Communauté française de Belgique

Ministère de la Communauté française
Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique

DES COMPETENCES TERMINALES EN MATHEMATIQUE II

Recherche en éducation n° 007/98

Jean-Pierre CAZZARO, Guy NOËL, Frédéric POURBAIX, Philippe TILLEUIL

Service d'analyse et de méthodologie mathématiques
Université de Mons-Hainaut
Le Pentagone
Avenue du Champ de Mars 6
7000 MONS

Article publié dans
Le Point sur la Recherche en Education
N° 15
Mars 2000

et diffusé sur
http://www.agers.cfwb.be/pedag/recheduc/point.asp

Service général des Affaires générales, de la Recherche en éducation et du Pilotage interréseaux
9-13, rue Belliard 1040 Bruxelles
Tél. +32 (2) 213 59 11
Fax +32 (2) 213 59 91

1. INTRODUCTION

Le présent article fait suite à l'article de même titre publié dans le n° 11, pages 1 à 19 de ce bulletin (mai 1999). Dans cette première partie, nous avions développé une réflexion de type théorique consacrée aux « compétences terminales en mathématique » sur la base d'une analyse des spécificités de l'activité mathématique. Il n'est peut-être pas inutile de résumer les conclusions et propositions de ce texte.

Dans une première étape, nous arrivions à la conclusion suivante:

> *L'essentiel des compétences (disciplinaires et transversales) que le cours de mathématiques a pour vocation de développer peut résulter de ce que la résolution de problèmes soit considérée comme une compétence terminale en mathématiques.*

Dès lors que nous proposions d'organiser l'acquisition et le développement de compétences terminales autour de la résolution de problèmes, nous devions également proposer aux enseignants des outils d'organisation et de décodage de ces activités. C'est dans ce but que nous décrivions une « modélisation de la résolution d'un problème » en trois phases: ***intériorisation***, ***condensation*** et ***réification***, suivant ainsi un schéma dû à A. Sfard.

Au surplus, il apparaissait possible — et souhaitable — d'utiliser le même schéma en vue de problématiser le cours de mathématique, c'est-à-dire de le présenter sous forme de séquences d'enseignement permettant chacune l'étude d'un concept nouveau à travers des situations problématiques bien choisies et organisées selon le schéma décrit ci-dessus.

Nous décrivions enfin une première expérimentation d'une telle séquence l'enseignement, consacrée à l'acquisition du concept d'intégrale.

Pour clore ce premier article, nous mentionnions quelques pistes qui retenaient notre attention. Quelques sujets mathématiques nous semblaient particulièrement intéressants à aborder : la modélisation probabiliste, la linéarité en géométrie et ailleurs, la construction d'une intuition mathématique du concept de limite. Enfin nous annoncions également notre intention d'aborder la question de l'évaluation de la résolution de problèmes.

Au cours de la seconde partie de notre recherche, nous nous sommes notamment efforcés de concrétiser les intentions qui viennent d'être rappelées.

Nous avons en premier lieu traité deux des trois sujets mathématiques précités: la modélisation probabiliste et la linéarité. Dans chacun de ces cas, nous avons rédigé une séquence d'enseignement et l'avons expérimentée.

La séquence consacrée à la linéarité porte — du point de vue des concepts mathématiques rencontrés — sur le produit matriciel. La situation pédagogique exploitée est de type interdisciplinaire : l'évolution d'une population d'oiseaux au fil des années. En étudiant la stabilité de cette population, on pratique non seulement le calcul matriciel, mais aussi on voit apparaître de façon informelle des notions qui — dans les traités spécialisés — ont pour nom « vecteur propre, valeur propre, … »

Le nouveau programme de mathématique de cinquième année comporte un chapitre consacré aux probabilités. Ce chapitre doit être considéré comme très important vu le rôle des probabilités et statistiques dans la vie citoyenne. Si les notions à introduire en cinquième sont peu nombreuses, elles constituent pour la plupart des élèves le premier contact avec le sujet et conditionnent le succès de tout son enseignement ultérieur. Trop souvent la simplicité technique des probabilités amène l'enseignant à proposer à ses élèves un enseignement extrêmement succinct. Cependant, la simplicité technique ne s'accompagne pas nécessairement d'une simplicité conceptuelle. Il convient donc de faire précéder l'étude théorique des probabilités d'activités permettant d'asseoir les concepts de base via une intuition spécifique.

C'est dans cet esprit que nous avons rédigé une séquence d'initiation aux probabilités et l'avons expérimentée dans deux classes de cinquième. On en trouvera le compte-rendu à la section 3 de cet article.

La question de l'***évaluation***, en particulier de l'évaluation de la résolution de problèmes, a également occupé une grande partie de notre temps. Le fait même que de nombreux travaux aient déjà été consacrés à ce sujet en montre la difficulté. Dans le contexte de la résolution de problèmes, notre souci est de promouvoir une évaluation des ***démarches*** des élèves, plutôt que des résultats qu'ils obtiennent. Ce n'est que sous cette condition que nous pouvons leur soumettre de vrais problèmes, c'est-à-dire des questions dont ils ne voient pas immédiatement comment les résoudre.

Evaluer les démarches, c'est pratiquer une évaluation ***formative*** à condition que ces démarches soient situées par rapport à un cadre de référence théorique, celui de la modélisation de la résolution d'un problème rappelé plus haut. Moyennant quelques précautions, cela permet aussi une évaluation ***certificative*** en fournissant au conseil de classe non des notes chiffrées, mais un profil des compétences acquises par un élève.

On trouvera à la section 4 l'essentiel de nos réflexions générales concernant la question de l'évaluation, ainsi qu'un exemple d'application à l'évaluation des élèves ayant reçu l'enseignement des probabilités décrit à la section 3. Le rapport complet de notre recherche comporte d'autres exemples d'évaluation, par exemple à partir de **dossiers-projets** ou de questionnaires plus importants. Il comporte également une section consacrée à des **outils pédagogiques** à l'intention des enseignants désireux de ***problématiser*** des séquences d'enseignement.

2. UNE INTRODUCTION AU PRODUIT MATRICIEL

2.1. Présentation générale de l'expérience

La séquence d'enseignement avait pour objectif d'introduire le produit matriciel à partir d'une situation dans laquelle les puissances d'une matrice revêtaient une signification particulière. L'énoncé retenu est reproduit ci-dessous, tel qu'il fut soumis aux élèves (*fac-simile* d'un fichier `Maple`).

> Dans une population d'oiseaux, on note pour chaque année :
>
> x: le nombre de jeunes (femelles),
> y: le nombre de femelles,
> a: la proportion de jeunes qui ne sont pas adultes après un an,
> b: le nombre moyen de jeunes issus d'une femelle,
> c: la proportion de jeunes devenant adultes,
> d: la proportion de femelles survivantes.
>
> x = a x + b y
> y = c x + d y
>
> Le nombre de mâles est supposé égal au nombre de femelles.
>
> Dans les cas particuliers suivants, on demande de donner chaque fois une interprétation dans les termes du problème posé, de rechercher comment les populations de femelles et de jeunes évoluent et de déterminer si le rapport femelles/jeunes tend à se stabiliser :
>
> > T:= matrix([[O,2],[1,O]]);
> > T:= matrix([[O,2],[1,1]]);
> > T:= matrix([[O,2],[.3,.5]]);
> ...

Les leçons ont été données à l'École Decroly à Uccle par M. Francis Michel, dans une classe de 5[e] année (6 périodes de mathématique par semaine). Cinq heures de cours ont été consacrées à l'étude de cette situation les 12, 13 et 14 octobre 1998. La classe comprenait 18 élèves qui entretenaient avec leur professeur des rapports « détendus » : ils n'ont donc pas été surpris par la présence d'un observateur dans la classe et leur comportement ne s'en est pas trouvé modifié. Tous les élèves disposaient d'une calculatrice `Hewlett-Packard` 48 GX. Ils étaient également habitués au logiciel `Maple` dont ils connaissaient la syntaxe.

Auparavant, les élèves avaient déjà appris à calculer l'image d'un élément de R^2 par la transformation linéaire associée à une matrice. Le problème présenté ne s'inscrivait néanmoins pas dans leurs habitudes : le contexte de la situation était ici un peu plus réaliste, même si on ne leur demandait pas de modéliser eux-mêmes la situation.

2.2. Déroulement des séances de cours

Dans toute la suite, l'abréviation « FM » désigne M. Francis Michel.

Première séance

Cette séance s'est étalée sur deux périodes de 50 minutes, sans interruption, le lundi 12 octobre.

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

FM distribue aux élèves l'énoncé du problème. Après une rapide lecture, il écrit au tableau les formules
tout en les illustrant par des exemples numériques en référence à la réalité. Il fait observer que les notations x' et y' mettent l'accent sur un changement d'état, contrairement à la notation en x et y de l'énoncé original, caractéristique de l'écriture informatique.

Il rappelle que le but de l'exercice est d'étudier l'évolution de la population d'oiseaux dans les situations correspondant aux matrices données sur la feuille, au départ de calculs analogues à ceux déjà réalisés précédemment au cours.

Le travail est entamé avec la première matrice

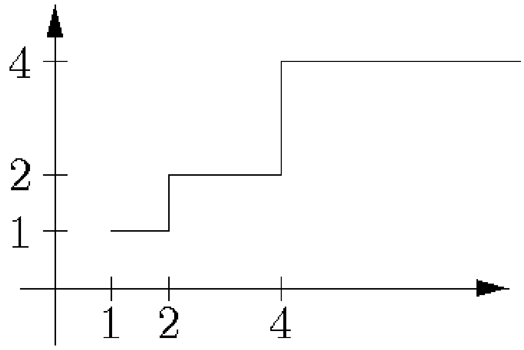
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

FM n'a expressément pas donné de conditions initiales pour la population. Une élève demande d'emblée *de quel point il faut partir ?* Un autre élève propose : *Si on a une femelle pour deux jeunes, le rapport sera de 1/2.*

FM lui suggère d'essayer de prouver son idée. La discussion entre élèves s'anime. A partir d'un point de départ arbitraire ,

$$(x_0, y_0)$$

un élève calcule les valeurs de x et y pour les années suivantes et obtient un graphique en escalier. Un élève demande combien de points il faut dessiner, et FM répond: *« Assez pour voir si ça se stabilise »*. Dans un premier temps, personne ne part d'un point dont une des coordonnées soit nulle. Puis, un élève part de *(0,10)*. Enfin, FM reporte au tableau ce qu'il voit le plus souvent apparaître dans les cahiers, à savoir:



Une discussion s'ensuit alors quant au réalisme du résultat (retour à la population d'oiseaux) afin de le valider. La conclusion en est que, avec la matrice considérée ici, il n'y a aucune mortalité de jeune, que tous les jeunes deviennent adultes et que toutes les femelles meurent après avoir pondu.

Pour la même matrice, les élèves essaient d'autres points de départ, comme par exemple (0,2). FM demande alors aux élèves de comparer les différents graphiques en fonction du point de départ. Pour ce faire, il suggère de préciser le dessin en prenant une plus grande échelle et des points intermédiaires. A ce stade du travail, les calculatrices ne servent que numériquement, et leurs possibilités graphiques ou de programmation ne sont pas exploitées. FM reformule sa demande:

De quel point faut-il partir pour que le rapport femelles/jeunes reste constant année après année?

Il écrit au tableau l'évolution d'une population comprenant au départ 10 jeunes et 5 femelles, ainsi que
la valeur du rapport *femelles/jeunes* durant les cinq premières années :

Jeunes (x)	Femelles (y)	Rapport y/x
10	5	1/2
10	10	1
20	10	1/2
20	20	1
40	20	1/2
…	…	…

Un élève essaye le point *(1.5, 1)* --- vite converti en *(15, 10)* pour cause de non-réalisme --- qui donne une succession de rapports plus proches: *2/3* et *3/4*. Petit à petit, les élèves partent du point *(14, 10)*, puis du point *(141, 100)* , … La méthode dégagée par les élèves consiste à relier à chaque nouvelle étape les milieux des segments dessinés sur le graphique à l'étape précédente. De cette manière, on se rapproche d'une droite, et un élève pense au rapport $1/\sqrt{2}$, mais par pure intuition et sans parvenir à se justifier.

FM propose d'arrêter les calculs et de commencer à rédiger ce qui a été trouvé. Il prend *1000/1414* comme approximation de $1/\sqrt{2}$, et les élèves constatent qu'avec ce rapport, la proportion de jeunes dans la population est stable.

Enfin, FM demande de traiter la seconde matrice sur le même principe, mais le rapport de stabilité est évident à trouver puisqu'il s'agit de 1. Cet exercice sera laissé en travail de préparation à domicile pour le lendemain, avec pour consigne de prendre des échelles très grandes, d'essayer divers points de départ et notamment le point *(10,100)*.

Seconde séance

Cette séance ne s'étale que sur une seule période de 50 minutes. FM commence le cours en demandant de déterminer la pente de la direction de stabilité pour la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Les élèves entament le calcul et la réponse, obtenue sans grand délai, est écrite au tableau par Jérôme :

$$\frac{y}{x} \approx 0,532$$

FM enchaîne alors sur la question qui va tenir les élèves en haleine pendant presque toute la suite du cours :

Si on observe le phénomène, non pas tous les ans mais bien tous les deux ans, quelle est la matrice qui décrit la transformation correspondante ?

Il s'ensuit une période de tâtonnements et de bricolages: l'un propose de multiplier tous les coefficients de la matrice par 2 , un autre suggère d'élever tous les coefficients au carré, etc. La situation devient peu à peu chaotique. FM reprend donc la parole, et reformule la question, en l'illustrant par son interprétation graphique. Dans un premier temps, cela n'a pas d'effets notables. Pour une bonne moitié d'élèves, l'intervention de FM n'a fait que relancer une espèce de jeu de hasard. Mais pour d'autres, une idée nouvelle commence à faire son chemin : il doit y avoir un algorithme qui, au départ de la matrice originelle, permet de calculer la matrice demandée. Certains testent les matrices déjà proposées (cfr. ci-dessus), et observent qu'elles ne conviennent manifestement pas.

Le cours touche à sa fin, et FM propose le problème --- toujours sans solution --- comme préparation (travail à domicile) pour le lendemain. A ce moment, un élève signale qu'en introduisant la matrice dans sa calculatrice, et en « poussant sur la touche d'élévation au carré », il obtient une nouvelle matrice qui semble la bonne. Mais il est incapable de fournir la moindre signification à ce qu'il considère comme un « coup de veine » ! FM relance alors le sujet de la préparation pour le lendemain, en proposant que chacun essaie de comprendre ce que la machine a bien pu réaliser comme opération pour que « ça marche » ? Il suggère en particulier de s'interroger à partir des équations de la transformation sous-jacente …

Troisième et dernière séance

Cette séance s'étale à nouveau sur deux périodes de 50 minutes le mercredi 14 octobre. FM entame la séance en rappelant les conclusions obtenues la veille: pour la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$$

la calculatrice a fourni comme carré

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Quelle méthode utilise-t-elle? Plusieurs élèves ont réfléchi à la question, mais contrairement à la suggestion de FM, ils n'ont pas cherché à exploiter les équations de la transformation. Ils ont néanmoins des choses à dire. Un élève pose l'opération :

et propose un calcul « *colonne* $\times$ *ligne* » :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0,2 \end{pmatrix} = 0 \times 0 + 2 \times 0,3 = 0,6$$

Il montre que ce calcul permet de trouver l'élément situé dans le coin supérieur gauche de la matrice résultat et qu'un même procédé permet de trouver les quatre éléments de celle-ci. Il ajoute *c'est un truc, on aurait aussi bien pu faire* ligne $\times$ colonne. Cette remarque en amène une autre de la part d'une autre élève: *cela rappelle l'image d'un vecteur* .

Un autre élève a demandé au logiciel `Maple` de calculer formellement le carré de la matrice

Il a obtenu la réponse

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

ce qui le satisfait amplement puisque cette formule permet de confirmer les calculs numériques qui viennent d'être présentés.

Mais FM veut aller plus loin: il ne suffit pas de trouver la formule donnant le carré d'une matrice, il faut aussi la justifier. Il écrit au tableau

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

et demande le calcul de x'' et y'', ce qui est réalisé après quelques hésitations :

FM revient alors au problème de l'évolution de la population d'oiseaux et demande de trouver *de*

$$\begin{cases} x'' = a(ax+by) + b(cx+dy) \\ y'' = c(ax+by) + d(cx+dy) \end{cases} \quad \text{car} \quad \begin{cases} x'' = ax' + by' \\ y'' = cx' + dy' \end{cases}$$

façon théorique la droite de stabilité de la proportion *femelles/jeunes*. Il s'agit donc de déterminer quelle doit être cette proportion au départ pour qu'elle reste constante lors de chaque itération.
FM rappelle que pour la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

le rapport trouvé *expérimentalement* était proche de $1/\sqrt{2}$.

La classe s'engage alors dans une période d'activité un peu confuse au cours de laquelle beaucoup d'élèves restent inactifs. La plupart de ceux qui sont dans ce cas n'ont en fait pas compris ce qui leur est demandé. Pour faire avancer les choses, FM reprend alors le contrôle de la situation et réexplique qu'il s'agit de trouver x et y tels que

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} \text{ sachant que } \begin{cases} x' = 2y \\ y' = x \end{cases}$$

Il transforme ensuite cet énoncé en

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases}$$

en montrant que c'est là une autre façon d'exprimer que les points (x',y') et (x,y) sont alignés avec l'origine et que λ est le facteur par lequel la population va être multipliée.

Il s'agit donc à présent de résoudre et discuter le système ci-dessus. Bien que l'énoncé ait ainsi été éclairci, un temps non négligeable s'écoule[1] avant que quelques élèves écrivent le système sous la forme

$$\begin{cases} 2y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases}$$

puis éliminent la variable x, arrivant à $2y = \lambda^2 y$, d'où $\lambda^2 = 2$. Les valeurs de x, y (ainsi que x' et y') étant positives (ce sont des nombres d'oiseaux), la racine carrée négative est éliminée sans problème. Mais il s'agit encore de trouver y/x, c'est même l'objectif énoncé clairement, ce que

[1] Il est apparu ultérieurement que les élèves n'avaient pas rencontré en 4e année de discussions de systèmes paramétriques.

certains avaient peut-être perdu de vue. On arrive finalement à $y / x = 1/\sqrt{2}$, non sans devoir réexpliquer pourquoi $\sqrt{2}/2 = 1/\sqrt{2}$.

Le problème de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

étant ainsi épuisé, FM demande aux élèves d'effectuer le même travail pour la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Une partie de la classe va jusqu'à écrire et résoudre l'équation aux valeurs propres. Une autre partie semble quelque peu fatiguée.

2.3. Commentaires

Analysant cette séquence d'enseignement, il convient d'abord de se demander quelle a été --- sur les plans didactique et mathématique --- l'activité des élèves, et constater qu'elle a été fort variée. C'est souvent le cas lors d'une activité de résolution de problème, même si, comme c'était le cas ici, les élèves n'ont pas eu à modéliser la situation, et si leur activité a été contrôlée d'assez près par l'enseignant.

La classe est passée par des phases de recherche, de découverte et de mise au point. Elle a eu à effectuer des travaux techniques (résoudre une équation du second degré, résoudre et discuter un système d'équations, multiplier une matrice 2×2 par une colonne, …). Une partie de son activité relevait de l'heuristique (simuler l'évolution d'une situation sur calculatrice programmable ou sur ordinateur, découvrir à l'aide d'un logiciel la formule donnant le carré d'une matrice 2×2 , reformuler
un problème dans un cadre différent du cadre d'origine, …). Une autre partie encore consistait en des justifications raisonnées (justifier la formule fournie par l'ordinateur, retrouver par un raisonnement les valeurs trouvées expérimentalement, …).

Au cours de ces activités, ce sont des compétences de natures diverses qui ont été sollicitées. Le caractère global de la situation étudiée rend malaisé d'en dresser une liste qui ne saurait de toutes façons être que qualitative. Il serait en effet totalement impossible de préciser la part réservée à chaque type d'activité par les élèves puisque cette part peut avoir été très différente d'un élève à l'autre.

Sur le plan mathématique, les élèves ont rencontré des notions nouvelles: produit matriciel dans le cas du carré d'une matrice, droite invariante par une transformation linéaire, vecteur propre et valeur propre, suites de nombres et suites de vecteurs, convergence d'une suite. Ces notions n'ont été que rencontrées, et manipulées le plus souvent à un niveau essentiellement procédural. Le passage au stade structural nécessitera des activités supplémentaires après lesquelles on pourra considérer que les notions sont à peu près fixées. Ce n'est qu'à ce moment qu'on peut espérer qu'elles deviendront réellement opérationnelles.

Si nous voulons situer cette séquence d'enseignement par rapport au modèle théorique proposé pour la problématisation du cours de mathématique, nous pouvons considérer que pour la plupart des élèves de la classe de FM, la phase d'intériorisation des notions nouvelles a certainement été dépassée et que pour plusieurs d'entre eux, la phase de condensation a été largement entamée. Compte tenu de la séquence ainsi soumise aux élèves ne comportait en fait qu'un seul problème à résoudre --- bien qu'il soit susceptible de prolongements ---, il serait hasardeux de considérer que la phase de réification a été atteinte. Les compétences disciplinaires visées doivent continuer d'être développées.

3. PREMIERE RENCONTRE AVEC LES PROBABILITES

Faire découvrir, en classe de cinquième, les principales notions de base relatives au calcul des probabilités n'est pas chose aisée. Au travers de résolutions de problèmes, nous avons tenté de relever ce défi, tout en mettant l'accent sur le travail personnel des élèves. L'emphase a été mise sur l'utilisation des arbres.

La séquence présentée ci-dessous a été expérimentée à l'Athénée Royal de Mons dans la classe de M. Paul Dechamps et à l'Ecole Internationale du Shape, dans la classe de M. Pierre Lepourcq.

3.1. Mise en train

Dans cette phase d'intériorisation, nous proposons aux élèves trois calculs de probabilités à l'occasion d'expériences simples. Il est important que de telles manipulations soient réalisées effectivement dans les classes: on ne peut se contenter de les simuler ou de les imaginer. On peut aussi se demander si ce n'est pas au cours du second degré, voire dès la fin du premier degré, que ces expériences seraient les plus fructueuses.

Dans la première (pile ou face), la probabilité à déterminer est connue de tous. Dans la deuxième (le tube de l'été), calculer la probabilité demande un peu de réflexion. Enfin, dans la troisième (la punaise rebelle), la détermination de la probabilité nécessite une expérience.

Expérience 1 : le pile ou face

Chaque élève réalise 50 jets et complète des diagrammes montrant la convergence de la fréquence. En cumulant les résultats obtenus par l'ensemble des élèves de la classe, on constate un renforcement de cette convergence (vers *1/2*).

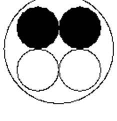
Expérience 2 : le tube de l'été

Deux billes noires et deux billes blanches sont enfermées dans un tube cylindrique transparent dont le diamètre est tel que les quatre billes se placent nécessairement aux sommets d'un carré lorsqu'on dépose le tube verticalement sur une table. Dans ces conditions, deux types de configuration sont possibles pour les quatre billes:

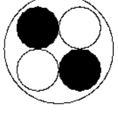
- *on appelle* **succès** *le cas où les deux billes noires se touchent,*
- *on appelle* **échec** *le cas où les deux billes noires sont diamétralement opposées.*

Voici les deux types de configuration possibles. La configuration A est un succès, l'autre est un échec. On demande de calculer la probabilité d'un succès.

A



B



Dans un premier temps, l'expérience est réalisée en classe sur le même modèle que l'expérience 1. On demande ensuite aux élèves de justifier le résultat obtenu.

Notons que la plupart des élèves pensaient *a priori* que les probabilités d'échec et de succès valaient toutes deux *1/2*. Un élève a dit: on gagne plus souvent qu'on ne perd, et pourtant il n'y a que deux possibilités !

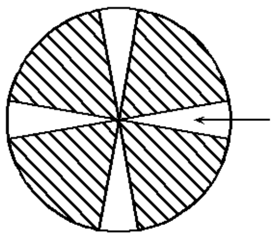
<u>Expérience 3 : la punaise rebelle</u>

Comment peut-on calculer la probabilité qu'une punaise tombe « pointe en l'air » ?

3.2. Véritable entrée en matière

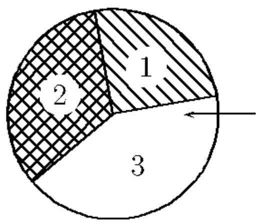
Nous abordons ensuite la phase de condensation à travers toute une série de problèmes. Avec certaines classes, il pourrait encore se révéler nécessaire de réaliser matériellement la première expérience décrite.

<u>Un problème bien ciblé !</u>



À la foire, l'un des jeux proposés est de faire tourner une roue semblable à ce modèle autour de son centre, et de regarder quelle zone est désignée par le curseur fixe.

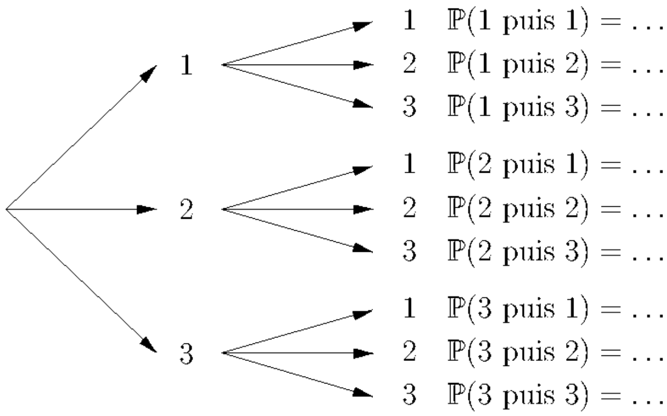
Après s'être exercé sur des roues « simples », les élèves sont invités à travailler avec la roue suivante:



L'amplitude de l'angle définissant la zone :

- n° 1 est de 90°
- n° 2 est de 120°
- n° 3 est de 150°

Les premières questions portent sur l'expérience consistant à lancer la roue une seule fois, ensuite, on effectue deux lancers successifs, ce qui offre un premier contact avec un arbre comme celui-ci :

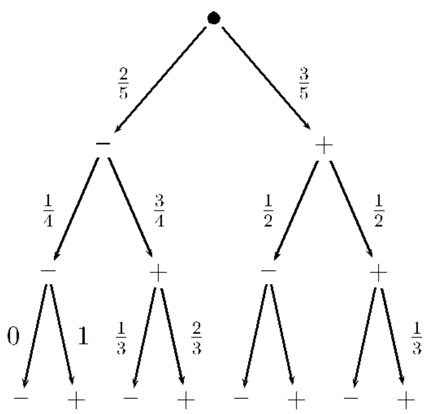


<u>En selle pour le problème du tiercé</u> !

On fait courir 5 chevaux et tous les classements à l'arrivée ont la même probabilité de se produire.
• *Quelle est la probabilité d'obtenir le tiercé dans l'ordre ?*
• *Et si l'ordre n'a pas d'importance ?*
• *Dans le cas où l'ordre n'a pas d'importance, quelle est la probabilité d'avoir choisi un cheval faisant partie du tiercé et deux perdants ?*

La résolution en classe fut délicate. Très peu d'élèves dessinent d'emblée un arbre. Après discussion, il vient:

- un arbre « complet » (les 60 tiercés différents sont représentés);
- ce même arbre complet dans lequel les branches inutiles ont été tronçonnées;
- enfin, l'arbre concis suivant:



L'arbre concis est loin d'être intuitif pour les élèves, et met ceux-ci mal à l'aise :

Si on fait une petite erreur, tout tombe à l'eau !

Le problème du Wilgame

Au pays de Mathland, le jeu du Wilgame se pratique à l'aide de grilles constituées de 15 cases numérotées de 1 à 15, dont cinq doivent être cochées. *Lors d'un tirage, 4 numéros dits « gagnants » et un numéro dit « subsidiaire » sont extraits d'une urne. Vous êtes gagnant au rang:* *1. si vous avez coché les 4 numéros gagnants,* *2. si vous avez coché au moins 3 des 4 numéros gagnants et le subsidiaire,* *3. si vous avez coché exactement 3 des 4 numéros gagnants sans le subsidiaire.* *Vous êtes perdant dans tous les autres cas.* *Un joueur invétéré prétend que la probabilité de gagner vaut 11/3003 au rang 1, 41/3003 au rang 2, 180/3003 au rang 3 et que celle de perdre vaut 2772/3003.* • *Vérifiez que les affirmations du joueur invétéré sont correctes.* • *Pourquoi la somme des probabilités est-elle plus grande que 1 ?* • *Comment pourrait-on modifier les règles pour que cette somme soit égale à 1 ?* • *Adaptez les probabilités calculées par le joueur invétéré pour les rendre conformes aux nouvelles règles.*

Citons, par exemple, une manière de résoudre la première question dont la particularité est de s'appuyer sur les valeurs du joueur invétéré.

On calcule la probabilité de gagner au rang 1.
Les élèves aidés de leur professeur construisent l'arbre suivant dans lequel G et désignent

$\overline{G}$

respectivement des numéros gagnant et non gagnant.

$$\bullet \xrightarrow{\frac{4}{15}} G \xrightarrow{\frac{3}{14}} G \xrightarrow{\frac{2}{13}} G \xrightarrow{\frac{1}{12}} G \xrightarrow{\frac{11}{11}} \overline{G}$$

La probabilité de l'événement représenté vaut *11/15015*. Une discussion s'engage alors pour comprendre pourquoi cette probabilité n'est pas égale à la valeur du « joueur invétéré ». Les élèves arrivent rapidement à la conclusion que le numéro non gagnant n'a pas nécessairement été coché en dernier lieu et qu'il y a cinq cas possibles.

3.3. La grosse pièce

Les problèmes précédents ne visaient qu'à assurer la maîtrise du concept de probabilité « simple ». Nous rencontrons à présent --- sans utiliser immédiatement ce vocabulaire --- les concepts de probabilité conditionnelle et d'événements dépendants.

Le problème de la bonne tranche

Le tableau ci-dessous résume la situation du chômage en Mathland:

Classe	*Tranche d'âge*	*Répartition*	*Proportion de chômeurs*
I	*0 --- 15 ans*	*34%*	*0*
II	*15 --- 25 ans*	*25%*	*1/5*
III	*25 --- 35 ans*	*15%*	*2/5*
IV	*35 --- 45 ans*	*10%*	*3/10*
V	*> 45 ans*	*16%*	*1/6*

On demande la probabilité

- *pour qu'un habitant pris au hasard soit un chômeur faisant partie de la classe II,*
- *pour qu'un chômeur pris au hasard fasse partie de la classe II.*

Nous suggérons aux élèves d'utiliser deux arbres :

1. l'un a pour première subdivision les classes et pour seconde subdivision la situation de travail (chômeur ou pas) ;
2. l'autre présente les mêmes subdivisions dans l'ordre inverse.

Cela permet d'introduire naturellement la notion de probabilité conditionnelle.

Un problème au format familial

On estime que la probabilité d'avoir un garçon est 515/1000, *d'où celle d'avoir une fille est* 485/1000.
Que pouvez-vous dire, pour les familles de deux enfants, de la probabilité d'avoir :
deux garçons?

- *un garçon et une fille?*
- *un garçon sachant que le premier enfant est une fille?*
- *un garçon sachant que le premier enfant n'est pas une fille?*

L'un des professeurs dément l'affirmation d'un élève :

avoir un garçon sachant que le premier enfant n'est pas une fille, ça revient au même que d'avoir deux garçons

Flashback sur le problème de la bonne tranche

Dans le problème de la bonne tranche, les événements « *appartenir à la classe V* » et « *être chômeur* » étaient indépendants.

En effet, $\mathbf{P}(V|C) = \mathbf{P}(V) = 0{,}16$. De manière équivalente,

$$\mathbf{P}(V|C) = \mathbf{P}(V|\overline{C}) = 0,16$$

Par contre, être chômeur n'était pas indépendant de la tranche d'âge, car pour ce faire, il aurait fallu:

$$\mathbf{P}(C \mid I)=\mathbf{P}(C \mid II)=\mathbf{P}(C \mid III)=\ldots$$

Une mouche parcourt les arêtes d'un tétraèdre **ABCD** . *En chaque sommet, elle choisit de se diriger vers l'un des trois autres sommets en respectant les probabilités de transition données dans le tableau suivant (la première colonne indique les sommets de départ) :*

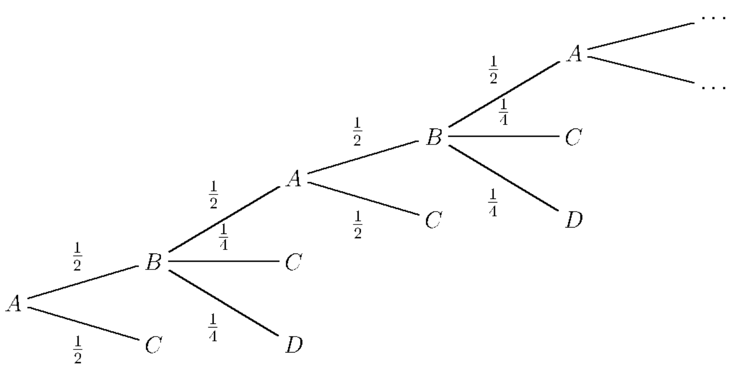
	A	B	*C*	*D*
A	*0*	*1/2*	*1/2*	*0*
B	*1/2*	*0*	*1/4*	*1/4*
C	*0*	*0*	*1*	*0*
D	*0*	*0*	*0*	*1*

La mouche commence son périple en A ou en B. Aux sommets C et D se cachent de grosses araignées qui avalent la mouche si elle passe à leur portée.
Quelle est la probabilité que ce soit l'araignée du sommet C qui gobe la mouche:

- *si celle-ci part de A ?*
- *si celle-ci part de B ?*

Petit appétit, la mouche fait son nid

L'arbre suivant est suggéré par des élèves :



La classe, aidée de son professeur, entreprend le calcul de la probabilité que la mouche se fasse manger en *C* sachant qu'elle est partie de *A* et obtient *5/6*.

Pour calculer la deuxième probabilité, tous les élèves ont repris des calculs similaires à ceux qui précèdent, personne n'a pensé à se servir du résultat ci-dessus.

Un élève détermine finalement que cette probabilité vaut:

$$\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right)\cdot 2=\frac{2}{3}.$$

3.4. Commentaires

A l'issue de cette séquence d'enseignement, il n'est guère aisé *a priori* de savoir si certains ou beaucoup d'élèves ont dépassé la phase de condensation et maîtrisent de façon effective le concept de probabilité. C'est le problème de l'évaluation qu'il convient donc à présent d'aborder. Nous commencerons par quelques remarques générales pour revenir ensuite à l'évaluation des résultats de la séquence précédente.

4. L'EVALUATION DE LA RESOLUTION DE PROBLEMES

4.1. Introduction

De nombreux livres ont déjà été consacrés au problème général de l'évaluation. Diverses tentatives ont été réalisées en vue d'implanter dans la pratique un système d'évaluation nouveau. Beaucoup de ces tentatives ont fait long feu. C'est dire que le problème est loin d'être simple.

Dans le cadre relativement restreint de notre travail, nous ne pouvions prétendre en réaliser une étude générale. Nous nous contenterons d'énumérer quelques principes qui nous semblent avoir parfois été négligés et de tracer une piste relative à l'évaluation **de la résolution de problèmes.**

Nous sommes conscients de ce que les idées émises sont lourdes à mettre en oeuvre et demandent un investissement important de la part de l'enseignant. Il est vraisemblable qu'il en sera ainsi de toute méthode d'évaluation qui tentera de corriger les défauts connus de la « notation chiffrée » actuellement utilisée. C'est là un fait dont il convient de tenir compte lorsqu'on organise le travail des enseignants.

4.2. Quelques principes

- Premier principe : Ce ne sont pas les élèves que l'on évalue mais l'efficacité des compétences qu'ils ont acquises.

  Un élève est en perpétuelle évolution. Il serait hasardeux de classer définitivement un élève dans une catégorie donnée en fonction de résultats obtenus au cours d'une période de temps limitée.

- Deuxième principe : On ne peut évaluer directement que des comportements observables.

  A travers ces comportements observables, il est parfois difficile de déterminer le degré de compréhension véritable de l'élève. L'observation de l'utilisation correcte de procédures ne permet pas de conclure automatiquement à l'acquisition des concepts sous-jacents. Un modèle mental incomplet peut suffire à résoudre certains problèmes.

  La rencontre de probabilités définies par des rapports d'aires ne fournit du concept de probabilité « continue » qu'un modèle mental très partiel. Il permet néanmoins de traiter de nombreuses situations.

- Troisième principe : Les comportements observés ne sont pas toujours stables.

  Les réponses d'un élève à un questionnaire peuvent être influencées par de nombreuses circonstances: la place relative des questions, les indications données par les enseignants, la prise de conscience d'une contradiction avec un résultat connu, les dernières activités réalisées en classe, etc.

Un comportement, un concept ne peuvent être considérés comme vraiment acquis que si une stabilité « suffisante » apparaît.

- Quatrième principe : En même temps que les élèves, il convient d'évaluer l'examen (le questionnaire).

  La correction des copies peut amener l'enseignant à prendre conscience de phénomènes auxquels il n'avait pas songé. Dans certains cas, il pourrait conclure que certaines questions étaient mal adaptées, voire inadaptées, à l'enseignement dispensé. Cette évaluation du questionnaire ne peut qu'influencer l'évaluation des élèves qui y ont répondu.

- Cinquième principe: L'évaluation formative n'a que faire d'une notation chiffrée.

  L'évaluation formative a pour but d'aider l'élève à progresser. Elle doit être constructive, lui expliquer ses erreurs, lui montrer comment les corriger. Une note chiffrée est inutile dans ce cas, et peut-être même nuisible.

- Sixième principe : L'évaluation certificative devrait être « vectorielle ».

  La pratique de la notation chiffrée a été analysée --- et condamnée --- de façon magistrale par G. Glaeser [2]. Celui-ci rappelle en particulier qu'il est aussi absurde d'additionner ou de moyenner une note de français et une note de mathématique que d'ajouter des pommes et des poires. Même additionner une note relative à un exercice d'algèbre à une autre acquise en géométrie n'a guère de sens.

  Additionner ou moyenner deux notes obtenues lors de deux activités différentes n'a de sens que si les compétences mises en oeuvre dans ces deux activités sont fortement corrélées.

  Ainsi, une note unique ne fournit pas vraiment une indication globale relativement à un élève : la perte d'information est trop grande. Des « profils » de comportements pourraient fournir plus d'informations mais ils doivent rester réalisables et utilisables.

La mise en oeuvre de ces quelques principes ne peut se faire sans une réflexion approfondie. Envisageons à présent le problème de l'évaluation de la résolution de problèmes.

4.3. Evaluer la résolution d'un problème ?

Evaluer la résolution d'un problème en notant « bon » ou « mauvais » selon que le problème a effectivement été résolu ou non, ou en attribuant une note chiffrée selon les méthodes utilisées pour les « exercices didactiques », conduirait immanquablement à une majorité d'échecs. Un problème étant par nature une question difficile, il doit être considéré comme normal que la plupart des élèves n'arrivent pas au bout. L'important est alors de savoir jusqu'où ils ont progressé.

Il s'agit donc d'évaluer les démarches plutôt que les réponses.

Ainsi, l'évaluation devrait porter sur la démarche de recherche telle qu'elle a été décrite précédemment et en particulier sur la progression (du procédural vers le structural) dans la suite des trois phases d'intériorisation, condensation et réification. On pourra évaluer aussi les démarches

[2] G. Glaeser, Fondements de l'évaluation en mathématique, Brochure APMEP n°96, Paris (1995)

de démonstration, en tant qu'apprentissage de la méthode critique et en tant qu'indicateurs de la phase de réification.

L'évaluation doit également tenir compte de ce qu'un problème n'a que rarement une seule bonne solution. Les stratégies utilisées, l'utilisation des ressources, la communication ont ainsi un côté relatif à ne pas oublier.

Dans la pratique, l'évaluation pourrait débuter par une première lecture des copies en vue de repérer les principales démarches ont été mises en oeuvre. Sur cette base, il est alors possible d'élaborer un « corrigé relatif » ainsi qu'une grille de (re)-lecture des copies.

Bien entendu, si le problème n'a été traité que de manière très incomplète, et par une petite minorité d'élèves, un corrigé relatif serait difficile à construire. Cela signifie simplement que le problème traité était inadapté à la situation réelle de la classe. La seule chose intéressante qui reste à faire est alors de déterminer les raisons de cette inadaptation.

Les démarches relevées au cours de la première lecture, et reprises dans le corrigé relatif, doivent aussi être associées aux phases énumérées dans la modélisation d'une résolution de problèmes. En explicitant cette association, la grille de lecture doit permettre d'apprécier la « profondeur » que l'élève a atteinte dans chacune des trois phases d'intériorisation, condensation et réification.

Plus concrètement, la profondeur atteinte dans la phase d'intériorisation peut se mesurer à partir de la quantité d'*unités de sens* extraites de l'énoncé et de son contexte : données, éléments formels immédiatement présents (formule, règles de calcul, théorèmes, …), représentations graphiques associées.

La profondeur atteinte dans la phase de condensation peut s'apprécier par la *richesse combinatoire* de ces unités de sens, par la présence d'îlots déductifs, de changements de cadre ou de registre, par la construction d'éléments nouveaux, par l'émission de conjectures, …

Enfin, la profondeur atteinte dans la phase de réification dépend de la qualité scientifique de la production de l'élève, et plus précisément de la richesse dans l'interprétation des notions et des résultats, de la précision algébrique, graphique, numérique, logique de la production, des vérifications effectuées, de la qualité de la rédaction, …

La grille de lecture permettrait alors d'attribuer à chaque copie une note vectorielle comportant trois composantes (une pour chacune des phases décrites).

A partir de là, il serait encore possible d'imaginer une grille plus fine, discriminant mieux les compétences utilisées et les niveaux atteints dans leur maîtrise.

4.4. Deux problèmes d'arbre et de probabilité

A la suite de la séquence décrite à la section 3, les élèves (trente individus répartis en deux classes) ont été soumis à l'interrogation suivante:

1. On jette trois fois une pièce :
   - calculer la probabilité d'avoir trois fois « face » (réponse : *1/8*);
   - calculer la probabilité d'avoir un nombre impair de fois « pile » (réponse : *1/2*).

2. Un pick-pocket plonge la main dans une poche contenant quatre pièces de 1 F, trois pièces de 5 F et 3 pièces de 20 F. Il en subtilise trois. Calculer la probabilité que la somme volée soit:
   - 60 F (réponse : *1/120*);
   - 30 F (réponse : *3/40*);
   - >3 F (réponse : *29/30*).

Comportements relevés et grille de lecture

Dans les deux problèmes, les démarches mises en oeuvre consistent à modéliser la situation à l'aide d'un arbre, puis à utiliser celui-ci en tant que support pour les raisonnements (non observables directement) et les calculs (observables). Le corrigé relatif est ainsi facile à élaborer. Il reste à analyser ces démarches en vue de mettre au point une grille de lecture.

Au problème 1 :

- 29 élèves sur 30 dessinent un arbre binaire.

  Ce comportement relève de la phase d'intériorisation dont on voit qu'elle est assez bien maîtrisée.

- Les calculs figurant sur les feuilles peuvent être compatibles ou incompatibles avec l'arbre qui a été dessiné. On constate que 20 élèves sur 30 réalisent des calculs compatibles, mais deux d'entre eux commettent une erreur de calcul dès la première sous-question[3]:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

  Ces 20 élèves ont atteint la phase de condensation du problème: ils associent les données de façon correcte au moins pour la première sous-question. Mais il n'en est que 13 qui ont répondu correctement aux deux sous-questions et dont on peut donc considérer qu'ils ont atteint la phase de réification. Les sept autres soit commettent des erreurs à au moins une des deux sous-questions, soit ne répondent pas à la deuxième. Pour deux d'entre eux, la distinction entre les lois de la somme et du produit ne sont pas clairement établies. Un autre, qui répond bien à la première sous-question, se trouve démuni devant la
  deuxième. Il réagit par une phrase qui révèle qu'il n'a certainement pas conceptualisé la notion de probabilité elle-même :

  2) ~~On peut avoir~~ Cette expérience est une expérience aléatoire, elle depend du hasard. Elle peut avoir plusieurs issues différentes et on ne peut prévoi laquelle ça va être. C'est pourquoi nous ne pouvons pas calculer cette probabilité

  Quant à l'élève qui n'a pas dessiné d'arbre et aux neuf autres qui réalisent des calculs incompatibles avec l'arbre qu'ils ont dessiné, il est permis de dire qu'ils n'ont pas dépassé la phase d'intériorisation.

Au problème 2 :

[3] Rappelons qu'il s'agit d'élèves de 5e ayant 6 heures de mathématique par semaine.

Afin de ne pas allonger démesurément cet article, contentons-nous d'indiquer les principales démarches des élèves. Elles peuvent être utilisées pour repérer les phases d'intériorisation, condensation et réification de façon analogue à celle du premier problème.

- Construction d'un arbre de probabilité.

  L'arbre peut être présent ou absent. Il peut être concis ou complet. Il peut aussi être bien conçu ou mal conçu.

- Dépendance des événements.

  Certains élèves utilisent correctement la dépendance de certains événements. Pour d'autres, tous les événements sont indépendants. Enfin, sur certaines feuilles, les notions de dépendance et d'indépendance n'apparaissent pas.

- Compatibilité entre les calculs et l'arbre.

  Cette compatibilité n'est pas toujours réalisée.

- Distinction entre les lois de la somme et du produit.

  Elle peut être effective ou non. Mais il arrive aussi qu'aucune des deux lois ne soit utilisée ou que la feuille ne permette pas de tirer de conclusion à cet égard.

5. POUR CONCLURE …

Pour conclure, insistons sur l'importance d'étudier les phases par lesquelles passe la construction du savoir ou la résolution d'un problème chez un élève. Pour chaque chapitre du programme de mathématique, il serait souhaitable de disposer notamment d'études mentionnant les différents modèles mentaux présents chez les élèves, en les associant à des typologies des erreurs les plus courantes et en les classant dans une suite menant des procédures à la conceptualisation.
L'expérience des enseignants leur fournit de tels renseignements, mais trop peu nombreux sont les textes structurés et accessibles qui relatent cette expérience, laquelle est dès lors très peu transmissible. Exprimons donc le voeu que de nouvelles équipes de chercheurs se penchent sur ces questions.