# Chapitre 4

# Des problèmes

Au chapitre 2, nous avons constaté que

> *La résolution de problèmes est une compétence mathématique terminale à considérer comme particulièrement importante.*

Nous allons détailler cette affirmation dans ce qui suit. Mais auparavant, il est nécessaire de décrire ce que nous entendons par *problème* et plus précisément par *problème dans un contexte d'enseignement*.

## 4.1. Qu'est-ce qu'un problème ?

Commençons par une affirmation assez générale.

> Un problème est une question suffisamment complexe pour que la réponse ne soit pas facile à trouver.

Un problème est donc un énoncé destiné à provoquer une activité de recherche. Il peut s'agir d'une réponse à trouver, d'une construction à effectuer, d'un programme à rédiger. Mais n'importe quel énoncé n'est pas un problème !

**Un problème doit être résolu par un élève ou un groupe d'élèves**

En d'autres termes, dans un contexte d'enseignement, un problème dont la résolution est effectuée uniquement ou principalement par l'enseignant cesse d'être un problème pour les élèves.

Pour que l'activité de résolution de problème soit vraiment formatrice pour eux, ce sont eux qui doivent l'exercer. Le rôle du professeur n'en est que plus important et plus difficile : il doit choisir des problèmes adaptés à la classe et contrôler l'activité de résolution. En particulier,

- en cas de blocage persistant, il donne le « coup de pouce » nécessaire, tout en veillant à préserver un espace de recherche suffisant pour les élèves,
- il aide les élèves à tirer les conclusions du travail qu'ils ont effectué en élaborant des synthèses avec eux,
- en cas de besoin, il fournit des compléments de matière nécessaires pour exploiter les idées apparues au cours de la recherche,
- il établit éventuellement des connections avec d'autres domaines ou donne des indications historiques,
- il situe l'importance du problème par rapport au sujet en cours d'étude,
- . . .

**Un problème doit être difficile.**

Pour susciter un véritable travail de recherche, un problème doit être difficile. Autrement dit, il est exclu que la procédure de résolution apparaisse clairement dès la lecture de l'énoncé. C'est de cette façon uniquement que l'élève — ou la classe, car les problèmes les plus difficiles nécessiteront souvent un travail collectif — devra exercer, sous le contrôle de l'enseignant, des activités telles que

- consulter de la documentation,
- prendre connaissance de résultats existants,
- éliminer les informations inutiles et construire un modèle,
- rechercher des analogies avec des situations déjà rencontrées,
- démontrer,
- vérifier,
- communiquer,
- ...

**Un problème ne peut pas être un casse-tête.**

Si un problème doit être difficile, il faut néanmoins qu'il soit à la portée des élèves, soit individuellement, soit collectivement. Inutile de décourager les jeunes en leur soumettant des énoncés qu'ils n'ont aucune chance de pouvoir résoudre ou dont la résolution donne lieu trop fréquemment à des blocage persistants.

Notons néanmoins qu'avec l'entraînement, des problèmes de difficulté plus grande peuvent être progressivement rencontrés.

**Un problème doit motiver les élèves.**

Si les élèves n'éprouvent aucunement l'envie de connaître la solution du problème, ils n'y consacreront certainement pas l'énergie nécessaire.

Notons néanmoins que la motivation des élèves pour l'étude d'une situation peut dépendre de nombreux facteurs qui échappent à notre analyse. En particulier, la nature des relations entre les élèves et l'enseignant, la capacité de celui-ci à capter leur intérêt, la façon dont il « emballe » un sujet, la visibilité de son enthousiasme pour la mathématique, sont des éléments qui ont probablement autant, sinon plus d'importance, que l'intérêt intrinsèque du problème proposé.

**Un problème ne devrait pas faire intervenir d'astuces sans postérité.**

Pour que l'élève retire quelque chose du problème, non seulement du point de vue de la matière, mais aussi du point de vue des modes de raisonnement, il faudrait éviter des astuces qui ne seraient jamais réutilisées. Un privilège doit être accordé aux « méthodes », c'est-à-dire aux trucs qu'on utilise souvent.

Au delà des « critères » précédents qui devraient être généralement respectés, d'autres caractéristiques peuvent être présentes qui permettent de développer plus particulièrement certaines facettes de la formation des élèves :

**Un problème peut être interdisciplinaire.**

Si c'est le cas, l'enseignant doit, soit être à l'aise dans une discipline qui n'est pas la sienne, soit travailler en équipe avec des collègues. Il conviendrait aussi que le problème soit lié à une matière en cours d'étude par un de ceux-ci.

**Un problème peut ne pas être interdisciplinaire.**

La mathématique fournit suffisamment d'occasions de se poser des questions pour que certaines d'entre elles puissent motiver les élèves, soit par leur côté esthétique, soit par l'importance du sujet.

**Un problème peut être accompagné d'un exposé de faits historiques.**

En montrant comment certains concepts sont nés de problèmes non scolaires, on peut tout à la fois susciter l'intérêt des élèves et situer l'importance des théories étudiées.

**Un problème peut établir des relations entre des sujets différents.**

Nous avons mentionné au chapitre 1 que la question du transfert d'une compétence d'un contexte à un autre était cruciale. Il ne faut donc négliger aucune occasion de mettre en évidence des relations entre différents points de matière. On explique ainsi les mécanismes profonds des phénomènes rencontrés, et par conséquent on les simplifie et on en facilite l'assimilation. L'élève doit à cette occasion voir sa compétence augmenter, en ce sens qu'il doit être capable de s'attaquer avec succès à de nouvelles catégories de problèmes.

## 4.2. Résoudre un problème

Il n'existe évidemment aucune méthode universelle, aucun moyen d'arriver à coup sûr à la découverte de la solution de n'importe quel problème. Sinon la notion même de problème n'existerait pas ! Dans ce paragraphe, nous nous contenterons d'essayer de décrire ce qui se passe au cours de la résolution d'un problème. Cette description peut être réalisée selon trois points de vue :

- un point de vue mathématique
- un point de vue didactique
- un point de vue psychologique

### 4.2.1 Le point de vue mathématique

Du point de vue mathématique, nous ne cherchons pas à décrire *l'activité* du chercheur. Nous ne tenons pas compte des *stratégies* (fructueuses ou non) qu'il met en œuvre pas plus que des aspects psychologiques de son travail. Nous nous intéressons au contenu mathématique réellement utile de son travail. ([1])

De ce point de vue, la méthode de résolution, appelée *méthode axiomatique* dans [4], comporte les phases caractéristiques de toute méthode scientifique :

- *modélisation de la situation étudiée, par un processus d'abstraction qui élimine toute donnée ou toute information non pertinente, construction de représentations symboliques ou graphiques adéquates,*
- *mise en fonctionnement du modèle, obtention de résultats,*
- *validation du modèle par comparaison des résultats obtenus avec la situation de départ, éventuellement retour à la première phase, mise en question du modèle utilisé, affinement de ce modèle ou construction d'un nouveau modèle, puis reprise de la deuxième phase.*

Les diverses phases ainsi décrites mettent en œuvre des compétences différentes. La construction du modèle est sans nul doute la plus difficile et la plus délicate. Elle utilise des méthodes heuristiques, elle nécessite de pouvoir analyser une situation informelle et synthétiser un modèle. Elle provoque parfois la recherche de documentation. Elle fait intervenir beaucoup d'imagination et de connaissances. Dans le cas d'un problème issu d'une source extérieure à la mathématique, ce sont des connaissances dans au moins deux disciplines différentes qui doivent être coordonnées.

La seconde phase est plus formelle, elle utilise les méthodes mathématiques classiques. Le raisonnement déductif joue un rôle plus important. La troisième nécessite à la fois un bon esprit critique et beaucoup de soin. Une fois le problème résolu, tout n'est pas terminé : la solution doit être rédigée, communiquée. Ce sont également des qualités de synthèse et d'expression qui sont mises en œuvre. Elles permettent à la classe d'*institutionnaliser* éventuellement de nouveaux résultats en les intégrant à son corpus de connaissances.

([1]) C'est généralement ce contenu qui, après que le problème soit résolu, c'est-à-dire *mort*, fait l'objet d'un compte-rendu écrit, lequel dissimule l'importance réelle du travail effectué par l'auteur.

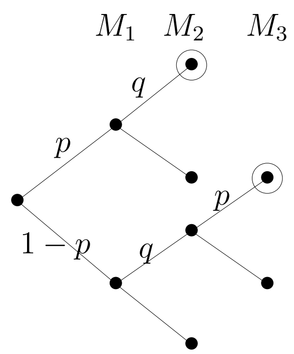
Exemple 4.2.1 *Un père dit à son fils : « j'augmenterai ton argent de poche si tu gagnes deux parties de tennis consécutives que tu joueras contre ton frère et moi en changeant d'adversaire à chaque partie. » Le père est le meilleur joueur. Contre qui le fils doit-il d'abord jouer ?*

Cet exemple assez simple permet d'illustrer aisément les trois phases décrites ci-dessus :

**Modélisation :** Il s'agit bien évidemment d'un problème de probabilité. Introduisons les notations suivantes :

- la probabilité pour que le fils batte son père est $p$,
- la probabilité pour que fils batte son frère est $q$.

Si le fils choisit de jouer son premier match contre son père, le graphe suivant décrit les possibilités pour le fils de gagner deux parties consécutives (les traits montants de gauche à droite indiquent un gain, les traits descendants de gauche à droite indiquent une perte, les symboles $M_1$, $M_2$, $M_3$ désignent les résultats aux trois matches).




Il n'est pas nécessaire de tracer l'arbre complet, certaines séquences pouvant être stoppées après deux matches.

Un graphe analogue peut être dessiné si le fils choisit de jouer d'abord contre son frère. Les deux graphes constituent ensemble un modèle du problème.

**Fonctionnement du modèle :** S'il joue sa première partie contre son père, il y a deux possibilités pour que le fils remporte deux parties consécutives : ce sont les deux branches de l'arbre qui se terminent en des nœuds ayant été entourés d'un cercle.

Les règles d'addition et de multiplication permettent de calculer les probabilités d'arriver en ces nœuds : $pq + (1-p)qp$, soit $pq(2-p)$. S'il joue en premier lieu contre son père, ce nombre est donc la probabilité qu'a le fils de voir son argent de poche augmenter. S'il joue en premier lieu contre son frère, il suffit de permuter le rôle du père et du frère. La probabilité correspondante est $pq(2-q)$.

Conclusion : puisque le père est le meilleur joueur, on a $p \leqslant q$ de sorte que $pq(2-p) \geqslant pq(2-q)$ : le fils a intérêt à rencontrer son père en premier lieu, donc à jouer deux parties contre lui.

**Validation du modèle :** La réponse trouvée peut sembler bizarre. Le fils a-t-il vraiment intérêt à jouer deux parties sur trois contre le meilleur de ses deux adversaires ? On pourra valider la réponse en remarquant que le fils ne peut absolument pas perdre la deuxième partie. Il a donc intérêt à la jouer contre l'adversaire le plus faible.

### 4.2.2 Le point de vue didactique

Le point de vue mathématique qui vient d'être décrit ne s'intéresse finalement qu'à ce qui restera du problème après sa résolution. S'inspirant des principes « *behaviouristes* », le point de vue didactique cherche à rendre compte des *comportements observables* des élèves. Analysant la résolution d'un problème de ce point de vue, plusieurs auteurs, s'inspirant des travaux de Polya, [122], considèrent que cette résolution comporte quatre phases principales :

1. l'analyse du problème
2. l'élaboration d'une stratégie
3. la vérification et la validation de la stratégie
4. la communication du résultat

Ces phases ne s'opposent pas et ne recouvrent pas exactement celles qui sont intervenues dans la description du point de vue mathématique. Il est clair que l'analyse du problème relève plutôt de la modélisation, l'élaboration d'une stratégie peut relever à la fois de la modélisation et de la mise en fonctionnement du modèle cependant que la vérification et la validation de la stratégie interviennent lors de la mise en fonctionnement du modèle et de la comparaison des résultats obtenus avec la situation de départ.

Les travaux de A.H. Schoenfeld (voir [130]) proposent un découpage plus fin, en *épisodes* qui peuvent se répéter au cours de la résolution. Nous décrirons ces épisodes au chapitre 7, et donnerons un exemple au paragraphe 11.1.3.

### 4.2.3 Le point de vue psychologique

Du point de vue de la *psychologie cognitive*, nous pouvons retrouver lors d'une activité de résolution de problème les trois étapes d'intériorisation, de condensation et de réification qui ont été mises en évidence par Sfard et décrites au chapitre 3.

**L'étape d'intériorisation**

Elle correspond à la lecture et à la première analyse du problème. A partir de diverses simulations numériques ou graphiques par exemple, il s'agit de se familiariser avec le contenu mathématique du problème, avec le(s) processus mathématique(s) sous-jacent(s), ...

**L'étape de condensation**

C'est l'étape la plus active et la plus exigeante. Au départ de la familiarisation acquise du problème se dessinent des analogies avec des situations ou des contextes connus, des conjectures de difficulté croissante, des embryons de preuves ou de vérifications à partir de critiques diverses, des simplifications, des demandes de développements calculatoires ou théoriques, ...Et tout cela n'a rien de linéaire, de bien enchaîné, mais demande au contraire de fréquents retours en arrière, des digressions qu'on abandonne puis sur lesquelles on revient, ...C'est évidemment là le cœur de la recherche, c'est là qu'on sème les graines du futur succès.

**L'étape de réification**

C'est celle de la mise à mort du problème ([2]). Il reste à simplifier ce qui peut l'être, à tirer les conclusions du travail entrepris, et à fixer dans une rédaction consistante, les acquis associés à la solution, afin que rien de ce qui a été investi dans l'effort ne se retrouve bientôt perdu.

Nous reviendrons sur cette analyse en termes psychologiques au chapitre 10, où nous la mettrons en parallèle avec la construction d'une séquence d'enseignement et donnerons des exemples. Dans l'immédiat, continuons d'examiner les compétences mises en œuvre à l'occasion d'une résolution de problèmes.

([2]) Elle débute généralement par le célèbre « Aha ! », immortalisé par M. Gardner, qui est probablement une traduction américaine de l'« Eureka ! » de notre vieil Archimède.

# 4.3. Une compétence globale

Les descriptions de l'activité de résolution de problème qui ont été faites au paragraphe précédent — bien qu'elles soient formulées en termes très généraux — montrent à suffisance que cette compétence en fait intervenir de nombreuses autres qui lui sont subordonnées :

- analyser une situation
- synthétiser un modèle
- induire
- déduire
- imaginer
- connaître
- comparer
- abstraire
- rechercher de la documentation
- rédiger, communiquer
- collaborer, ...

sans oublier les compétences disciplinaires qui varieront fortement d'un problème à un autre. En fait, nous devons considérer que l'objectif essentiel de la résolution d'un problème n'est pas de trouver la réponse à une question, mais bien de réaliser un ensemble de comportements nécessaires à cette découverte.

Nous formulons donc l'hypothèse suivante :

> L'essentiel des compétences disciplinaires et transversales que le cours de mathématiques a pour vocation de développer peut résulter de ce que la résolution de problèmes est une compétence globale en mathématiques.

## 4.4. Une compétence terminale

La résolution de problèmes est non seulement une compétence globale, c'est aussi une compétence *terminale*. Autrement dit,

> Il doit être considéré comme normal qu'à la fin de l'enseignement secondaire, les élèves soient évalués notamment sur leur aptitude à résoudre des problèmes et que le système éducatif soit évalué notamment sur sa capacité d'amener les élèves à acquérir cette aptitude ([3]).

La capacité de résoudre des problèmes n'est sans doute pas la seule compétence terminale, mais elle est particulièrement importante puisqu'elle donne l'occasion d'en exercer d'autres. Elle peut donc être visée pour tous les élèves. Mais elle s'exercera avec des intensités différentes, des compétences subordonnées différentes, des contenus différents et des niveaux de difficulté différents selon le public d'élèves concernés. Des expériences doivent être effectuées dans les différentes filières d'enseignement pour déterminer le niveau exact qu'il est raisonnable d'essayer d'atteindre.

Lorsque le jeu est joué jusqu'au bout, la résolution d'un problème est aussi l'occasion de pratiquer un travail individuel ou en petit groupe sans « bénéficier » à tout instant de l'encadrement de l'enseignant. Acquérir plus d'autonomie est également nécessaire à l'élève qui veut se préparer à l'enseignement supérieur.

Dire que la résolution de problèmes est une compétence terminale ne signifie pas qu'elle ne doit faire l'objet d'un apprentissage qu'au troisième degré du secondaire, voire dans l'année terminale. C'est tout au long de la scolarité que cette compétence peut et doit être développée progressivement. Les expériences montrent en effet que des élèves du troisième degré qui n'ont jamais rencontré que des formes traditionnelles d'enseignement ont beaucoup de difficultés à s'adapter à un enseignement qui les amène à résoudre eux-mêmes de nombreux problèmes. Une des principales difficultés qu'ils rencontrent est de prendre connaissance d'informations contenues dans des manuels ou ouvrages de référence mathématiques, voir même dans les notes écrites préparées à leur intention.

([3]) La dernière partie de ce travail est consacrée à l'évaluation.

Notons que les nouveaux programmes de mathématiques des premier et deuxième degrés permettent déjà de développer l'activité de résolution de problèmes, notamment par l'introduction d'une distinction entre « noyaux » et « activités » dans le programme du premier degré.

## 4.5. Une quatrième synthèse : des problèmes et des séquences de problèmes

Un des objectifs de notre recherche est d'étudier la possibilité de charpenter l'enseignement des mathématiques de manière à y réserver, à côté des activités d'enseignement plus traditionnelles, une place importante à des résolutions de problèmes.

Cela signifierait en particulier

- entraîner les élèves à la résolution de problèmes de façon que celle-ci devienne une compétence terminale de l'enseignement secondaire
- élaborer des séquences de problèmes autour desquelles l'enseignement serait structuré, de façon que les nouveaux concepts soient acquis à travers des activités qui leur donnent du sens.

Les chapitres suivants seront consacrés à des réflexions sur les stratégies à mettre en œuvre pour résoudre des problèmes et sur la méthodologie à utiliser pour organiser l'enseignement.

#### Références

[4], [122], [130].