Chapitre 2

L'activité mathématique

2.1. La mathématique

On définissait jadis la mathématique comme étant *la science des nombres et de l'étendue*. Aujourd'hui, certains disent que c'est la *science des modèles* et qu'elle consiste en *l'observation et le codage de régularités dans le monde des objets et des symboles*. Mais pour le « grand public », la mathématique est d'abord une discipline *morte* dont le contenu est à étudier sans trop chercher à comprendre.

Il importe que l'école explicite la spécificité du savoir mathématique et en particulier qu'elle fasse passer le message que la mathématique est d'abord une *activité*. Mais en quoi consiste celle-ci ?

2.2. L'activité du mathématicien

Qu'est-ce qui constitue l'essentiel de l'activité du mathématicien, tant dans ses rapports avec d'autres domaines de l'activité humaine, que dans son travail purement mathématique ?

Depuis longtemps, une opinion fort répandue parmi les mathématiciens définit le principal moteur de l'activité mathématique comme étant la résolution de problèmes.

> *What does mathematics **really** consist of ? Axioms (such as the parallel postulate)? Theorems (such as the fundamental theorem of algebra)? Proofs (such as Gödel's proof of undecidability)? Concepts (such as sets and classes)? Definitions (such as the Menger definition of dimension)? Theories (such as category theory)? Formulas (such as Cauchy's integral formula)? Methods (such as the method of successive approximations)? Mathematics could surely not exist without these ingredients: they are all essential. It is nevertheless a tenable point of view that none of them is at the heart of the subject, that the mathematician main reason for existence is to solve problems, and that, therefore, what mathematics **really** consists of is problems and solutions.*
>
> *Paul Halmos, [89]*

> *« Faire des mathématiques » est une activité complexe, qui met en œuvre des aptitudes variées. Un mathématicien reste dans l'exercice de sa profession lorsqu'il se livre à des travaux aussi différents que :*
>
> - *Se poser des problèmes et les résoudre. Imaginer des théorèmes et les démontrer.*
> - *Résoudre des problèmes dont il n'a pas conçu l'énoncé lui-même.*
> - *Participer à la circulation de l'information mathématique en prenant une part active à des séminaires consacrés à des travaux récents. Rédiger sous forme synthétique des résultats obtenus par d'autres chercheurs, travaillant sur des sujets voisins.*
> - *Étudier des théories classiques ou achevées. Préparer des exposés magistraux et rédiger des livres. Enseigner.*
> - *Appliquer des techniques mathématiques (calcul, programmation, méthodes graphiques, statistiques, etc).*

- *Adapter des méthodes abstraites à la solution de problèmes pratiques (sciences appliquées).*

Georges Glaeser, [76]

Si Glaeser énumère plusieurs aspects de l'activité d'un mathématicien, tous ceux qui sont familiers avec ses travaux savent que ce n'est pas par hasard que les deux premiers points qu'il mentionne concernent la résolution de problèmes. Pour qui en douterait, il précise d'ailleurs explicitement :

> L'un des principaux objectifs de l'enseignement mathématique doit être de développer chez l'élève l'aptitude à poser et résoudre des problèmes.

Avec cette dernière citation, nous avons franchi un seuil. Il ne s'agit plus seulement d'affirmer qu'un mathématicien est quelqu'un qui résout, ou qui contribue à résoudre, des problèmes, certains issus des mathématiques, d'autres non. Ce dont il est question à présent, c'est de *l'enseignement des mathématiques*.

Remarquons que Glaeser ne dit pas qu'il faut faire résoudre des problèmes de mathématiques par les élèves, mais bien qu'il faut *développer leur aptitude à poser et résoudre des problèmes*, SANS PRÉCISER LA NATURE OU L'ORIGINE DE CES PROBLÈMES. L'objectif attribué à l'enseignement des mathématiques est donc bien plus général que « simplement » résoudre des problèmes de mathématiques. Et en associant « poser » à « résoudre », Glaeser renforce encore cette généralisation. C'est dans tous les domaines de l'activité humaine que « l'honnête jeune homme » et « l'honnête jeune femme du XXI^{e} siècle peuvent être amenés à poser et résoudre des problèmes.

> L'objectif de l'enseignement des mathématiques, en particulier le développement de l'aptitude à poser et résoudre des problèmes, serait donc d'abord de nature culturelle et sociale.

2.3. Une fonction culturelle et sociale pour la mathématique

Le texte suivant, extrait de [4], va dans le même sens :

> *Apprendre aux jeunes à aborder un problème — même s'il relève d'un domaine non scientifique — de façon ordonnée, méthodique, sans se laisser guider par des* a priori, *des slogans, sans pratiquer l'à-peu-près, serait leur donner une rigueur intellectuelle et une confiance en eux-mêmes les aidant à jouer un rôle constructif dans une société qui n'a que trop tendance à pratiquer des analyses sommaires, des amalgames et des simplifications abusives.*

Il est intéressant de signaler la manière dont le mathématicien français B. Beauzamy assigne à cette conception du mathématicien comme « casseur de problèmes » un rôle en accord avec l'évolution de toute la société :

> *Jusqu'à un passé très récent, toute philosophie, tout système de pensée était « réducteur » : il ramenait, ou tentait de ramener, toute explication de l'Univers à un petit nombre de raisons ou de principes. L'exemple le plus frappant est celui de la pensée religieuse, qui donne une explication unique à tout phénomène : Dieu l'a voulu. Mais c'est aussi le cas de toutes les philosophies et des doctrines scientifiques : les physiciens, par exemple, ont cherché à déduire les forces de quelques forces fondamentales, les particules de quelques particules fondamentales.*
>
> *L'idée de base de toutes ces pensées était que, d'une manière ou d'une autre, l'Univers devait être simple, même si cette simplicité nous était cachée. Pour un mathématicien, au contraire, l'idée de base est celle de la complexité. Nous savons que nos axiomes n'ont rien de naturel ou d'obligatoire ; nous savons qu'ils ne décrivent pas complètement la réalité, et nous savons que même si nous en ajoutons d'autres, nous n'y parviendrons pas. Nous sommes habitués aux cheminements complexes pour résoudre certaines questions, et nous sommes habitués à ce que d'autres demeurent sans réponse. C'est donc, on le voit, un mode de pensée différent, qui non seulement s'accommode de la complexité, mais encore la requiert. C'est là, sans doute, la plus grande contribution que le mathématicien puisse apporter « pour éclairer l'humaine raison ».*
>
> *B. Beauzamy, [29]*

Francis Buekenhout rapportait récemment une phrase de Guy Hirsch, professeur à l'*Université Libre de Bruxelles* qui exprimait de façon très succincte une idée analogue : *la mathématique n'est pas importante parce qu'elle est utile, mais parce qu'elle est efficace*. Ne pourrait-on dire que la mathématique est comme le téléphone ou l'automobile : il est possible de s'en passer, mais dès qu'on a appris à s'en servir, on n'en est plus capable. Dans cette conception, l'activité mathématique prend une dimension culturelle. Elle est beaucoup plus qu'une discipline particulière : elle devient une *méthode* que l'on souhaiterait pouvoir appliquer chaque fois qu'un individu rencontre un problème suffisamment complexe, et cela quelle que soit la nature de ce problème. De ce point de vue, nous pouvons préciser la phrase de Glaeser :

> L'un des principaux objectifs de l'enseignement mathématique doit être de développer chez l'élève des méthodes pour résoudre des problèmes.

Les problèmes à résoudre peuvent être issus de circonstances très variées. Il peut s'agir de problèmes « simples », issus de la vie quotidienne : quel emprunt faut-il contracter pour financer l'achat d'une automobile ou la construction d'une maison ? Comment interpréter les résultats d'un sondage publié par les medias ? Comment bricoler telle ou telle installation ?

Un problème — plus élaboré — peut aussi se situer dans un cadre professionnel et provenir des nécessités du développement des activités économiques, techniques et scientifiques. De la compression et transmission de données à distance à la conception de certains appareils électro-ménagers, ce sont bien souvent des résultats mathématiques récents et avancés qui fournissent la clé de la solution d'un problème pratique. Une des conséquences de cet état de choses est que

> les secteurs industriel, informatique et bancaire emploient aujourd'hui beaucoup plus de mathématiciens que jadis.

Nul doute que dans ces emplois, il ne peut être question de se contenter d'appliquer des recettes de calcul !

Il serait réducteur de qualifier l'activité mathématique ainsi suscitée d'« appliquée » en omettant le fait que les problèmes posés par cette mathématique appliquée ont été, et sont encore, à la base du développement de théories fondamentales. Contentons-nous de citer les progrès récents en géométrie différentielle effectués pour résoudre des questions de physique mathématique, ainsi que les développements mathématiques élaborés pour étudier les équilibres des systèmes économiques. Dans chacun de ces cas, ce sont des problèmes issus des applications qui ont motivé les mathématiciens.

Mais — et cela reste malheureusement un phénomène peu compris par les non-mathématiciens — la mathématique est aussi « auto-motivante » en ce sens qu'elle ne peut maîtriser l'accumulation de ses résultats qu'en perfectionnant son organisation, en se structurant de plus en plus. Et cette activité suscite de nouveaux problèmes internes aux mathématiques dont la résolution a d'abord pour but de mieux comprendre les concepts manipulés, éventuellement de les généraliser en en extrayant la « substantifique moelle ».

Pour le non-mathématicien, l'activité de résolution de problèmes est d'abord à considérer comme un moyen de formation de la personnalité et d'intégration dans la société d'aujourd'hui. Sur la base d'une étude comparative des programmes de mathématique de plusieurs pays, le document [3], note aussi que

> *une finalité essentielle de l'enseignement est de permettre l'insertion des futurs adultes dans le monde économique d'aujourd'hui et, dans ce cadre, la capacité de résoudre des problèmes apparaît comme un facteur essentiel de réussite.*

Ces points de vue sont d'ailleurs clairement apparus plus haut lorsque nous avons résumé les « problématiques » françaises, les « standards » américains et le « plan d'étude » suisse. Ils nous permettent de coucher par écrit une deuxième synthèse partielle en situant la résolution de problèmes comme une compétence mathématique essentielle.

2.4. Deuxième synthèse : une compétence terminale

Puisque l'essentiel de l'activité mathématique est la résolution de problèmes, et puisqu'il s'agit là, non d'appliquer de manière routinière une accumulation de résultats ou de techniques mais bien de mettre en œuvre une méthode de pensée, et puisque cette méthode de pensée est susceptible d'être utilisée dans de nombreuses situations non nécessairement mathématiques, nous ne pouvons que considérer que

> La résolution de problèmes est une compétence mathématique terminale à considérer comme particulièrement importante.

Cette compétence est importante pour tous les élèves, quel que soit leur niveau de formation, car elle peut être utile et nécessaire pour tous les élèves.

Ce n'est cependant pas la seule compétence mathématique à envisager. Car c'est une compétence *globale*, peut-être un peu trop globale. L'analyser permet de distinguer un grand nombre d'autres compétences qui lui sont subordonnées, telles que prendre connaissances de théories et de résultats existants, rédiger un texte de type mathématique, ... Ainsi, la plupart des compétences mentionnées par Glaeser peuvent s'exercer à l'occasion de la résolution de problèmes et lui sont donc subordonnées, même si beaucoup de ces compétences peuvent aussi s'exercer de façon autonome.

Dans les chapitres suivants, nous examinerons quelles démarches sont utilisées pour résoudre des problèmes, quelles compétences subordonnées elles mobilisent et comment concevoir un enseignement mettant en œuvre des méthodes de résolution de problèmes. Mais il convient d'abord de décrire ce que nous savons actuellement du processus d'apprentissage de la mathématique. C'est ce que nous allons aborder au chapitre 3.

Références

[89], [76], [4], [29], [3].