrement certains d'entre eux, très généraux et d'emploi fréquent :

Algébriser : Remplacer un problème ou une situation non algébriques par un problème ou une situation algébriques. Ce changement de cadre est sans doute le plus connu et peut-être le plus ancien, puisqu'il remonte (au moins) à Descartes.

EXEMPLE 5.3.3 *Géométrie vectorielle ou analytique. Mise en équation d'un problème d'arithmétique.*

Géométriser C'est en quelque sorte le changement de cadre réciproque du précédent. Il est sans doute aussi moins fréquent que le précédent, car la géométrisation conduit à une formulation qui relève plus souvent de la géométrie analytique que de la géométrie synthétique. C'est alors plus un changement de registre ([2]) qu'un changement de cadre.

EXEMPLE 5.3.4 *Assimiler la moyenne et la variance d'une suite finie de nombres au barycentre et au moment d'inertie d'un système de points massifs.*

Discrétiser : Remplacer un problème ou une situation relevant du continu par un problème ou une situation relevant du discret.

EXEMPLE 5.3.5 *Tabulation d'une fonction, groupement de données.*

Approcher : Ce changement de cadre est en quelque sorte complémentaire, ou réciproque du précédent. Après qu'une situation ait été discrétisée, un passage à la limite intervient pour obtenir la réponse cherchée dans le cas continu.

EXEMPLE 5.3.6 *Définition d'une intégrale, d'une dérivée.*

Numériser : L'utilisation de méthodes relevant de l'analyse numérique et utilisant des moyens de calcul adéquats est souvent le seul moyen de résoudre complètement un « vrai » problème (c'est-à-dire un problème non purement *didactique*). Il s'agit bien d'un changement de cadre car les « nombres de la machine à calculer » ne vérifient pas les axiomes des nombres réels.

EXEMPLE 5.3.7 *Calculer les solutions d'un système de trois équations à trois inconnues dont les coefficients sont donnés avec trois décimales.*

Linéariser : Remplacer un problème ou une situation régis par des équations non linéaires par un problème ou une situation approchés régis par des équations linéaires.

([2]) Voir plus loin.

Exemple 5.3.8 *Petits mouvements en physique.*

Probabiliser : Construire un modèle probabiliste d'une situation qui ne l'est pas.

Exemple 5.3.9 *Calculer une aire ou un volume par la méthode de Monte-Carlo.*

Projeter : Nous désignons par ce verbe la méthode d'analyse consistant à simplifier une situation ou un problème moyennant une perte d'information. On peut considérer qu'il s'agit d'un changement de cadre dans la mesure où la situation est transposée d'un domaine comportant un grand nombre de dimensions (parfois une infinité) à un autre de taille plus modeste.

Exemple 5.3.10 *Représentation plane de figures spatiales, description d'un paquet de données à l'aide d'un petit nombre de paramètres, approximation linéaire par moindres carrés, analyses spectrales permettant la décomposition de la lumière blanche en lumières monochromatiques, ou d'un son en harmoniques.*

...

Bien entendu, les changements de cadre qui viennent d'être énumérés ne sont pas indépendants les uns des autres.

La définition 5.3.2 parle en particulier des *formulations éventuellement diverses* des objets et des relations entre objets. Modifier la formulation utilisée n'est pas un changement de cadre, mais est désigné actuellement par l'expression « changement de registre » (voir [66], [115], [9], [82]). Un registre est donc un mode d'expression. On peut ainsi parler du registre symbolique, du registre de la langue maternelle, du registre graphique, etc. Certains situations s'expriment plus facilement dans un registre que dans un autre.

Exemple 5.3.11 *Comparer les représentations du vecteur nul dans les registres symbolique ($\vec{0}$) et graphique (?), ou celles de l'ensemble vide dans les mêmes registres.*

- Les changements de cadre modifient la nature même des objets considérés.
- Les changements de registre ne modifient que leur représentation.

Utiliser le registre adéquat à l'étude d'une situation et éventuellement changer de registre en cours de travail sont des compétences que l'élève doit aussi apprendre à maîtriser en vue de résoudre des problèmes.

5.4. Le point de vue didactique

Du point de vue didactique, nous nous intéressons à l'activité d'un élève-chercheur. Nous avons déjà mentionné qu'une bonne part de celle-ci est consacrée, lors d'épisodes d'analyse, de planification et d'exploration, à l'élaboration et à la mise en œuvre de *stratégies*, lesquelles peuvent être considérées comme relativement indépendantes de la nature du problème étudié.

De telles stratégies apparaissent chez un certain nombre d'auteurs, dont le plus connu est Georges Polya. Ces stratégies sont assez imprécises. Il s'agit plus de conseils qu'il faut savoir appliquer au moment opportun, mais qu'il faut aussi savoir NE PAS appliquer. Il n'existe évidemment aucune méthode universelle permettant de résoudre n'importe quel problème. L'imagination et le flair sont souvent le facteur déterminant. Toutefois les stratégies dont il va être question peuvent aider considérablement à la découverte de la solution d'un problème en évitant de s'engager dans une voie sans issue et en contribuant à faire mûrir la situation jusqu'au point où le chercheur perçoit — souvent de façon intuitive — la démarche qui l'amènera au résultat escompté.

Nous évoquerons au chapitre 7 les stratégies citées ci-dessous.

- Distinguer les données, les opérations et les buts.
- Travailler à reculons.
- Se rapprocher le plus près possible de l'objectif.
- Étudier des cas particuliers.
- Rechercher des exemples et des contre-exemples.
- Changer de registre.
- Effectuer des représentations graphiques.
- Raisonner par analogie.
- Effectuer des raisonnements heuristiques.
- Raisonner déductivement.
- Tenir compte des symétries des données.
- Éliminer tout présupposé quant au résultat à obtenir.
- Communiquer à d'autres, oralement ou par écrit, le résultat, même partiel et provisoire, de ses cogitations.

5.5. Le point de vue psychologique

Du point de vue psychologique, nous nous intéressons aux processus mentaux mis en œuvre lors d'une activité de résolution de problème.

Au chapitre 3, nous avons rencontré le processus fondamental de passage d'un stade procédural à un stade structural et en particulier, la description faite de ce processus par A. Sfard. Un processus analogue accompagne la résolution d'un problème. Pour faciliter les comparaisons, nous reprendrons la terminologie de Sfard, et distinguerons donc des étapes d'*intériorisation*, de *condensation* et de *réification*. Au cours de l'étape d'intériorisation, l'élève prend connaissance de l'énoncé du problème et se l'approprie. Les connexions avec d'autres situations ou avec divers processus ou concepts lui apparaissent déjà. Tout se met donc en place pour que la véritable recherche puisse commencer.

Pendant la phase de condensation se déroule la recherche proprement dite. Les matériaux rassemblés durant la phase d'intériorisation sont exploités. des idées apparaissent, certaines sont abandonnées, d'autres sont poursuivies plus avant. La phase se clôture avec la « BONNE idée », celle qui amène à la solution. A ce moment, il reste à achever le travail, ce sera l'objet de la phase de réification. Il s'agit en particulier de vérifier la solution obtenue dans tous ses détails, de traiter notamment des cas particuliers qui auraient été laissés de côté précédemment. Ensuite, il faut rédiger la solution en vue de pouvoir la communiquer. Egalement apparaissent souvent des conséquences du résultat, voire de nouveaux problèmes ... et le cycle reprend.

Une autre façon de décrire les activités mentales impliquées dans une activité mathématique est de se référer à une *taxonomie d'objectifs cognitifs*. Il s'agit d'une classification des activités mentales basée sur leur complexité. La première taxonomie de ce genre, due à B.S. Bloom date de 1969, [36]. Elle était très générale. Ultérieurement des taxonomies adaptées aux mathématiques ont été proposées. Nous décrirons celle qui est due à Régis Gras, [80].

Enfin, nous ne serions pas complets si nous ne faisions état des travaux de Pierre et Dina Van Hiele qui ont consacré leur travail doctoral (1957) à l'élaboration d'une théorie portant sur l'existence de *niveaux* de pensée.

Dans l'esprit des VAN HIELE, leur théorie a une portée générale. En témoigne le titre de l'article publié en 1958/59 dans *Mathematica & Paedagogia*, [156] : *La signification des niveaux de pensée dans l'enseignement par la méthode déductive*. Toutefois ils n'ont traité que le seul exemple de la géométrie, et très rapidement l'habitude s'est prise de ne considérer leur théorie que dans ce contexte.

Au chapitre 8, nous essayerons

1. d'indiquer ce que sont les niveaux de pensée reconnus par les van Hiele.
2. de relater l'une ou l'autre expérimentation qui a été faite pour vérifier l'existence de ces niveaux, ainsi que les corrections qui pourraient être apportées à la théorie à la suite de ces expérimentations.

Notre description doit être prise avec beaucoup de prudence. Nous sommes en effet dans un domaine où les notions considérées ont des contours imprécis, où les frontières sont floues. Des auteurs différents peuvent parfois involontairement dire des choses contradictoires tout en utilisant le même vocabulaire ! Pierre van Hiele lui-même n'a pas toujours distingué le même nombre de niveaux de pensée.

Références

[136], [137], [132], [45], [143], [63], [66], [115], [9], [82], [36], [80], [156].