La démarche d'investigation en mathématiques comme remède au monumentalisme dans l'enseignement ? Conditions et contraintes

Yves Matheron

Institut Français de l'Éducation – ENS de Lyon

Le 14 novembre 2013

Une activité tirée d'un manuel

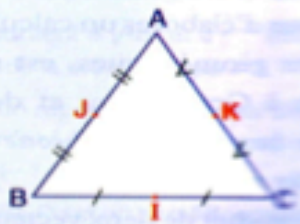
ACTIVITÉ

LES QUATRE EXPRESSIONS DU PRODUIT SCALAIRE

Le but de cette activité est de montrer sur un exemple les différentes façons de calculer un produit scalaire.

ABC est un triangle équilatéral, et dans l'unité de longueur choisie, AB = 3.
On note I le milieu de [BC], K celui de [AC], J celui de [AB].

On pose $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, $\widehat{ABC} = \theta$.



1. Calculez $\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.

INDICATION : $\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}) = \overrightarrow{BK}$.

2. Calculez $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$.

3. Calculez AB × BI.

4. $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est un repère orthonormal quelconque. On note $(x\,;y)$ les coordonnées de $\vec{u}$ dans ce repère, et $(x'\,;y')$ celles de $\vec{v}$. Montrez que :

$$xx' + yy' = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \frac{9}{2}.$$

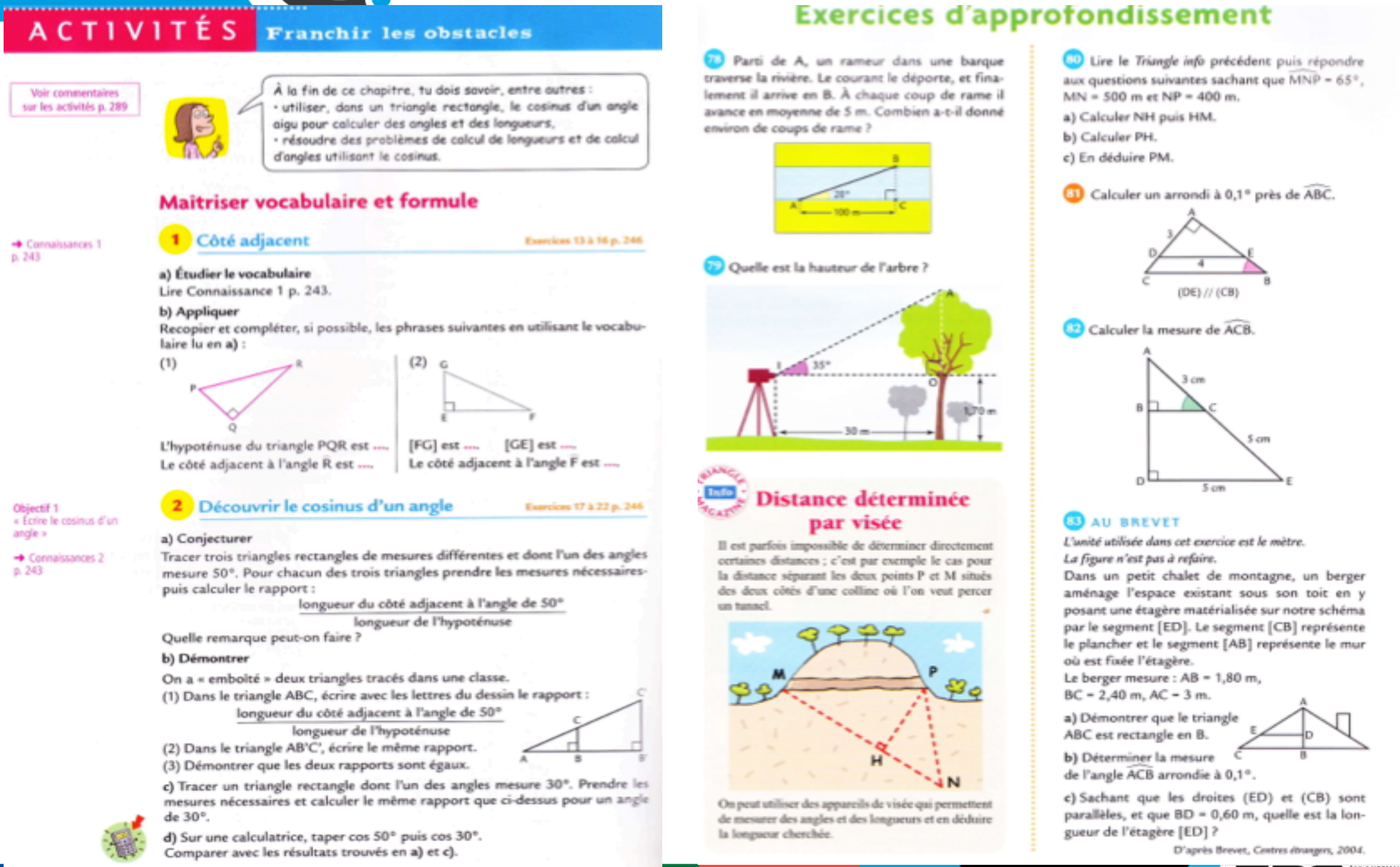
> ***Rappel***
> *Si le vecteur $\vec{n}$ a pour coordonnées $(a\,;b)$ dans un repère orthonormal, alors :*
> $\|\vec{n}\|^2 = a^2 + b^2$.

5. Calculez $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC}$.
Reliez le résultat au fait que les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

Conclusion $\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta = AB \times BI = xx' + yy'$

Chacun de ces nombres est appelé **produit scalaire** *de* $\overrightarrow{BA}$ *par* $\overrightarrow{BC}$.
On le note $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Une autre activité extraite d'un manuel



ACTIVITÉS — Franchir les obstacles

Voir commentaires sur les activités p. 289

À la fin de ce chapitre, tu dois savoir, entre autres :
- utiliser, dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu pour calculer des angles et des longueurs,
- résoudre des problèmes de calcul de longueurs et de calcul d'angles utilisant le cosinus.

Maitriser vocabulaire et formule

→ Connaissances 1 p. 243

1 Côté adjacent

Exercices 13 à 16 p. 246

a) Étudier le vocabulaire
Lire Connaissance 1 p. 243.

b) Appliquer
Recopier et compléter, si possible, les phrases suivantes en utilisant le vocabulaire lu en a) :

(1) L'hypoténuse du triangle PQR est ....
Le côté adjacent à l'angle R est ....

(2) [FG] est .... [GE] est ....
Le côté adjacent à l'angle F est ....

Objectif 1 « Écrire le cosinus d'un angle »

→ Connaissances 2 p. 243

2 Découvrir le cosinus d'un angle

Exercices 17 à 22 p. 246

a) Conjecturer
Tracer trois triangles rectangles de mesures différentes et dont l'un des angles mesure 50°. Pour chacun des trois triangles prendre les mesures nécessaires puis calculer le rapport :

$$\frac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle de } 50°}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

Quelle remarque peut-on faire ?

b) Démontrer
On a « emboîté » deux triangles tracés dans une classe.
(1) Dans le triangle ABC, écrire avec les lettres du dessin le rapport :

$$\frac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle de } 50°}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

(2) Dans le triangle AB'C', écrire le même rapport.
(3) Démontrer que les deux rapports sont égaux.

c) Tracer un triangle rectangle dont l'un des angles mesure 30°. Prendre les mesures nécessaires et calculer le même rapport que ci-dessus pour un angle de 30°.

d) Sur une calculatrice, taper cos 50° puis cos 30°.
Comparer avec les résultats trouvés en a) et c).

Exercices d'approfondissement

78 Parti de A, un rameur dans une barque traverse la rivière. Le courant le déporte, et finalement il arrive en B. À chaque coup de rame il avance en moyenne de 5 m. Combien a-t-il donné environ de coups de rame ?

79 Quelle est la hauteur de l'arbre ?

Triangle Info Magazine — Distance déterminée par visée

Il est parfois impossible de déterminer directement certaines distances ; c'est par exemple le cas pour la distance séparant les deux points P et M situés des deux côtés d'une colline où l'on veut percer un tunnel.

On peut utiliser des appareils de visée qui permettent de mesurer des angles et des longueurs et en déduire la longueur cherchée.

80 Lire le *Triangle info* précédent puis répondre aux questions suivantes sachant que $\widehat{MNP} = 65°$, MN = 500 m et NP = 400 m.
a) Calculer NH puis HM.
b) Calculer PH.
c) En déduire PM.

81 Calculer un arrondi à 0,1° près de $\widehat{ABC}$.

(DE) // (CB)

82 Calculer la mesure de $\widehat{ACB}$.

83 AU BREVET
L'unité utilisée dans cet exercice est le mètre.
La figure n'est pas à refaire.
Dans un petit chalet de montagne, un berger aménage l'espace existant sous son toit en y posant une étagère matérialisée sur notre schéma par le segment [ED]. Le segment [CB] représente le plancher et le segment [AB] représente le mur où est fixée l'étagère.
Le berger mesure : AB = 1,80 m, BC = 2,40 m, AC = 3 m.
a) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.
b) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ arrondie à 0,1°.
c) Sachant que les droites (ED) et (CB) sont parallèles, et que BD = 0,60 m, quelle est la longueur de l'étagère [ED] ?

D'après Brevet, Centres étrangers, 2004.

Le monumentalisme dans l'enseignement… (dénoncé par Yves Chevallard)

INSTITUT FRANÇAIS DE L'ÉDUCATION

- « L'enseignement actuel ressemble le plus souvent à une visite guidée de monuments mathématiques autrefois vivants mais dont les raisons d'être, les fonctions vitales ont cessé d'être comprises et reconnues. »
- « Le point de vue *monumentaliste* donne le primat à l'étude « à vide » des savoirs et rejette au second plan, voire oblitère, la logique des questions et des réponses »
- « Il sacrifie les *fonctions* d'un savoir, comme outil de production de connaissances, au profit de la rencontre « directe », explicite, formelle avec sa *structure* »

⇒ Aller vers un changement du paradigme et de la forme scolaires

INSTITUT FRANÇAIS DE L'ÉDUCATION

Pourtant, déjà chez Clairaut (1713 – 1765)… dans ses *Elémens de géométrie* (1741)

PRÉFACE.

Quoique la Géométrie soit par elle-même abstraite, il faut avouer cependant que les difficultés qu'éprouvent ceux qui commencent à s'y appliquer viennent le plus souvent de la manière dont elle est enseignée dans les Éléments ordinaires. On y débute toujours par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes et de principes préliminaires, qui semblent ne promettre rien que de sec au lecteur. Les propositions qui viennent ensuite ne fixant point l'esprit sur des objets plus intéressants, et étant d'ailleurs difficiles à concevoir, il arrive communément que les commençants se fatiguent et se rebutent avant que d'avoir aucune idée distincte de ce qu'on voulait leur enseigner.

Il est vrai que, pour sauver cette sécheresse naturellement attachée à l'étude de la Géométrie, quelques auteurs ont imaginé de mettre, à la suite de chaque proposition essentielle, l'usage qu'on en

peut faire pour la pratique; mais par là ils prouvent l'utilité de la Géométrie, sans faciliter beaucoup les moyens de l'apprendre : car chaque proposition venant toujours avant son usage, l'esprit ne revient à des idées sensibles qu'après avoir essuyé la fatigue de saisir des idées abstraites.

Quelques réflexions que j'ai faites sur l'origine de la Géométrie m'ont fait espérer d'éviter ces inconvénients, en réunissant les deux avantages d'intéresser et d'éclairer les commençants. J'ai pensé que cette science, comme toutes les autres, devait s'être formée par degrés; que c'était vraisemblablement quelque besoin qui avait fait faire les premiers pas, et que ces premiers pas ne pouvaient être hors de la portée des commençants, puisque c'étaient des commençants qui les avaient faits.

Prévenu de cette idée, je me suis proposé de remonter à ce qui pouvait avoir donné naissance à la Géométrie, et j'ai tâché d'en développer les principes par une méthode assez naturelle pour être supposée la même que celle des premiers inventeurs, observant seulement d'éviter toutes les fausses tentatives qu'ils ont nécessairement dû faire.

La mesure des terrains m'a paru ce qu'il y avait de plus propre à faire naître les premières proposi-

tions de Géométrie; et c'est, en effet, l'origine de cette science, puisque Géométrie signifie *mesure de terrain*. Quelques auteurs prétendent que les Égyptiens, voyant continuellement les bornes de leurs héritages détruites par les débordements du Nil, jetèrent les premiers fondements de la Géométrie en cherchant les moyens de s'assurer exactement de la situation, de l'étendue et de la figure de leurs domaines. Mais quand on ne s'en rapporterait pas à ces auteurs, du moins ne saurait-on douter que, dès les premiers temps, les hommes n'aient cherché des méthodes pour mesurer et pour partager leurs terres. Voulant dans la suite perfectionner ces méthodes, les recherches particulières les conduisirent peu à peu à des recherches générales; et s'étant enfin proposé de connaître le rapport exact de toutes sortes de grandeurs, ils formèrent une science d'un objet beaucoup plus vaste que celui qu'ils avaient d'abord embrassé, et à laquelle ils conservèrent cependant le nom qu'ils lui avaient donné dans son origine.

Afin de suivre dans cet ouvrage une route semblable à celle des inventeurs, je m'attache d'abord à faire découvrir aux commençants les principes dont peut dépendre la simple mesure des terrains et des distances accessibles ou inaccessibles, etc.

Extraits du rapport *Les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base* (UNESCO, 2011)

L'enseignement des mathématiques est :

- ***peu stimulant, formel***, centré sur l'apprentissage de ***techniques***
- ***mémorisation de règles*** dont ***la raison d'être*** ne s'impose pas aux élèves ;
- objets mathématiques introduits ***sans que l'on sache à quels besoins ils répondent***, ni comment ils ***s'articulent*** avec ceux préexistants ;
- liens faibles avec le monde réel, ***trop artificiels*** pour convaincre,
- applications ***stéréotypées*** ;
- rares pratiques ***expérimentales*** ou de ***modélisation***
- ***peu d'autonomie des*** élèves cantonnés aux ***tâches de reproduction.***

Investigation sur le terme « investigation » : dans le programme français

1. Choix d'une ***situation-problème*** par le professeur, à partir de l'analyse des savoirs visés, des objectifs à atteindre, des acquis initiaux, des conceptions des élèves ;

2. Appropriation du problème par l'élève, reformulation, émergence d'éléments de solution suscitant le questionnement ;

3. Formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, …

4. Investigation ou résolution du problème conduite par les élèves par des débats en groupe, … recherche d'éléments de justification et de preuve ;

5. Echange argumenté autour des propositions élaborées par la confrontation des propositions, le débat sur leur validité ;

6. Acquisition et structuration des connaissances par la mise en évidence, avec l'enseignant, de nouveaux éléments de savoir ;

7. Opérationnalisation des connaissances par des exercices pour automatiser certaines procédures, nouveaux problèmes de réinvestissement, d'évaluation.

Investigation sur le terme de « démarche » (d'investigation)

Manière d'avancer dans un raisonnement, manière de penser ; *p. méton.* raisonnement, pensée. *Démarche dialectique.*

av. 1662 au fig. « manière de progresser (de la raison, de la pensée) » (Pascal, *Pensées,* XIII ds *Œuvres complètes,* éd. L. Lafuma, p. 524)

Investigation sur le terme « investigation » : origine

Etymologie : lat. *investigatio*, de *vestigium*, trace. *Investigatio* signifie « recherche attentive » ; le verbe *investigo* signifiant « chercher (suivre) à la piste, à la trace. Rechercher avec soin, scruter » (Gaffiot, 2001). Investigateur v. 1500, « qui cherche la pierre philosophale »

Traduction depuis l'américain de « Inquiry based teaching » et « Evidence based work »

Au plan institutionnel : les programmes français (2002, 2005, 2008), *Plan de rénovation de l'enseignement des sciences et de la technologie à l'école* (MEN 2000 et 2001), *L'enseignement scientifique aujourd'hui : une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe* (Commission Européenne, 2007)

Retour au sens premier d'investigation

Investigo : « chercher (suivre) à la piste, à la trace. Rechercher avec soin, scruter ».

Chercher à connaître ; chercher avec soin, méthode, réflexion. Faire une enquête sur la vie, les activités, la conduite de quelqu'un ; exercer des poursuites à l'encontre de quelqu'un.

Toute recherche, menée dans des secteurs variés en recueillant les réponses et témoignages des personnes ou en rassemblant des documents, donnant lieu à un rapport écrit.

Retour au sens premier d'investigation et conséquences

- La DI nécessite une question dont on va rechercher avec soin, grâce à une enquête (travail des élèves dirigé par la professeur), le recueil de « réponses et témoignages des personnes (propositions trouvées par la classe et validées par une confrontation dialectique entre ce qu'on trouve dans divers médias et leur preuve), donnant lieu à un rapport écrit (institutionnaliser puis consigner l'important de la réponse : des éléments de savoir) »
- La question de la question n'est pas posée dans le texte du programme français, ni non plus les outils (les gestes que doit ou non accomplir le professeur) pour la direction et la gestion de l'enquête

INSTITUT FRANÇAIS DE L'ÉDUCATION

Divers types d'enquêtes ou de recherches dans un cadre scolaire

	Finalisé	Non finalisé
Disciplinaire	AER-PER Ingénierie didactique	Problème ouvert type Erdös-Strauss Recherche en mathématiques
Codisciplinaire	Thème de convergence Prescription institutionnelle	TPE Question ouverte

Deux types de résultats d'enquête ⟹ deux types d'organisations mathématiques

Enquête du 1er type : « Combien passe-t-il de cercles par 3 points ? » ⟹ Activité d'étude et de recherche (construction d'une organisation mathématique locale)

Enquête du 2e type : « Combien passe-t-il de cercles par n points ? »

Enquête du 2e type : « Comment mesurer l'épaisseur de divers types de feuilles de papier, notamment en les assemblant ? » ⟹ Parcours d'étude et de recherche (construction d'une organisation mathématique régionale)

Qui mène l'enquête et avec quoi ? ⇒ deux types d'organisations didactiques

1er type : l'enquêteur ⇒ cours magistral & activités des manuels ; ce qui est la forme standard de l'enseignement (enseignant = celui qui montre ⇒ ostension)

2^{e} type : des équipes sous une direction centrale ⇒ enseignement par adaptation ou par direction d'étude

Conséquences didactiques

Ostension directe (cours magistral) ou déguisée (activités des manuels)

⇓

La responsabilité de produire la réponse incombe au professeur, ***qu'est devenue la question ?***

Un enseignement par la recherche (rare, ingénierie didactique et de développement)

⇓

La responsabilité de faire rencontrer la question par les élèves et de leur faire produire la réponse incombe au professeur

La démarche d’investigation nécessite de changer de direction

Faire vivre par les élèves les mathématiques comme réponses à des questions au sein d’une enquête dont ils partagent la responsabilité de la construction de réponse

Dévoluer l’instruction de questions aux élèves

Les réponses, produites par la classe sous la direction du professeur, sont des mathématiques du programme

Elles peuvent être partiellement fournies par le professeur en tant que média pourvu que les questions aient été rencontrées par les élèves

INSTITUT FRANÇAIS DE L'ÉDUCATION

Que faire ? Des conditions ignorées par le système et des contraintes

. Motiver l'étude ***à partir d'une question problématique dévolue*** aux élèves, ⇒ capacité à mener des ***analyses mathématiques et didactiques*** *a priori*

. Etudier les conditions de réalisation effective de telles propositions d'enseignement ⇒ ***analyses mathématiques*** et ***didactiques*** *a posteriori*

. ***Laisser du « jeu »***, sous contrôle théorique *a priori*, au professeur

Mais pour la réalisation de ces trois préalables, il faut :

des collectifs pour concevoir de telles ressources, la capacité de la profession à s'en emparer pour s'en servir, de la formation

INSTITUT FRANÇAIS DE L'ÉDUCATION

Que faire ? A propos du produit scalaire… Une production du groupe de Clermont-Ferrand (1)

Partir de questions

A quoi sert le produit scalaire en 1re S (c-à-d quels types de tâches permet-il de résoudre) ?

Il sert à :

* Démontrer que deux droites ou deux directions sont orthogonales.
* Déterminer un angle géométrique (via son cosinus).
* Etablir le théorème d'Al Kashi (Pythagore généralisé), qui sert à calculer des longueurs, à « résoudre » des triangles.

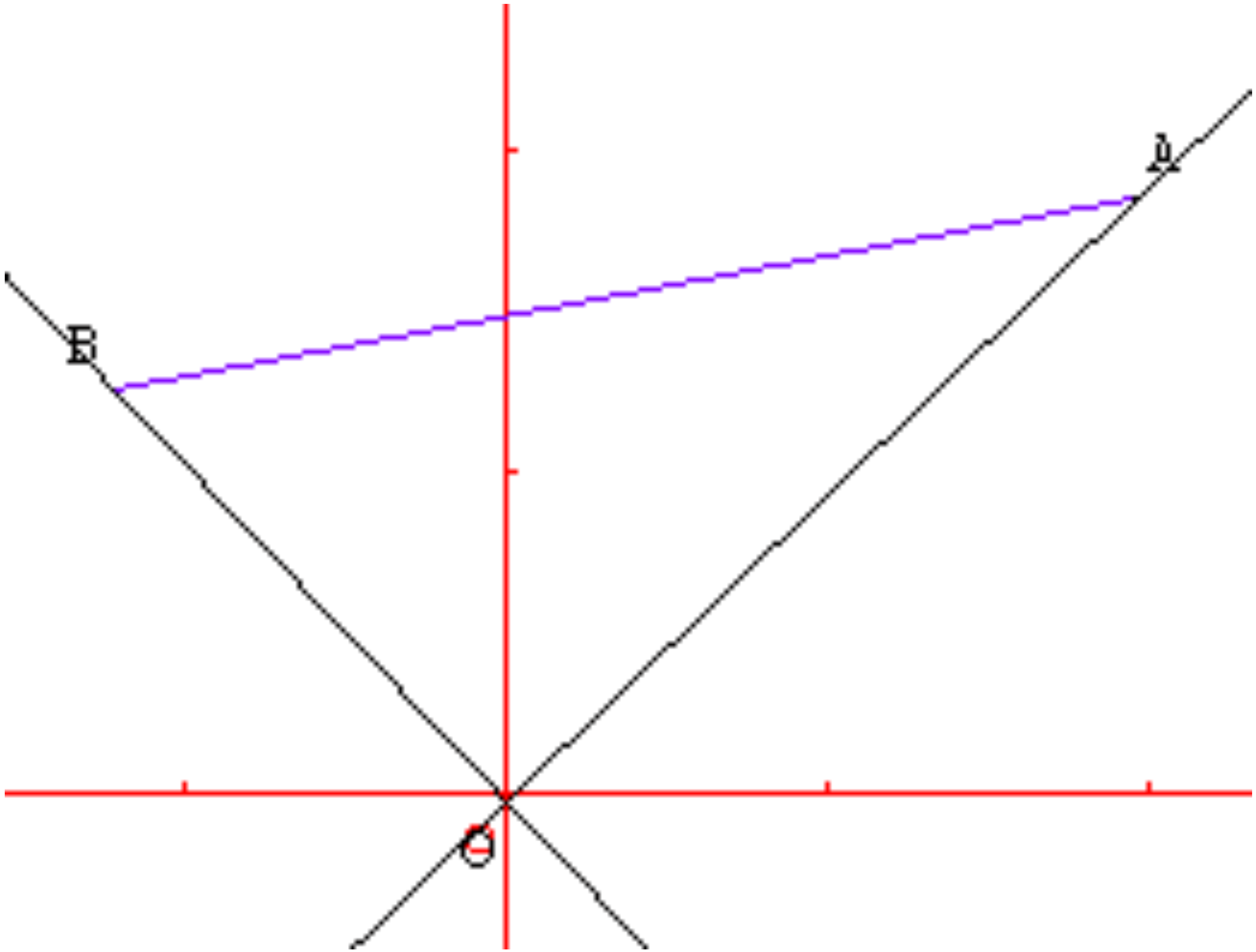
Que faire ? A propos du produit scalaire… Une production du groupe de Clermont-Ferrand (2)

L'étude d'une question doit engendrer une dynamique de sous-questions qui se poseront « en raison »

Une question initiale Q_1 permet de poser Q_2 dont l'étude conduit à Q_3 etc.

Q_1 : « comment étudier des propriétés géométriques grâce au calcul ? » engendre des sous-questions, dont Q_n : « ayant étudié comment on peut démontrer que deux droites sont ou non parallèles, ***peut-on montrer par le calcul si deux droites sont perpendiculaires ? »***

Que faire ? A propos du produit scalaire… Une production du groupe de Clermont-Ferrand (3)



Que faire ? A propos du produit scalaire… Une production du groupe de Clermont-Ferrand (4)

Q_n : « Que vaut $xx' + yy'$ si D et D' ne sont pas perpendiculaires et est-ce que cela pourrait avoir une signification géométrique ? »

Étude de la question

⇒ retour sur le calcul amenant $xx' + yy' = 0$

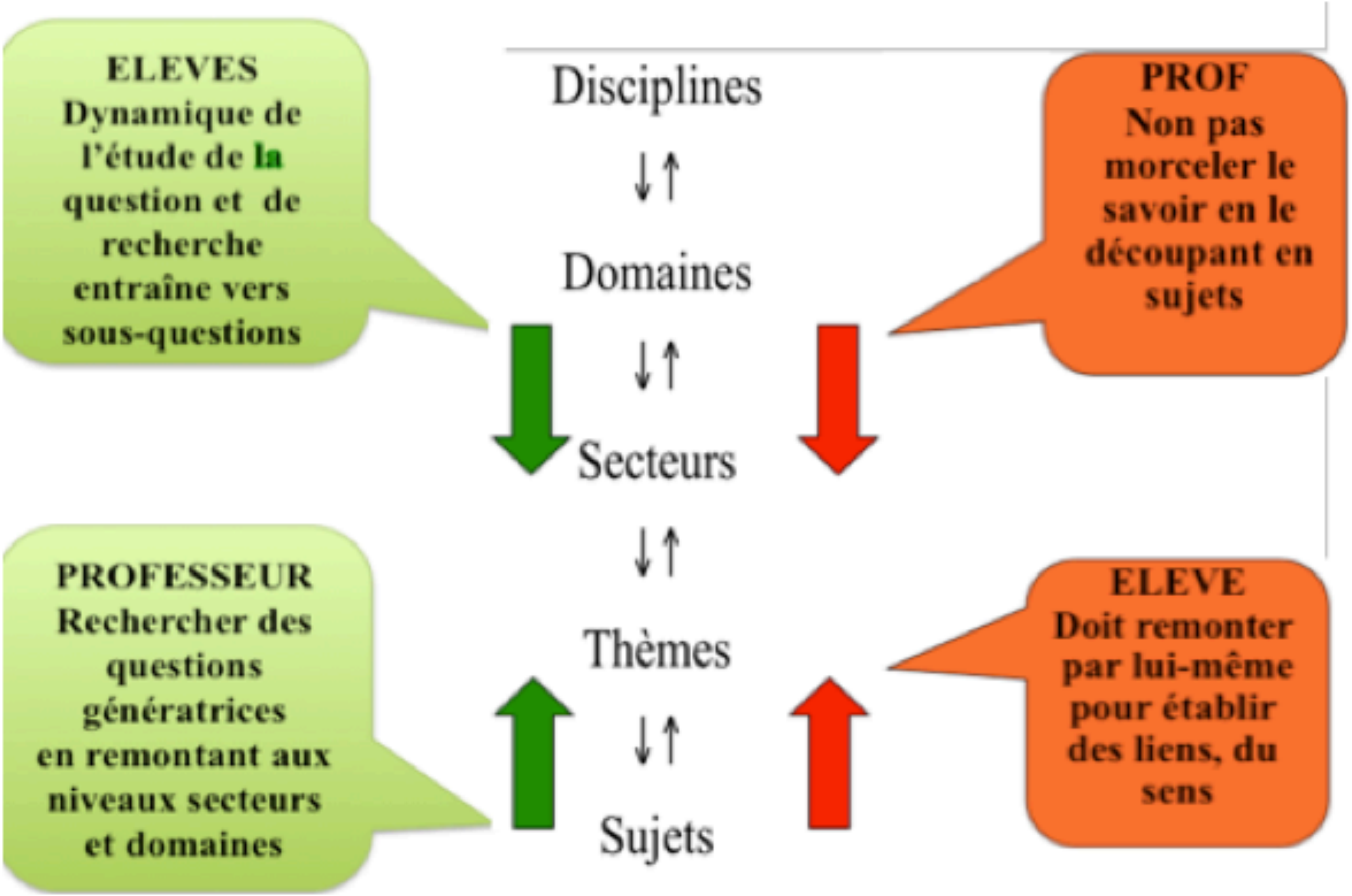
⇒ remarquer que $AB^2 - OA^2 - OB^2 = -2xx' - 2yy'$

$$\Rightarrow xx' + yy' = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2)$$

⇒ $xx' + yy'$ ne dépend pas du repère orthonormal choisi

⇒ c'est un invariant géométrique (appelé produit scalaire)

Que faire ? Des réponses : PERMES



Que faire ? Des réponses : PERMES et les LéA

- Des structures répondant à deux préoccupations : un questionnement des acteurs de terrain & sa traduction en un projet de recherches par des chercheurs de l'IFÉ qui les accompagnent.
- Lieux d'apprentissage pour les deux parties.
- Des recherches de terrain à caractère fondamental
- De la patience : le temps de la recherche est long, celui du changement des pratiques l'est encore plus !

Conclusion

La route est longue, mais avec un peu de volonté… et de moyens ! Qui sait ?...

MERCI POUR VOTRE ECOUTE !