Ces mathématiques que l'on dit pures, et leurs applications

Luc Lemaire
Université Libre de Bruxelles

Colloque des mathématiques

Liège, 14 novembre 2013

Cette brève présentation – qui esquive les difficultés techniques - montre que des notions standard des mathématiques, enseignées dans le secondaire, ont des applications importantes et souvent mal connues.

Parmi toutes les possibilités (les mathématiques sont omniprésentes) j'ai choisi de concentrer la présentation sur quatre applications de la notion de dérivée.

Le texte se termine par la présentation d'une étude sur les débouchés des diplômes de mathématique, basée sur les promotions de 1997 à 2012.

G.H.Hardy (1940)

A mathematician, like a painter or a poet, is a maker of patterns.
If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas.

Beauty is the first test : there is no permanent place in the world for ugly mathematics.

Very little of mathematics is useful practically, and that little is comparatively dull
(sur ce dernier point, la suite a montré tout le contraire)

Timothy Gowers

If you were to work out what mathematical research has cost
the world in the last hundred years, then work out
what the world has gained in crude economic terms,
you will discover that the world has received
an extraordinary return on a very small investment

(Millenium Lecture, Clay Foundation,2000)

Les dérivées
Les équations différentielles

$$\frac{d}{dx} f(x) \qquad \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$$

Exemples d'équations différentielles :

- f = m.a (Newton)
- équations de Navier-Stokes décrivant le mouvement d'un fluide visqueux

Sauf dans des cas très rares, il n'est pas possible
de résoudre une telle équation, c'est à dire d'écrire
ses solutions sous forme de formules.

Dès lors il a fallu faire …beaucoup de maths, aussi bien des maths pures que des maths appliquées!

D'une part démontrer l'existence éventuelle de solutions, et leurs propriétés, souvent par la création de théories très abstraites.

D'autre part calculer des approximations des solutions, par des méthodes utilisant des calculs informatiques.
Pour cela, il faut montrer que ces solutions calculées sont proches des solutions exactes (c'est l'objet de l' analyse numérique).

Mes satellites préférés :

Voyager 1 et Voyager 2

Lancés en 1977 - toujours en forme aujourd'hui.

Voyager 2 a photographié et analysé Jupiter (1979), Saturne (1981), Uranus (1986) et Neptune (1989).

Aujourd'hui il est à 15 milliards de km de la Terre, et a parcouru 24 milliards de km.

Un signal radio aller-retour met 25 heures.

Il émet avec une puissance de 20 watts, et le signal reçu est de l'ordre de 10^{-18} watts.

Voyager 1 a quitté récemment la zone d'influence du soleil.

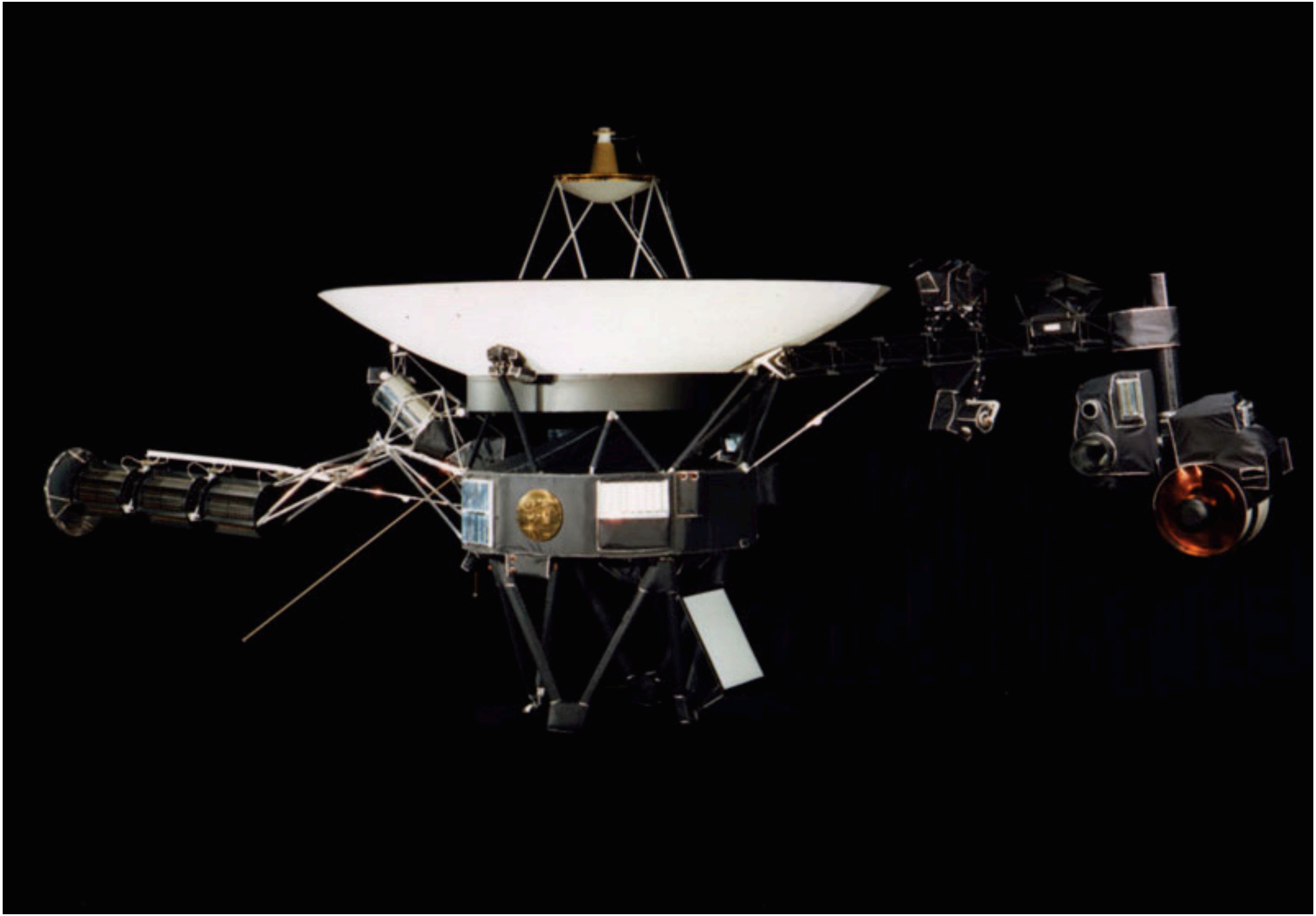
Ces satellites utilisent un concentré de mathématiques de différents domaines.

Le premier point est de faire suivre la trajectoire voulue par le satellite, en n'employant que très peu de carburant. L'idée est de se servir du passage près d'une planète comme d'une catapulte envoyant vers la suivante. Pour cela, l'équation $f = m.a$ de Newton a été remplacée par un système fini d'équations, le continu de l'espace et du temps étant remplacés par de petits accroissements.

Mais la transmission de photos des planètes a fait appel à de toutes autres mathématiques. Les caméras embarquées ont fait des photos, qui ont été numérisées puis compressées pour ne pas surcharger le message radio.
Le signal reçu était donc limité et aussi entaché d'erreurs de transmission.

Toute l'opération a donc fait appel à des idées - courantes aujourd'hui mais pas en 1977 : la compression du signal et les codes correcteurs d'erreurs.

Mais le grain de sel qui rend stupéfiant ce succès est que l'ordinateur de bord date évidemment de 1977, et que la plupart des logiciels utilisés n'existaient pas au moment du lancement. Il a fallu transmettre aux satellites de nouveaux logiciels fonctionnant sur des ancêtres de nos ordinateurs.



Equations de Navier-Stokes (1822-1845)

Ces équations aux dérivées partielles décrivent le mouvement des fluides visqueux. Elle forment en fait un système d'équations aux dérivées partielles extraordinairement difficiles.

Aujourd'hui :

On ne comprend pas les propriétés théoriques des solutions : elles font l'objet d'un des sept Prix du Millénaire de la Fondation Clay *(un million de dollars, quand même).*

On ne peut pas calculer leurs solutions, les très nombreuses applications *(beaucoup plus qu'un million – voire un milliard - de dollars)* passent donc par des approximations, où on remplace les dérivées par des différences finies.

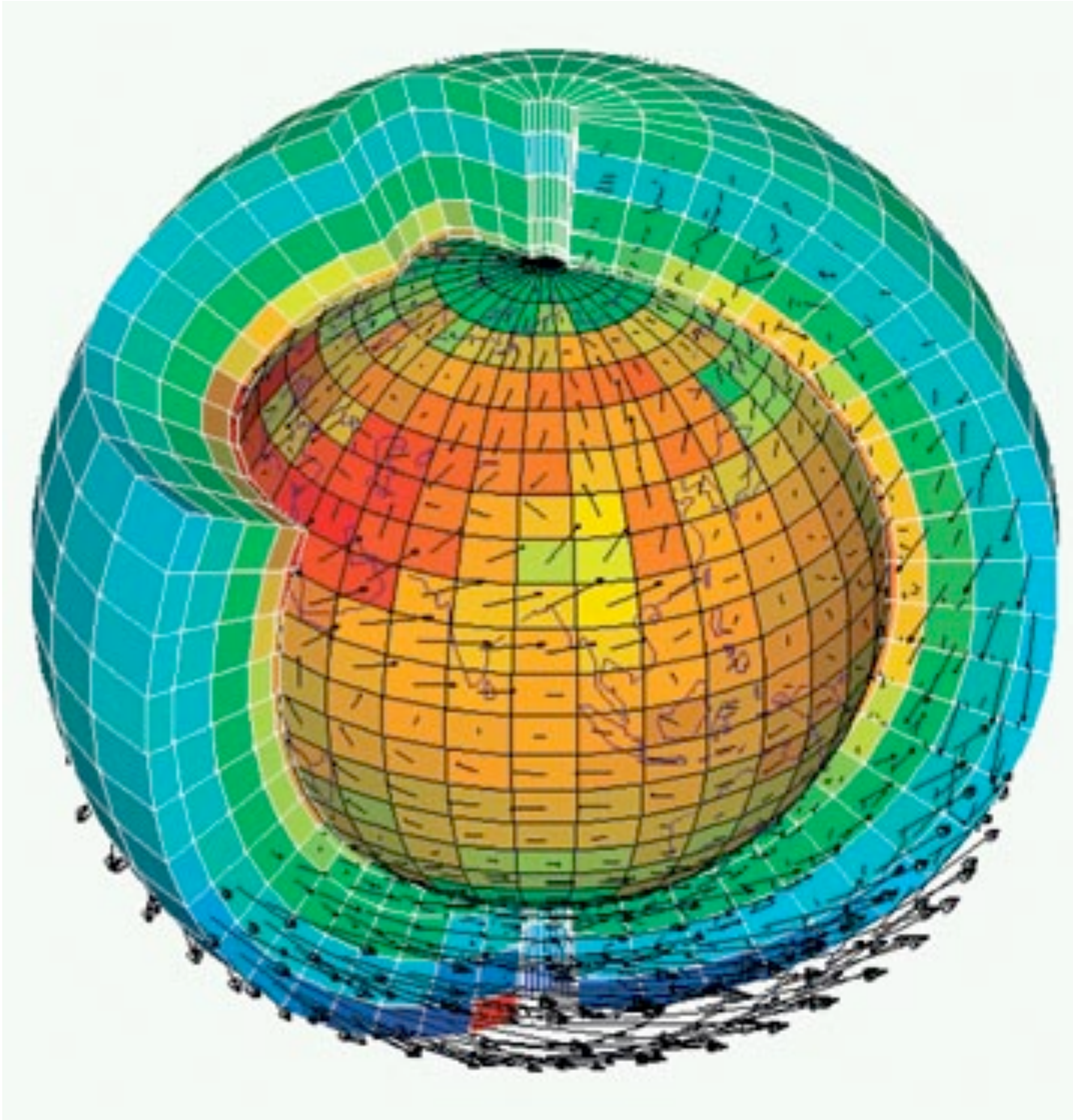
Nous présentons trois applications récentes, choisies parmi d'innombrables sujets.

Prévisions météo

On emploie une version sophistiquée des équations de Navier-Stokes, prenant en compte la pression, le vent, l'humidité, le relief, la nature du sol ou de la mer…

On découpe fictivement l'atmosphère en parallélépipèdes de 2 à 20 km de côté et de quelques dizaines à quelques centaines de mètres de hauteur, et on remplace les équations aux dérivées partielles de Navier Stokes par un système fini d'équations en considérant seulement les valeurs au centre des parallélépipèdes et en des valeurs du temps espacées de quelques minutes.

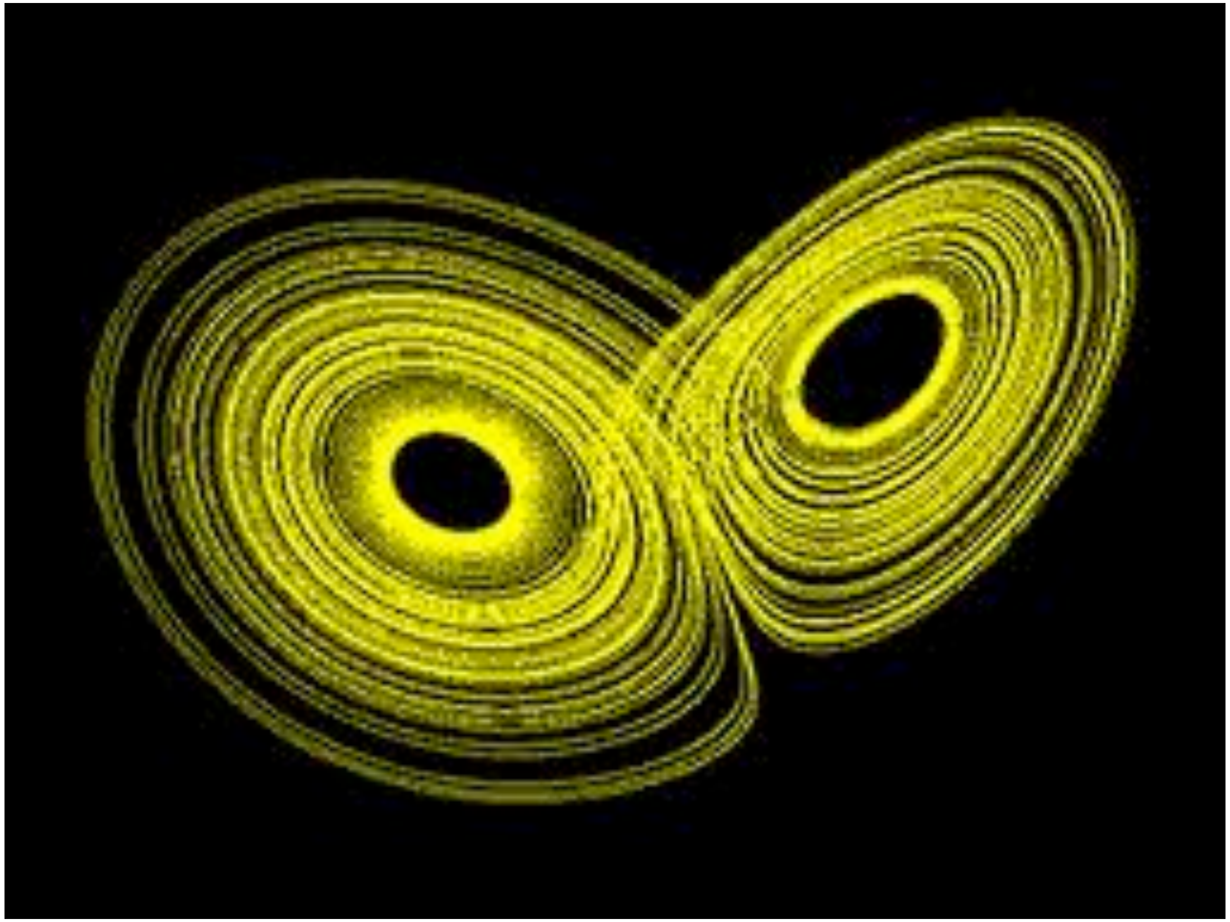
En principe, l'état en un temps initial déterminera la suite.



Les difficultés sont nombreuses :
- imprécision des données mesurées
- approximation des « vraies » équations par le modèle discret
- temps de calcul limité

Beaucoup d'idées nouvelles sont employées, par exemple on remplace la donnée initiale par la demande que la solution du calcul soit « proche » de la réalité observée sur 24 heures, ou on utilise des modèles probabilistes.

On peut espérer des prévisions à quinze jours, mais pas plus pour cause d'instabilité (phénomène chaotique). C'est Edward Lorenz qui le premier a exhibé un système d'équations telles qu'une petite erreur à un moment donné donne une grande erreur plus tard.



Edward Lorenz 1963

La trajectoire de la solution saute d'un côté à l'autre d'une manière qui semble aléatoire alors que les équations sont déterministes. Une petite imprécision qu'on ne peut pas mesurer fait basculer la suite dans une autre trajectoire

Modélisation des airbags des voitures

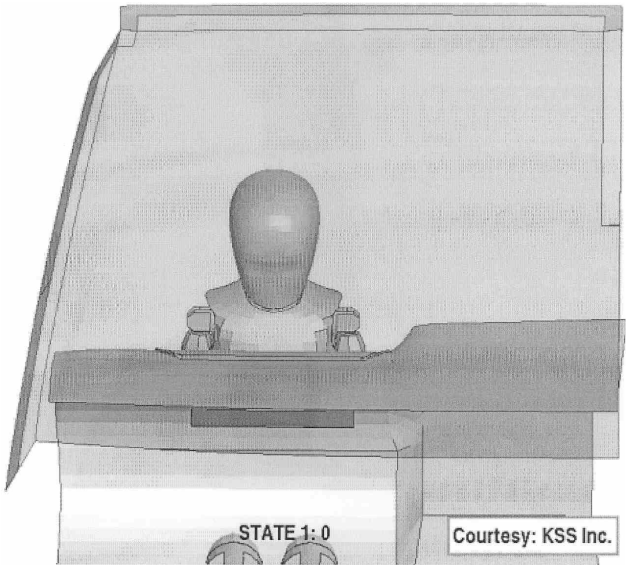
Travail réalisé au Fraunhofer Institute for Industrial Mathematics ITWM
http://www.itwm.fraunhofer.de/en/fraunhofer-itwm.html

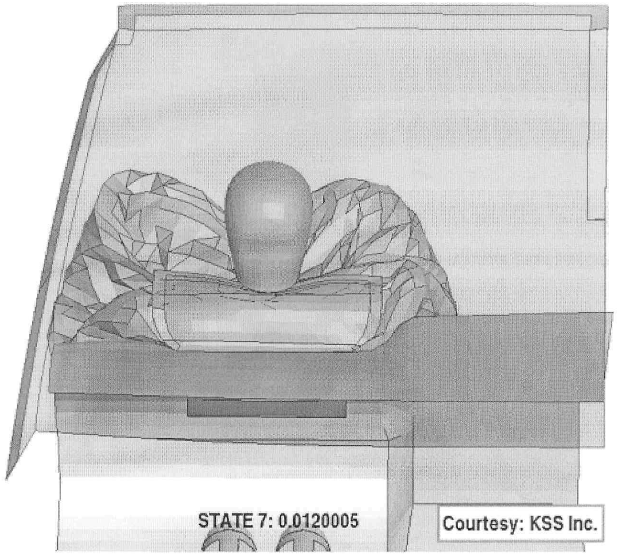
But : tester par un modèle mathématique l'ouverture d'un airbag en cas d'accident

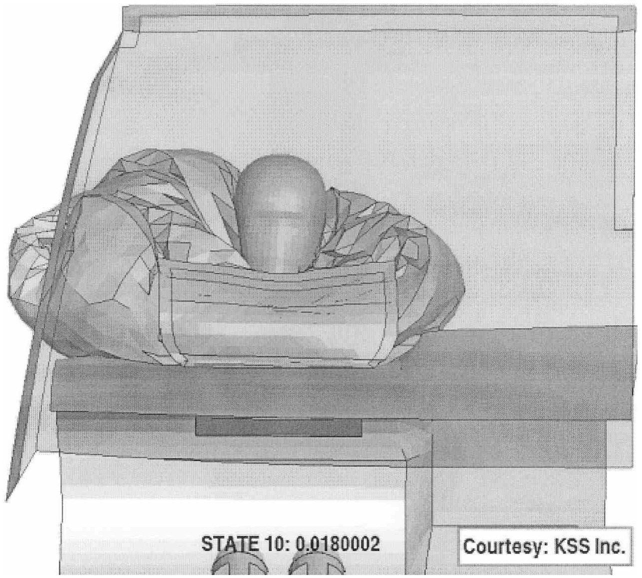
Intérêt évident : on peut le tester tant qu'on veut sans aucun accident réel. On peut varier la forme du sac, la manière dont il est plié, l'arrivée du gaz.

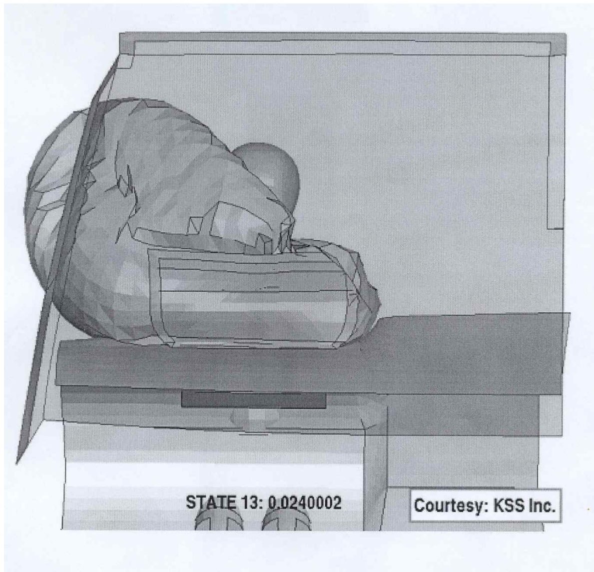
Méthode : écrire les équations de Navier-Stokes, les discrétiser pour obtenir une solution approchée grâce à un programme informatique

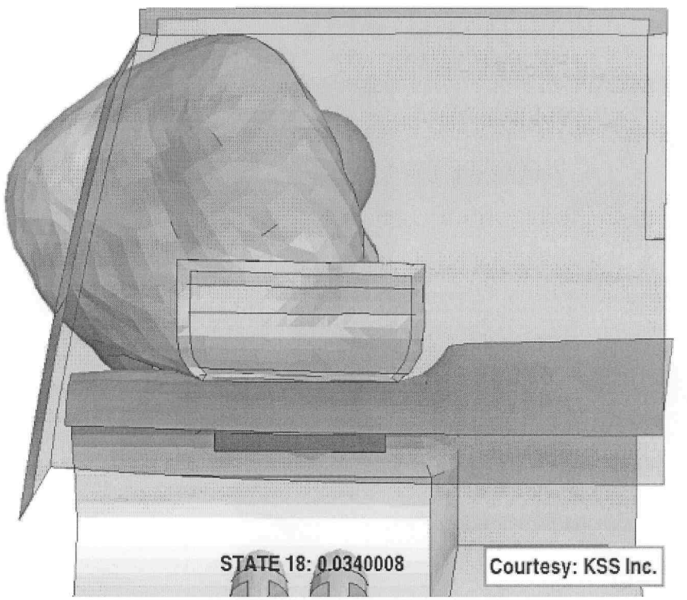
Difficulté (bien résolue !): les méthodes traditionnelles passent par un quadrillage du domaine remplaçant les dérivées par des différences finies.
Mais ici le bord du domaine (le sac) se déforme très rapidement sous l'effet du gaz !
On a donc développé des méthodes de résolution « sans quadrillage »

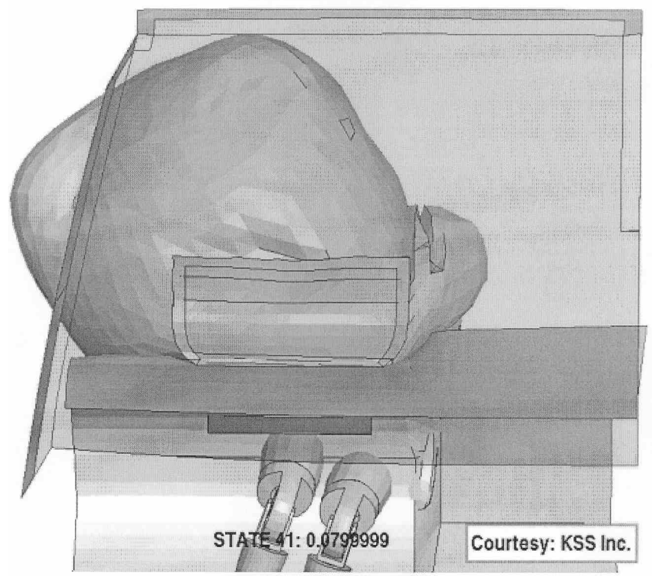

STATE 1: 0
Courtesy: KSS Inc.


STATE 7: 0.0120005
Courtesy: KSS Inc.


STATE 10: 0.0180002
Courtesy: KSS Inc.


STATE 13: 0.0240002
Courtesy: KSS Inc.


STATE 18: 0.0340008
Courtesy: KSS Inc.


STATE 41: 0.0799999
Courtesy: KSS Inc.

Modélisation du système cardio-vasculaire

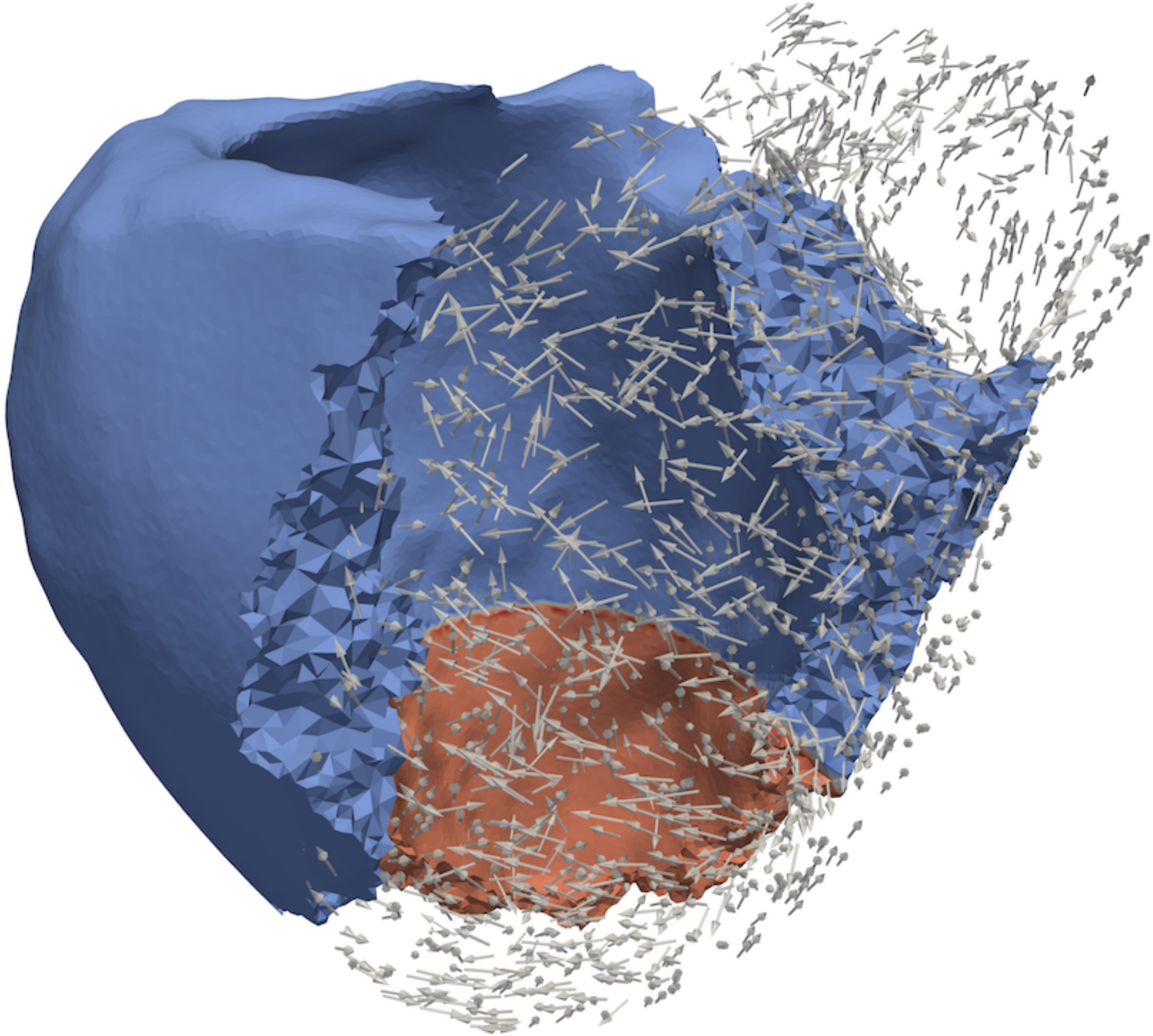
Travail en cours (progrès rapides) du Professeur Alfio Quarteroni à Lausanne

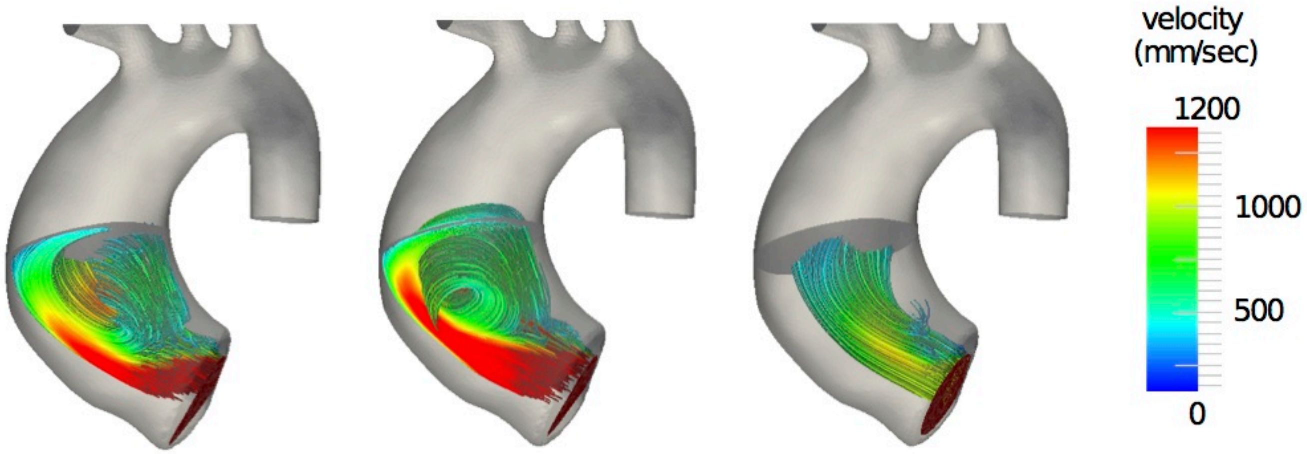
But : tester par un modèle mathématique le flux de sang qu'on obtiendrait après différentes opérations de pontage coronarien …sans avoir procédé à une seule opération

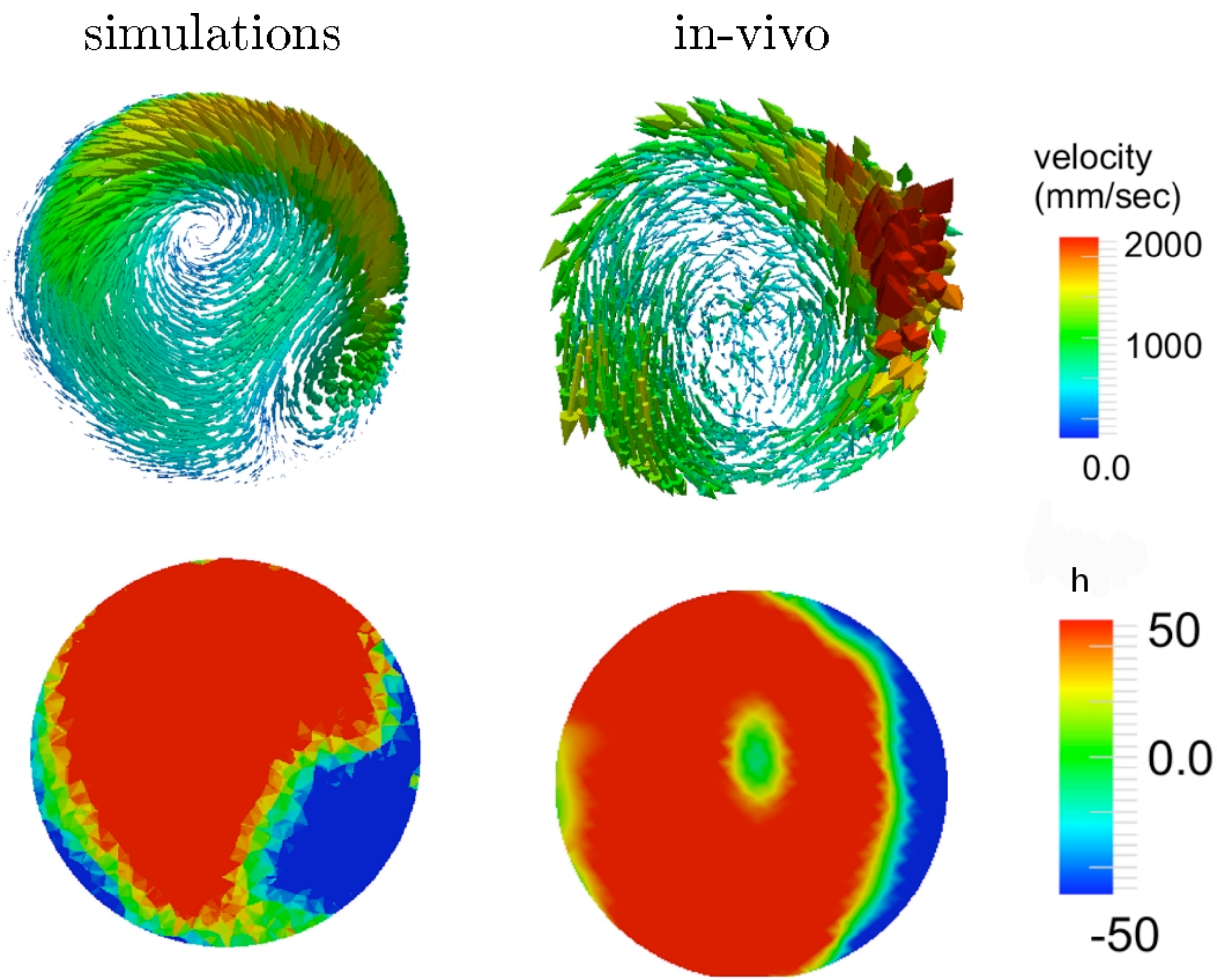
Intérêt évident : on peut tester la future opération autant de fois qu'on veut sans toucher au malade !

Méthode : écrire les équations de Navier-Stokes, les discrétiser pour obtenir une solution approchée grâce à un programme informatique

Difficulté : La complexité du système cardiovasculaire, avec des comportements différents du sang selon l'épaisseur des vaisseaux sanguins est évidemment énorme (entre l' artère aorte et un vaisseau capillaire, on ne parle pas du même comportement).
Les méthodes traditionnelles pour « résoudre » les équations aux dérivées partielles dans un domaine passent par un quadrillage du domaine remplaçant les dérivées par des différences finies, d'où un système d'équations fini (mais grand)
Ici, le bord du domaine bouge : le cœur et les artères se contractent pour pousser le sang, et le sang les repousse !
On emploie à nouveau des méthodes de résolution « sans quadrillage »
C'est une recherche en cours, avec un avenir plus que prometteur.




velocity
(mm/sec)
1200
1000
500
0


simulations
in-vivo
velocity
(mm/sec)
2000
1000
0.0
h
50
0.0
-50

Et que deviennent
les diplômés en mathématique ?

Une enquête récente sur seize promotions montre
que la plupart trouvent rapidement un métier
de haut niveau de responsabilité lié à leur diplôme

Les métiers des mathématiciens

Enquête sur les professions actuelles des anciens étudiants du département de mathématique de l'ULB, diplômés entre 1997 et 2012 en mathématique, statistique ou actuariat. Ces master sont directement accessibles après un Ba en mathématique.

204 réponses sur 306 diplômés.

Activité des diplômés	Pourcentage
Travail dans une compagnie privée ou un secteur de l'état	
Finance - assurance	29,4%
Consultance	10,3%
Industrie pharmaceutique	2,5%
Informatique	2%
Autres (soins de santé, mobilité dans les villes, industrie spatiale, industrie alimentaire, énergie, affaires intérieures....)	7,2%
Total	**51,4%**

Enseignant ou chercheur universitaire	
Professeur ou chercheur permanent	9,3%
Chercheur post doctorant (chercheur ou assistant)	5,4%
Doctorant (chercheur ou assistant)	11,3%
Total	**26%**
Professeur	
Dans l'enseignement secondaire (Belgique)	11,2%
Dans l'enseignement secondaire (Luxembourg)	2,5%
Dans l'enseignement supérieur non universitaire	5,4%
Total	**19,1%**
Etude complémentaire ou interruption volontaire de carrière	1%
Demandeur d'emploi	2,5%

Parmi les diplômés, 51,5 % sont en fait des diplômées - les mathématiques sont largement ouvertes aux filles comme aux garçons.

65 % des étudiants ont mis moins d'un mois pour trouver leur premier emploi. Nombreux sont ceux qui nous ont dit avoir eu un contrat en poche avant la fin de leurs études.
Pour 85 % d'entre eux, la recherche d'emploi a mis moins de trois mois, pour 92 % moins de six mois et pour 95,6 % moins d'un an.

Références

Le site
http://www.ulb.ac.be/facs/sciences/math/info-fe.html
est un point de départ pour des liens variés, donnant un panorama de différentes facettes des mathématiques aujourd’hui :
- l’utilité des « mathématiques invisibles » , c’est à dire dans des domaines où on n’imagine pas toujours qu’elles jouent un rôle
- le progrès rapide de la recherche, aussi bien pure qu’appliquée
- les carrières des diplômés