

Université de Mons-Hainaut  
Service d'Analyse et Méthodologie  
Mathématiques

**Des compétences terminales  
en mathématique**

*Rapport terminal 1998-99*



**J.-P. Cazzaro,**  
**G. Noël,**  
**F. Pourbaix,**  
**P. Tilleuil.**

1999

Réalisé dans le cadre d'une convention de recherche en éducation avec le Ministère de la Communauté Française, le présent travail a bénéficié de la collaboration, volontaire ou involontaire, de nombreuses personnes :

- les membres du comité d'accompagnement : Mmes C. Blondin, représentant le Ministre de l'Éducation, M. Duwez, directrice et I. Vanderbiest, sous-chef de bureau à l'Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique, MM. M. Bustin, inspecteur général, A. Bajart, P. Brzakala et B. Lardinois, inspecteurs, Mme M. Solhosse, animatrice-formatrice au CAF, M. P. Soudan, directeur, représentant du CPEONS, Mme F. Guillaume, directrice, représentante de la FELSI, M. J.-M. Demoustier, représentant du SEGEC ;
- les enseignants : MM. P. Dechamps, professeur à l'Athénée Royal de Mons, Y. Hanssens, professeur au Collège technique Saint-Henri à Mouscron, P. Lepourcq, professeur à l'École Internationale du SHAPE, F. Michel, professeur à l'Institut Decroly à Uccle, Mme Y. Noël, professeur honoraire à l'Institut Supérieur Pédagogique de la Communauté Française à Mons, M. J.-P. Richeton, collaborateur à l'IUFM de Strasbourg, Mme C. Terryn, professeur au Collège Sainte-Marie à Mouscron, M. L. Terryn, professeur au Collège Sainte-Marie à Mouscron ainsi que tous les collègues qui nous ont fait part de leur intérêt, leurs encouragements ou leurs critiques ;
- les élèves : M. Benjamin Desbuquoit, élève de l'Institut Notre-Dame à Comines, ainsi que les élèves de l'Athénée Royal de Mons, de l'École Internationale du SHAPE, de l'Institut Decroly à Uccle, du Collège technique Saint-Henri à Mouscron, de l'Athénée Royal Jean Rey de Couvin et du Collège Sainte-Marie à Mouscron.

Que tous trouvent ici l'expression de nos remerciements.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Analyse théorique</b>	<b>5</b>
<b>1 Des compétences</b>	<b>6</b>
1.1 Introduction . . . . .	7
1.2 En lisant les documents belges . . . . .	8
1.3 A l'étranger . . . . .	13
1.4 Première synthèse : un essai de définition . . . . .	22
<b>2 L'activité mathématique</b>	<b>24</b>
2.1 La mathématique . . . . .	25
2.2 L'activité du mathématicien . . . . .	26
2.3 Une fonction culturelle et sociale pour la mathématique . . . . .	28
2.4 Deuxième synthèse : une compétence terminale . . . . .	31
<b>3 L'apprentissage de la mathématique</b>	<b>32</b>
3.1 Introduction . . . . .	33
3.2 Des procédures, des structures et des modèles mentaux . . . . .	36
3.3 Du procédural au structural . . . . .	45
3.4 Troisième synthèse : retour aux problèmes . . . . .	53
<b>4 Des problèmes</b>	<b>54</b>
4.1 Qu'est-ce qu'un problème ? . . . . .	56
4.2 Résoudre un problème . . . . .	59

4.3	Une compétence globale . . . . .	65
4.4	Une compétence terminale . . . . .	66
4.5	Une quatrième synthèse : des problèmes et des séquences de problèmes	68
<b>5</b>	<b>Des hiérarchies de compétences</b>	<b>69</b>
5.1	Un paradoxe . . . . .	70
5.2	Des contenus . . . . .	77
5.3	Le point de vue mathématique . . . . .	84
5.4	Le point de vue didactique . . . . .	88
5.5	Le point de vue psychologique . . . . .	89
<b>6</b>	<b>Le point de vue mathématique</b>	<b>91</b>
6.1	Des cadres . . . . .	92
6.2	Algébriser . . . . .	94
6.3	Géométriser . . . . .	102
6.4	Approcher . . . . .	108
6.5	Numériser . . . . .	117
6.6	Probabiliser . . . . .	138
<b>7</b>	<b>Le point de vue didactique</b>	<b>143</b>
7.1	Introduction . . . . .	145
7.2	Un découpage en épisodes . . . . .	146
7.3	Des stratégies . . . . .	156
7.4	Le contrôle de son activité par l'élève . . . . .	174
7.5	Du côté des professeurs . . . . .	175
<b>8</b>	<b>Le point de vue psychologique</b>	<b>177</b>
8.1	Une modélisation de résolution d'un problème . . . . .	178
8.2	Une taxonomie d'objectifs cognitifs . . . . .	184
8.3	Les niveaux de van Hiele . . . . .	186
8.4	Une conclusion provisoire . . . . .	196
<b>9</b>	<b>Un problème passé au crible</b>	<b>197</b>
9.1	Introduction . . . . .	198

9.2	Origine et exposé du problème . . . . .	199
9.3	La quête . . . . .	201
9.4	Retour à l'algèbre . . . . .	207
9.5	Commentaires . . . . .	209
<b>10</b>	<b>La problématisation du cours de mathématiques</b>	<b>210</b>
10.1	Un contraste à réduire . . . . .	212
10.2	Une structure commune . . . . .	215
10.3	Plusieurs espèces de problèmes . . . . .	221
10.4	En guise de conclusion . . . . .	225
<b>II</b>	<b>Des problèmes</b>	<b>227</b>
<b>11</b>	<b>Des fiches-problèmes</b>	<b>228</b>
11.1	Structure des fiches . . . . .	231
11.2	Fiche N° 1 : Un calcul d'aires . . . . .	236
11.3	Fiche N° 2 : La longueur d'une ellipse . . . . .	250
11.4	Fiche N° 3 : Un problème d'aire . . . . .	263
11.5	Fiche N° 4 : Des pavages du plan . . . . .	275
11.6	Fiche N° 5 : Un peu de probabilité . . . . .	292
11.7	Fiche N° 6 : Le duopoly de Cournot . . . . .	301
11.8	Fiche N° 7 : Le problème des confetti . . . . .	307
11.9	Fiche N° 8 : Le problème de l'eau et du vin . . . . .	316
<b>III</b>	<b>Séquences d'enseignement</b>	<b>331</b>
<b>12</b>	<b>Du discret au continu : l'intégrale</b>	<b>332</b>
12.1	Présentation générale . . . . .	334
12.2	L'organisation pratique de l'expérience . . . . .	339
12.3	Un compte-rendu de l'expérimentation : la phase d'intériorisation . . . . .	342
12.4	Un compte-rendu de l'expérimentation : la phase de condensation . . . . .	353
12.5	Un compte-rendu de l'expérimentation : la phase de réification . . . . .	377
12.6	Des conclusions . . . préliminaires . . . . .	378

12.7	Postérité : une nouvelle version des notes de cours . . . . .	382
<b>13</b>	<b>Un peu d'algèbre linéaire</b>	<b>414</b>
13.1	Présentation générale . . . . .	415
13.2	Déroulement des séances de cours . . . . .	417
13.3	Commentaires . . . . .	426
13.4	Des énoncés supplémentaires . . . . .	427
<b>14</b>	<b>Initiation aux probabilités</b>	<b>430</b>
14.1	Compte-rendu de l'expérience . . . . .	432
14.2	La séquence de cours . . . . .	453
<b>IV</b>	<b>Outils pédagogiques</b>	<b>469</b>
<b>15</b>	<b>Problématisation et formation continue</b>	<b>470</b>
15.1	Introduction . . . . .	471
15.2	Pourquoi envisager une formation à la problématisation ? . . . . .	472
15.3	Quelques caractéristiques des modules de formation . . . . .	473
15.4	Un exemple détaillé . . . . .	474
15.5	Parmi les premières réactions . . . . .	477
<b>16</b>	<b>Un module de formation : Géométrie Ecrite et Algèbre Visuelle</b>	<b>479</b>
16.1	Les deux opérations fondamentales . . . . .	483
16.2	Les droites et les plans . . . . .	491
16.3	Une question d'équilibre . . . . .	501
16.4	Des angles au produit scalaire . . . . .	507
16.5	Le produit scalaire . . . dans tous ses états . . . . .	513
16.6	Un peu de programmation linéaire . . . . .	518
16.7	Les statistiques et le calcul des distances minimales . . . . .	519
16.8	La représentation matricielle . . . . .	527
16.9	Le début d'un herbier . . . . .	538
16.10	La marche-arrière . . . . .	551
16.11	Un retour aux sources . . . . .	563

<b>V</b>	<b>L'évaluation</b>	<b>575</b>
<b>17</b>	<b>Généralités</b>	<b>576</b>
17.1	Un vieux problème ... jamais résolu . . . . .	577
17.2	Que veut-on évaluer ? . . . . .	578
17.3	Que veut-on faire des résultats de l'évaluation ? . . . . .	584
17.4	Comment évaluer ? . . . . .	588
17.5	Le problème de l'évaluation des résolutions de problèmes . . . . .	593
17.6	Résumé des chapitres suivants . . . . .	595
<b>18</b>	<b>L'évaluation de la résolution de problèmes</b>	<b>597</b>
18.1	Trois hypothèses de travail . . . . .	599
18.2	Un schéma d'évaluation . . . . .	601
18.3	Ce schéma s'adapte-t-il à des situations concrètes ? Trois expériences	603
18.4	Peut-on envisager une certification de la résolution de problèmes ? . .	647
18.5	Il reste du pain sur la planche ... . . . . .	649
<b>19</b>	<b>L'évaluation lors d'une séquence d'enseignement sur les probabi- lités</b>	<b>650</b>
19.1	Introduction . . . . .	651
19.2	Une interrogation . . . . .	652
19.3	Un modèle de correction . . . . .	653
19.4	Remarques générales et cas particuliers . . . . .	654
19.5	Comportements significatifs . . . . .	659
19.6	Une tentative d'évaluation « vectorielle » . . . . .	661
19.7	Exploitation des résultats par analyse factorielle . . . . .	663
19.8	Exploitation des résultats par une méthode d'aide à la décision . . .	668
19.9	Conclusion . . . . .	672
<b>20</b>	<b>Une autre évaluation, au départ de dossiers-projets</b>	<b>673</b>
20.1	Une dimension transversale . . . . .	674
20.2	Le dossier-projet . . . . .	675
20.3	Un exemple venu des U.S.A. . . . .	676
20.4	Un exemple en Belgique francophone . . . . .	677

20.5	Une version de dossier-projet sur CD-ROM . . . . .	679
20.6	Une autre expérience de dossier-projet sur CD-ROM . . . . .	686
20.7	L'évaluation et les dossiers-projets . . . . .	691
20.8	Quelques questions ... à explorer encore . . . . .	692
<b>21</b>	<b>Un examen à l'université</b>	<b>693</b>
21.1	Introduction . . . . .	694
21.2	Les questions et les comportements observés . . . . .	696
21.3	Evaluer le questionnaire . . . . .	711
21.4	Evaluer les étudiants . . . . .	723
<b>VI</b>	<b>Annexes</b>	<b>733</b>
<b>A</b>	<b>L'analyse des correspondances</b>	<b>734</b>
A.1	Introduction . . . . .	735
A.2	Rappels de mécanique . . . . .	736
A.3	Le problème de l'analyse des tableaux de nombres positifs . . . . .	740
A.4	Nuages et produits scalaires dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ . . . . .	745
A.5	L'analyse dans $\mathbb{R}^p$ . . . . .	746
A.6	L'analyse dans $\mathbb{R}^n$ . . . . .	749
A.7	Lien entre les analyses dans $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ . . . . .	750
A.8	Retour à la dépendance . . . . .	754
A.9	Le problème de l'interprétation . . . . .	755
A.10	Contributions absolues et relatives . . . . .	756
A.11	Des variables supplémentaires . . . . .	758
<b>B</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>759</b>
<b>C</b>	<b>Index</b>	<b>770</b>

