Université de Mons-Hainaut

Service d'Analyse et Méthodologie
Mathématiques

Des compétences terminales en mathématique

Rapport terminal 1998-99

J.-P. Cazzaro,

G. Noël,

F. Pourbaix,

P. Tilleuil.

1999

Réalisé dans le cadre d'une convention de recherche en éducation avec le Ministère de la Communauté Française, le présent travail a bénéficié de la collaboration, volontaire ou involontaire, de nombreuses personnes :

- *les membres du comité d'accompagnement : Mmes C. Blondin, représentant le Ministre de l'Éducation, M. Duwez, directrice et I. Vanderbiest, sous-chef de bureau à l'Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique, MM. M. Bustin, inspecteur général, A. Bajart, P. Brzakala et B. Lardinois, inspecteurs, Mme M. Solhosse, animatrice-formatrice au* CAF*, M. P. Soudan, directeur, représentant du* CPEONS*, Mme F. Guillaume, directrice, représentante de la* FELSI*, M. J.-M. Demoustier, représentant du* SEGEC *;*

- *les enseignants : MM. P. Dechamps, professeur à l'Athénée Royal de Mons, Y. Hanssens, professeur au Collège technique Saint-Henri à Mouscron, P. Lepourcq, professeur à l'École Internationale du* SHAPE*, F. Michel, professeur à l'Institut Decroly à Uccle, Mme Y. Noël, professeur honoraire à l'Institut Supérieur Pédagogique de la Communauté Française à Mons, M. J.-P. Richeton, collaborateur à l'IUFM de Strasbourg, Mme C. Terryn, professeur au Collège Sainte-Marie à Mouscron, M. L. Terryn, professeur au Collège Sainte-Marie à Mouscron ainsi que tous les collègues qui nous ont fait part de leur intérêt, leurs encouragements ou leurs critiques ;*

- *les élèves : M. Benjamin Desbuquoit, élève de l'Institut Notre-Dame à Comines, ainsi que les élèves de l'Athénée Royal de Mons, de l'École Internationale du* SHAPE*, de l'Institut Decroly à Uccle, du Collège technique Saint-Henri à Mouscron, de l'Athénée Royal Jean Rey de Couvin et du Collège Sainte-Marie à Mouscron.*

Que tous trouvent ici l'expression de nos remerciements.

Table des matières

Introduction 1

I Analyse théorique 5

1 Des compétences 6

1.1 Introduction . . . 7

1.2 En lisant les documents belges . . . 8

1.3 A l'étranger . . . 13

1.4 Première synthèse : un essai de définition . . . 22

2 L'activité mathématique 24

2.1 La mathématique . . . 25

2.2 L'activité du mathématicien . . . 26

2.3 Une fonction culturelle et sociale pour la mathématique . . . 28

2.4 Deuxième synthèse : une compétence terminale . . . 31

3 L'apprentissage de la mathématique 32

3.1 Introduction . . . 33

3.2 Des procédures, des structures et des modèles mentaux . . . 36

3.3 Du procédural au structural . . . 45

3.4 Troisième synthèse : retour aux problèmes . . . 53

4 Des problèmes 54

4.1 Qu'est-ce qu'un problème ? . . . 56

4.2 Résoudre un problème . . . 59

4.3 Une compétence globale 65
4.4 Une compétence terminale 66
4.5 Une quatrième synthèse : des problèmes et des séquences de problèmes 68

5 Des hiérarchies de compétences 69
5.1 Un paradoxe 70
5.2 Des contenus 77
5.3 Le point de vue mathématique 84
5.4 Le point de vue didactique 88
5.5 Le point de vue psychologique 89

6 Le point de vue mathématique 91
6.1 Des cadres 92
6.2 Algébriser 94
6.3 Géométriser 102
6.4 Approcher 108
6.5 Numériser 117
6.6 Probabiliser 138

7 Le point de vue didactique 143
7.1 Introduction 145
7.2 Un découpage en épisodes 146
7.3 Des stratégies 156
7.4 Le contrôle de son activité par l'élève 174
7.5 Du côté des professeurs 175

8 Le point de vue psychologique 177
8.1 Une modélisation de résolution d'un problème 178
8.2 Une taxonomie d'objectifs cognitifs 184
8.3 Les niveaux de van Hiele 186
8.4 Une conclusion provisoire 196

9 Un problème passé au crible 197
9.1 Introduction 198

9.2 Origine et exposé du problème . . . 199
9.3 La quête . . . 201
9.4 Retour à l'algèbre . . . 207
9.5 Commentaires . . . 209

10 La problématisation du cours de mathématiques 210
10.1 Un contraste à réduire . . . 212
10.2 Une structure commune . . . 215
10.3 Plusieurs espèces de problèmes . . . 221
10.4 En guise de conclusion . . . 225

II Des problèmes 227

11 Des fiches-problèmes 228
11.1 Structure des fiches . . . 231
11.2 Fiche N° 1 : Un calcul d'aires . . . 236
11.3 Fiche N° 2 : La longueur d'une ellipse . . . 250
11.4 Fiche N° 3 : Un problème d'aire . . . 263
11.5 Fiche N° 4 : Des pavages du plan . . . 275
11.6 Fiche N° 5 : Un peu de probabilité . . . 292
11.7 Fiche N° 6 : Le duopoly de Cournot . . . 301
11.8 Fiche N° 7 : Le problème des confetti . . . 307
11.9 Fiche N° 8 : Le problème de l'eau et du vin . . . 316

III Séquences d'enseignement 331

12 Du discret au continu : l'intégrale 332
12.1 Présentation générale . . . 334
12.2 L'organisation pratique de l'expérience . . . 339
12.3 Un compte-rendu de l'expérimentation : la phase d'intériorisation . . . 342
12.4 Un compte-rendu de l'expérimentation : la phase de condensation . . . 353
12.5 Un compte-rendu de l'expérimentation : la phase de réification . . . 377
12.6 Des conclusions ... préliminaires . . . 378

12.7 Postérité : une nouvelle version des notes de cours 382

13 Un peu d'algèbre linéaire **414**

13.1 Présentation générale 415
13.2 Déroulement des séances de cours 417
13.3 Commentaires 426
13.4 Des énoncés supplémentaires 427

14 Initiation aux probabilités **430**

14.1 Compte-rendu de l'expérience 432
14.2 La séquence de cours 453

IV Outils pédagogiques **469**

15 Problématisation et formation continue **470**

15.1 Introduction 471
15.2 Pourquoi envisager une formation à la problématisation ? 472
15.3 Quelques caractéristiques des modules de formation 473
15.4 Un exemple détaillé 474
15.5 Parmi les premières réactions 477

16 Un module de formation : Géométrie Ecrite et Algèbre Visuelle **479**

16.1 Les deux opérations fondamentales 483
16.2 Les droites et les plans 491
16.3 Une question d'équilibre 501
16.4 Des angles au produit scalaire 507
16.5 Le produit scalaire ... dans tous ses états 513
16.6 Un peu de programmation linéaire 518
16.7 Les statistiques et le calcul des distances minimales 519
16.8 La représentation matricielle 527
16.9 Le début d'un herbier 538
16.10 La marche-arrière 551
16.11 Un retour aux sources 563

V L'évaluation 575

17 Généralités 576

17.1 Un vieux problème ... jamais résolu . . . 577
17.2 Que veut-on évaluer ? . . . 578
17.3 Que veut-on faire des résultats de l'évaluation ? . . . 584
17.4 Comment évaluer ? . . . 588
17.5 Le problème de l'évaluation des résolutions de problèmes . . . 593
17.6 Résumé des chapitres suivants . . . 595

18 L'évaluation de la résolution de problèmes 597

18.1 Trois hypothèses de travail . . . 599
18.2 Un schéma d'évaluation . . . 601
18.3 Ce schéma s'adapte-t-il à des situations concrètes ? Trois expériences 603
18.4 Peut-on envisager une certification de la résolution de problèmes ? . . . 647
18.5 Il reste du pain sur la planche 649

19 L'évaluation lors d'une séquence d'enseignement sur les probabilités 650

19.1 Introduction . . . 651
19.2 Une interrogation . . . 652
19.3 Un modèle de correction . . . 653
19.4 Remarques générales et cas particuliers . . . 654
19.5 Comportements significatifs . . . 659
19.6 Une tentative d'évaluation « vectorielle » . . . 661
19.7 Exploitation des résultats par analyse factorielle . . . 663
19.8 Exploitation des résultats par une méthode d'aide à la décision . . . 668
19.9 Conclusion . . . 672

20 Une autre évaluation, au départ de dossiers-projets 673

20.1 Une dimension transversale . . . 674
20.2 Le dossier-projet . . . 675
20.3 Un exemple venu des U.S.A. . . . 676
20.4 Un exemple en Belgique francophone . . . 677

20.5 Une version de dossier-projet sur CD-ROM 679
20.6 Une autre expérience de dossier-projet sur CD-ROM 686
20.7 L'évaluation et les dossiers-projets 691
20.8 Quelques questions ... à explorer encore 692

21 Un examen à l'université **693**
21.1 Introduction 694
21.2 Les questions et les comportements observés 696
21.3 Evaluer le questionnaire 711
21.4 Evaluer les étudiants 723

VI Annexes **733**

A L'analyse des correspondances **734**
A.1 Introduction 735
A.2 Rappels de mécanique 736
A.3 Le problème de l'analyse des tableaux de nombres positifs 740
A.4 Nuages et produits scalaires dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ 745
A.5 L'analyse dans $\mathbb{R}^p$ 746
A.6 L'analyse dans $\mathbb{R}^n$ 749
A.7 Lien entre les analyses dans $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ 750
A.8 Retour à la dépendance 754
A.9 Le problème de l'interprétation 755
A.10 Contributions absolues et relatives 756
A.11 Des variables supplémentaires 758

B Bibliographie **759**

C Index **770**

Introduction

Le présent document traite des « *Compétences terminales en mathématique* » pour l'enseignement secondaire. Il expose nos conclusions après deux ans de réflexion sur le sujet.

Dès le début, il nous est apparu qu'il serait inadéquat de partir d'une liste de compétences terminales élaborée *a priori* pour déterminer ensuite à travers de quelles activités, ou à travers de quels points de matière et de quelle façon ces compétences pourraient trouver l'occasion de s'exercer. Bien au contraire, il nous est apparu indispensable de dégager les compétences — tant disciplinaires que transversales — susceptibles d'être mises en œuvre à l'occasion d'un cours de mathématique, à partir d'une analyse des finalités d'un tel cours, ainsi que des caractéristiques principales des activités d'un mathématicien ([1]). C'est uniquement de cette façon que nous pouvions espérer conserver le contact avec la réalité des cours de mathématique de l'enseignement secondaire.

Il était donc important de décrire en quoi consiste l'activité mathématique et d'étudier sur les plans psychologique, didactique et mathématique le phénomène d'apprentissage des mathématiques. C'est à une telle analyse que nous avons consacré la première partie de notre travail. Elle se concrétise dans le présent rapport par les chapitres 1 à 10.

Le premier chapitre, établit l'état des lieux au départ de la recherche, à l'aide de documents belges et étrangers. Le deuxième chapitre examine ce qui fait l'essentiel de l'activité mathématique et conduit à la proposition d'adopter la résolution de problèmes en tant que compétence terminale de type global.

Le troisième chapitre fait le point des idées actuelles relativement à l'apprentissage des mathématiques. Il s'appesantit essentiellement sur le phénomène de passage du procédural au structural. Il n'est pas interdit de penser que la non prise en compte de ce phénomène est responsable des échecs de nombreuses réformes de l'enseignement des mathématiques.

([1]) Ceci ne signifie nullement que nous voulons transformer tous les élèves en mathématiciens ni ne nous intéresser qu'à ceux d'entre eux qui sont doués en mathématique. Cela signifie uniquement que nous ne croyons pas possible de développer ou de faire acquérir au cours de mathématiques des compétences qui ne seraient pas exercées par les mathématiciens eux-mêmes.

Le quatrième chapitre étudie plus particulièrement ce qu'est un problème et pose les deux questions de la résolution d'un problème et de l'organisation de l'enseignement autour de situations-problèmes.

Le chapitre 5 présente la problématique d'une hiérarchisation des compétences. Si l'aptitude à résoudre des problèmes est une compétence globale, il lui est associé des compétences subordonnées qui relèvent de domaines différents. Ce sont donc plusieurs hiérarchies de compétences qui vont apparaître. Elles correspondent aux trois points de vue mathématique, didactique et psychologique déjà rencontrés. Ces trois points de vue sont traités successivement dans les chapitres 6, 7 et 8.

Le lecteur sera cependant déçu s'il espère trouver dans ce travail une liste structurée de compétences à laquelle il puisse à la fois se fier et se restreindre. Comme nous l'avons écrit plus haut, c'est chaque activité mathématique qui doit être analysée afin de déterminer quelles sont les compétences qui y sont impliquées. Et il nous est évidemment impossible d'analyser de la façon appropriée l'ensemble des activités mathématiques même limitées aux dernières années du secondaire. Toutefois, des notes de marge ont été insérées dans les exemples d'activités figurant dans le texte en vue de préciser des compétences qu'elles sollicitent.

Ayant adopté la résolution de problèmes comme compétence terminale globale, nous préconisons que des problèmes — c'est-à-dire des questions nécessitant une réflexion sérieuse et formatrice — soient aussi fréquemment que possible soumis aux élèves. Nous avons voulu jouer le jeu nous-mêmes et nous sommes donc soumis à l'épreuve en notant les différentes phases de notre recherche, notamment ces phases qui s'avèrent parfois des impasses — ce qui ne veut pas dire qu'elles ne servent à rien — et que par conséquent on ne retrouve généralement pas dans les compte-rendus. Le chapitre 9 relate cette expérience.

Enfin, il n'est pas possible de préconiser un enseignement accordant une place importante à la résolution de problèmes sans s'interroger sur la manière d'organiser un tel enseignement. Le chapitre 10 est consacré à une telle réflexion.

Si la première partie de ce rapport a un caractère essentiellement théorique, les deuxième et troisième parties sont consacrées à des applications. La deuxième partie ne comporte que le chapitre 11, lequel est constitué de huit fiches de travail décrivant des problèmes d'importance, de niveau et de longueur variables. Il s'agit là de problèmes ponctuels, non intégrés dans des séquences d'enseignement et susceptibles de prolongements divers. Ils sont destinés à servir d'exemples d'une réflexion méthodologique sur les démarches nécessaires en vue de résoudre des problèmes particuliers. Certains d'entre eux ont été l'objet d'une expérimentation.

La troisième partie est de son côté consacrée à trois séquences d'enseignement centrées sur des résolutions de problèmes. Ces séquences ont été expérimentées dans diverses écoles. La première, expérimentée aux Collèges Sainte-Marie et Saint-Henri de Mouscron, porte sur l'introduction de l'intégrale. La seconde est consacrée à un sujet d'algèbre linéaire. Elle a été réalisée avec la collaboration de l'Institut Decroly à Uccle. Enfin, la troisième, expérimentée à l'Athénée Royal de Mons et à l'Athénée du SHAPE, porte sur le début d'un cours de probabilités. Les compte-rendus de ces expériences constituent les chapitres 12, 13 et 14.

Il ne suffit pas d'attribuer des objectifs à un enseignement en définissant les compétences que l'on souhaite voir implémentées chez les élèves. Il convient aussi de fournir aux enseignants des outils qui leur permettent de réaliser cette implémentation. Aussi avons-nous profité des activités de formation en cours de carrière de l'un d'entre nous en insérant dans le rapport une quatrième partie qui peut être considérée comme un *outil pédagogique* au sens donné à ce terme par le décret sur les missions de l'école. Le chapitre 15 est ainsi consacré à une approche de la possibilité de *problématiser* un cours de mathématique lors d'activités de formation continue. Le chapitre 16 est un exemple de formation continue portant sur l'ensemble du programme d'algèbre et de géométrie de 5e transition, tel qu'il a été présenté et discuté avec des enseignants en diverses occasions. C'est aussi un autre exemple de cours ayant été problématisé, mais non expérimenté tel quel. Son contenu est volontairement plus vaste que ce qu'il serait possible de traiter dans une classe : il est nécessaire que les enseignants disposent de *réserves* pour préparer leurs cours.

Enfin, il n'était pas possible de ne pas aborder le problème de l'évaluation — formative et certificative — des élèves. Ce sujet délicat fait l'objet de la cinquième et dernière partie, constituée des chapitres 17 à 21.

Le chapitre 17 présente quelques idées générales, sur le sujet, sans prétention à l'originalité et sans prétendre non plus clore le débat, loin de là. Les seules conclusions qui nous paraissent s'imposer sont d'une part que lors d'une évaluation formative, il n'est pas nécessaire — et il peut même être nuisible — de noter les élèves ; d'autre part que lors d'une évaluation certificative la note chiffrée unique s'avère un instrument plus que sommaire et qu'il conviendrait dès lors de s'orienter vers l'emploi de notes *vectorielles*. L'idée d'employer de telles notes ne peut que se heurter à de nombreux obstacles parmi lesquels les réticences des enseignants et des parents mais aussi les difficultés techniques de mise en œuvre.

Reconnaissons donc que nous ne sommes pas en mesure actuellement de proposer une méthode de notation vectorielle suffisamment simple et efficace pour recueillir un large assentiment dans les diverses composantes de la communauté éducative. Nous avons cependant voulu *tracer des pistes* en expérimentant ([2]) plusieurs méthodes s'appliquant dans des circonstances variées. La première a eu — très logiquement dans l'optique adoptée dans ce travail — pour objet d'évaluer des activités de résolution de problèmes. Elle est décrite au chapitre 18. La seconde, rapportée au chapitre 19, porte sur l'évaluation d'une séquence d'enseignement : celle qui avait été consacrée au début d'un cours de probabilités. La troisième (chapitre 20) porte sur les dossiers-projets et en particulier sur un travail de fin d'études réalisé par un élève de l'Institut Notre-Dame de Comines. Celui-ci a réalisé un hyper-texte reprenant le contenu d'un cours consacré aux nombres complexes. A travers la réalisation de cet hyper-texte (lequel figure sur le CD-Rom remis en annexe à ce rapport) ce sont des compétences liées à l'expression sous différentes formes qui sont sollicitées. Enfin, un examen — non traditionnel — d'université est analysé au chapitre 21.

La caractéristique commune de ces différentes méthodes est la quantité de travail et les aptitudes variées qu'elles demandent aux enseignants. Ces constatations ne sont sans doute pas suffisantes pour renoncer à appliquer ces méthodes, mais elles doivent inciter les chercheurs à ... continuer à chercher des méthodes d'emploi plus aisé.

On sait depuis longtemps qu'il n'existe pas de méthode-miracle qui permette de résoudre sans peine les problèmes posés par l'enseignement et l'apprentissage en général, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en particulier. Le courant d'idées actuel s'inscrit dans une évolution qui a débuté lors de l'instauration de l'obligation scolaire et qui est loin d'être achevée. Nous ne considérons donc notre travail que comme une modeste contribution à une œuvre de longue haleine.

Mons, le 30 juin 1999

([2]) Il est à peine besoin de mentionner que les évaluations expérimentales ainsi réalisées avec de vrais élèves n'ont pas été utilisées en vue de déterminer les résultats scolaires de ceux-ci.

Première partie

Analyse théorique

Chapitre 1

Des compétences

1.1 Introduction 7
1.2 En lisant les documents belges 8
1.2.1 Des compétences transversales 9
1.2.2 Des compétences disciplinaires 11
1.3 A l'étranger 13
1.3.1 Les problématiques de l'APMEP 14
1.3.2 Les "standards" du NCTM 17
1.3.3 Le plan d'études suisse 20
1.3.4 Le document du *School curriculum and assessment authority* . . 21
1.4 Première synthèse : un essai de définition 22

1.1. Introduction

L'organisation de l'enseignement en Communauté française de Belgique en termes de compétences à acquérir résulte de la volonté du législateur qui dans le « *Décret du 24 juillet 1997 définissant les missions prioritaires de l'enseignement fondamental et de l'enseignement secondaire et organisant les structures propres à les atteindre* », [1] ([1]), article 6, fixe ainsi les objectifs généraux de l'enseignement fondamental et de l'enseignement secondaire :

1. promouvoir la confiance en soi et le développement de la personne de chacun des élèves ;
2. amener tous les élèves à s'approprier des savoirs et à acquérir des compétences qui les rendent aptes à apprendre toute leur vie et à prendre une place active dans la vie économique, sociale et culturelle ;
3. préparer tous les élèves à être des citoyens responsables, capables de contribuer au développement d'une société démocratique, solidaire, pluraliste et ouverte aux autres cultures ;
4. assurer à tous les élèves des chances égales d'émancipation sociale.

La notion de *compétence* avait été introduite dans le document *Les socles de compétences dans l'enseignement fondamental et au premier degré de l'enseignement secondaire*, [2], publié en 1994 par le *Ministre de l'Éducation et de l'Audiovisuel* qui la définissait comme suit :

Définition 1.1.1 *Une compétence est un comportement structuré en fonction d'un but dans une situation donnée, c'est-à-dire une possibilité d'action efficace dans un contexte précis.*

Cette définition a ensuite été revue et pourvue d'une forme « légale » dans le *Décret* mentionné ci-dessus :

Définition 1.1.2 *Compétence : aptitude à mettre en œuvre un ensemble organisé de savoirs, de savoir-faire et d'attitudes permettant d'accomplir un certain nombre de tâches.*

Nous allons dans ce chapitre tenter d'approfondir cette définition en analysant le contenu de divers documents belges ou étrangers.

([1]) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie située à la fin du fascicule.

1.2. En lisant les documents belges

Nous disposons outre le décret [1] et la brochure [2] précités des documents suivants, dont le premier est consacré plus particulièrement aux socles de compétences dans le domaine de l'enseignement de la mathématique.

- *Mathématiques de 10 à 14 ans, continuité et compétences*, Cellule de Pilotage du Ministère de l'Éducation, de la Recherche et de la Formation, 1996, [3].
- *Quelle philosophie pour l'enseignement des mathématiques au Secondaire*, Commission Pédagogique de la SBPMef, Mathématique et Pédagogie, 102, 5–28, 1995, [4].
- *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans. Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques*, Ed. CREM, Nivelles, 1995, [12]

A l'occasion, nous nous inspirerons également des travaux de l'*Université d'Été* organisée les 21, 22 et 23 août 1997 par le *Centre Interfacultaire de Formation des Enseignants (CIFEN)* de l'Université de Liège.

Une distinction est faite entre *compétence transversale* et *compétence disciplinaire* :

Définition 1.2.1 *Les compétences transversales sont les capacités qui permettent à l'enfant de réaliser des performances dans toutes les situations où il est plongé, [2].*

Définition 1.2.2 *Compétences transversales : attitudes, démarches mentales et démarches méthodologiques communes aux différentes disciplines à acquérir et à mettre en œuvre au cours de l'élaboration des différents savoirs et savoir-faire ; leur maîtrise vise à une autonomie croissante d'apprentissage des élèves, [1].*

Définition 1.2.3 *Compétences disciplinaires : référentiel présentant de manière structurée les compétences à acquérir dans une discipline scolaire, [1].*

Les compétences disciplinaires se répartissent elles-mêmes en compétences d'intégration et compétences spécifiques ([2], pages 19 et 20).

1.2.1 Des compétences transversales

Le document [2] ne définit les compétences transversales qu'en termes très généraux. Il en distingue néanmoins trois grandes catégories : les compétences relationnelles, les démarches mentales, les méthodes de travail. Ces catégories se retrouvent dans la définition 1.2.3, définition « légale » énoncée dans [1]. Le document [3], consacré plus particulièrement aux mathématiques, revient sur la question. Il considère que

> *une compétence n'est pas par nature transversale ; elle le devient dans la mesure où son champ d'application s'étend à de nouveaux contextes*

Plutôt que de compétence *transversale*, on pourrait donc parler de compétence *transférable*. Mais comment le transfert s'effectue-t-il ?

> *Il est illusoire de tabler sur un transfert simple de ce qui est acquis par exemple en français (la capacité à distinguer l'essentiel de l'accessoire) au domaine des problèmes, car on ne repère pas l'essentiel de la même façon dans un récit, une règle de jeu ou un énoncé de problème. Les recherches en psychologie cognitive ont montré que le transfert ne s'effectue que dans des conditions bien particulières, notamment quand la similarité des situations est grande aux yeux de l'apprenant.*
>
> *[3], page 13*

Le problème du transfert d'une compétence d'un domaine à un autre, ou d'une discipline à une autre, est donc un de ceux pour lesquels nous n'avons guère de réponses.

En fait, ce problème est plus général encore qu'il n'y paraît à première vue car il se pose aussi à l'intérieur d'une discipline déterminée. Pour nous limiter au cas de la mathématique, une méthode ou un raisonnement utilisés dans une situation $\mathcal{A}$ sont très souvent susceptibles d'être réutilisés dans une autre situation $\mathcal{B}$. Parfois, la situation $\mathcal{B}$ relève du même sujet (algèbre, géométrie, ...) que $\mathcal{A}$, parfois ce n'est pas le cas. Les transferts s'effectuent d'autant plus difficilement que les sujets sont différents et que des cloisonnements ont été réalisés, consciemment ou non, soit par l'élève, soit par le système éducatif.

Le problème de transfert apparaît comme crucial car c'est cette capacité de transfert qui permet à l'individu de s'adapter à des situations nouvelles pour lui.

Dans son *cadre global*, le CREM cite POLYA, [122], qui donne aux élèves le conseil, après avoir résolu un problème, de reconstituer en détails la démarche qu'ils ont utilisée pour le résoudre.

> Expliciter les démarches effectuées permet d'identifier les compétences utilisées et facilite leur transfert à d'autres situations.

Dès lors que la transversalité des compétences se mesure par leur transférabilité, on peut considérer que *toute compétence possède un certain domaine (plus ou moins étendu) de transversalité*. De cette façon, la distinction entre compétence transversale et compétence disciplinaire n'apparaît plus aussi nette qu'on aurait pu le croire *a priori*. Par ailleurs, même les compétences transversales ne peuvent s'exercer en l'absence d'apprentissage d'un contenu (procédural ou conceptuel). Nous revenons ainsi aux compétences disciplinaires.

1.2.2 Des compétences disciplinaires

La définition des compétences, donnée dans [2] et mentionnée plus haut (définition 1.1.1) met l'accent sur l'aspect opératoire : une compétence est une possibilité d'action efficace dans un contexte précis. La définition 1.1.2, extraite de [1] nuance fortement cette idée. La distinction entre compétence disciplinaire d'intégration et compétence disciplinaire spécifique va dans le même sens :

- *Les compétences disciplinaires d'intégration sont des compétences* ***globales*** *qui rassemblent et organisent un* ***ensemble de savoirs, de savoir-faire, et de savoir-être*** *dans leurs dimensions transversales et disciplinaires, ([2], page 19).*
- *Les compétences disciplinaires spécifiques doivent être développées dans des situations d'apprentissage, pour atteindre au fil du temps, une plus grande maîtrise des compétences d'intégration, ([2], page 20).*

Les auteurs de [3] estiment aussi qu'*une compétence est une capacité de faire face à certaines situations, c'est-à-dire de mobiliser un système de connaissances conceptuelles et procédurales, organisées en schémas opératoires* (p.11). Dans [12], le CREM discute également de cette question. Il situe les connaissances *pas bien loin des compétences* et fait remarquer *que plus un élève a de connaissances, mieux il est armé pour résoudre des problèmes.* Des considérations analogues sont également développées en d'autres textes, notamment [4]. Il n'est donc pas question d'opposer **compétences** à **connaissances**, mais plutôt de considérer que celles-ci font partie intégrante de celles-là.

Les compétences ont simultanément une composante conceptuelle (les savoirs) et une composante procédurale (les savoir-faire).

La distinction entre « compétence d'intégration » et « compétence spécifique » est également analysée dans [3], où l'on fait remarquer qu'une telle qualification dépend fortement du niveau de maîtrise atteint par l'élève : telle capacité qui apparaît complexe et difficile à réaliser pour un élève du secondaire inférieur (par exemple) ne sera souvent qu'un simple exercice routinier pour un élève du secondaire supérieur. Pour le premier, il s'agirait d'une compétence d'intégration, pour le second d'une compétence spécifique. On retrouve là une difficulté que l'on rencontre chaque fois qu'on essaye d'appliquer dans un cas particulier les principes d'une taxonomie d'objectifs cognitifs.

La difficulté qui vient d'être mentionnée ne doit pas nous amener à rejeter la distinction entre *compétence d'intégration* et *compétence spécifique*. Par contre, elle nous amène à considérer qu'une compétence n'est spécifique que relativement à une compétence d'intégration à laquelle elle est subordonnée. Nous serons ainsi conduits à envisager une hiérarchisation des compétences particulières au domaine mathématique. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

Précisons enfin qu'une liste de compétences terminales en mathématiques pour les humanités générales et technologiques a été discutée et approuvée par le Conseil de la Communauté française durant les vacances de Pâques 1999 (cfr. le site Internet www.restode.cfwb.be). Ce texte précise, en vue de la certification, les compétences disciplinaires spécifiques et d'intégration suivant les différents profils d'études en mathématiques.

1.3. A l'étranger

Les documents étrangers mentionnés ci-dessous marquent une tendance apparue depuis quelques années et qui vise à déterminer les programmes d'enseignement de la mathématique autrement que par une succession d'intitulés de matières. Nous donnerons dans ce paragraphe un bref aperçu de leur contenu.

- *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, Ed. NCTM, Reston (USA), 258 pages, 1989, [11].
- *Plan d'études cadre pour les écoles de maturité du 9 juin 1994*, Ed. Conférence suisse des directeurs cantonaux de l'instruction publique, Berne, 139 pages, 1994, [14].
- *Une approche des contenus d'enseignement par des problématiques pour le second cycle*, Supplément au Bulletin de l'APMEP n°401, décembre 1995, [9]
- *GCE advanced and advanced subsidiary examinations subject cores for mathematics*, Ed. School curriculum and assessment authority, London, 1997, [13]

1.3.1 Les problématiques de l'APMEP

L'*Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public*, (APMEP) recherche dès 1984 une nouvelle approche des programmes d'enseignement des mathématiques. Sa réflexion la conduit à élaborer des *problématiques*. Le mot lui-même (problématique : ensemble de problèmes dont les éléments sont liés), exprime l'idée de mettre en relation les différents éléments du programme d'enseignement, pour aboutir à une autre approche des contenus.

Citons ici nos collègues français, qui analysent la façon dont sont rédigés les programmes :

> *Une approche traditionnelle, essentiellement centrée sur les contenus, peut satisfaire l'enseignant mathématicien qui est capable d'identifier les objets mathématiques en référence à sa formation universitaire, à sa culture et son expérience des transpositions qui en sont faites dans les manuels, en un mot en référence à la personnalisation de ses savoirs. La linéarisation de leur écriture traduit l'idéologie et l'utopie d'une discipline autonome et unitaire, ainsi que le mythe d'une théorie de l'apprentissage comme processus cumulatif. [· · ·] La cohérence des programmes puise sa légitimité dans l'organisation rationnelle des contenus [· · ·] conduite selon des critères épistémologiques du mathématicien et non de ses « apprentis ». [· · ·] Les difficultés, voire les échecs, dans le cadre et la contrainte d'une pédagogie de masse, nécessitent une approche différente.*
>
> *[9], page 4*

Quelle est cette approche ?

> *[Les problématiques] cherchent à intégrer, sans intention planificatrice, à la fois :*
>
> - *l'essentiel des objectifs de toute nature (connaissances, démarches, processus, comportements, habileté technique, . . .)*
> - *des contenus mathématiques susceptibles d'atteindre ces objectifs à travers des activités.*
>
> *[8], page 1.*

A chaque problématique sont associés : des objectifs, des activités, un noyau de savoirs et savoir-faire minimaux, les contenus correspondants.

Après un premier bilan (voir [9]), *les programmes des collèges s'en sont largement inspirés, introduisant davantage de cohérence entre les contenus et les méthodes, clarifiant les objectifs et donnant plus de sens aux notions étudiées. Les pratiques pédagogiques ont évolué, les échecs ont diminué, enfin l'image des mathématiques a été revalorisée.* ([2]).

Les dix problématiques proposées pour le second cycle par l'APMEP sont les suivantes :

- *Repérage.*
- *Étude de certaines configurations planes ou spatiales. Représentation et mesures associés.*
- *Étude de certaines transformations applicables à des configurations. Examen de leurs invariants : anticipation de leurs effets.*
- *Modélisation d'une situation et résolution de problèmes avec recherche de solutions vérifiant certaines conditions.*
- *Techniques algorithmiques.*
- *Changement de registres et de cadres.*
- *Recueil, traitement, consultation et communication de l'information.*
- *Traitement et représentation de données statistiques.*
- *Choix opportun et optimal des outils et méthodes dans des situations sous contraintes.*
- *Conjectures et preuves.*

Certaines problématiques sont formulées *en référence privilégiée à des objectifs généraux et d'autres en référence privilégiée à des contenus*. L'idée importante reste le fait de définir un nombre restreint de problématiques pour *harmoniser les composantes essentielles d'un curriculum et en montrer la récurrence tout le long de son développement.*

En plus d'une volonté d'intégration des objectifs–contenus–méthodes, il y a une volonté de *donner aux savoirs la puissance qui les rend opérationnels*. Les problématiques proposent aussi une réponse à la question du sens que doivent acquérir les contenus en tentant d'identifier des grandes classes de situations-problèmes susceptibles de conduire à la génération des contenus plus ou moins traditionnels : c'est ce qu'on appelle une problématisation des savoirs. Nous aborderons la question des problèmes au chapitre 3.

([2]) Ces progrès ont été confirmés par M. l'Inspecteur Général, Claude Thelot, de la *Direction de l'Evaluation et de la Prospective*, Paris, dans son intervention lors de l'Université d'Été, organisée en août 1997 par le Centre Interfacultaire de Formation des Enseignants de l'Université de Liège (CIFEN), voir [143]

Parmi les problématiques, épinglons celle qui est intitulée « *Changements de registres et de cadres* », en nous intéressant plus particulièrement aux changements de cadres. Ce terme désigne *non seulement un domaine des mathématiques et les concepts qui lui sont associés, mais également les relations entre ces objets et les formulations correspondantes.*

Par exemple, *la résolution d'un même exercice relatif aux nombres complexes pourra faire intervenir, selon la stratégie de résolution envisagée :*

- *le cadre algébrique (en se plaçant dans $\mathbb{C}$)*
- *le cadre vectoriel (en se plaçant dans le plan vectoriel complexe)*
- *le cadre de la géométrie plane (en se plaçant dans le plan affine complexe)*

Il est clair qu'un changement de cadre opportun peut faciliter la résolution d'un problème en « organisant » un transfert de compétence. Les changements de cadre apparaîtront dans la suite de ce travail comme des nœuds importants d'une hiérarchie de compétences (voir chapitres 5 et 6).

1.3.2 Les "standards" du NCTM

Le document du *National council of teachers of mathematics*, [11], explicite également un désir de changement :

> *In most democratic countries, common schools were created to provide most youth the training needed to become workers in fields, factories, and shops. [···] Thus, minimum competencies in reading, writing, and arithmetic were expected of all students, and more advanced academic training was reserved for the select few.*
> *[···] Traditional notions of basic mathematical competence have been outstripped by ever-higher expectations of the skills and knowledge of workers; new methods of production demand a technologically competent work force.*
> *[···] Henry Pollak (1987), a noted industrial mathematician, recently summarized the mathematical expectations for new employees in industry:*
>
> - *the ability to set up problems with the appropriate operations,*
> - *knowledge of a variety of techniques to approach and work on problems,*
> - *understanding of the underlying mathematical features of a problem,*
> - *the ability to work with others on problems,*
> - *the ability to see the applicability of mathematical ideas to common and complex problems,*
> - *preparation for open problem situations, since most real problems are not well formulated,*
> - *belief in the utility and value of mathematics.*
>
> *[11], pages 3 et 4.*

On le voit particulièrement dans ce deuxième extrait : c'est le besoin (économique et social) de massifier l'éducation qui amène à remettre en cause la nature linéaire des programmes d'enseignement des mathématiques.

Il s'agit donc pour le NCTM de

1. identifier des « standards » du cursus scolaire, aussi bien en termes de contenus que d'objectifs,

2. les décrire et les illustrer, rapportés à trois niveaux d'apprentissage,
3. décrire l'évolution dans l'approche d'un même standard en passant d'un niveau à un autre,
4. définir des règles d'évaluation basées sur ces standards.

Parmi la liste des standards ainsi définis, quatre sont communs aux différents niveaux et sont en fait plus proches d'objectifs généraux :

- *mathematics as problem solving,*
- *mathematics as communication*
- *mathematics as reasoning*
- *mathematical connections*

Les autres standards sont plutôt des domaines incluant une description de plus en plus morcelée des contenus. Pour les années n°9 à 12 :

- *algebra,*
- *functions,*
- *geometry from a synthetic perspective,*
- *geometry from an algebraic perspective,*
- *trigonometry,*
- *statistics,*
- *probability,*
- *discrete mathematics,*
- *conceptual underpinnings of calculus,*
- *mathematical structure*

A nouveau, nous retrouvons la difficulté d'intégrer complètement les contenus et les objectifs.

Parmi les standards généraux, *mathematical connections* reprend explicitement nos préoccupations concernant les transferts. Il est détaillé comme suit :

1. *recognize equivalent representations of the same concept,*
2. *relate procedures in one representation to procedures in an equivalent representation,*
3. *use and value the connections among mathematical topics,*
4. *use and value the connections between mathematics and other disciplines.*

Ce standard est plus ou moins équivalent à la problématique « changements de cadres » de l'APMEP. Le but est de relier les différentes représentations des concepts et procédures entre eux, reconnaître les relations entre différents sujets des mathématiques, utiliser les mathématiques dans d'autres activités y compris dans la vie quotidienne. Lorsqu'ils maîtrisent ces relations, les élèves sont en mesure de limiter le nombre de concepts et techniques isolés à retenir, des transferts systématiques leur permettant de reconstituer au besoin les informations qui leur manqueraient. Selon une expression déjà ancienne, il s'agit de montrer et d'exploiter « le caractère unitaire de la mathématique d'aujourd'hui ».

Les « standards NCTM » et les « problématiques APMEP » ne coïncident évidemment pas, mais les points communs entre eux d'une part, avec la philosophie des « compétences » belges d'autre part, sont notables. Outre l'analogie entre « Mathematical connections » et « Changements de registres et de cadres », nous rapprochons notamment

- « Mathematics as problem solving » (USA) de « Modélisation d'une situation et résolutions de problèmes avec recherche de solutions vérifiant certaines conditions » (France).
- « Mathematics as communication » (USA) de « Formation au recueil, au traitement, à la consultation et à la communication de l'information » (France),
- « Mathematics and reasoning » (USA) de « Conjectures et preuves » (France).

1.3.3 Le plan d'études suisse

En Suisse, le « Plan d'études cadre pour les écoles de maturité », [14], s'exprime également en termes de « compétences ». Il distingue des compétences sociales, intellectuelles, communicatives, de développement de la personnalité, concernant les méthodes de travail. Comme les textes français et américain, il remet en cause l'organisation traditionnelle de l'apprentissage des contenus :

> *Pendant longtemps, il était absolument impossible d'organiser un enseignement scolaire autrement que par le truchement des contenus. Un rapide coup d'œil jeté sur ce type de planification révèle à l'évidence qu'elle mène à leur atomisation et à leur déconnexion. Cette forme d'organisation devenait déjà plus efficace, lorsque les contenus étaient orientés vers des objectifs, c'est-à-dire mis en relation avec autre chose qu'eux-mêmes. [· · ·] Les objectifs, s'ils servent à mettre en perspective les contenus, doivent être choisis dans le champ d'expérience des élèves.*
>
> *[14], page 136*

1.3.4 Le document du *School curriculum and assessment authority*

Le document anglais, [13] est plus orienté vers l'évaluation que vers l'apprentissage lui-même. En particulier, il mentionne seulement des compétences à évaluer, tout en mentionnant que *Knowledge, understanding and skills are closely linked.* Les cinq objectifs à évaluer sont les suivants :

> *Candidates should be able to*
>
> 1. *recall, select and use their knowledge of appropriate mathematical facts, concepts and techniques in a variety of contexts;*
> 2. *construct rigorous mathematical argument and proofs through an appropriate use of precise statements, logical deduction and inference and by the manipulation of mathematical expressions, including the construction of extended arguments for handling substantial problems presented in unstructured form;*
> 3. *use and understand the process of simple mathematical modelling with reference to one or more application areas. This includes abstractions from real-world situations to mathematical descriptions; selection, use and evaluation of mathematical models including critical appreciation of the assumptions made; interpretation, justification and presentation of the results in a form relevant to the original problem;*
> 4. *read critically and comprehend a mathematical argument or an example of the application of mathematics;*
> 5. *appreciate how to use appropriate technology, such as calculators or computers, as a mathematical tool and have an awareness of its limitations.*

On retrouve à nouveau dans ces différents points plusieurs des préoccupations déjà rencontrées dans les documents précédents.

1.4. Première synthèse : un essai de définition

Le présent travail est consacré à la définition de compétences terminales en mathématiques. L'expression « compétences terminales » est définie dans [1] :

Définition 1.4.1 *Compétences terminales : référentiel présentant de façon structurée les compétences dont la maîtrise à un niveau déterminé est attendue à la fin de l'enseignement secondaire.*

Puisque le mot « compétence » désigne aussi bien des savoirs que des savoir-faire, nous ne nous aventurons pas trop en précisant :

> Les compétences terminales en mathématiques sont **les connaissances et les comportements** que les élèves doivent être capables de mobiliser dans l'étude de situations mathématiques significatives, lorsqu'ils quittent l'enseignement secondaire.

Une telle définition demande, comme préalable, d'expliciter la spécificité du savoir mathématique, sa raison d'être et d'étudier par quel(s) processus se réalise l'apprentissage des savoirs et des savoir-faire dans le domaine mathématique ... Elle entraîne aussi que les compétences terminales doivent être au centre de l'organisation de l'enseignement : dans la définition des contenus, dans l'activité des élèves, dans la méthodologie mise en œuvre par le professeur et — évidemment — dans l'évaluation.

De façon précise, il convient de répondre à plusieurs questions, inspirées de l'intervention de J. Beckers, [30] lors de l'Université d'Été organisée à Liège par le CIFEN :

- De quelles démarches essentielles les élèves doivent-ils être capables dans l'étude de situations mathématiques significatives ?
- Quels contenus retenir pour l'exercice de ces démarches essentielles ? Dans ce cas, y a-t-il des contenus incontournables, et pourquoi le sont-ils ?
- Comment organiser le cours de mathématique de façon que les élèves acquièrent de façon intégrée les démarches essentielles et les contenus incontournables ?
- Comment évaluer l'acquisition des compétences retenues ?

D'après la définition 1.4.1, il ne s'agit pas seulement de dresser une liste de compétences, il s'agit aussi de les structurer. Clairement, cette structuration — nous pouvons aussi parler de hiérarchisation — doit être conçue de façon à contribuer à la mise au point de réponses aux questions précédentes.

Mais une question préliminaire doit être abordée, dont la réponse conditionne les réponses aux questions précédentes : *En quoi consiste l'activité mathématique, quelles sont sa spécificité et sa raison d'être ?* C'est ce point que nous aborderons au chapitre 2.

Références

[1], [2], [3], [4], [12], [122], [11], [14], [9], [13], [8], [143], [30].

Chapitre 2

L'activité mathématique

2.1 La mathématique 25
2.2 L'activité du mathématicien 26
2.3 Une fonction culturelle et sociale pour la mathématique 28
2.4 Deuxième synthèse : une compétence terminale 31

2.1. La mathématique

On définissait jadis la mathématique comme étant *la science des nombres et de l'étendue*. Aujourd'hui, certains disent que c'est la *science des modèles* et qu'elle consiste en *l'observation et le codage de régularités dans le monde des objets et des symboles*. Mais pour le « grand public », la mathématique est d'abord une discipline *morte* dont le contenu est à étudier sans trop chercher à comprendre.

Il importe que l'école explicite la spécificité du savoir mathématique et en particulier qu'elle fasse passer le message que la mathématique est d'abord une *activité*. Mais en quoi consiste celle-ci ?

2.2. L'activité du mathématicien

Qu'est-ce qui constitue l'essentiel de l'activité du mathématicien, tant dans ses rapports avec d'autres domaines de l'activité humaine, que dans son travail purement mathématique ?

Depuis longtemps, une opinion fort répandue parmi les mathématiciens définit le principal moteur de l'activité mathématique comme étant la résolution de problèmes.

> *What does mathematics* ***really*** *consist of ? Axioms (such as the parallel postulate)? Theorems (such as the fundamental theorem of algebra)? Proofs (such as Gödel's proof of undecidability)? Concepts (such as sets and classes)? Definitions (such as the Menger definition of dimension)? Theories (such as category theory)? Formulas (such as Cauchy's integral formula)? Methods (such as the method of successive approximations)? Mathematics could surely not exist without these ingredients: they are all essential. It is nevertheless a tenable point of view that none of them is at the heart of the subject, that the mathematician main reason for existence is to solve problems, and that, therefore, what mathematics* ***really*** *consists of is problems and solutions.*
>
> *Paul Halmos, [89]*

> *« Faire des mathématiques » est une activité complexe, qui met en œuvre des aptitudes variées. Un mathématicien reste dans l'exercice de sa profession lorsqu'il se livre à des travaux aussi différents que :*
>
> - *Se poser des problèmes et les résoudre. Imaginer des théorèmes et les démontrer.*
> - *Résoudre des problèmes dont il n'a pas conçu l'énoncé lui-même.*
> - *Participer à la circulation de l'information mathématique en prenant une part active à des séminaires consacrés à des travaux récents. Rédiger sous forme synthétique des résultats obtenus par d'autres chercheurs, travaillant sur des sujets voisins.*
> - *Étudier des théories classiques ou achevées. Préparer des exposés magistraux et rédiger des livres. Enseigner.*
> - *Appliquer des techniques mathématiques (calcul, programmation, méthodes graphiques, statistiques, etc).*

- *Adapter des méthodes abstraites à la solution de problèmes pratiques (sciences appliquées).*

Georges Glaeser, [76]

Si Glaeser énumère plusieurs aspects de l'activité d'un mathématicien, tous ceux qui sont familiers avec ses travaux savent que ce n'est pas par hasard que les deux premiers points qu'il mentionne concernent la résolution de problèmes. Pour qui en douterait, il précise d'ailleurs explicitement :

> L'un des principaux objectifs de l'enseignement mathématique doit être de développer chez l'élève l'aptitude à poser et résoudre des problèmes.

Avec cette dernière citation, nous avons franchi un seuil. Il ne s'agit plus seulement d'affirmer qu'un mathématicien est quelqu'un qui résout, ou qui contribue à résoudre, des problèmes, certains issus des mathématiques, d'autres non. Ce dont il est question à présent, c'est de *l'enseignement des mathématiques*.

Remarquons que Glaeser ne dit pas qu'il faut faire résoudre des problèmes de mathématiques par les élèves, mais bien qu'il faut *développer leur aptitude à poser et résoudre des problèmes*, SANS PRÉCISER LA NATURE OU L'ORIGINE DE CES PROBLÈMES. L'objectif attribué à l'enseignement des mathématiques est donc bien plus général que « simplement » résoudre des problèmes de mathématiques. Et en associant « poser » à « résoudre », Glaeser renforce encore cette généralisation. C'est dans tous les domaines de l'activité humaine que « l'honnête jeune homme » et « l'honnête jeune femme du XXIe siècle peuvent être amenés à poser et résoudre des problèmes.

> L'objectif de l'enseignement des mathématiques, en particulier le développement de l'aptitude à poser et résoudre des problèmes, serait donc d'abord de nature culturelle et sociale.

2.3. Une fonction culturelle et sociale pour la mathématique

Le texte suivant, extrait de [4], va dans le même sens :

> *Apprendre aux jeunes à aborder un problème — même s'il relève d'un domaine non scientifique — de façon ordonnée, méthodique, sans se laisser guider par des a priori, des slogans, sans pratiquer l'à-peu-près, serait leur donner une rigueur intellectuelle et une confiance en eux-mêmes les aidant à jouer un rôle constructif dans une société qui n'a que trop tendance à pratiquer des analyses sommaires, des amalgames et des simplifications abusives.*

Il est intéressant de signaler la manière dont le mathématicien français B. Beauzamy assigne à cette conception du mathématicien comme « casseur de problèmes » un rôle en accord avec l'évolution de toute la société :

> *Jusqu'à un passé très récent, toute philosophie, tout système de pensée était « réducteur » : il ramenait, ou tentait de ramener, toute explication de l'Univers à un petit nombre de raisons ou de principes. L'exemple le plus frappant est celui de la pensée religieuse, qui donne une explication unique à tout phénomène : Dieu l'a voulu. Mais c'est aussi le cas de toutes les philosophies et des doctrines scientifiques : les physiciens, par exemple, ont cherché à déduire les forces de quelques forces fondamentales, les particules de quelques particules fondamentales.*
>
> *L'idée de base de toutes ces pensées était que, d'une manière ou d'une autre, l'Univers devait être simple, même si cette simplicité nous était cachée. Pour un mathématicien, au contraire, l'idée de base est celle de la complexité. Nous savons que nos axiomes n'ont rien de naturel ou d'obligatoire ; nous savons qu'ils ne décrivent pas complètement la réalité, et nous savons que même si nous en ajoutons d'autres, nous n'y parviendrons pas. Nous sommes habitués aux cheminements complexes pour résoudre certaines questions, et nous sommes habitués à ce que d'autres demeurent sans réponse. C'est donc, on le voit, un mode de pensée différent, qui non seulement s'accommode de la complexité, mais encore la requiert. C'est là, sans doute, la plus grande contribution que le mathématicien puisse apporter « pour éclairer l'humaine raison ».*
>
> *B. Beauzamy, [29]*

Francis Buekenhout rapportait récemment une phrase de Guy Hirsch, professeur à l'*Université Libre de Bruxelles* qui exprimait de façon très succincte une idée analogue : *la mathématique n'est pas importante parce qu'elle est utile, mais parce qu'elle est efficace*. Ne pourrait-on dire que la mathématique est comme le téléphone ou l'automobile : il est possible de s'en passer, mais dès qu'on a appris à s'en servir, on n'en est plus capable. Dans cette conception, l'activité mathématique prend une dimension culturelle. Elle est beaucoup plus qu'une discipline particulière : elle devient une *méthode* que l'on souhaiterait pouvoir appliquer chaque fois qu'un individu rencontre un problème suffisamment complexe, et cela quelle que soit la nature de ce problème. De ce point de vue, nous pouvons préciser la phrase de Glaeser :

L'un des principaux objectifs de l'enseignement mathématique doit être de développer chez l'élève des méthodes pour résoudre des problèmes.

Les problèmes à résoudre peuvent être issus de circonstances très variées. Il peut s'agir de problèmes « simples », issus de la vie quotidienne : quel emprunt faut-il contracter pour financer l'achat d'une automobile ou la construction d'une maison ? Comment interpréter les résultats d'un sondage publié par les medias ? Comment bricoler telle ou telle installation ?

Un problème — plus élaboré — peut aussi se situer dans un cadre professionnel et provenir des nécessités du développement des activités économiques, techniques et scientifiques. De la compression et transmission de données à distance à la conception de certains appareils électro-ménagers, ce sont bien souvent des résultats mathématiques récents et avancés qui fournissent la clé de la solution d'un problème pratique. Une des conséquences de cet état de choses est que

les secteurs industriel, informatique et bancaire emploient aujourd'hui beaucoup plus de mathématiciens que jadis.

Nul doute que dans ces emplois, il ne peut être question de se contenter d'appliquer des recettes de calcul !

Il serait réducteur de qualifier l'activité mathématique ainsi suscitée d'« appliquée » en omettant le fait que les problèmes posés par cette mathématique appliquée ont été, et sont encore, à la base du développement de théories fondamentales. Contentons-nous de citer les progrès récents en géométrie différentielle effectués pour résoudre des questions de physique mathématique, ainsi que les développements mathématiques élaborés pour étudier les équilibres des systèmes économiques. Dans chacun de ces cas, ce sont des problèmes issus des applications qui ont motivé les mathématiciens.

Mais — et cela reste malheureusement un phénomène peu compris par les non-mathématiciens — la mathématique est aussi « auto-motivante » en ce sens qu'elle ne peut maîtriser l'accumulation de ses résultats qu'en perfectionnant son organisation, en se structurant de plus en plus. Et cette activité suscite de nouveaux problèmes internes aux mathématiques dont la résolution a d'abord pour but de mieux comprendre les concepts manipulés, éventuellement de les généraliser en en extrayant la « substantifique moelle ».

Pour le non-mathématicien, l'activité de résolution de problèmes est d'abord à considérer comme un moyen de formation de la personnalité et d'intégration dans la société d'aujourd'hui. Sur la base d'une étude comparative des programmes de mathématique de plusieurs pays, le document [3], note aussi que

> *une finalité essentielle de l'enseignement est de permettre l'insertion des futurs adultes dans le monde économique d'aujourd'hui et, dans ce cadre, la capacité de résoudre des problèmes apparaît comme un facteur essentiel de réussite.*

Ces points de vue sont d'ailleurs clairement apparus plus haut lorsque nous avons résumé les « problématiques » françaises, les « standards » américains et le « plan d'étude » suisse. Ils nous permettent de coucher par écrit une deuxième synthèse partielle en situant la résolution de problèmes comme une compétence mathématique essentielle.

2.4. Deuxième synthèse : une compétence terminale

Puisque l'essentiel de l'activité mathématique est la résolution de problèmes, et puisqu'il s'agit là, non d'appliquer de manière routinière une accumulation de résultats ou de techniques mais bien de mettre en œuvre une méthode de pensée, et puisque cette méthode de pensée est susceptible d'être utilisée dans de nombreuses situations non nécessairement mathématiques, nous ne pouvons que considérer que

> La résolution de problèmes est une compétence mathématique terminale à considérer comme particulièrement importante.

Cette compétence est importante pour tous les élèves, quel que soit leur niveau de formation, car elle peut être utile et nécessaire pour tous les élèves.

Ce n'est cependant pas la seule compétence mathématique à envisager. Car c'est une compétence *globale*, peut-être un peu trop globale. L'analyser permet de distinguer un grand nombre d'autres compétences qui lui sont subordonnées, telles que prendre connaissances de théories et de résultats existants, rédiger un texte de type mathématique, ... Ainsi, la plupart des compétences mentionnées par Glaeser peuvent s'exercer à l'occasion de la résolution de problèmes et lui sont donc subordonnées, même si beaucoup de ces compétences peuvent aussi s'exercer de façon autonome.

Dans les chapitres suivants, nous examinerons quelles démarches sont utilisées pour résoudre des problèmes, quelles compétences subordonnées elles mobilisent et comment concevoir un enseignement mettant en œuvre des méthodes de résolution de problèmes. Mais il convient d'abord de décrire ce que nous savons actuellement du processus d'apprentissage de la mathématique. C'est ce que nous allons aborder au chapitre 3.

Références

[89], [76], [4], [29], [3].

Chapitre 3

L'apprentissage de la mathématique

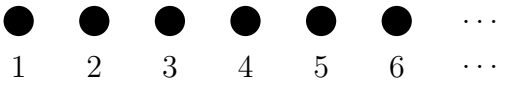
3.1 Introduction 33
3.2 Des procédures, des structures et des modèles mentaux 36
3.3 Du procédural au structural 45
3.3.1 Les trois phases de Sfard 46
3.3.2 Les modèles mentaux 48
3.3.3 La compression des idées 50
3.4 Troisième synthèse : retour aux problèmes 53

3.1. Introduction

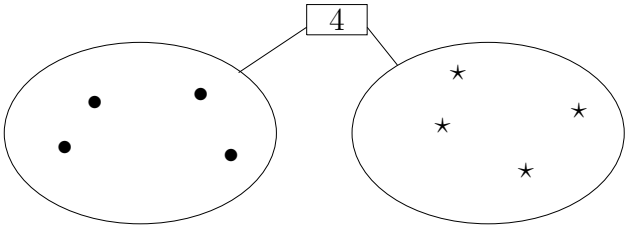
Depuis Piaget et ses travaux sur la psychologie génétique, (voir par exemple [120]), l'attention s'est portée sur le phénomène psychologique de l'apprentissage. Il n'est pas question de présenter ici une vue d'ensemble de ces travaux complexes et aux contours souvent encore imprécis. Nous n'en avons ni la possibilité, ni la capacité. Nous nous limiterons à mettre en évidence, d'une façon sans doute quelque peu naïve, quelques idées qui nous semblent pouvoir être mises à profit par l'enseignant lors de la préparation de ses cours ou de l'observation de ses élèves.

La question est de savoir par quels processus mentaux un concept peut se développer, puis arriver à maturation.

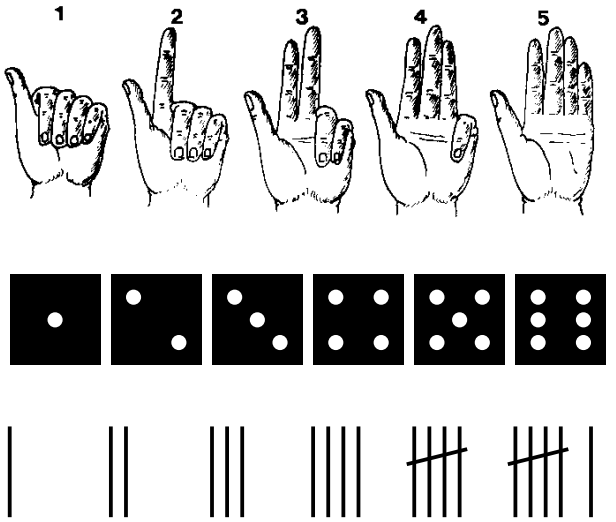
Observons un jeune enfant qui apprend à parler. Son vocabulaire augmente progressivement. Il rencontre notamment des noms de nombres. Très tôt, il peut distinguer un de deux. Peu à peu, il retient la *litanie* des nombres : un, deux, trois, quatre, ... sans bien savoir ce que tous ces mots veulent dire. Toujours de façon progressive, il commence à compter des objets en associant à chacun d'entre eux ce que nous appelons un nombre, mais qui, pour lui, joue plutôt le rôle de numéro :



Dans cette phase, les mots *un, deux, trois, ...*, ont une signification *ordinale* et non *cardinale*. L'enfant est encore loin du *concept* de nombre. Mais lorsque la *procédure* de comptage a été exécutée un nombre suffisant de fois, il prend conscience de ce qu'ont de commun tous les ensembles de deux objets, puis de trois objets, etc.



Simultanément, des activités diverses, notamment des jeux, le mettent en présence d'images « standard » qui vont devenir des *images mentales*.



L'accumulation d'informations numériques sous diverses formes, la formation d'images mentales, l'exécution de procédures de comptage d'abord, de calcul ensuite, entraînent une maturation, une *condensation* qui ont pour conséquence la conceptualisation, c'est-à-dire la création dans son univers mental d'un *objet abstrait*. Malgré ce caractère abstrait, cet objet possède pour l'enfant une existence bien réelle.

Dans le cas de l'apprentissage des nombres naturels, dans un premier temps ceux-ci acquièrent individuellement le statut d'objet. Ce qui caractérise le fait que ce statut a été atteint par un nombre est la possibilité pour l'enfant de lui appliquer avec aisance des procédures, par exemple de le décomposer lorsqu'il intervient dans une addition qui nécessite un « passage à la dizaine supérieure » : pour calculer $8 + 7$, on décompose 7 en $2 + 5$.

Dans un second temps, ce seront des « paquets » de naturels d'un ordre de grandeur donné qui acquièrent simultanément le statut d'objet. Il serait évidemment absurde d'imaginer que *tous* les nombres naturels deviennent jamais familiers à quiconque. Le degré de familiarité d'un individu — quel que soit son âge — avec des nombres dépend des occasions qu'il a de les manipuler.

Pour la plupart d'entre nous, les nombres supérieurs à quelques billions restent des entités mystérieuses, mais dont nous savons qu'elles existent et dont nous acceptons qu'elles aient les mêmes propriétés que les nombres d'usage courant. Cela signifie que le concept de nombre naturel lui-même s'est formé, indépendamment de valeurs particulières et malgré l'impossibilité de « *connaître* » tous les naturels. A ce moment, il devient possible de reconnaître un naturel dans de nouvelles situations. Par exemple, il devient possible de considérer qu'une lettre représente un naturel. Ce sont alors d'autres concepts qui vont entrer en formation, notamment celui de variable.

La formation d'un concept, qui vient d'être décrite dans le cas des nombres naturels, passe toujours par un certain nombre de phases que nous pouvons décrire schématiquement par le « slogan »

Du procédural au structural

Dans cette expression, nous considérons les mots *structural* et *conceptuel* comme synonymes. Nous allons reprendre ci-dessous des idées dues à A. Sfard, [134], D. Tall [142] et d'autres auteurs qui ont été exposées notamment dans l'article [108] dont nous reproduisons de larges extraits.

3.2. Des procédures, des structures et des modèles mentaux

Imaginez que vous devez expliquer de la façon la plus précise possible à un enfant ce qu'est un cercle. Qu'allez-vous lui dire ? Il y a gros à parier que vos explications ne seront pas identiques selon que vous vous adressez à un enfant de 6 ans ou à un autre de 13 ans ou 14 ans.

Dans le premier cas, l'enfant a déjà vu des cercles, il en possède une image mentale mais est sans doute incapable d'en dessiner un de façon précise. Votre explication va se situer au niveau *procédural* :

> *Un cercle est une courbe dessinée à l'aide d'un compas (ou de tout objet ayant une forme circulaire tel qu'un verre, une tasse, . . .) .*

Dans le second cas, non seulement l'enfant possède une image mentale de ce qu'est un cercle, mais il est probablement déjà capable d'en dessiner un. Il s'agit à présent de lui en décrire les propriétés. Votre explication se situera au niveau *structural* :

> Un cercle est l'ensemble des points d'un plan situés à une distance donnée d'un point donné.

Bien entendu les deux énoncés n'ont pas le même statut : l'énoncé n°2 est une véritable définition mathématique, ce que n'est pas l'énoncé n°1. Mais tous deux nous permettent de réaliser notre objectif : expliquer, avec une précision raisonnable, ce qu'est un cercle. Simplement nous ne les utilisons pas dans les mêmes circonstances :

Il est facile de donner de nombreux exemples, dans les divers domaines mathématiques qui montrent la distinction entre les points de vue procéduraux et structuraux.

Les fractions

La première rencontre d'un enfant avec une fraction se fait à l'occasion d'un partage : traditionnellement, on découpe des tartes en morceaux. La fraction possède alors un statut d'*opérateur*. Très clairement on ne peut assimiler une demi-tarte à deux quarts de tarte. Cette fraction-opérateur possède donc moins de propriétés que la fraction-nombre qui émergera plus tard. Mais certaines procédures peuvent déjà lui être appliquées : il est possible de partager une demi-tarte en trois parties. La multiplication des fractions apparaît ainsi comme une procédure portant sur les fractions-opérateurs, par composition de ceux-ci.

Progressivement, la fraction va acquérir le statut de nombre. Par exemple, le résultat de l'application de la fraction-opérateur $\frac{1}{2}$ au nombre 1 est le nombre $0,5$. L'écriture d'une égalité telle que $1 \times \frac{1}{2} = 0,5$, que l'on simplifie en $\frac{1}{2} = 0,5$ (puisqu'on écrit aussi $1 \times 5 = 5$) constitue une étape dans la conceptualisation de la notion de fraction. D'autres étapes sont parcourues à l'occasion de l'introduction de nouvelles procédures. Par exemple, il est bien connu que la procédure d'addition de deux fractions est nettement plus difficile à acquérir que celle de multiplication. Cela n'est pas tellement dû aux difficultés techniques (réduction au même dénominateur, simplification) qu'au fait qu'une telle addition n'a de sens que si les fractions sont interprétées comme des nombres (quelle occasion a-t-on, à l'école primaire d'additionner deux opérateurs ?).

L'application de procédures sophistiquées à une « notion » n'est possible que si celle-ci a atteint un niveau conceptuel suffisant. En même temps, elle renforce cette conceptualisation.

Les variables, les formules et l'égalité

L'utilisation de lettres dans des formules se rencontre dès l'école primaire. Ainsi, l'aire d'un triangle est donnée par la formule

$$\frac{b \cdot h}{2}$$

Par là, on peut dire que l'élève a rencontré la *notion* de variable : une lettre qui tient la place d'un nombre. Mais le *concept* de variable n'est pas nécessairement formé pour autant. Dans la formule ci-dessus, les lettres jouent le rôle d'abréviations, elles n'interviennent dans une procédure que pour y être immédiatement éliminées par remplacement par des valeurs numériques. La notion de variable n'a pas dépassé le stade procédural de marqueur indiquant la place où un nombre doit être inséré.

Pour que la notion de variable atteigne le stade conceptuel chez un élève, il faut que celui-ci considère la lettre comme étant un nombre à part entière, qui peut donc intervenir dans des opérations. Comment sinon donnerait-il un sens aux phrases suivantes ?

- la fonction qui applique x sur $2x + 3$
- l'équation $5x - 7 = 3x + 8$

Par la même occasion, nous voyons qu'un autre prérequis est nécessaire : l'élève doit reconnaître que les expressions $2x + 3$ et $5x - 7$ désignent elles-aussi des nombres. Or à l'entrée de l'enseignement secondaire, il éprouve encore des difficultés à maîtriser le fait que l'expression $5 + 8$, qui ne contient pas de lettres, désigne un nombre. (Voir les résultats d'une enquête réalisée par le *Centre de Didactique des Sciences de l'Université de Mons-Hainaut*, [27], [28].) Effectivement, lors de ses premières rencontres avec le calcul numérique, l'enfant d'école primaire ne rencontre $5 + 8$ que dans le cadre d'un calcul à effectuer, calcul dont l'exécution est déclenchée par le signe $=$ qui généralement suit immédiatement. L'expression $5+8$ désigne donc exclusivement l'*opération d'addition* de 5 et 8 et non le nombre 13.

En même temps, nous constatons qu'à ce stade, le signe $=$ n'a pas le sens que lui donne le mathématicien (deux expressions sont égales si elles désignent le même objet), mais joue le rôle de « déclencheur de calcul ». Il est alors impossible de donner un sens quelconque à une égalité telle que $(5 + 8) + 2 = 5 + (8 + 2)$, (qui exprime d'un point de vue conceptuel une procédure que l'on applique en pratique : le passage à la dizaine supérieure).

Les conceptualisations de plusieurs notions sont ainsi liées :

- Les opérations de l'arithmétique élémentaire doivent passer du stade procédural (exécution de calculs) au stade structural en devenant elles-mêmes de véritables objets mathématiques. Une telle *réification* ([1]) est liée à l'étude de leurs propriétés (associativité, commutativité, etc.)
- Le signe $=$ doit passer du stade procédural de signal déclenchant un calcul au stade structural de symbole désignant une relation d'équivalence, sans doute la plus importante de toute la mathématique.
- Les lettres doivent passer du stade procédural de marqueur indiquant l'emplacement où insérer un nombre, au stade structural de variable qui est un nombre dont la valeur n'est pas précisée mais peut intervenir dans des calculs.

Simultanément, on constate que certains symbolismes deviennent ambivalents : $5 + 8$ désigne à la fois le nombre 13 et l'opération d'addition de 5 et de 8. La maîtrise par l'élève de cette flexibilité du symbolisme est un des facteurs de réussite.

Décrivons brièvement quelques exemples supplémentaires.

([1]) Du latin *res*, la chose.

Les fonctions

Le premier contact avec la notion de fonction s'effectue à travers des procédures : pendant longtemps une fonction est une règle, un algorithme qui permet de calculer $f(x)$ quand on connaît x. Bien souvent la fonction s'identifie à la formule qui résume l'algorithme (la fonction « $2 + 3x - 4x^2$ »). Les premières représentations graphiques de fonctions mettent en place des images mentales primitives. Bien du chemin est à parcourir avant d'arriver à la définition ensembliste de fonction. (Une fonction f de A dans B est une partie de $A \times B$ qui ne comprend pas deux couples de même origine.)

Les équations

Quand il apprend à résoudre une équation du type

$$x + 37 = 25$$

un élève n'a besoin que d'effectuer le calcul $25 - 37$. Son activité se situe au niveau procédural. Mais rapidement, il faudra manipuler les équations, remplacer $2x + 3 = 4 - x$ par $3x = 1$. On parlera d'équations équivalentes et la procédure de résolution consistera en une suite parfois longue de remplacements d'une équation (ou d'un système d'équations) par une équation équivalente (ou un système équivalent). Les équations ne sont plus alors seulement des procédures, elles sont devenues de véritables objets. L'étape ultime de l'accession au stade conceptuel pour les équations est achevée lorsqu'on accepte de considérer $x = 3$ comme étant une équation comme les autres, à ceci près que sa résolution est triviale.

Les transformations du plan

Au début du secondaire, un élève ne conçoit pas qu'une transformation du plan (par exemple une isométrie) s'applique à l'intégralité du plan. Il ne l'applique d'abord qu'à des figures simples telles que des polygones, (encore dans ce cas ne détermine-t-il que les images des sommets). Appliquer une transformation géométrique à un point s'effectue en manipulant des instruments (règle, compas). C'est bien là un stade procédural. Le stade conceptuel ne sera atteint que lorsque la transformation sera reconnue exister indépendamment de toute construction, ce qui implique qu'elle soit perçue comme s'appliquant à l'intégralité du plan. A ce moment, elle est devenue un véritable objet mathématique, auquel on peut appliquer de nouvelles procédures. A ce moment aussi, on peut considérer et structurer l'ensemble des isométries du plan.

Les limites

En analyse, la notion de limite d'une suite de nombres peut être rencontrée d'abord à travers des procédures. On peut par exemple rechercher des approximations de plus en plus précises d'une racine d'une équation par la méthode de bissection. On peut ensuite rencontrer la notion de limite d'une fonction en un point a au stade procédural en considérant des suites x_n convergeant vers a et les suites correspondantes des valeurs $f(x_n)$. Quant à la formulation traditionnelle en ε, δ, elle relève évidemment du stade structural.

L'implication

La manipulation correcte de l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est évidemment essentielle pour l'apprentissage du raisonnement et de la démonstration. Comme toutes les autres notions, celle-ci est rencontrée d'abord au stade procédural : « de $\mathcal{A}$, je peux déduire $\mathcal{B}$ ». C'est suffisant pour de nombreux raisonnements. Mais dans cette interprétation, l'implication n'est pas un objet mathématique, il n'est pas possible de lui attribuer une valeur de vérité : les phrases « l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie » et « l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est fausse » se situent au niveau mathématique, alors que « de $\mathcal{A}$ je peux déduire $\mathcal{B}$ » et « de $\mathcal{A}$ je ne peux pas déduire $\mathcal{B}$ » relèvent du niveau métamathématique. Dans un raisonnement, si « je ne peux pas déduire » alors généralement je ne fais rien, ou je fais autre chose, mais de toutes façons je cesse de considérer cette implication-là.

Or, il arrive que l'on doive manipuler des implications et notamment les nier. Si l'implication n'a pas acquis un statut d'objet mathématique, en l'occurrence celui d'*opérateur binaire* sur l'ensemble $\{vrai, faux\}$, il est bien difficile de donner une signification à une phrase telle que

$$\text{non } (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) = \mathcal{A} \text{ et non } \mathcal{B}$$

ou même à accepter que l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, et sa contraposée non $\mathcal{B} \Rightarrow$ non $\mathcal{A}$ sont équivalentes (toutes deux vraies ou toutes deux fausses).

Les quantificateurs

Les quantificateurs $\forall, \exists$ ont « mauvaise réputation », qu'ils soient écrits en symboles ou en français. Personne ne peut cependant contester leur nécessité même si dans certains sujets ils jouent un rôle limité. Il n'est en effet pas nécessaire d'écrire

$$\forall x \forall y : x + y = y + x$$

ou

$$\text{quels que soient } x \text{ et } y,\ x + y = y + x$$

pour faire comprendre que l'addition est commutative, l'égalité $x + y = y + x$ suffit. Le fait que les nombres x et y ne sont pas précisés permet de laisser implicites les quantificateurs universels (bien que d'un point de vue formel, il s'agisse là d'une erreur).

Les difficultés apparaissent surtout lorsqu'une phrase mathématique comporte à la fois des quantificateurs universels et existentiels. Ainsi, retirer les deux premiers quantificateurs de la définition de la continuité

$$(f \text{ continue en } x_0)$$

$$\Updownarrow$$

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ :\ |x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon)$$

retire tout sens à cette phrase. Remarquons aussi que cette définition est tout sauf procédurale : l'existence d'un δ adéquat est affirmée sans qu'aucun moyen soit donné pour le calculer. Une *approche procédurale de la continuité* devrait permettre de donner plus de sens aux quantificateurs qui y figurent.

En informatique aussi ...

L'évolution du procédural vers le structural qui se manifeste à propos de tout sujet mathématique est également présente en informatique. Les premiers programmes informatiques consistaient en une procédure (parfois monstrueuse) constituée de nombreuses instructions parfois enchevêtrées (on parlait alors de *programmation spaghetti*). Afin de maîtriser les programmes, les informaticiens ont ressenti la nécessité d'utiliser une *programmation structurée* en découpant notamment les grosses procédures en sous-procédures plus faciles à maîtriser. La distinction entre *variable locale* et *variable globale* a renforcé l'autonomie des sous-procédures, leur a associé des *structures de données* et a permis l'apparition de la *programmation récursive*.

Le premier contact avec la programmation récursive trouble souvent l'étudiant qui ne voit pas comment fonctionne la procédure de calcul. En fait celle-ci utilise les propriétés de l'objet à calculer plutôt que sa définition alors qu'en *programmation itérative*, c'est celle-ci qui joue le rôle déterminant.

Exemple 3.2.1

En programmation itérative, le calcul de la factorielle d'un naturel n est effectué à l'aide d'une initialisation $f = 1$, puis d'une boucle qui traduit la définition de $n!$:

$$\textit{pour } i \textit{ de } 2 \textit{ à } n : f = f * i$$

En programmation récursive, ce calcul est basé sur la propriété $n! = n * (n-1)!$:

$$f(n) = \begin{cases} 1 \textit{ si } n = 0 \\ n * f(n-1) \textit{ sinon} \end{cases}$$

La programmation récursive a constitué une étape vers la conceptualisation de la programmation. Avec l'introduction de la *programmation orientée objet*, le stade conceptuel est incontestablement atteint. Dans un tel langage, un objet est une structure comportant à la fois des données et des procédures qui manipulent ces données. De plus un objet étant désigné par un symbolisme propre peut même être considéré comme un *procept*, néologisme que nous rencontrerons dans la suite de ce chapitre.

Les exemples qui précèdent avaient pour but de montrer que le savoir mathématique se constitue normalement *du procédural au structural*. L'introduction d'un nouveau savoir se fait généralement soit sous forme d'une procédure, soit par l'intermédiaire d'une procédure. Un modèle mental ([2]) plus ou moins élaboré peut préexister à cette introduction. Dans ce cas les procédures soumises aux élèves ont notamment pour effet de le faire évoluer. Dans d'autres circonstances l'apparition d'un modèle mental sera due à l'application des procédures.

([2]) L'idée d'objet mental a été mise en évidence par H. Freudenthal, voir [73].

Le savoir évolue jusqu'au stade où il se constitue en un nouvel objet mathématique. De nouvelles procédures pourront alors être appliquées à cet objet, et le processus recommence. Par exemple lorsque la vision procédurale des fonctions numériques s'est muée en l'objet *fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, il devient possible de considérer des procédures qui s'appliquent à une ou des fonctions en tant qu'objets. On peut par exemple les additionner, les dériver. La procédure de dérivation va se transformer elle-même en un *opérateur de dérivation*, objet mathématique susceptible d'intervenir dans des procédures du niveau suivant, les transformations de Laplace ou de Fourier par exemple. Il n'y a aucune raison pour que ce processus s'arrête jamais.

Une fois formé, un concept devient autonome par rapport aux procédures qui ont contribué à sa création : je peux concevoir un cercle même sans disposer de compas. Et je peux transposer le concept à d'autres situations en appelant encore *cercle* l'ensemble des points situés à une distance donnée d'un point fixe dans des situations où le référentiel n'est pas le plan usuel. Il pourrait par exemple être restreint aux nœuds d'un quadrillage. Si le concept a été réellement acquis, l'objet *cercle* du quadrillage hérite sans difficulté de certaines propriétés de l'objet *cercle* du plan.

L'apprentissage de la mathématique peut donc être vu comme une succession, dans un parcours en spirale, de phases qui alternent l'acquisition de nouvelles procédures et celles de nouveaux concepts.

Notons aussi que des procédures peuvent être équivalentes en ce qu'elles fournissent le même résultat à partir de données identiques. Ce fait amène certains auteurs (voir [83]) à distinguer « processus » et « procédure ». Un processus serait un ensemble de procédures qui à partir des mêmes données, fournissent le même résultat. Elles amèneraient donc aussi la conceptualisation du même objet nouveau. Cette distinction généralise celle que nous pourrions opérer entre « fonction » et « algorithme » : pour calculer la fonction $x \mapsto 3x^2 + 2x + 5$, nous pouvons utiliser (au moins) les deux algorithmes différents suivants

$$\begin{array}{l} y \leftarrow x * x \\ y \leftarrow y * 3 \\ z \leftarrow 2 * x \\ z \leftarrow z + y \\ z \leftarrow z + 5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} y \leftarrow 3 * x \\ y \leftarrow y + 2 \\ y \leftarrow y * x \\ y \leftarrow y + 5 \end{array}$$

Les procédures

1. Une procédure est une succession d'actions réalisées en vue d'obtenir un résultat (une sortie) à partir de données (des entrées).
2. Une procédure a un caractère dynamique : son déroulement a une dimension temporelle.
3. Plusieurs procédures peuvent être enchaînées, permettant ainsi la construction de procédures complexes à partir de procédures élémentaires.
4. Une procédure peut
   - soit introduire, par construction un nouvel objet : le comptage fait apparaître les nombres naturels
   - soit se transformer elle-même en un nouvel objet : la fraction, la transformation géométrique, l'équation ...

Les concepts

1. Un concept est un objet auquel peuvent s'appliquer des procédures.
2. Un concept a un caractère statique : il est intemporel.
3. Plusieurs concepts peuvent se combiner pour en engendrer de nouveaux à l'aide de procédures adéquates.
4. Plusieurs procédures peuvent correspondre au même concept.
5. Un concept est autonome par rapport aux procédures qui l'ont engendré.

Un concept admet aussi souvent plusieurs représentations et ne peut donc s'identifier à aucune d'entre elles. Le concept de nombre rationnel ne se réduit ni aux fractions, ni aux expressions décimales limitées, de même que le concept de nombre réel ne s'identifie ni aux expressions décimales illimitées, ni aux fractions continues, ni encore aux limites de suites, aux classes d'équivalence de suites de Cauchy, ou aux coupures de Dedekind. Ces notions constituent autant de facettes différentes du concept de nombre réel, de sorte que toute définition trop précise de ce concept est réductrice. Nous retrouvons ici une ambivalence et une flexibilité dont la maîtrise conditionne la réussite en mathématique.

Une autre manifestation de flexibilité réside dans le fait que si un concept est autonome par rapport à la ou aux procédures qui l'ont engendré, il leur reste néanmoins associé. Par exemple après que le concept de fonction se soit constitué, il demeure possible d'utiliser une fonction comme une procédure de calcul de valeurs numériques.

Selon les circonstances, un concept peut donc être utilisé soit comme un *outil* par exemple lors de la résolution d'un problème, soit comme un *objet* quand on le considère dans ses relations avec d'autres concepts. Cette *dialectique outil-objet* a été étudiée par Régine Douady dans [63] qui en fait, avec les *changements de cadres* (dont nous parlerons plus loin) et les *résolutions de problèmes* un procédé de *construction effective des connaissances mathématiques*.

La dualité outil-objet a aussi amené Gray et Tall à introduire dans [83] le néologisme *procept* (procédure-concept) pour désigner l'entité constituée par un concept dans son double rôle d'outil et d'objet, dès qu'un *symbole* a été choisi pour la désigner.

EXEMPLE 3.2.2 *Le procept* $37+78$ *désigne tant la procédure d'addition de 37 à 78 que le nombre 115 qui est la somme de 37 et 78.*

3.3. Du procédural au structural

Si l'apprentissage des mathématiques suppose, pour chaque élément de savoir un parcours du procédural au structural, la question qui se pose alors est de déterminer comment ce parcours se réalise, quelles en sont les étapes, quelles activités le ponctuent, et finalement, comment construire un enseignement qui en facilite la réalisation par l'élève. Le processus à analyser ne relève pas de la mathématique, mais de la psychologie cognitive. Il serait bien hasardeux de prétendre apporter des réponses simples et claires aux questions posées. Nous ne pouvons qu'essayer de faire le point sur le sujet.

Intéressons-nous donc à l'activité de structuration, en nous inspirant des travaux de A. Sfard, [134], E. Gray et D. Tall, [83], [142].

3.3.1 Les trois phases de Sfard

A. Sfard distingue trois phases dans la formation d'un concept, phases qu'elle appelle *intériorisation*, *condensation* et *réification* .

- Au cours de la phase d'intériorisation, l'élève se familiarise de plus en plus avec la notion étudiée, et cela à travers les procédures élémentaires qui la manipulent. Il ne quitte donc pas encore le stade procédural. Par exemple, lors de l'apprentissage du concept de fonction, il calcule de nombreuses valeurs de fonctions, il analyse les algorithmes utilisés, il rencontre la notion de variable, accepte qu'une lettre puisse prendre des valeurs différentes.
- Pour que la phase de condensation puisse avoir lieu, il faut que l'élève ait poussé l'analyse suffisamment loin pour distinguer l'essentiel de l'accessoire, les détails techniques des idées importantes. Sa connaissance des procédures s'organise (se structure). Il perçoit une procédure comme composée d'unités interconnectées dont il connaît l'usage propre et dont il peut retrouver les détails de fonctionnement sans devoir les mémoriser. Il peut ainsi débarrasser son cerveau de ces détails et se concentrer sur la structure. On peut considérer que le concept est apparu même s'il n'est pas encore maîtrisé.

  Dans le cas des fonctions, la phase de condensation est marquée par le fait que l'élève devient capable de se faire une idée globale du comportement de la fonction considérée, d'en dessiner le graphe, de la manipuler, de lui appliquer une transformation. Il peut par exemple transformer le graphe de la fonction $f(x)$ en celui de la fonction $f(kx)$ ou de la fonction $f(x-2)$. Il peut aussi dessiner le graphe de la fonction réciproque.
- L'élève en reste au stade de condensation tant que le concept reste dépendant de la procédure qui lui a donné naissance. Ce n'est que lorsque ce cordon ombilical tombe que s'opère la *réification* : l'élève conçoit le nouveau concept comme une entité autonome ayant désormais un caractère statique, la structuration s'achève, les liens entre différentes représentations et entre différents contextes d'apparition sont établis, les objets nouvellement conceptualisés s'organisent en structures, d'autres processus pourront être définis qui les prendront comme données.

Par exemple, une fonction numérique peut désormais être reconnue comme une formule, aussi bien que comme un ensemble de couples ou comme une courbe coupée en un seul point par toute parallèle à l'axe des ordonnées, et l'élève est capable de passer d'un de ces registres à l'autre. De plus, cette fonction peut aussi désormais être reconnue comme un élément d'un ensemble, ce qui permet de considérer en particulier l'intégrale comme une fonction définie sur un ensemble de fonctions. A ce moment, un nouveau processus de structuration (portant sur l'intégrale), du niveau suivant, peut commencer.

3.3.2 Les modèles mentaux

Nous avons déjà mentionné la possibilité que dès avant le début du processus de transition du procédural vers le structural, l'élève soit équipé d'un modèle mental correspondant plus ou moins au concept à acquérir. Si ce n'est pas le cas, un tel modèle mental pourra apparaître durant les phases d'intériorisation et de condensation.

Sur la base des exemples qui lui ont été montrés, l'élève réalise — plus ou moins consciemment — un inventaire de propriétés qui lui semblent caractéristiques du nouveau concept et utilise cet inventaire, plutôt que la définition précise, lorsqu'il se trouve devant la tâche d'identifier un exemplaire du nouveau concept. La liste des propriétés retenues peut être incomplète comme elle peut comporter des propriétés se déduisant les unes des autres. Elle est fortement dépendante du choix d'exemples effectué par l'enseignant, ainsi que de l'importance que celui-ci a accordée aux éléments constitutifs du nouvel objet.

Par exemple, un élève de la fin de l'école primaire peut reconnaître un rectangle à plusieurs caractéristiques :

- *un rectangle possède quatre côtés,*
- *ses quatre angles sont droits*
- *les côtés opposés ont même longueur*

Ce modèle mental est redondant en ce sens qu'il n'est pas nécessaire de vérifier toutes les propriétés qui ont été mentionnées. Dans une phase ultérieure de son évolution, l'élève apprendra qu'en effet, certaines propriétés se déduisent d'autres. Mais même s'il apprend à ne vérifier qu'un ensemble minimal de propriétés pour *démontrer* qu'un quadrilatère est un rectangle, il est très possible qu'il continue inconsciemment à se référer à l'ensemble des propriétés lorsqu'il s'efforce de reconnaître un rectangle dans les lignes constituant une figure.

Il est aussi possible que le modèle mental soit entaché d'informations parasites. Si les enseignants n'ont pas fait attention à varier la taille, les proportions et l'orientation des côtés des rectangles qu'ils placent sous les yeux de leurs élèves, ceux-ci pourraient ne pas reconnaître un rectangle dans le cas où celui-ci est fortement allongé, ou encore si ses côtés ne suivent pas les directions « horizontale ou verticale ». A l'occasion, des « conflits cognitifs » apparaissent entre le modèle mental présent chez un élève et les informations contenues dans la situation qu'il étudie. Ces conflits seront fructueux s'ils permettent de faire évoluer le modèle mental du sujet vers un modèle plus perfectionné et plus correct. Mais si l'évolution n'a pas lieu, si le modèle mental incorrect a une prégnance trop forte, un blocage très grave peut se produire.

Nous voyons que l'évolution des modèles mentaux peut constituer un élément inhérent à la construction du savoir par un processus d'affinements successifs. Ce processus s'achève lors de la phase de réification au cours de laquelle les modèles mentaux trop particuliers, ne rendant compte que partiellement du nouveau concept, doivent laisser la place à celui-ci dans sa forme (au moins provisoirement) finale.

Dans [24], Bakar et Tall rapportent les résultats d'une enquête menée auprès de deux groupes d'étudiants afin de déterminer leurs modèles mentaux du concept de fonction. Dans le premier groupe, constitué d'élèves de 16 à 17 ans de la fin de l'enseignement secondaire anglais, ils constatent l'existence de modèles exigeant que les fonctions soient définies sur l'intégralité de la droite réelle, ou encore de modèles qui acceptent qu'une fonction prenne plusieurs valeurs en un point. C'est ainsi qu'un cercle est considéré comme pouvant être le graphe d'une fonction par 64% d'élèves de ce groupe. Ces conceptions sont installées de façon durable, car elles se retrouvent dans le second groupe, constitué d'étudiants de première année universitaire en sciences mathématiques. 65% des étudiants de ce groupe considèrent également qu'un cercle peut être le graphe d'un fonction. Donner le cercle sous forme analytique, par son équation $x^2+y^2 = 1$ ne modifie pas sensiblement ce pourcentage. A noter aussi que dans ce groupe, l'équation $y = 4$ n'est reconnue comme définissant une fonction que par 30% des étudiants, cependant que la droite d'équation $y = 4$ est reconnue être le graphe d'une fonction par 55% d'entre eux. Ainsi dans leurs modèles mentaux, la notion de fonction suppose l'idée de *variation*. On comprend d'où provient cette malformation du concept : il a été créé pour étudier les quantités qui varient vraiment et non les autres, bien que finalement il doive englober les fonctions constantes.

Dans [127], Aline Robert étudie les modèles mentaux du concept de suite convergente, et met en évidence, dans une population d'étudiants français de DEUG scientifique, la prégnance du *modèle monotone* pour lequel le prototype de suite convergente est une suite monotone bornée. Seuls les étudiants ayant les meilleurs résultats arrivent à se forger un modèle statique, correspondant vraiment au concept. D'autres exemples pourraient être cités, notamment le fait que les représentations qui sont faites des fonctions continues tendent à faire passer (involontairement) un message parasite d'après lequel toute fonction continue est *monotone par morceaux*.

Pour résumer cette question, nous pouvons citer Bakar et Tall qui concluent leur article en disant qu'il faut faire face à un formidable obstacle :

> *The learners cannot construct the abstract concept of function without experiencing examples of the function concept in action, and they cannot study examples of the function concept in action without developing prototype examples having built-in limitations that do not apply to the abstract concept.*

3.3.3 La compression des idées

Comme on l'a constaté, Sfard s'attache à décrire l'évolution du procédural au structural dans sa globalité. Gray et Tall considèrent plutôt des éléments particuliers susceptibles de favoriser la structuration d'une notion donnée. Reprenant une idée de Thurston, [144], ils considèrent que le phénomène qui permet à une notion d'atteindre le stade structural est un phénomène de compression des idées, associé à un mécanisme qui relie cette notion à des connaissances antérieures. La compression permettrait non seulement de conceptualiser une notion, mais aussi de mettre en œuvre les concepts déjà formés en vue de comprendre une situation, résoudre un problème ou tout simplement approfondir une théorie.

La compression des idées est un phénomène difficile à décrire, mais il est familier à tous ceux qui ont étudié — et compris — des mathématiques non triviales. C'est peut-être le phénomène qui rend possible l'activité mathématique. Grâce à la compression, le cerveau ne doit plus mémoriser les aspects secondaires. Les liaisons établies lui permettent en cas de besoin de retrouver les détails utiles. Elles permettent aussi, et peut-être même surtout, de percevoir la notion étudiée dans des perspectives nouvelles, variées. Le cerveau étant concentré sur l'essentiel, les notions apparaissent plus simples, l'individu les maîtrisant plus facilement.

Mais en quoi consiste ce phénomène de compression des idées ? Il n'y a pas de réponse unique ni même de réponse tout à fait claire à cette question. Mentionnons ici les points relevés par Gray et/ou Tall.

- **La formation d'images mentales**

  Il est bien connu qu'un petit dessin vaut mieux qu'un long discours. Car un dessin fournit une image globale d'une situation. Comment saisir les propriétés de croissance et de décroissance d'une fonction, ses limites, ses asymptotes éventuelles sans disposer de son graphique ?

  Un dessin permet aussi, *a contrario*, de représenter des propriétés locales. Une fonction n'est-elle pas continue en un point si son graphe au voisinage de ce point a l'aspect d'un segment horizontal, à condition d'étirer suffisamment ce voisinage ? Et n'est-elle pas dérivable si, en zoomant suffisamment (dans les deux directions), le graphe a l'allure d'un segment (non nécessairement horizontal) ?

  Mais cet exemple des fonctions risque de mobiliser trop l'attention et de faire croire que la visualisation se limite à des situations mathématiques ayant des interprétations géométriques.

Dans tous les domaines, des représentations graphiques viennent au secours du mathématicien. Faut-il citer les diagrammes de Venn, qui aident à la compréhension de l'algèbre ensembliste, ou les nombreux diagrammes sagittaux ou schémas en arbre qui servent de support au raisonnement ?

A côté de ces images géométriques, réalisables sur papier, il en est sans doute d'autres, beaucoup plus difficiles à décrire, impossibles à dessiner et variables d'un individu à un autre, de vraies images *mentales* dont le rôle n'est pas moins important pour celui qui les conçoit. Hadamard parle d'images « vagues ».

- **Le symbolisme.**

  La création et l'utilisation d'un système de symboles permettant à la pensée de s'exprimer aisément jouent également un rôle capital dans la formation des concepts. Viète, considéré comme un des fondateurs de l'algèbre, utilise encore des notations compliquées pour désigner les carrés et les cubes : *A quadratus* et *A cubus*. Comment avec de telles notations manier aisément les puissances quelconques et mettre en place des procédures débouchant ensuite sur une conceptualisation ?

  Le symbolisme est parfois considéré comme un obstacle à la compréhension des mathématiques. Il faut rappeler que les mathématiciens n'utilisent des symboles que parce que cela permet de comprendre ce que l'on fait, de simplifier les raisonnements. Par exemple, il est certainement possible de se passer complètement du symbolisme vectoriel ou matriciel. Mais, par sa concision, ce symbolisme permet à l'utilisateur d'appliquer des procédures en se plaçant successivement à plusieurs niveaux. Si A et B sont deux matrices connues de taille $n \times n$, si y est un vecteur connu appartenant à $\mathbb{R}^n$ et si x est une colonne de n inconnues, on peut résoudre le système d'équations linéaires $Ax = By$ en restant dans une première étape au niveau matriciel : $x = A^{-1}By$. Ensuite, il sera bien entendu nécessaire de redescendre au niveau des nombres pour calculer le second membre. Ne pourrait-on dire que la notation matricielle permet de *décrire* le calcul à effectuer *avant* de l'effectuer ? On distingue ainsi plusieurs *niveaux de calcul*.

  Une telle démarche constitue un atout pour celui qui la maîtrise. Cependant, il n'est guère possible de mettre en place un calcul du second niveau tant que le calcul du premier niveau n'a pas été maîtrisé. Ceci constitue un exemple de ce que, dans certaines circonstances, le phénomène de compression des connaissances doit déjà avoir commencé pour que l'introduction d'un symbolisme concis soit ressentie comme une simplification par l'élève et ait pour conséquence de renforcer cette compression.

  Il semble assez naturel de demander que le symbolisme utilisé soit en harmonie avec le concept dont on vise l'apparition. Mais parfois, si un concept possède plusieurs facettes, il est bon d'adapter le symbolisme à la facette utilisée. Par exemple, on n'additionne pas deux translations, on les compose. Cependant une translation peut être assimilée à un vecteur, auquel cas il s'imposerait de parler d'addition.

Nous venons de retrouver la flexibilité des concepts et des symboles dont il a été question plus haut. Cette ambivalence constituerait également une des composantes du phénomène de compression en facilitant la maîtrise du sujet.

Par exemple, il est de coutume de désigner l'addition modulo 5 dans l'ensemble $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ tout simplement par le signe $+$: $3 + 4 = 2$ signifie alors $(3+4)$ modulo $5 = 2$. En utilisant le même signe pour désigner l'addition dans $\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}_5$, on induit chez l'élève le fait que cette addition dans $\mathbb{Z}_5$ possède les mêmes propriétés que l'addition usuelle. Qu'une telle affirmation doive être justifiée n'empêche pas que le phénomène de compression ait été favorisé par le choix de la notation.

D'après [83],

> *This ambiguous use of symbolism is at the root of powerful mathematical thinking and makes it possible to overcome the limited capacity of short-term memory. It enables a symbol to be maintained in short-term memory in a compact form for mental manipulation or to trigger a sequence of actions in time to carry out a mathematical process. It includes both concepts to know and processes to do.*

Apprendre les différentes interprétations d'un symbolisme donné est donc une des composantes du processus de structuration. Utiliser une interprétation du symbolisme ne relevant pas du stade procédural ne peut que poser des problèmes aux élèves qui n'ont pas encore dépassé ce stade pour le sujet étudié. Par exemple, l'expression $x + 3 = 7$ ne saurait être interprétée comme une équation que si l'élève a compris que dans ce cas, le signe $+$ ne désigne pas une opération à effectuer.

- **La mémoire**

  La mémoire à court terme possède une capacité limitée. Le phénomène de compression permet de diminuer la quantité d'informations à mémoriser en donnant à l'utilisateur la possibilité de reconstituer cette information en cas de besoin. Il est cependant des séquences procédurales que l'on ne peut se permettre de reconstruire chaque fois qu'on en a besoin, sous peine de détourner l'attention de l'essentiel. La mémorisation (à long terme) de telles séquences routinières permettant de les appliquer d'une manière automatique contribue dans ce cas à la compression des connaissances.

  D. Tall ajoute immédiatement que les individus qui ne parviennent pas à comprimer suffisamment les informations mathématiques, utilisent cette troisième méthode — la mémorisation de procédures — comme mécanisme de défense. Mais ils ne peuvent appliquer ces procédures qu'une à la fois, et se condamnent alors à une vue procédurale des mathématiques, sans en acquérir une perspective globale. De plus les difficultés s'accumulent car « *it is more difficult to co-ordinate processes than manipulate concepts* ». Il conclut

  > *The failing student fails because he or she is doing a different kind of mathematics which is harder than the flexible thinking of the successful mathematician.*

3.4. Troisième synthèse : retour aux problèmes

Après avoir ainsi parcouru les étapes de l'apprentissage d'un sujet mathématique, après avoir désigné la résolution de problèmes comme étant la compétence terminale la plus importante en mathématique, il s'impose de chercher à intégrer les deux types de considération en étudiant leurs influences possibles sur l'organisation de l'enseignement.

C'est ce que nous ferons dans plusieurs des chapitres suivants, mais auparavant, nous devons approfondir notre réflexion relative aux problèmes.

Références

[24], [27], [28], [63], [73], [83], [108], [120], [127],[134], [142], [144].

Chapitre 4

Des problèmes

4.1 Qu'est-ce qu'un problème ? 56
4.2 Résoudre un problème 59
4.2.1 Le point de vue mathématique 60
4.2.2 Le point de vue didactique 63
4.2.3 Le point de vue psychologique 64
4.3 Une compétence globale 65
4.4 Une compétence terminale 66
4.5 Une quatrième synthèse : des problèmes et des séquences de problèmes 68

Au chapitre 2, nous avons constaté que

> *La résolution de problèmes est une compétence mathématique terminale à considérer comme particulièrement importante.*

Nous allons détailler cette affirmation dans ce qui suit. Mais auparavant, il est nécessaire de décrire ce que nous entendons par *problème* et plus précisément par *problème dans un contexte d'enseignement*.

4.1. Qu'est-ce qu'un problème ?

Commençons par une affirmation assez générale.

> Un problème est une question suffisamment complexe pour que la réponse ne soit pas facile à trouver.

Un problème est donc un énoncé destiné à provoquer une activité de recherche. Il peut s'agir d'une réponse à trouver, d'une construction à effectuer, d'un programme à rédiger. Mais n'importe quel énoncé n'est pas un problème !

Un problème doit être résolu par un élève ou un groupe d'élèves

En d'autres termes, dans un contexte d'enseignement, un problème dont la résolution est effectuée uniquement ou principalement par l'enseignant cesse d'être un problème pour les élèves.

Pour que l'activité de résolution de problème soit vraiment formatrice pour eux, ce sont eux qui doivent l'exercer. Le rôle du professeur n'en est que plus important et plus difficile : il doit choisir des problèmes adaptés à la classe et contrôler l'activité de résolution. En particulier,

- en cas de blocage persistant, il donne le « coup de pouce » nécessaire, tout en veillant à préserver un espace de recherche suffisant pour les élèves,
- il aide les élèves à tirer les conclusions du travail qu'ils ont effectué en élaborant des synthèses avec eux,
- en cas de besoin, il fournit des compléments de matière nécessaires pour exploiter les idées apparues au cours de la recherche,
- il établit éventuellement des connections avec d'autres domaines ou donne des indications historiques,
- il situe l'importance du problème par rapport au sujet en cours d'étude,
- ...

Un problème doit être difficile.

Pour susciter un véritable travail de recherche, un problème doit être difficile. Autrement dit, il est exclu que la procédure de résolution apparaisse clairement dès la lecture de l'énoncé. C'est de cette façon uniquement que l'élève — ou la classe, car les problèmes les plus difficiles nécessiteront souvent un travail collectif — devra exercer, sous le contrôle de l'enseignant, des activités telles que

- consulter de la documentation,
- prendre connaissance de résultats existants,
- éliminer les informations inutiles et construire un modèle,
- rechercher des analogies avec des situations déjà rencontrées,
- démontrer,
- vérifier,
- communiquer,
- ...

Un problème ne peut pas être un casse-tête.

Si un problème doit être difficile, il faut néanmoins qu'il soit à la portée des élèves, soit individuellement, soit collectivement. Inutile de décourager les jeunes en leur soumettant des énoncés qu'ils n'ont aucune chance de pouvoir résoudre ou dont la résolution donne lieu trop fréquemment à des blocage persistants.

Notons néanmoins qu'avec l'entraînement, des problèmes de difficulté plus grande peuvent être progressivement rencontrés.

Un problème doit motiver les élèves.

Si les élèves n'éprouvent aucunement l'envie de connaître la solution du problème, ils n'y consacreront certainement pas l'énergie nécessaire.

Notons néanmoins que la motivation des élèves pour l'étude d'une situation peut dépendre de nombreux facteurs qui échappent à notre analyse. En particulier, la nature des relations entre les élèves et l'enseignant, la capacité de celui-ci à capter leur intérêt, la façon dont il « emballe » un sujet, la visibilité de son enthousiasme pour la mathématique, sont des éléments qui ont probablement autant, sinon plus d'importance, que l'intérêt intrinsèque du problème proposé.

Un problème ne devrait pas faire intervenir d'astuces sans postérité.

Pour que l'élève retire quelque chose du problème, non seulement du point de vue de la matière, mais aussi du point de vue des modes de raisonnement, il faudrait éviter des astuces qui ne seraient jamais réutilisées. Un privilège doit être accordé aux « méthodes », c'est-à-dire aux trucs qu'on utilise souvent.

Au delà des « critères » précédents qui devraient être généralement respectés, d'autres caractéristiques peuvent être présentes qui permettent de développer plus particulièrement certaines facettes de la formation des élèves :

Un problème peut être interdisciplinaire.

Si c'est le cas, l'enseignant doit, soit être à l'aise dans une discipline qui n'est pas la sienne, soit travailler en équipe avec des collègues. Il conviendrait aussi que le problème soit lié à une matière en cours d'étude par un de ceux-ci.

Un problème peut ne pas être interdisciplinaire.

La mathématique fournit suffisamment d'occasions de se poser des questions pour que certaines d'entre elles puissent motiver les élèves, soit par leur côté esthétique, soit par l'importance du sujet.

Un problème peut être accompagné d'un exposé de faits historiques.

En montrant comment certains concepts sont nés de problèmes non scolaires, on peut tout à la fois susciter l'intérêt des élèves et situer l'importance des théories étudiées.

Un problème peut établir des relations entre des sujets différents.

Nous avons mentionné au chapitre 1 que la question du transfert d'une compétence d'un contexte à un autre était cruciale. Il ne faut donc négliger aucune occasion de mettre en évidence des relations entre différents points de matière. On explique ainsi les mécanismes profonds des phénomènes rencontrés, et par conséquent on les simplifie et on en facilite l'assimilation. L'élève doit à cette occasion voir sa compétence augmenter, en ce sens qu'il doit être capable de s'attaquer avec succès à de nouvelles catégories de problèmes.

4.2. Résoudre un problème

Il n'existe évidemment aucune méthode universelle, aucun moyen d'arriver à coup sûr à la découverte de la solution de n'importe quel problème. Sinon la notion même de problème n'existerait pas ! Dans ce paragraphe, nous nous contenterons d'essayer de décrire ce qui se passe au cours de la résolution d'un problème. Cette description peut être réalisée selon trois points de vue :

- un point de vue mathématique
- un point de vue didactique
- un point de vue psychologique

4.2.1 Le point de vue mathématique

Du point de vue mathématique, nous ne cherchons pas à décrire *l'activité* du chercheur. Nous ne tenons pas compte des *stratégies* (fructueuses ou non) qu'il met en œuvre pas plus que des aspects psychologiques de son travail. Nous nous intéressons au contenu mathématique réellement utile de son travail. ([1])

De ce point de vue, la méthode de résolution, appelée *méthode axiomatique* dans [4], comporte les phases caractéristiques de toute méthode scientifique :

- *modélisation de la situation étudiée, par un processus d'abstraction qui élimine toute donnée ou toute information non pertinente, construction de représentations symboliques ou graphiques adéquates,*
- *mise en fonctionnement du modèle, obtention de résultats,*
- *validation du modèle par comparaison des résultats obtenus avec la situation de départ, éventuellement retour à la première phase, mise en question du modèle utilisé, affinement de ce modèle ou construction d'un nouveau modèle, puis reprise de la deuxième phase.*

Les diverses phases ainsi décrites mettent en œuvre des compétences différentes. La construction du modèle est sans nul doute la plus difficile et la plus délicate. Elle utilise des méthodes heuristiques, elle nécessite de pouvoir analyser une situation informelle et synthétiser un modèle. Elle provoque parfois la recherche de documentation. Elle fait intervenir beaucoup d'imagination et de connaissances. Dans le cas d'un problème issu d'une source extérieure à la mathématique, ce sont des connaissances dans au moins deux disciplines différentes qui doivent être coordonnées.

La seconde phase est plus formelle, elle utilise les méthodes mathématiques classiques. Le raisonnement déductif joue un rôle plus important. La troisième nécessite à la fois un bon esprit critique et beaucoup de soin. Une fois le problème résolu, tout n'est pas terminé : la solution doit être rédigée, communiquée. Ce sont également des qualités de synthèse et d'expression qui sont mises en œuvre. Elles permettent à la classe d'*institutionnaliser* éventuellement de nouveaux résultats en les intégrant à son corpus de connaissances.

([1]) C'est généralement ce contenu qui, après que le problème soit résolu, c'est-à-dire *mort*, fait l'objet d'un compte-rendu écrit, lequel dissimule l'importance réelle du travail effectué par l'auteur.

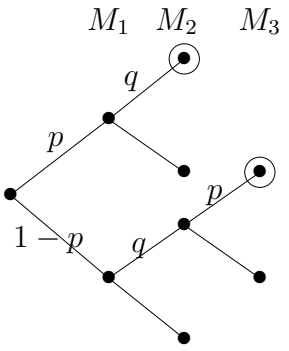
EXEMPLE 4.2.1 *Un père dit à son fils : « j'augmenterai ton argent de poche si tu gagnes deux parties de tennis consécutives que tu joueras contre ton frère et moi en changeant d'adversaire à chaque partie. » Le père est le meilleur joueur. Contre qui le fils doit-il d'abord jouer ?*

Cet exemple assez simple permet d'illustrer aisément les trois phases décrites ci-dessus :

Modélisation : Il s'agit bien évidemment d'un problème de probabilité. Introduisons les notations suivantes :

- la probabilité pour que le fils batte son père est p,
- la probabilité pour que fils batte son frère est q.

Si le fils choisit de jouer son premier match contre son père, le graphe suivant décrit les possibilités pour le fils de gagner deux parties consécutives (les traits montants de gauche à droite indiquent un gain, les traits descendants de gauche à droite indiquent une perte, les symboles M_1, M_2, M_3 désignent les résultats aux trois matches).



Il n'est pas nécessaire de tracer l'arbre complet, certaines séquences pouvant être stoppées après deux matches.

Un graphe analogue peut être dessiné si le fils choisit de jouer d'abord contre son frère. Les deux graphes constituent ensemble un modèle du problème.

Fonctionnement du modèle : S'il joue sa première partie contre son père, il y a deux possibilités pour que le fils remporte deux parties consécutives : ce sont les deux branches de l'arbre qui se terminent en des nœuds ayant été entourés d'un cercle.

Les règles d'addition et de multiplication permettent de calculer les probabilités d'arriver en ces nœuds : $pq + (1-p)qp$, soit $pq(2-p)$. S'il joue en premier lieu contre son père, ce nombre est donc la probabilité qu'a le fils de voir son argent de poche augmenter. S'il joue en premier lieu contre son frère, il suffit de permuter le rôle du père et du frère. La probabilité correspondante est $pq(2-q)$.

Conclusion : puisque le père est le meilleur joueur, on a $p \leqslant q$ de sorte que $pq(2-p) \geqslant pq(2-q)$: le fils a intérêt à rencontrer son père en premier lieu, donc à jouer deux parties contre lui.

Validation du modèle : La réponse trouvée peut sembler bizarre. Le fils a-t-il vraiment intérêt à jouer deux parties sur trois contre le meilleur de ses deux adversaires ? On pourra valider la réponse en remarquant que le fils ne peut absolument pas perdre la deuxième partie. Il a donc intérêt à la jouer contre l'adversaire le plus faible.

4.2.2 Le point de vue didactique

Le point de vue mathématique qui vient d'être décrit ne s'intéresse finalement qu'à ce qui restera du problème après sa résolution. S'inspirant des principes « *behaviouristes* », le point de vue didactique cherche à rendre compte des *comportements observables* des élèves. Analysant la résolution d'un problème de ce point de vue, plusieurs auteurs, s'inspirant des travaux de Polya, [122], considèrent que cette résolution comporte quatre phases principales :

1. l'analyse du problème
2. l'élaboration d'une stratégie
3. la vérification et la validation de la stratégie
4. la communication du résultat

Ces phases ne s'opposent pas et ne recouvrent pas exactement celles qui sont intervenues dans la description du point de vue mathématique. Il est clair que l'analyse du problème relève plutôt de la modélisation, l'élaboration d'une stratégie peut relever à la fois de la modélisation et de la mise en fonctionnement du modèle cependant que la vérification et la validation de la stratégie interviennent lors de la mise en fonctionnement du modèle et de la comparaison des résultats obtenus avec la situation de départ.

Les travaux de A.H. Schoenfeld (voir [130]) proposent un découpage plus fin, en *épisodes* qui peuvent se répéter au cours de la résolution. Nous décrirons ces épisodes au chapitre 7, et donnerons un exemple au paragraphe 11.1.3.

4.2.3 Le point de vue psychologique

Du point de vue de la *psychologie cognitive*, nous pouvons retrouver lors d'une activité de résolution de problème les trois étapes d'intériorisation, de condensation et de réification qui ont été mises en évidence par Sfard et décrites au chapitre 3.

L'étape d'intériorisation

Elle correspond à la lecture et à la première analyse du problème. A partir de diverses simulations numériques ou graphiques par exemple, il s'agit de se familiariser avec le contenu mathématique du problème, avec le(s) processus mathématique(s) sous-jacent(s), ...

L'étape de condensation

C'est l'étape la plus active et la plus exigeante. Au départ de la familiarisation acquise du problème se dessinent des analogies avec des situations ou des contextes connus, des conjectures de difficulté croissante, des embryons de preuves ou de vérifications à partir de critiques diverses, des simplifications, des demandes de développements calculatoires ou théoriques, ...Et tout cela n'a rien de linéaire, de bien enchaîné, mais demande au contraire de fréquents retours en arrière, des digressions qu'on abandonne puis sur lesquelles on revient, ...C'est évidemment là le cœur de la recherche, c'est là qu'on sème les graines du futur succès.

L'étape de réification

C'est celle de la mise à mort du problème ([2]). Il reste à simplifier ce qui peut l'être, à tirer les conclusions du travail entrepris, et à fixer dans une rédaction consistante, les acquis associés à la solution, afin que rien de ce qui a été investi dans l'effort ne se retrouve bientôt perdu.

Nous reviendrons sur cette analyse en termes psychologiques au chapitre 10, où nous la mettrons en parallèle avec la construction d'une séquence d'enseignement et donnerons des exemples. Dans l'immédiat, continuons d'examiner les compétences mises en œuvre à l'occasion d'une résolution de problèmes.

([2]) Elle débute généralement par le célèbre « Aha ! », immortalisé par M. Gardner, qui est probablement une traduction américaine de l'« Eureka ! » de notre vieil Archimède.

4.3. Une compétence globale

Les descriptions de l'activité de résolution de problème qui ont été faites au paragraphe précédent — bien qu'elles soient formulées en termes très généraux — montrent à suffisance que cette compétence en fait intervenir de nombreuses autres qui lui sont subordonnées :

- analyser une situation
- synthétiser un modèle
- induire
- déduire
- imaginer
- connaître
- comparer
- abstraire
- rechercher de la documentation
- rédiger, communiquer
- collaborer, ...

sans oublier les compétences disciplinaires qui varieront fortement d'un problème à un autre. En fait, nous devons considérer que l'objectif essentiel de la résolution d'un problème n'est pas de trouver la réponse à une question, mais bien de réaliser un ensemble de comportements nécessaires à cette découverte.

Nous formulons donc l'hypothèse suivante :

L'essentiel des compétences disciplinaires et transversales que le cours de mathématiques a pour vocation de développer peut résulter de ce que la résolution de problèmes est une compétence globale en mathématiques.

4.4. Une compétence terminale

La résolution de problèmes est non seulement une compétence globale, c'est aussi une compétence *terminale*. Autrement dit,

> Il doit être considéré comme normal qu'à la fin de l'enseignement secondaire, les élèves soient évalués notamment sur leur aptitude à résoudre des problèmes et que le système éducatif soit évalué notamment sur sa capacité d'amener les élèves à acquérir cette aptitude ([3]).

La capacité de résoudre des problèmes n'est sans doute pas la seule compétence terminale, mais elle est particulièrement importante puisqu'elle donne l'occasion d'en exercer d'autres. Elle peut donc être visée pour tous les élèves. Mais elle s'exercera avec des intensités différentes, des compétences subordonnées différentes, des contenus différents et des niveaux de difficulté différents selon le public d'élèves concernés. Des expériences doivent être effectuées dans les différentes filières d'enseignement pour déterminer le niveau exact qu'il est raisonnable d'essayer d'atteindre.

Lorsque le jeu est joué jusqu'au bout, la résolution d'un problème est aussi l'occasion de pratiquer un travail individuel ou en petit groupe sans « bénéficier » à tout instant de l'encadrement de l'enseignant. Acquérir plus d'autonomie est également nécessaire à l'élève qui veut se préparer à l'enseignement supérieur.

Dire que la résolution de problèmes est une compétence terminale ne signifie pas qu'elle ne doit faire l'objet d'un apprentissage qu'au troisième degré du secondaire, voire dans l'année terminale. C'est tout au long de la scolarité que cette compétence peut et doit être développée progressivement. Les expériences montrent en effet que des élèves du troisième degré qui n'ont jamais rencontré que des formes traditionnelles d'enseignement ont beaucoup de difficultés à s'adapter à un enseignement qui les amène à résoudre eux-mêmes de nombreux problèmes. Une des principales difficultés qu'ils rencontrent est de prendre connaissance d'informations contenues dans des manuels ou ouvrages de référence mathématiques, voir même dans les notes écrites préparées à leur intention.

([3]) La dernière partie de ce travail est consacrée à l'évaluation.

Notons que les nouveaux programmes de mathématiques des premier et deuxième degrés permettent déjà de développer l'activité de résolution de problèmes, notamment par l'introduction d'une distinction entre « noyaux » et « activités » dans le programme du premier degré.

4.5. Une quatrième synthèse : des problèmes et des séquences de problèmes

Un des objectifs de notre recherche est d'étudier la possibilité de charpenter l'enseignement des mathématiques de manière à y réserver, à côté des activités d'enseignement plus traditionnelles, une place importante à des résolutions de problèmes.

Cela signifierait en particulier

- entraîner les élèves à la résolution de problèmes de façon que celle-ci devienne une compétence terminale de l'enseignement secondaire
- élaborer des séquences de problèmes autour desquelles l'enseignement serait structuré, de façon que les nouveaux concepts soient acquis à travers des activités qui leur donnent du sens.

Les chapitres suivants seront consacrés à des réflexions sur les stratégies à mettre en œuvre pour résoudre des problèmes et sur la méthodologie à utiliser pour organiser l'enseignement.

Références

[4], [122], [130].

Chapitre 5

Des hiérarchies de compétences

5.1 Un paradoxe 70
5.1.1 Des difficultés dues à l'organisation scolaire 71
5.1.2 Des difficultés liées à certains programmes 72
5.1.3 Des difficultés d'ordre méthodologique 73
5.1.4 Hiérarchiser les compétences 75
5.2 Des contenus 77
5.2.1 La fonction de formation de l'esprit 79
5.2.2 La fonction utilitaire 80
5.2.3 La fonction culturelle 83
5.3 Le point de vue mathématique 84
5.4 Le point de vue didactique 88
5.5 Le point de vue psychologique 89

5.1. Un paradoxe

Nous avons rappelé dans les chapitres précédents qu'il y a parmi les mathématiciens un très large consensus pour reconnaître les vertus formatrices de la résolution de problèmes. Ajoutons à cela qu'un parcours de la littérature existante fait apparaître une quantité non négligeable d'ouvrages ayant pour but de concrétiser cette idée, tant en proposant des listes de problèmes qu'en conseillant des stratégies à utiliser pour les résoudre. Et cependant, nous devons constater que dans les classes, l'activité de résolution de problèmes reste très limitée. Il convient de rechercher les raisons d'une telle situation. Nous abordons ainsi la troisième des questions posées à la fin du paragraphe 1.4.

5.1.1 Des difficultés dues à l'organisation scolaire

Une première catégorie de difficultés pourrait être liée à l'organisation scolaire elle-même. Une activité de résolution de problèmes se prête mal à une grille horaire découpée en tranches de 50 minutes. Si on veut éviter que l'enseignant ne souffle progressivement la résolution à ses élèves, le travail de ceux-ci doit être au départ peu formalisé. Des discussions par petits groupes doivent pouvoir se dérouler, des déplacements doivent avoir lieu pour consulter de la documentation.

Cependant, le professeur doit conserver le contrôle de la situation, veiller à ce que chaque élève travaille réellement et, au moment opportun, procéder à des synthèses. Tous ces éléments nécessitent que la classe soit organisée d'une façon inhabituelle, à laquelle les enseignants ne sont pas préparés, et qui peut varier considérablement selon les circonstances (âge et nombre des élèves, matériel didactique et documentation disponibles, ...).

5.1.2 Des difficultés liées à certains programmes

La façon dont étaient rédigés jusqu'il y a peu la plupart des programmes d'enseignement n'encourageait pas non plus un tel type d'activités. Même si l'enseignant a toujours la liberté de modifier l'ordre des matières mentionné dans le programme, la tradition veut que l'on n'aborde pas l'enseignement d'une tranche de matière sans avoir au préalable rencontré les prérequis. Or la résolution d'un problème peut entraîner le groupe d'élèves sur des voies qui nécessitent de connaître des résultats qu'ils n'ont jamais rencontrés. C'est même là une façon de motiver les élèves à l'étude de ces résultats qui acquièrent alors le sens qu'un enseignement plus traditionnel ne fournit pas toujours. Il est même possible qu'apparaisse la nécessité de traiter d'un sujet, qui ne figure pas au programme. Pour cette raison, et aussi du fait que l'enseignement par problèmes prend considérablement plus de temps que l'enseignement magistral usuel, il faut admettre que

> Les programmes doivent être très souples et permettre à l'enseignant de moduler l'importance accordée aux différents points selon les circonstances.

5.1.3 Des difficultés d'ordre méthodologique

Mais si les raisons qui viennent d'être évoquées contribuent incontestablement à entraver la pratique de l'enseignement par problèmes, elles ne sont certainement pas les seules, ni peut-être les plus importantes, qui expliquent que cet enseignement ne soit guère pratiqué.

Le fait est que des difficultés fondamentales existent, difficultés qui ont déjà fait l'objet de recherches (voir par exemple [136], [137], [132], [45]), mais n'ont pas encore reçu de réponses vraiment satisfaisantes.

- **Comment, sans lui donner la réponse, aider un élève qui est bloqué dans la résolution ?**

  Les différentes stratégies qui sont mentionnées dans les ouvrages, et dont nous parlerons au chapitre 7, ne sont certainement pas à dédaigner. Bien souvent, elles se révèlent toutefois insuffisantes, pour des raisons inconnues.

- **Comment organiser l'enseignement par problèmes de façon que l'élève transfère naturellement à un nouveau problème une démarche dont il a pu constater qu'elle réussissait dans un premier problème ?**

  C'est tout le problème du transfert. La mise en évidence de différents *cadres ou registres de travail* et de la possibilité de *changer de cadre ou de registre* peut faciliter certains transferts de démarches particulières. Nous traiterons de ces questions au chapitre 6.

  Mais, d'une façon globale, tout ce que l'on peut affirmer actuellement est que, apparemment, chez un élève ayant suffisamment d'entraînement, des transferts s'opèrent, qui lui permettent de progresser dans la résolution. ([1]) Ces transferts sont souvent inconscients, ce qui ne permet évidemment pas de les analyser, encore moins de les provoquer à volonté.

- **Comment organiser l'enseignement par problèmes de façon à couvrir efficacement un curriculum prédéterminé ?**

([1]) L'expérience de la participation d'élèves à des épreuves telles que les *Olympiades Mathématiques Internationales* confirme qu'il est possible de s'entraîner à résoudre des problèmes.

Une suite non organisée de problèmes a beaucoup de chances de ne pas mener à un enseignement cohérent qui mette clairement en évidence les liaisons entre les différents points de la matière à étudier et qui situe l'importance de ces points tant par rapport aux applications que par rapport à l'édifice mathématique global. L'activité de résolution de problème doit céder au moment opportun la place à une phase d'*institutionnalisation* au cours de laquelle l'enseignant fait le point de la situation, rattache les résultats nouveaux aux acquis antérieurs et donne éventuellement des compléments d'information.

> En attribuant comme objectif principal au cours de mathématique d'apprendre à l'élève à résoudre des problèmes, nous ne prétendons pas qu'il soit possible de consacrer l'intégralité du temps disponible à cette activité.

L'équilibre indispensable entre les activités liées à des problèmes et celles — plus traditionnelles — d'institutionnalisation peut être difficile à trouver. Des expériences sont indispensables, *pour chaque point de matière*.

- **Comment évaluer l'aptitude à résoudre des problèmes ?**
  Cette question découle des précédentes : dès lors qu'un phénomène est mal connu, son évaluation est difficile, que ce soit de façon formative ou certificative.

5.1.4 Hiérarchiser les compétences

Les difficultés que nous venons de mentionner montrent la nécessité d'approfondir l'analyse de cette compétence — peut-être un peu trop globale — qu'est l'aptitude à résoudre des problèmes.

Nous rejoignons ainsi C. Thelot qui insiste dans [143] sur la nécessaire *hiérarchisation* des compétences. Dans ce chapitre, nous nous efforcerons de dégager des compétences subordonnées, dont l'apprentissage serait plus facile à organiser et à évaluer. Il ne s'agit toutefois pas d'atomiser les compétences, de façon à éviter que l'enseignement ne se transforme en l'application de recettes *ad hoc*.

Dans la suite de ce chapitre, nous esquisserons plusieurs hiérarchisations des compétences subordonnées à la résolution de problème. De façon plus précise, nous évoquerons quatre points de vue selon lesquels nous pouvons construire une telle hiérarchisation :

- Le point de vue **logico-déductif** s'intéresse à l'organisation logique des contenus d'enseignement.
- Le point de vue des **méthodes mathématiques** dégagera quelques grands principes de modélisation fréquemment utilisés. Il s'agit le plus souvent de *changements de cadre ou de registre*.
- Le point de vue **didactique** s'intéresse aux comportements d'un chercheur, c'est-à-dire de toute personne en situation de recherche, aux *stratégies* développées à cette occasion.
- Le point de vue **psychologique** permet de classer des compétences selon une taxonomie d'objectifs cognitifs.

Nous retrouvons ainsi les divers points de vue déjà rencontrés au chapitre 4, le point de vue mathématique étant en quelque sorte dédoublé, selon que l'on considère les contenus mathématiques ou les méthodes mathématiques.

Les compétences de ces différentes catégories sont encore fort larges. Elles font intervenir elles-mêmes des compétences subordonnées telles que la maîtrise de certains algorithmes ou la manipulations d'instruments de dessin ou de calcul. Ces compétences apparaîtront surtout dans les exemples, *sur le chantier des résolutions de problèmes*.

Nous consacrerons le paragraphe suivant à une réflexion sur les contenus de l'enseignement des mathématiques. Nous ne construirons pas une hiérarchie de ces contenus suivant le point de vue logico-déductif mentionné plus haut. Un tel travail n'aurait guère d'intérêt : si nous nous limitons aux grandes lignes, l'originalité en serait très faible, tout mathématicien étant depuis longtemps conscient des prérequis des différents sujets. Entrer dans les détails, dépasserait le cadre de notre travail.

Les trois paragraphes suivants seront ensuite consacrés à de premières descriptions des trois autres points de vue. Enfin, aux chapitres 6, 7 et 8, nous reviendrons de façon approfondie sur chacun d'entre eux, en associant nos réflexions relatives à la résolution de problèmes à celles consacrées à la hiérarchisation des compétences.

5.2. Des contenus

Il n'est pas nécessaire d'argumenter pour justifier que nous accordons une place importante à la question des contenus de l'enseignement des mathématiques. Il est évidemment impossible d'acquérir une quelconque compétence si une quantité de matière suffisante n'est pas disponible pour servir de support au travail soumis à l'élève.

De plus, nous avons admis au chapitre 1 que l'expression *compétence disciplinaire* possède une signification fort large et qu'elle concerne à la fois les savoirs et les savoir-faire. Nous avons aussi remarqué au chapitre 3 que les savoir-faire (les aspects procéduraux) et les savoirs (les aspects structuraux et conceptuels) ont les uns et les autres un rôle important à jouer dans l'apprentissage d'un sujet donné.

Un des objectifs de notre travail est de mettre au point des ensembles intégrés de savoirs et de savoir-faire pouvant servir de base à la construction des cours de mathématique des différentes filières.

Il importe donc de déterminer quels sont les contenus suffisamment importants pour être retenus en vue de constituer ces ensembles intégrés de savoirs et de savoir-faire.

Au chapitre 2, nous avons insisté sur le rôle culturel et social de la mathématique. Nous y avons notamment mentionné l'importance d'une bonne culture mathématique pour satisfaire aux nécessités du développement économique et technique de la société.

Par ailleurs, la mathématique et de façon plus générale, les sciences doivent désormais être considérées comme faisant partie de la formation minimale de l'homme cultivé. Dans la société du 21e siècle, l'homme dont la culture générale se limiterait aux aspects littéraires ou artistiques qui caractérisaient la culture humaniste du 19e siècle apparaîtra comme un individu défavorisé et socialement inadapté.

Nous attribuerons au cours de mathématique trois fonctions essentielles :

1. *une fonction de formation de l'esprit destinée à rendre les jeunes gens capables de réagir rationnellement devant une situation problématique,*
2. *une fonction utilitaire destinée à munir tout individu des savoirs et des savoir-faire dont il aura besoin dans ses activités professionnelles ou tout simplement pour comprendre ce qui se passe autour de lui,*
3. *une fonction culturelle destinée à fournir aux hommes et aux femmes les informations qui leur permettront de situer la mathématique dans l'évolution intellectuelle de l'humanité.*

5.2.1 La fonction de formation de l'esprit

Nous ne nous appesantirons pas beaucoup dans ce paragraphe sur l'aspect formation de l'esprit, et cela pour deux raisons :

1. d'une part, le leitmotiv de notre travail est de considérer la résolution de problèmes comme la compétence terminale la plus importante pour le cours de mathématique. Il s'agit bien là de *former l'esprit*.
2. la mathématique est suffisamment riche pour fournir des situations problématiques motivantes et intéressantes dans tous les domaines qu'elle comporte. Le choix des contenus à étudier n'est donc pas fondamental de ce point de vue.

Il importe néanmoins de veiller à ce que les problèmes soumis aux élèves aient une « postérité » en ce sens qu'ils peuvent se rattacher à l'étude de questions mathématiques significatives. Ils peuvent donc jouer un rôle également significatif dans l'introduction, l'illustration ou le prolongement de tels sujets. Ainsi, dans le cadre d'un apprentissage, nous écartons les énoncés qui ont un caractère purement « gratuit », ce qui est indépendant des compétences que leur résolution ferait intervenir. De tels énoncés peuvent toutefois être utilisés dans d'autres circonstances telles que les compétitions mathématiques.

5.2.2 La fonction utilitaire

5.2.2.1 Les statistiques et les probabilités

Compte tenu de l'importance prise par l'outil statistique dans la Société actuelle, il semble indispensable que tous les élèves du secondaire reçoivent dans ce domaine une initiation qui leur permette de prendre connaissance de façon critique des informations chiffrées véhiculées par les *media* à l'occasion de sondages ou d'enquêtes diverses.

L'enseignement des statistiques ne peut en aucun cas se résumer à apprendre quelques recettes de calcul permettant de déterminer les *paramètres statistiques* (moyenne, médiane, écart-type, écart interquartile, etc) d'un tableau de nombres. L'important est que les élèves apprennent la signification profonde de ces paramètres, les circonstances dans lesquelles il vaut mieux en calculer un plutôt qu'un autre. Ils doivent les utiliser pour répondre à des questions pertinentes, notamment en comparant les caractéristiques d'échantillons dont on ignore s'ils sont issus de populations semblables ou non.

Exemple 5.2.1 *Quand on considère la distribution des revenus des habitants d'un pays, quel est le paramètre de position le plus pertinent : la moyenne, la médiane ou le mode ? La réponse est-elle la même pour la Belgique et l'Arabie Saoudite ?*

> La première activité en statistique est d'apprendre à se poser des questions à propos des informations disponibles.

Ceci nécessite de la part du professeur plus qu'une formation aux techniques de la statistique. Il doit aussi être capable de porter une appréciation sensée sur des aspects divers de l'actualité scientifique, économique, politique et sociale et ne pas avoir peur de « mouiller sa chemise ». Ce sujet pourrait faire l'objet de travaux interdisciplinaires, en collaboration avec les enseignants de disciplines très variées : sciences naturelles, sciences économiques, langues, ...

Du point de vue technique, il serait certainement souhaitable que les élèves de la fin du secondaire soient initiés à des outils tels que les tests d'hypothèses ou les intervalles de confiance. Cependant les difficultés conceptuelles liées à ces objets sont connues pour être importantes. Par ailleurs la disponibilité de moyens de calculs puissants constitue un fait récent qui devrait en faciliter une approche procédurale. Une recherche expérimentale est indispensable en vue de déterminer jusqu'où l'initiation pourrait aller et construire une méthodologie qui permette un enseignement, même peu formalisé, de ces questions.

Un apprentissage, même relativement restreint des probabilités, est indispensable pour comprendre les outils statistiques qui semblent indispensables. On rencontre fréquemment des distributions normales ou poissonniennes dans les sciences humaines, les sciences économiques ou naturelles. Ce sont là, avec la distribution binômiale, les exemples les plus importants de variables aléatoires.

Le sujet des *variables aléatoires* est donc « incontournable ».

5.2.2.2 L'algèbre linéaire et l'analyse

Pour les élèves les plus motivés par les mathématiques, pour ceux qui en feront l'usage le plus important dans leurs études ultérieures ou dans leur vie professionnelle, il importe de rencontrer les bases des mathématiques d'aujourd'hui. A côté des statistiques (et probabilités) déjà mentionnées, on ne peut pas ne pas prévoir parmi les compétences disciplinaires, des chapitres importants d'algèbre linéaire (associée à la géométrie, notamment la géométrie de l'espace) et d'analyse.

L'algèbre linéaire et l'analyse mathématique sont d'importants outils de modélisation.

L'algèbre linéaire permet, entre autres, de développer des méthodes en vue de modéliser des phénomènes complexes. Elle est à la base de la plupart des méthodes numériques utilisées par les ordinateurs consacrés aux applications scientifiques et techniques, y compris celles qui permettent de traiter des images. Pour faciliter l'assimilation de l'algèbre linéaire, en même temps que pour montrer sa puissance, il est opportun d'associer son apprentissage à celui de la géométrie de l'espace.

L'analyse permet d'étudier dans leur continuité les phénomènes comportant une composante dynamique. Elle intervient dans la plupart des applications des mathématiques aux domaines de l'ingénieur ou du physicien.

L'algèbre linéaire et l'analyse se complètent et permettent l'approche de concepts et de techniques d'approximations.

Muni d'un bagage substantiel dans ces deux domaines, bagage mis en œuvre notamment lors de la résolution de problèmes, l'élève qui s'oriente vers des études scientifiques ou techniques, sera valablement préparé par l'enseignement secondaire à ses activités ultérieures.

5.2.3 La fonction culturelle

Comme nous l'avons expliqué plus haut, nous pensons qu'une certaine place devrait être accordée à des activités ayant des caractéristiques moins utilitaires, mais constituant une part de la culture générale de l'individu. Le rôle joué dans le développement de la pensée humaine par des sujets tels que la découverte des géométries non euclidiennes ou la démonstration du théorème de Fermat, les retombées quasi-philosophiques de ces découvertes, les questions épistémologiques qu'elles soulèvent, rendent ces sujets aussi importants que de nombreux travaux à caractère non scientifique que l'on considère comme faisant partie du bagage minimum de l'homme cultivé. Leur étude, notamment historique et certainement non exhaustive, constitue une occasion de décrire l'évolution des concepts et des techniques mathématiques. Elle peut aussi constituer une source de problèmes à la portée des élèves.

En un tel domaine, il n'y a aucune raison d'imposer les mêmes sujets d'étude à tous les élèves d'une année déterminée. Il ne conviendrait pas en effet que de tels sujets servent de prérequis pour les années suivantes. Nous pensons que par conséquent il ne s'impose pas de rédiger des propositions précises de sujets à étudier, mais qu'il est préférable de laisser les enseignants choisir eux-mêmes des sujets qui soient à la fois accessibles et motivants pour leurs élèves.

5.3. Le point de vue mathématique

La mathématique est souvent divisée en domaines tels que « Algèbre », « Géométrie », « Analyse », etc. Cependant, les mathématiciens insistent souvent sur l'unité de leur science. Celle-ci se marque notamment par les connexions qui existent entre les différents domaines et qui permettent parfois de résoudre un problème en le transposant d'un domaine dans un autre, c'est-à-dire en en construisant un modèle dans un cadre différent du cadre d'origine.

Nous avons déjà mentionné que de tels transferts peuvent être inconscients et les problèmes que cela suscite. Une façon de rencontrer ces problèmes est de rendre les élèves conscients de la possibilité des transferts et de les organiser. Nous les désignerons souvent par l'expression « changements de cadre », expression popularisée par Régine Douady qui s'exprime ainsi dans [63] :

> *Le changement de cadre est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils et de techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation.*

L'exemple suivant montre comment peut fonctionner un changement de cadre. Il remplace un problème rencontré en statistique mais s'exprimant dans le cadre de la géométrie plane par un problème de projection orthogonale dans un espace de dimension n (identifié à $\mathbb{R}^n$).

EXEMPLE 5.3.1 *Etant donné n points $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, …, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$, déterminer la droite de régression de y en x, c'est-à-dire la droite d'équation $y = ax + b$ qui rend minimum l'expression $\sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2$. (Cette droite est aussi connue sous le nom de droite d'approximation par moindres carrés.)*

Le problème posé se situe dans le cadre de la géométrie analytique plane. Il peut se résoudre par une technique de minimisation de la fonction $f(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2$. Une autre méthode consiste à reformuler le problème dans le cadre de la géométrie analytique d'un espace de dimension n. En effet, si

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

sont n points de $\mathbb{R}^2$, alors

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ et } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont trois points de $\mathbb{R}^n$. Avec les notations ci-dessus, le problème consiste à trouver les valeurs de a et b qui rendent minimum la distance dans $\mathbb{R}^n$ du point y au point $ax + bu$. Or lorsque a et b varient, le point $ax + bu$ parcourt un plan de $\mathbb{R}^n$. La distance de y à $ax + bu$ est alors minimum si $ax + bu$ est la projection orthogonale de y sur ce plan, c'est-à-dire si le vecteur $y - (ax + bu)$ est orthogonal à la fois à x et u.
Utilisant le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$, nous arrivons ainsi directement au système d'équations dites « normales »

$$\begin{cases} a(x.x) + b(x.u) = x.y \\ a(u.x) + b(u.u) = u.y \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a\sum_{i=1}^n x_i^2 + b\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

dont la résolution fournit les valeurs cherchées pour a et b.

Cet exemple se situe à un niveau conceptuel relativement élevé puisqu'il fait intervenir un espace de dimension n. L'avantage réside clairement dans une plus grande efficacité liée au remplacement des calculs par des idées et aux possibilités de généralisation que cette méthode comporte. Par contre, l'application d'une technique de minimisation, soit par dérivation, soit par considération de fonctions du second degré, aurait permis de résoudre le problème en restant à un niveau plus procédural, sans doute mieux adapté à certaines circonstances. Tout dépend des objectifs recherchés par delà la seule résolution du problème.

Il ne nous sera pas possible de passer en revue tous les changements de cadre possibles et imaginables car, comme ci-dessus, ils sont souvent très directement liés au problème étudié. Nous noterons d'abord une définition très générale formulée dans [63] :

Définition 5.3.2 *Un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations.*

Un changement de cadre doit donc comporter le remplacement des objets, ou des relations ou des images mentales présentes initialement par d'autres entités analogues. A priori, rien n'impose qu'il modifie le niveau de conceptualisation utilisé, mais cela peut arriver si les objets nouvellement introduits se situent à un niveau conceptuel plus élevé que les objets initiaux.

Les changements de cadre sont des compétences d'ordre mathématique, de haut niveau, auxquelles viendront s'adjoindre de nombreuses compétences subordonnées. Au chapitre 6, nous examinerons plus particulièrement certains d'entre eux, très généraux et d'emploi fréquent :

Algébriser : Remplacer un problème ou une situation non algébriques par un problème ou une situation algébriques. Ce changement de cadre est sans doute le plus connu et peut-être le plus ancien, puisqu'il remonte (au moins) à Descartes.

Exemple 5.3.3 *Géométrie vectorielle ou analytique. Mise en équation d'un problème d'arithmétique.*

Géométriser C'est en quelque sorte le changement de cadre réciproque du précédent. Il est sans doute aussi moins fréquent que le précédent, car la géométrisation conduit à une formulation qui relève plus souvent de la géométrie analytique que de la géométrie synthétique. C'est alors plus un changement de registre ([2]) qu'un changement de cadre.

Exemple 5.3.4 *Assimiler la moyenne et la variance d'une suite finie de nombres au barycentre et au moment d'inertie d'un système de points massifs.*

Discrétiser : Remplacer un problème ou une situation relevant du continu par un problème ou une situation relevant du discret.

Exemple 5.3.5 *Tabulation d'une fonction, groupement de données.*

Approcher : Ce changement de cadre est en quelque sorte complémentaire, ou réciproque du précédent. Après qu'une situation ait été discrétisée, un passage à la limite intervient pour obtenir la réponse cherchée dans le cas continu.

Exemple 5.3.6 *Définition d'une intégrale, d'une dérivée.*

Numériser : L'utilisation de méthodes relevant de l'analyse numérique et utilisant des moyens de calcul adéquats est souvent le seul moyen de résoudre complètement un « vrai » problème (c'est-à-dire un problème non purement *didactique*). Il s'agit bien d'un changement de cadre car les « nombres de la machine à calculer » ne vérifient pas les axiomes des nombres réels.

Exemple 5.3.7 *Calculer les solutions d'un système de trois équations à trois inconnues dont les coefficients sont donnés avec trois décimales.*

Linéariser : Remplacer un problème ou une situation régis par des équations non linéaires par un problème ou une situation approchés régis par des équations linéaires.

([2]) Voir plus loin.

Exemple 5.3.8 *Petits mouvements en physique.*

Probabiliser : Construire un modèle probabiliste d'une situation qui ne l'est pas.

Exemple 5.3.9 *Calculer une aire ou un volume par la méthode de Monte-Carlo.*

Projeter : Nous désignons par ce verbe la méthode d'analyse consistant à simplifier une situation ou un problème moyennant une perte d'information. On peut considérer qu'il s'agit d'un changement de cadre dans la mesure où la situation est transposée d'un domaine comportant un grand nombre de dimensions (parfois une infinité) à un autre de taille plus modeste.

Exemple 5.3.10 *Représentation plane de figures spatiales, description d'un paquet de données à l'aide d'un petit nombre de paramètres, approximation linéaire par moindres carrés, analyses spectrales permettant la décomposition de la lumière blanche en lumières monochromatiques, ou d'un son en harmoniques.*

...

Bien entendu, les changements de cadre qui viennent d'être énumérés ne sont pas indépendants les uns des autres.

La définition 5.3.2 parle en particulier des *formulations éventuellement diverses* des objets et des relations entre objets. Modifier la formulation utilisée n'est pas un changement de cadre, mais est désigné actuellement par l'expression « changement de registre » (voir [66], [115], [9], [82]). Un registre est donc un mode d'expression. On peut ainsi parler du registre symbolique, du registre de la langue maternelle, du registre graphique, etc. Certains situations s'expriment plus facilement dans un registre que dans un autre.

Exemple 5.3.11 *Comparer les représentations du vecteur nul dans les registres symbolique ($\vec{0}$) et graphique (?), ou celles de l'ensemble vide dans les mêmes registres.*

- Les changements de cadre modifient la nature même des objets considérés.
- Les changements de registre ne modifient que leur représentation.

Utiliser le registre adéquat à l'étude d'une situation et éventuellement changer de registre en cours de travail sont des compétences que l'élève doit aussi apprendre à maîtriser en vue de résoudre des problèmes.

5.4. Le point de vue didactique

Du point de vue didactique, nous nous intéressons à l'activité d'un élève-chercheur. Nous avons déjà mentionné qu'une bonne part de celle-ci est consacrée, lors d'épisodes d'analyse, de planification et d'exploration, à l'élaboration et à la mise en œuvre de *stratégies*, lesquelles peuvent être considérées comme relativement indépendantes de la nature du problème étudié.

De telles stratégies apparaissent chez un certain nombre d'auteurs, dont le plus connu est Georges Polya. Ces stratégies sont assez imprécises. Il s'agit plus de conseils qu'il faut savoir appliquer au moment opportun, mais qu'il faut aussi savoir NE PAS appliquer. Il n'existe évidemment aucune méthode universelle permettant de résoudre n'importe quel problème. L'imagination et le flair sont souvent le facteur déterminant. Toutefois les stratégies dont il va être question peuvent aider considérablement à la découverte de la solution d'un problème en évitant de s'engager dans une voie sans issue et en contribuant à faire mûrir la situation jusqu'au point où le chercheur perçoit — souvent de façon intuitive — la démarche qui l'amènera au résultat escompté.

Nous évoquerons au chapitre 7 les stratégies citées ci-dessous.

- Distinguer les données, les opérations et les buts.
- Travailler à reculons.
- Se rapprocher le plus près possible de l'objectif.
- Étudier des cas particuliers.
- Rechercher des exemples et des contre-exemples.
- Changer de registre.
- Effectuer des représentations graphiques.
- Raisonner par analogie.
- Effectuer des raisonnements heuristiques.
- Raisonner déductivement.
- Tenir compte des symétries des données.
- Éliminer tout présupposé quant au résultat à obtenir.
- Communiquer à d'autres, oralement ou par écrit, le résultat, même partiel et provisoire, de ses cogitations.

5.5. Le point de vue psychologique

Du point de vue psychologique, nous nous intéressons aux processus mentaux mis en œuvre lors d'une activité de résolution de problème.

Au chapitre 3, nous avons rencontré le processus fondamental de passage d'un stade procédural à un stade structural et en particulier, la description faite de ce processus par A. Sfard. Un processus analogue accompagne la résolution d'un problème. Pour faciliter les comparaisons, nous reprendrons la terminologie de Sfard, et distinguerons donc des étapes d'*intériorisation*, de *condensation* et de *réification*. Au cours de l'étape d'intériorisation, l'élève prend connaissance de l'énoncé du problème et se l'approprie. Les connexions avec d'autres situations ou avec divers processus ou concepts lui apparaissent déjà. Tout se met donc en place pour que la véritable recherche puisse commencer.

Pendant la phase de condensation se déroule la recherche proprement dite. Les matériaux rassemblés durant la phase d'intériorisation sont exploités. des idées apparaissent, certaines sont abandonnées, d'autres sont poursuivies plus avant. La phase se clôture avec la « BONNE idée », celle qui amène à la solution. A ce moment, il reste à achever le travail, ce sera l'objet de la phase de réification. Il s'agit en particulier de vérifier la solution obtenue dans tous ses détails, de traiter notamment des cas particuliers qui auraient été laissés de côté précédemment. Ensuite, il faut rédiger la solution en vue de pouvoir la communiquer. Egalement apparaissent souvent des conséquences du résultat, voire de nouveaux problèmes ... et le cycle reprend.

Une autre façon de décrire les activités mentales impliquées dans une activité mathématique est de se référer à une *taxonomie d'objectifs cognitifs*. Il s'agit d'une classification des activités mentales basée sur leur complexité. La première taxonomie de ce genre, due à B.S. Bloom date de 1969, [36]. Elle était très générale. Ultérieurement des taxonomies adaptées aux mathématiques ont été proposées. Nous décrirons celle qui est due à Régis Gras, [80].

Enfin, nous ne serions pas complets si nous ne faisions état des travaux de Pierre et Dina Van Hiele qui ont consacré leur travail doctoral (1957) à l'élaboration d'une théorie portant sur l'existence de *niveaux* de pensée.

Dans l'esprit des VAN HIELE, leur théorie a une portée générale. En témoigne le titre de l'article publié en 1958/59 dans *Mathematica & Paedagogia*, [156] : *La signification des niveaux de pensée dans l'enseignement par la méthode déductive*. Toutefois ils n'ont traité que le seul exemple de la géométrie, et très rapidement l'habitude s'est prise de ne considérer leur théorie que dans ce contexte.

Au chapitre 8, nous essayerons

1. d'indiquer ce que sont les niveaux de pensée reconnus par les van Hiele.
2. de relater l'une ou l'autre expérimentation qui a été faite pour vérifier l'existence de ces niveaux, ainsi que les corrections qui pourraient être apportées à la théorie à la suite de ces expérimentations.

Notre description doit être prise avec beaucoup de prudence. Nous sommes en effet dans un domaine où les notions considérées ont des contours imprécis, où les frontières sont floues. Des auteurs différents peuvent parfois involontairement dire des choses contradictoires tout en utilisant le même vocabulaire ! Pierre van Hiele lui-même n'a pas toujours distingué le même nombre de niveaux de pensée.

Références

[136], [137], [132], [45], [143], [63], [66], [115], [9], [82], [36], [80], [156].

Chapitre 6

Le point de vue mathématique

6.1 Des cadres 92
6.2 Algébriser 94
6.2.1 Algébriser la géométrie 95
6.2.2 Algébriser les probabilités 98
6.3 Géométriser 102
6.3.1 Géométriser l'algèbre 103
6.3.2 Géométriser les probabilités 105
6.4 Approcher 108
6.4.1 Le rejet des approximations 109
6.4.2 Quelques inégalités 111
6.4.3 Un changement de cadre 113
6.4.4 Linéariser 114
6.4.5 Discrétiser 116
6.5 Numériser 117
6.5.1 Numériser l'arithmétique 119
6.5.2 Numériser l'algèbre 122
6.5.3 Numériser l'analyse 125
6.5.4 Numériser les probabilités 127
6.5.5 Numériser la géométrie 131
6.6 Probabiliser 138

6.1. Des cadres

Nous l'avons mentionné au chapitre 4 : d'un point de vue strictement mathématique, résoudre un problème passe généralement par la construction d'un *modèle* de la situation à étudier. Nous allons dans ce chapitre nous attarder — assez longuement — sur cette question, et plus particulièrement sur les caractéristiques des modèles à construire. A l'occasion, nous montrerons aussi à l'aide d'exemples, les dangers de certaines modélisations, et par conséquent la nécessité de les valider. Dans certains cas, il peut s'avérer utile de construire *plusieurs* modèles d'une situation donnée et de comparer les résultats. Un modèle mathématique se situe toujours dans un certain *cadre*. Au chapitre 5, nous avons donné la définition de *cadre* due à Régine Douady (définition 5.3.2). Celle-ci insiste sur le fait que les images mentales jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement des objets du cadre en tant qu'outils. Ainsi, *deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée.*

La notion de cadre est informelle, et n'est clairement pas susceptible d'une définition précise. Faisant intervenir des images mentales, elle est partiellement relative à l'utilisateur. Il n'est donc pas possible de faire un inventaire exhaustif de tous les cadres imaginables, encore moins de les décrire en détails. Nous pouvons cependant regrouper les cadres en familles et mettre en évidence certaines de leurs propriétés. C'est ce que nous ferons dans les paragraphes qui suivent.

La construction d'un modèle par un élève qui résout un problème s'effectue nécessairement dans un cadre qui lui est familier. Il dispose alors automatiquement des procédures et des concepts qui relèvent de ce cadre. Au cours de la résolution, il peut apprendre de nouvelles procédures, enrichir ses concepts. Son cadre de travail est donc susceptible d'évoluer tout en restant dans la même famille.

Mais il peut aussi arriver que les circonstances amènent l'élève-chercheur à abandonner la construction d'un modèle dans un cadre donné pour la réaliser dans un cadre différent. Nous avons donné un exemple de *changement de cadre* au chapitre 5. Nous en rencontrerons d'autres dans la suite. Si un changement de cadre fait progresser la résolution d'un problème, c'est qu'il permet d'utiliser des procédures et des concepts différents, et/ou de s'appuyer sur des images mentales différentes.

Pour être pleinement efficace lors de la résolution d'un problème difficile, un changement de cadre suppose de la part de l'utilisateur une conceptualisation suffisante des objets relevant des deux cadres. Mais un changement de cadre, réalisé à l'occasion d'un problème de difficulté limitée, peut aussi aider à la conceptualisation des objets d'un cadre grâce à la référence à ceux qui leur correspondent dans l'autre cadre.

La description des cadres et des changements de cadre qui suit fait apparaître — de façon exemplative et non exhaustive — toute une série de compétences d'ordre mathématique, qu'un élève doit maîtriser pour être en mesure de construire effectivement des modèles mathématiques. Nous ne les expliciterons pas systématiquement précisément parce que notre liste ne saurait être exhaustive. Le titre de chacun des paragraphes qui suivent est constitué d'un verbe faisant référence à une famille de cadres. Par exemple, sous l'intitulé « algébriser », nous examinerons quelques questions liées à la construction de modèles dans un cadre algébrique.

6.2. Algébriser

6.2.1 Algébriser la géométrie

Algébriser est devenu une opération banale depuis la création de la *géométrie analytique* par Descartes, Fermat et quelques autres. Au passage, notons avec une pointe de regret la persistance de l'expression *géométrie analytique* dans laquelle le sens initial du mot *analytique* a été oublié depuis longtemps et qu'il vaudrait beaucoup mieux remplacer par *géométrie algébrique* (très élémentaire bien entendu). ([1])

L'algébrisation de la géométrie n'a pas seulement permis de résoudre certains problèmes autrement inaccessibles, elle a également déterminé une évolution importante des conceptions géométriques elles-mêmes. Par exemple, la classification des courbes algébriques selon le degré de leur équation permet de comprendre *pourquoi* des courbes *a priori* très différentes comme une ellipse et une hyperbole sont en réalité de la même famille et susceptibles d'être étudiées ensemble. Elle fournit aussi un moyen de mesurer la complexité d'une courbe. C'est encore l'algébrisation qui permet de considérer et étudier des espaces de dimension supérieure à 3.

L'algébrisation de la géométrie est suffisamment banale pour qu'il ne soit guère nécessaire d'insister sur l'efficacité de la méthode. Mais elle est suffisamment banale aussi pour que nous ne soyons pas toujours pleinement conscients qu'il s'agit bien d'un changement de cadre et qu'avec les élèves des précautions doivent éventuellement être prises. Si le mathématicien confirmé finit par ne plus voir en une droite et l'équation d'une droite que deux facettes d'un même objet, il est loin d'être certain que l'élève du secondaire maîtrise ce changement de cadre avec la même dextérité. Le risque de *perte de sens* est donc très grand.

Exemple 6.2.1 *On a parfois, dans certains manuels des années 70, rencontré des définitions du type suivant :*

- *Un point de* $\mathbb{R}^2$ *est un triple de nombres réels non tous nuls, écrits en ligne et donné à un facteur constant près.*
- *Une droite de* $\mathbb{R}^2$ *est un triple de nombres réels non tous nuls, écrits en colonne et donné à un facteur constant près.*
- *Une conique est une classe d'équivalence de matrices symétriques non nulles* 3×3 *données à un facteur constant près.*

([1]) On trouve par exemple la définition suivante dans [43], ouvrage qui fut un des classiques du siècle dernier : *La géométrie analytique a pour but l'étude des figures par les procédés du calcul ou de l'analyse algébrique.* A l'époque, le mot *analyse* désigne une des phases de la résolution d'un problème (sens qu'il a conservé jusqu'à nos jours dans l'étude des « lieux géométriques ») et c'est bien l'adjectif *algébrique* qui indique le type des méthodes utilisées.

Si l'exemple qui précède est extrême, la perte de sens peut être effective de façon beaucoup plus insidieuse. N'existe-t-il pas de nombreux élèves parfaitement capables de dessiner une droite d'équation donnée ou de trouver l'équation d'une droite passant par deux points connus qui, cependant, n'ont pas conscience de ce que l'équation d'une droite est une condition nécessaire et suffisante d'appartenance à cette droite ?

Appliquer la méthode *d'analyse algébrique* passe par le choix d'un repère. Une façon de lutter contre la perte de sens est la mise en évidence systématique des grandeurs invariantes par changement de repère car ces grandeurs correspondent à des propriétés géométriques intrinsèques, de vraies propriétés géométriques.

Exemple 6.2.2

- *Dans n'importe quelle base orthonormée d'orientation positive du plan, une rotation centrée en l'origine a une matrice du type*

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

  Le nombre θ (défini à 2π près) est un invariant fondamental de la rotation : son angle.
- *Les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice symétrique sont liés aux axes de la conique correspondante.*
- *Dans l'espace de dimension 3, la valeur absolue du déterminant d'une transformation linéaire est le rapport du volume de l'image d'un parallélépipède au volume de ce parallélépipède. Le signe de ce déterminant nous indique si la transformation conserve ou non l'orientation de l'espace.*

Les remarques précédentes (dont nous ne pensons pas qu'elles épuisent la question) permettent de formuler des *compétences subordonnées* au changement de cadre *algébriser*, dans le cas de l'étude du plan ou de l'espace :

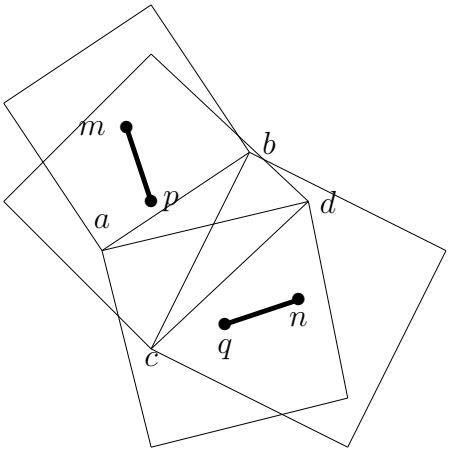
- distinguer différents types de repères (orthonormés ou non),
- distinguer différents types de coordonnées (rectilignes, polaires, ...)
- choisir à bon escient le type de coordonnées à utiliser en fonction du problème posé,
- connaître les invariants associés à un objet géométrique et à un type de coordonnées donné,
- interpréter des résultats algébriques en termes géométriques,
- ...

Plutôt que de donner ici des exemples (que tout le monde connaît) d'emploi de la géométrie analytique, attirons l'attention sur l'existence d'autres techniques d'algébrisation, et notamment de celle qui fait appel aux nombres complexes. Tout nombre complexe peut être représenté (une fois un repère choisi) par un et un seul point du plan. La bijection réciproque peut être exploitée. Elle permet souvent de traduire un problème géométrique en un problème de calcul sur les nombres complexes.

Exemple 6.2.3 *Le problème suivant a été reproduit dans le n° 89 de* Mathématique et Pédagogie*, accompagné de trois solutions. Une lecture comparative de la première et la troisième de ces solutions montre qu'elles sont « isomorphes », tout en étant formulées dans deux cadres différents. Nous présentons ci-dessous une solution qui utilise les nombres complexes.*

Problème 6.2.4 *On considère un quadrilatère (plan) quelconque abcd sur lequel on choisit un sens de parcours. Sur chaque côté, on construit un carré de façon qu'il soit situé à gauche du côté par rapport au sens de parcours. On note m, n, p et q les centres des carrés construits respectivement sur $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, d]$ et $[d, a]$. Démontrer que les segments $[m, p]$ et $[n, q]$ sont perpendiculaires et de même longueur (Théorème de Laisant, 1877).*

Identifions le plan au corps des nombres complexes. Nous pouvons nous rendre du point a au point m en parcourant d'abord la moitié du segment $[a, b]$ puis en effectuant un quart de tour à gauche et en avançant d'une longueur égale à la moitié de celle du segment $[a, b]$.



Dans le cadre des nombres complexes, si nous notons m' le milieu $\frac{a+b}{2}$ du segment $[a, b]$, nous avons $m - m' = i(m' - a)$ puisqu'une rotation d'un quart de tour correspond à la multiplication par i. Par conséquent

$$m = \frac{1}{2}(a + b + i(b - a))$$

De même
$n = \frac{1}{2}(b + c + i(c - b)),\ p = \frac{1}{2}(c + d + i(d - c)),\ q = \frac{1}{2}(d + a + i(a - d))$
On en déduit

$$p - m = \frac{1}{2}(c + d - a - b + i(d + a - b - c))$$

et

$$q - n = \frac{1}{2}(d + a - b - c + i(a + b - c - d))$$

Donc $p - m = i(q - n)$ et le théorème de Laisant est démontré.

6.2.2 Algébriser les probabilités

L'algèbre, en particulier l'algèbre linéaire, fournit le cadre permettant la résolution de nombreux problèmes relatifs à des situations finies ou discrètes. Il n'y a à cela rien d'étonnant, car le phénomène linéaire est l'un des plus simples et plus naturels qui soient. Nous illustrerons ceci à l'aide de problèmes issus des probabilités et faisant intervenir des *graphes de flux* et des *probabilités de transition*..

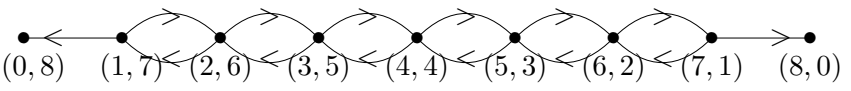
La méthode que nous allons rappeler étudie des *systèmes* susceptibles de se trouver en un nombre fini d'*états* et de passer d'un état à un autre. Certains états peuvent être *absorbants*, ce qui signifie que lorsque le système arrive en un de ces états, il y reste définitivement. Par contre, à partir d'un état non absorbant, il est possible d'effectuer des transitions vers d'autres états choisis aléatoirement en respectant des *probabilités de transition* invariables.

De nombreux jeux sont régis par des règles de ce genre, le gagnant étant celui des joueurs qui atteint le premier un état absorbant qui lui a été attribué comme but. L'exemple classique est le problème de la *ruine d'un joueur*.

EXEMPLE 6.2.5 *Deux joueurs, notés P et F, jouent à « pile ou face » avec une pièce parfaitement symétrique. Au départ, P possède 5 francs et F possède 3 francs. A chaque lancer, celui des deux joueurs qui a perdu donne 1 franc à l'autre (P gagne si pile apparaît, F gagne si face apparaît). Le jeu s'arrête dès qu'un des joueurs est ruiné. Quelle est la probabilité de ruine de chacun des joueurs ?*

Tout en étant maîtrisable par des élèves très jeunes, cette situation fait intervenir un événement aléatoire simple, le lancer d'une pièce, et un événement aléatoire assez complexe, une partie, c'est-à-dire une suite d'un nombre indéterminé de lancers s'achevant par la ruine d'un joueur. Il faut donc distinguer soigneusement entre *gagner lors d'un lancer* et *gagner une partie*.

La modélisation d'une telle situation passe par la reconnaissance des *états du système*. Ici l'état d'un système est donné par l'avoir de chaque joueur. Au départ, le système est dans l'état $(5, 3)$. De là, il peut passer à $(4, 4)$ ou $(6, 2)$, puis, il peut revenir à $(5, 3)$ ou passer à $(3, 5)$ ou $(7, 1)$, etc. Le graphe suivant résume les transitions possibles.



La pièce étant parfaitement symétrique, chacune des deux transitions possibles à partir d'un état donné est de probabilité $\frac{1}{2}$.
L'état de départ est l'état $(5, 3)$. Le joueur P est ruiné si le système atteint l'état $(0, 8)$. La probabilité de ruine de P, que nous noterons x est la probabilité pour le système de passer de l'état $(5, 3)$ à l'état $(0, 8)$ à la suite d'un nombre indéterminé de lancers. Mais après UN lancer, le système a une chance sur deux d'être en $(4, 4)$ et une chance sur deux d'être en $(6, 2)$.
Introduisons deux nouvelles notations :

- y la probabilité pour le système de passer de l'état $(4, 4)$ à l'état $(0, 8)$ à la suite d'un nombre indéterminé de lancers,
- z la probabilité pour le système de passer de l'état $(6, 2)$ à l'état $(0, 8)$ à la suite d'un nombre indéterminé de lancers.

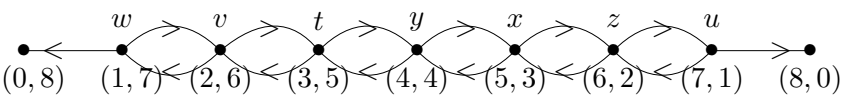
D'après les règles de multiplication et d'addition, nous pouvons écrire

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$$

On ramène ainsi le calcul de x à celui de y et z. Ces deux nouvelles inconnues seront elles-mêmes déterminées par la même méthode. Nous sommes donc amenés, pour chaque état non absorbant du système, à introduire une inconnue qui désigne la probabilité pour le système d'atteindre l'état $(0, 8)$ à partir de cet état non absorbant, et cela en un nombre indéterminé de lancers. Comme il y a 7 états non absorbants, nous aurons 7 inconnues, et nous pouvons écrire un système de 7 équations en ces inconnues.
Introduisons les inconnues :

- x est la probabilité d'atteindre $(0, 8)$ à partir de $(5, 3)$,
- y est la probabilité d'atteindre $(0, 8)$ à partir de $(4, 4)$,
- z est la probabilité d'atteindre $(0, 8)$ à partir de $(6, 2)$,
- t est la probabilité d'atteindre $(0, 8)$ à partir de $(3, 5)$,
- u est la probabilité d'atteindre $(0, 8)$ à partir de $(7, 1)$,
- v est la probabilité d'atteindre $(0, 8)$ à partir de $(2, 6)$,
- w est la probabilité d'atteindre $(0, 8)$ à partir de $(1, 7)$,

Chacune de ces probabilités doit être comprise comme se rapportant à un nombre indéterminé de lancers. Reportons ces notations sur le graphe, qui servira de support à notre raisonnement.



Nous guidant sur ce graphe, nous écrivons le système d'équations suivant :

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z && (6.1) \\
y &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x && (6.2) \\
z &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}u && (6.3) \\
t &= \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}y && (6.4)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}0 && (6.5) \\
v &= \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}t && (6.6) \\
w &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}v && (6.7)
\end{aligned}
$$

Bien qu'il comporte 7 équations et 7 inconnues, ce système n'est guère compliqué à résoudre. L'équation (6.5) nous fournit $z = 2u$, ce qui nous permet d'éliminer z et nous ramène à un système de 6 équations :

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}y + u && (6.8) \\
y &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x && (6.9) \\
2u &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}u && (6.10)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
t &= \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}y && (6.11) \\
v &= \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}t && (6.12) \\
w &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}v && (6.13)
\end{aligned}
$$

De (6.10), on tire alors $x = 3u$, et on élimine x :

$$
\begin{aligned}
3u &= \frac{1}{2}y + u && (6.14) \\
y &= \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}u && (6.15) \\
t &= \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}y && (6.16)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
v &= \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}t && (6.17) \\
w &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}v && (6.18)
\end{aligned}
$$

De (6.14), on tire $y = 4u$ et on élimine y :

$$
\begin{aligned}
4u &= \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}u && (6.19) \\
t &= \frac{1}{2}v + 2u && (6.20)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
v &= \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}t && (6.21) \\
w &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}v && (6.22)
\end{aligned}
$$

De (6.19), on tire $t = 5u$ et on élimine t :

$$5u = \frac{1}{2}v + 2u \qquad (6.23)$$

$$v = \frac{1}{2}w + \frac{5}{2}u \qquad (6.24)$$

$$w = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}v \qquad (6.25)$$

De (6.23), on tire $v = 6u$ et on élimine v :

$$6u = \frac{1}{2}w + \frac{5}{2}u \qquad (6.26)$$

$$w = \frac{1}{2} + 3u \qquad (6.27)$$

De (6.26), on tire $w = 7u$ et on élimine w :

$$7u = \frac{1}{2} + 3u$$

Donc $u = \frac{1}{8}$, et la probabilité de ruine de P vaut $x = 3u = \frac{3}{8}$.

Remarquons que dans cet exemple, nous avons construit successivement deux modèles de la situation étudiée. Le premier est constitué d'un graphe de flux et relève du cadre de la théorie des graphes. Le second est le système de 7 équations à 7 inconnues, il relève du cadre de l'algèbre linéaire.

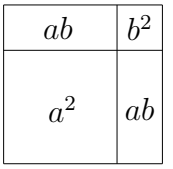
La même méthode peut être appliquée à de nombreuses situations constituant ce qu'on appelle des *chaînes de Markov* finies, à états absorbants. Certaines situations conduisent à des chaînes sans états absorbants. Le problème consiste alors à déterminer des équilibres du système, qui sont fournis par les vecteurs propres de la matrice des probabilités de transition. Un exemple d'une telle situation est fournie par l'application de la règle du bonus-malus en assurance automobile. On trouvera des indications complémentaires et des énoncés d'exercices sur le sujet dans [104], [106], [5] ou la plupart des ouvrages de probabilités.

6.3. Géométriser

Construire un modèle géométrique d'une situation donnée ne doit pas être confondu avec « faire une représentation graphique ». Une telle représentation — par ailleurs éventuellement très utile — a pour premier but d'aider l'intuition et le raisonnement en fournissant un support visuel, mais ne fournit pas nécessairement d'outils nouveaux. Un vrai modèle géométrique doit permettre d'utiliser l'arsenal des outils de la géométrie synthétique afin de progresser dans la résolution du problème posé.

6.3.1 Géométriser l'algèbre

Des questions simples d'algèbre peuvent faire l'objet de modèles géométriques. Ainsi, chacun de nous connaît la figure ci-contre qui traduit géométriquement l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:



Ce que l'on sait peut-être moins, c'est que des modèles de ce genre auraient été employés dès la plus haute antiquité pour résoudre des équations du second degré. L'analyse suivante d'une tablette babylonienne est due à J. Høyrup et rapportée par Luis Radford, [126].

EXEMPLE 6.3.1 *Traduit dans notre langue, le premier problème de la tablette babylonienne BM 13901 est le suivant :* J'ai additionné l'aire et le côté de mon carré et trouvé $\frac{3}{4}$.

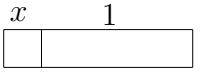
Il s'agit donc de résoudre l'équation $x^2 + x = \frac{3}{4}$. La suite de calculs figurant sur la tablette se traduisent pour nous en la formule

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}$$

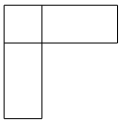
d'où $x = \frac{1}{2}$. La seconde racine étant négative n'apparaît évidemment pas chez les babyloniens.

La question qui se pose maintenant est de savoir quelle signification ceux-ci accordaient à la suite de calculs reproduits sur la tablette. D'après Høyrup, l'« algèbre » babylonienne ne peut pas avoir atteint un stade conceptuel suffisamment avancé pour comporter le concept d'inconnue, susceptible d'être l'objet d'opérations arithmétiques. L'interprétation à donner aux calculs babyloniens serait plutôt géométrique. Ils comporteraient quatre étapes :

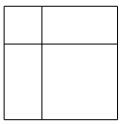
1. L'expression $x^2 + x$ est modélisée par une figure formée d'un carré et d'un rectangle ayant un côté commun avec le carré et dont l'autre côté mesure 1.
   La somme des aires du carré et du rectangle doit valoir $\frac{3}{4}$.



2. Le rectangle est coupé en deux et l'une des deux moitiés est accolée au côté inférieur du carré. La somme des aires n'a pas changé : $\frac{3}{4}$.



3. On complète la figure obtenue par un carré de côté $\frac{1}{2}$, de façon à constituer une carré d'aire 1.



   On arrive ainsi à l'expression $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2 + x$ dont la valeur est $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

4. Puisque le grand carré est d'aire 1, la longueur de son côté est $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$ c'est-à-dire 1. Mais cette longueur est aussi $x + \frac{1}{2}$. Donc $x = \frac{1}{2}$.

6.3.2 Géométriser les probabilités

Nous donnerons ci-dessous deux exemples de modélisation géométrique de problèmes posés dans un cadre probabiliste.

Exemple 6.3.2 *Étant donné un nombre réel x, on notera $a(x)$ son arrondi entier, autrement dit, l'entier le plus proche.* ([2]) *Si x et y sont deux réels, quelle est la probabilité pour que l'arrondi entier $a(x+y)$ de la somme $x+y$ soit égal à la somme des arrondis entiers $a(x)$ de x et $a(y)$ de y ?*

Le problème peut bien entendu s'étendre aux arrondis à la n^{e} décimale, et on conçoit qu'il puisse être important lors de l'exécution de certains calculs numériques.

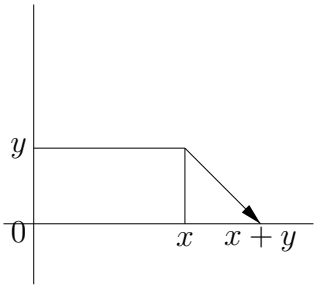
A priori, les probabilités dont il est question dans cet énoncé ne sont peut-être pas claires : comment déterminer la probabilité pour que l'arrondi d'un réel soit égal à 5 (par exemple) puisque la mesure de l'ensemble des réels est infinie ? Comme c'est souvent le cas, la première chose à faire est donc d'analyser l'énoncé et de le reformuler en termes qui ne prêtent pas à confusion. Ici, il nous suffira de fixer les valeurs de $a(x)$ et $a(y)$:

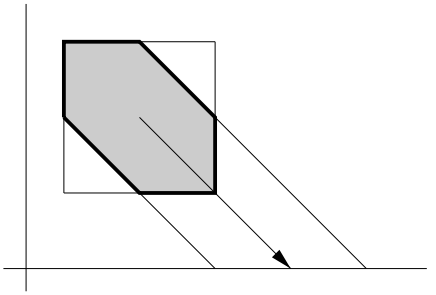
Connaissant les valeurs de $a(x)$ et $a(y)$, quelle est la probabilité pour que $a(x+y) = a(x) + a(y)$?

Posons $a(x) = x_0$ et $a(y) = y_0$. Nous nous limitons donc aux valeurs de x comprises entre $x_0 - 0,5$ et $x_0 + 0,5$ et à celles de y comprises entre $y_0 - 0,5$ et $y_0 + 0,5$. Nous nous orientons pour l'instant vers un modèle s'exprimant dans le cadre de la géométrie analytique : l'univers probabilisé est formé des couples (x, y) appartenant au carré $C = [x_0 - 0,5; x_0 + 0,5] \times [y_0 - 0,5; y_0 + 0,5]$. Les probabilités seront donc des rapports d'aires.

Pour achever la construction du modèle, interprétons l'addition en termes géométriques : les points $\binom{x}{y}$ et $\binom{x+y}{0}$ se trouvent sur une parallèle à la deuxième bissectrice. Géométriquement, l'addition est donc représentée par la projection du plan sur l'axe des abscisses, parallèlement à la deuxième bissectrice.

([2]) Nous laissons au lecteur le soin de choisir lui-même une méthode de détermination de l'arrondi entier d'un réel qui est à égale distance de deux entiers.





Dans ce modèle, le problème revient à déterminer les points du carré C qui se projettent en un point situé entre $x_0 + y_0 - 0,5$ et $x_0 + y_0 + 0,5$.

La réponse est immédiate : ce sont ceux situés entre les deux parallèles à la deuxième bissectrice passant par les deux points $\binom{x_0+y_0-0,5}{0}$ et $\binom{x_0+y_0+0,5}{0}$. L'aire de cette zone, qui est la probabilité cherchée, se trouve facilement être égale à $\frac{3}{4}$.

*Dans ce problème, la difficulté n'est pas tant de penser à un modèle géométrique — la situation ne fait évidemment pas intervenir des probabilités discrètes, un modèle continu est donc normal — que de penser à l'interprétation géométrique de la fonction de deux variables $(x, y) \mapsto x + y$. L'interprétation courante de l'addition est celle d'un opérateur binaire. De cette vision, il faut glisser à celle de fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et ensuite intégrer le fait, pourtant trivial, que la valeur de la somme $x+y$ est invariante au long d'une droite d'équation $x + y = k$. De là à penser à la projection oblique du plan sur l'axe des abscisses, il n'y a plus qu'un pas qui vaut la peine d'être franchi car d'une part il peut être réinvesti en d'autres occasions, d'autre part il contribue à la constitution des concepts d'*équation d'une droite *et de* forme linéaire.

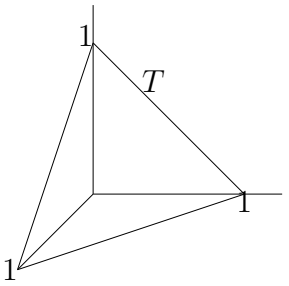
Le problème suivant est presque un classique du genre. Nous le présentons néanmoins car nous aurons l'occasion de le réutiliser dans le paragraphe **Numériser**.

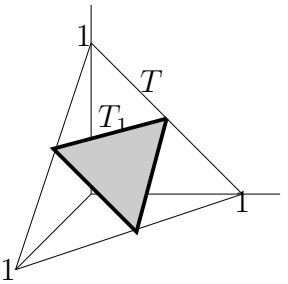
Exemple 6.3.3 *Un bâton est brisé en trois morceaux de longueurs aléatoires. Quelle est la probabilité pour que ces trois tronçons puissent être les côtés d'un triangle ?*

Ce problème peut faire l'objet soit d'un modèle de géométrie plane, soit d'un modèle de géométrie de l'espace. Nous choisirons ce dernier modèle car il respecte mieux les symétries de la situation.

Admettons que la longueur du bâton soit 1 et notons x, y et z les longueurs des trois morceaux.

Ces trois nombres sont donc compris entre 0 et 1 et leur somme vaut 1, ce qui a pour conséquence que le point $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient au triangle T de $\mathbb{R}^3$ de sommets $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Choisir au hasard des nombres x, y et z compris entre 0 et 1 et tels que $x + y + z = 1$, c'est choisir au hasard un point de ce triangle T.





Il existe un triangle dont les côtés ont x, y et z comme longueurs si et seulement si les trois inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} x &\leqslant y + z \\ y &\leqslant x + z \\ z &\leqslant x + y \end{aligned}$$

Mais les équations $x = y + z$, $y = x + z$ et $z = x + y$ sont celles de trois plans passant par l'origine et coupant le plan d'équation $x + y + z = 1$ selon les droites joignant les milieux des côtés du triangle T. Les trois inéquations ci-dessus sont satisfaites si et seulement si le point $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient au triangle T_1 ayant pour sommets les milieux des trois côtés de T. La probabilité cherchée est le rapport de l'aire de T_1 à celle de T, c'est-à-dire $\frac{1}{4}$

Dans ces deux exemples le modèle géométrique a d'abord été construit dans le cadre de la géométrie analytique. Toutefois, dans les deux cas, ce ne sont pas des méthodes de géométrie analytique qui fournissent la réponse mais bien des résultats de géométrie synthétique qui permettent de déterminer les aires cherchées. Ceci nous permet de classer les modèles construits parmi les modèles géométriques plutôt que algébriques.

6.4. Approcher

Dans la section intitulée « Numériser », nous examinerons notamment les conséquences sur le calcul à la machine de la nécessité inévitable de réaliser des approximations. Ici, nous adopterons un point de vue plus général. Nous examinerons d'abord le phénomène fréquent de rejet des approximations, ensuite nous rappellerons quelques inégalités intéressantes. Enfin, nous décrirons la « philosophie générale du phénomène d'approximation ».

6.4.1 Le rejet des approximations

« *Approcher* » est une activité fondamentale en mathématique et dans la plupart des disciplines scientifiques. Il n'est pas une expérience de physique dont les résultats ne doivent être accompagnés d'un « calcul d'erreurs ». Il n'est pas un sondage d'opinion dont les résultats ne soient accompagnés, eux aussi, d'une « marge d'erreur ». Et cependant, la mathématique élémentaire — mais peut-être pas seulement elle — semble éprouver une aversion à l'égard des approximations, comme si elles étaient incompatibles avec la rigueur !

La forme la plus banale de ce rejet des approximations est aussi la plus insidieuse car apparemment, elle ne les cache pas. Mais elle ne permet pas de les manipuler en tant que telles. Un véritable « boycott » des inégalités et des encadrements aboutit à leur remplacement par de fausses égalités. π vaut à peu près 3,1416 ... à moins que ce ne soit 3,14 ou $\frac{22}{7}$. Et l'on calcule des valeurs immanquablement différentes de celles que l'on cherche en oubliant *in fine* de mettre ce fait en évidence, ce qui ne développe certainement pas l'esprit critique des élèves.

Ainsi, un des premiers principes à rappeler est le suivant :

> Il n'est de véritable approximation qu'accompagnée d'un majorant de l'erreur commise, c'est-à-dire d'une incertitude.

Un calcul d'incertitudes ou d'encadrements — fût-il rudimentaire — doit en conséquence accompagner la manipulation d'approximations.

Avec des conséquences — il est vrai — mineures, l'horreur des inégalités prend une forme caricaturale quand elle va jusqu'à utiliser le signe $=$ non pour une relation d'équivalence mais pour une relation d'ordre. Un exemple relevant de l'enseignement secondaire — ou tout au moins qui en relevait il y a encore quelques années — concerne la divisibilité. Ne désignait-on pas la relation « a est multiple de b » par la notation $a = \mathcal{M}b$? Mais si l'on a simultanément $6 = \mathcal{M}2$ et $10 = \mathcal{M}2$ ... on ne peut cependant en déduire $6 = 10$. Un autre exemple — qui relève pour sa part de l'enseignement supérieur — apparaît quand on parle d'« infiniment petits ». Par exemple la relation « f est infiniment petit par rapport à x^5 » est encore souvent notée $f = o(x^5)$, ce qui donne lieu au même phénomène que ci-dessus. La notation utilisée par les physiciens, $x = 1.32m \pm 0.005m$ est du même tonneau : elle ne signifie rien d'autre que $1.315m \leqslant x \leqslant 1.325m$ ou $x \in [1,315m; 1,325m]$. Dans ces différents cas, les égalités ne sont que des appartenances.

Dans d'autres circonstances encore, l'on s'efforce de dissimuler des inégalités. C'est notamment le cas en analyse mathématique, alors que ce domaine traite essentiellement des problèmes d'approximation. Ainsi, après avoir défini ce qu'est la limite d'une fonction (ou d'une suite), ce qui utilise — explicitement ou non — des inégalités, on constate une certaine tendance à « escamoter » les démonstrations des résultats fondamentaux (limites d'une somme ou d'un produit de fonctions) pour appliquer directement ces résultats à des recherches de limites qui ne sont dès lors plus que des manipulations algébriques d'égalités. C'est l'essence même de l'analyse mathématique qui est ainsi mise en cause.

Autre exemple : la célèbre formule des *accroissements finis* s'énonce le plus souvent sous la forme d'une égalité :

> *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle fermé $[a, b]$. Il existe un point $c \in [a, b]$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.*

Ce théorème est incontestablement correct. Mais l'égalité qui y figure est sans intérêt car le nombre c est généralement inconnu et cette égalité ne permet donc pas de calculer $f(b) - f(a)$. Cependant, le théorème est fondamental. Il permet de trouver soit des encadrements de $f(b) - f(a)$, soit des majorations de $|f(b) - f(a)|$. On peut par exemple supposer que pour tout $x \in [a, b]$ on a $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ et énoncer la formule des accroissements finis sous la forme

$$m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$$

On obtient ainsi un énoncé certainement plus utile que le précédent et sans doute plus intuitif. Il signifie par exemple que si une automobile roule pendant 2h à une vitesse toujours comprise entre 40 km/h et 90 km/h, alors la distance parcourue est comprise entre 80 km et 180 km. L'interprétation analogue de l'énoncé traditionnel consisterait à affirmer qu'au cours du voyage, la vitesse instantanée a été en au moins un instant égale à la vitesse moyenne, sans que l'on puisse dire en quel instant. Dans ce cas, l'inégalité a un côté opérationnel que n'a pas l'égalité.

Étant donné l'importance de l'analyse mathématique dans les applications,

> la maîtrise de la manipulation des inégalités, des valeurs absolues, des encadrements doit être considérée comme une compétence (disciplinaire) terminale essentielle.

Le phénomène de rejet des approximations que nous avons signalé montre qu'une méthodologie de l'apprentissage de l'emploi des inégalités reste à élaborer.

6.4.2 Quelques inégalités

Les premières manipulations d'inégalités peuvent apparaître dès le premier degré de l'enseignement secondaire. Elles expriment que l'ordre est *compatible* avec l'addition et la multiplication : quels que soient les nombres ([3]) a, b et c,

$$a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c \text{ (compatibilité avec l'addition)}$$

Si le nombre c est positif, alors

$$a \leqslant b \Rightarrow a.c \leqslant b.c \text{ (compatibilité avec la multiplication)}$$

Ces faits élémentaires relèvent plutôt des *socles de compétences* que des compétences terminales. Ils permettent la détermination d'encadrements pour une somme, une différence, un produit, un quotient. De tels exercices ne peuvent être négligés. Par exemple, on constate qu'un trop grand nombre d'adultes — même cultivés — commettent des erreurs de rangement quand ils doivent comparer des fractions.

Les calculs d'encadrements débouchent nécessairement sur l'usage de la fonction *valeur absolue*. L'équivalence

$$a - r \leqslant x \leqslant a + r \Leftrightarrow |x - a| \leqslant r$$

est actuellement loin d'être maîtrisée par les élèves du degré supérieur. Elle intervient dans presque tout raisonnement d'analyse mathématique.

Diverses inégalités importantes peuvent assez aisément être établies

L'inégalité triangulaire

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

et

$$||a| - |b|| \leqslant |a - b|$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz

Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont deux vecteurs du plan ou de l'espace, et $\vec{x} \cdot \vec{y}$ est leur produit scalaire, alors

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leqslant \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

Cette inégalité est équivalente au fait que le cosinus est toujours compris entre -1 et $+1$.

([3]) A ce stade il s'agit évidemment de nombres réels mais ce fait peut rester implicite.

L'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique

Si a et b sont des nombres positifs, alors

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$$

On la déduit immédiatement de $(a-b)^2 \geqslant 0$.

Certaines inégalités résultent de manipulations algébriques

Par exemple, si x est un nombre positif, il n'est guère difficile d'obtenir l'encadrement

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leqslant \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}$$

D'autres inégalités découlent de l'étude d'une fonction particulière

Par exemple, de la convexité de l'exponentielle, on déduit que si $0 < x$ et $0 \leqslant a \leqslant 1$, alors

$$e^{ax} \leqslant 1 + a(e^x - 1)$$

De là, quelques manipulations permettent d'obtenir l'*inégalité de Young* qui généralise l'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique : si x et y sont deux nombres positifs et $0 \leqslant a \leqslant 1$, alors

$$x^a \cdot y^{1-a} \leqslant ax + (1-a)y$$

Des inégalités de ce type sont susceptibles de permettre une procéduralisation de l'apprentissage de la notion de limite. Par exemple, de $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leqslant \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}$, nous pouvons déduire

$$\left| \frac{\sqrt{1+x}}{1+\frac{x}{2}} - 1 \right| \leqslant \frac{x^2}{4+2x} \leqslant \frac{x^2}{4}$$

Il est alors possible de mettre en évidence de façon opérationnelle que le quotient $\frac{\sqrt{1+x}}{1+\frac{x}{2}}$ tend vers 1 en calculant effectivement une valeur de x en-dessous de laquelle on est sûr que $\left| \frac{\sqrt{1+x}}{1+\frac{x}{2}} - 1 \right| \leqslant 10^{-1}$. On remplace ensuite 10^{-1} par 10^{-2}, puis 10^{-3}, etc. Dans un tel contexte, l'emploi d'un tableur peut se révéler très utile.

6.4.3 Un changement de cadre

Réaliser une approximation a souvent lieu à travers un changement de cadre. On modifie en effet les objets que l'on manipule. Par exemple, on remplace des nombres réels quelconques par des nombres à deux décimales. Ou bien on remplace des fonctions continues quelconques par des fonctions polynômiales.

Chaque fois qu'on réalise une approximation, trois questions doivent retenir l'attention :

Quels objets veut-on approcher ?

Par quels autres objets ?

Comment mesure-t-on la qualité de l'approximation ?

EXEMPLE 6.4.1 *Je mesure des longueurs avec un mètre gradué en millimètres. Les objets que je vais estimer sont les nombres réels qui mesurent des longueurs quelconques. Les nombres qui servent à approcher sont des nombres ayant au maximum trois décimales. En approchant un réel, je vais quitter le cadre des nombres réels et évoluer dans le cadre — très différent — de ces nombres.*
Mon approximation est la meilleure possible si je choisis le nombre à trois décimales le plus proche possible du nombre à évaluer. (Parfois deux choix sont possibles.) La distance entre un réel et un nombre ayant au plus trois décimales sert à mesurer la qualité de l'approximation.

EXEMPLE 6.4.2 *Je dois étudier une fonction f au voisinage d'un point x_0. Pour faciliter les calculs, je cherche la fonction affine qui approche la fonction f le mieux possible au voisinage de x_0.*
Le meilleur choix possible apparaît être la fonction affine $g : x \mapsto f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0)$, car c'est la seule fonction affine $x \mapsto mx + p$ pour laquelle la différence $f(x) - g(x)$ est négligeable devant $x - x_0$.
On dit que f et g sont tangentes en x_0. Le calcul de la limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{x-x_0}$ sert à mesurer la qualité de l'approximation. Seules les fonctions dérivables en x_0 se laissent approcher de cette manière. Nous sommes ainsi passés du cadre des fonctions dérivables en x_0 à celui des fonctions affines.

Des exemples de ce type peuvent être multipliés. Des changements de cadre liés à des approximations sont utilisés pour résoudre de nombreux problèmes.

Citons notamment ceux qui consistent à *linéariser* ou à *discrétiser*.

6.4.4 Linéariser

On linéarise un problème chaque fois qu'on remplace, comme dans l'exemple précédent, une fonction par une approximation affine de cette fonction en un point. Le procédé est courant en physique, l'exemple le plus connu étant celui qui consiste à remplacer $\sin\theta$ par θ lorsque l'angle θ (exprimé en radians) est « petit ». Cette approximation est d'autant meilleure que les fonctions $\sin x$ et x ne sont pas seulement tangentes mais mêmes osculatrices en 0 : la différence $\sin x - x$ n'est pas seulement négligeable devant x, mais elle l'est aussi devant x^2.

Linéariser un problème ne permet de se faire une idée des solutions de ce problème qu'au voisinage d'un point. Les solutions construites sont locales. Si les problèmes posés sont eux-mêmes de nature locale, une linéarisation peut être la meilleure méthode. Ainsi, déterminer les extrema *locaux* d'une fonction est — évidemment — un problème local. On le résout en cherchant les points où la dérivée s'annule, ce qui revient à dire que la meilleure approximation affine est une fonction constante.

Parfois le problème posé est de nature globale mais trop complexe pour être résolu de façon satisfaisante. Une linéarisation permet alors de déterminer des solutions au voisinage d'un point fixé, ce qui est loin d'être dénué d'intérêt. Par exemple l'étude des petits mouvements d'un pendule ou celle des oscillations d'un système de points matériels autour d'une position d'équilibre constituent de bonnes approches locales des problèmes globaux correspondants.

On parvient aussi dans certains cas à résoudre un problème global en enchaînant plusieurs linéarisations.

Exemple 6.4.3 *Les biologistes étudient l'évolution de populations d'animaux en construisant des modèles permettant de trouver l'effectif d'une population au cours d'une année à partir de l'effectif au cours de l'année précédente. Certains de ces modèles sont linéaires bien que le problème global de l'évolution de la population au cours de plusieurs années consécutives ne le soit pas.*

Un problème de ce type a fait l'objet de la séquence d'enseignement décrite au chapitre 13.

EXEMPLE 6.4.4 *Considérons le problème de rechercher les zéros d'une fonction dérivable f. La méthode de Newton consiste à remplacer la fonction f par une approximation affine en un point x_0 dont on a des raisons de croire qu'il n'est pas trop éloigné d'un zéro. On détermine alors le zéro x_1 de cette fonction affine $f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$. Puis on itère le procédé à partir de x_1. On construit ainsi une suite $(x_n)_n$ dont on peut montrer sous des conditions assez générales qu'elle converge (et même assez rapidement) vers un zéro de f.*

Cet exemple est un cas particulier d'application d'un théorème de *point fixe*. Le plus simple des théorèmes de cette famille permet de trouver — par approximations — la solution d'une équation du type $f(x) = x$. Le principe de la méthode est ultra-simple : on part d'une valeur x_0, puis on calcule $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, etc. Si la fonction f vérifie une inégalité du type $|f(x') - f(x'')| \leqslant k|x' - x''|$ où k est une constante positive inférieure à 1 et indépendante de x' et x'', alors cette suite converge vers une solution de l'équation $f(x) = x$. Par exemple, pour trouver une solution de l'équation $\cos x = x$, on peut partir de $x_0 = 0$, calculer $x_1 = \cos 0 = 1$, $x_2 = \cos 1$, etc. Chaque pression sur la touche `cos` de la calculatrice fournit l'approximation suivante de la solution.

6.4.5 Discrétiser

Discrétiser un problème est en quelque sorte le « linéariser par morceaux ». La méthode est d'emploi très fréquent.

EXEMPLE 6.4.5 *La définition de l'intégrale d'une fonction f repose sur la construction d'une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f. Cette fois, il ne s'agit pas d'une approximation locale mais globale. On n'utilisera donc pas les fonctions affines tangentes mais d'autres fonctions affines liées à la fonction f.*

Le procédé est suffisamment connu pour que nous ne nous y attardions pas ici. Il a au surplus fait l'objet d'une séquence d'enseignement décrite au chapitre 12.

EXEMPLE 6.4.6 *Une méthode due à Euler permet de trouver une solution approchée d'un système d'équations différentielles du type*

$$\begin{cases} x' = f(t,x,y) \\ y' = g(t,x,y) \end{cases}$$

Plus précisément, elle permet de trouver une approximation affine par morceaux de la solution qui pour $t = t_0$ prend la valeur $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. La méthode consiste à choisir un incrément h de la variable t et à faire comme si les dérivées x' et y' étaient constantes entre t_0 et $t_0 + h$. On détermine alors les valeurs de x et y en $t_1 = t_0 + h$ par

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0, y_0) \\ y_1 = y_0 + hg(t_0, x_0, y_0) \end{cases}$$

On itère ensuite le procédé.

Pour résoudre un problème global par une discrétisation, il ne suffit pas d'approcher les solutions à l'aide d'un modèle discret, il faut encore prouver que lorsqu'on fait tendre l'incrément h vers 0, la suite de solutions approchées obtenues converge vers la solution exacte. La démonstration de cette convergence n'est pas nécessairement la partie la plus facile du travail. Elle relève du changement de cadre réciproque de « discrétiser ».

6.5. Numériser

Nous désignerons par le verbe *numériser* toute activité ayant pour but d'adapter une procédure mathématique en vue de son exécution par un ordinateur ou une calculatrice programmable. Il s'agit bien là d'un changement de cadre car l'arithmétique d'un ordinateur est fondamentalement différente de celle des nombres réels.

Nous accorderons une place particulièrement importante à la numérisation pour plusieurs raisons :

1. Grâce aux calculatrices et ordinateurs, il est possible de réaliser rapidement des calculs beaucoup plus nombreux et plus complexes que ceux qui sont faisables « à la main ».

   L'usage de ces moyens de calcul permet en conséquence de réaliser de véritables *expérimentations* numériques sur des sujets d'algèbre, analyse, probabilités, statistiques. Ils contribuent de ce fait à former une intuition qui, sans cela, ne repose que sur quelques impressions *a priori* pas toujours très fiables.

   En géométrie, les activités de dessin aux instruments ont toujours permis une certaine expérimentation, néanmoins des logiciels tels que `Cabri Géomètre` d'une part permettent de réaliser des dessins beaucoup plus sophistiqués qu'auparavant et d'autre part donnent à ces figures une dimension dynamique qui renforce considérablement le côté expérimental.
2. L'expérimentation que nous venons d'évoquer se situe essentiellement à un niveau procédural. Elle est essentielle dans des sujets tels que l'analyse mathématique, dont on peut considérer que l'enseignement traditionnel néglige cette composante et se situe beaucoup trop rapidement au stade conceptuel. En témoignent les difficultés rencontrées avec les quantificateurs.
3. Cette expérimentation est également susceptible de jouer un rôle essentiel durant les phases d'exploration d'une activité de résolution de problème.
4. Enfin, *last but not least*, l'usage des calculatrices et ordinateurs est encore à nos yeux trop peu répandu.

Le travail sur ordinateur nécessite de bons logiciels. Notre rôle n'est pas de passer en revue ceux qui sont actuellement disponibles en en indiquant les avantages et les inconvénients. Attirons seulement l'attention sur la distinction à réaliser entre *logiciels scientifiques* et *logiciels pédagogiques*.

Les premiers sont souvent très puissants (et d'emploi parfois malaisé), souvent inutilement puissants pour les besoins de l'enseignement. Ils peuvent néanmoins rendre de grands services.

Les seconds sont moins nombreux. Il en existe de « petits », qui visent un problème particulier, de « plus gros » ayant vocation d'être utilisables en de nombreuses occasions. Ils sont souvent dus à l'œuvre d'enseignants « du terrain », ce qui leur confère des qualités (être proches des préoccupations des utilisateurs) et des défauts (un fini non professionnel). A chaque enseignant de faire son choix.

Dans la suite, nous mettrons en évidence une catégorie particulière de logiciels : les tableurs. Qu'on n'en déduise pas que nous excluons tous les autres. Qu'on n'exclue pas non plus de faire programmer les élèves eux-mêmes. Les logiciels qu'ils réaliseront seront moins performants et moins bien présentés que les logiciels professionnels, mais ils seront beaucoup plus convaincants. Au surplus, ce sera pour eux l'occasion de se battre avec de véritables problèmes et d'acquérir des compétences.

Programmer un algorithme est souvent assimilable à une activité de résolution de problème.

6.5.1 Numériser l'arithmétique

Exemple 6.5.1 *Considérons une calculatrice qui encode les nombres, en numération décimale, à l'aide de trois informations : un signe (+ ou −), une partie décimale (la mantisse) comportant n chiffres, $0.a_1 \dots a_n$ (où le chiffre a_1 est nécessairement différent de 0) et un exposant de deux chiffres e_1e_2 pouvant varier entre -99 et 99. Combien de nombres différents peuvent-ils être manipulés par cette machine ?*

Cette description correspond à une écriture des nombres en notation scientifique. Le nombre réel associé au triplet $(\pm, 0.a_1 \dots a_n, e_1e_2)$ est donc $\pm 0.a_1 \dots a_n \times 10^{e_1e_2}$.

La question posée est assez simple : l'exposant peut prendre 199 valeurs différentes, la mantisse varie de $0.10\dots0$ à $0.9\dots9$ et peut donc prendre $90\dots0 = 9 \times 10^{n-1}$ valeurs. La machine peut donc manipuler $199 \times 9 \times 10^{n-1}$ nombres strictement positifs différents. Tenant compte des nombres négatifs et du zéro, nous arrivons à $3582 \times 10^{n-1} + 1$ nombres réels différents.

Quelle que soit la précision de la machine, elle ne peut traiter qu'un nombre fini de réels différents (de surcroît tous décimaux limités). On notera le plus grand et le plus petit (en valeur absolue) de ces réels : $0.9\dots9 \times 10^{99}$ et $0.10\dots0 \times 10^{-99}$. On note aussi que ces « nombres de la machine » ne sont pas uniformément répartis dans $\mathbb{R}$: plus ils sont petits (en valeur absolue), plus ils sont serrés. Ceci montre que seuls les *calculs d'erreurs relatives* sont significatifs.

Non seulement une machine ne peut traiter qu'un nombre fini de réels, mais les opérations qu'elle effectue ont des propriétés différentes des opérations dans $\mathbb{R}$.

Exemple 6.5.2 *Fixons (arbitrairement) à 10 le nombre de chiffres significatifs de la machine précédente, et calculons $1 + 0.0000000001$ ou, si vous préférez, $0.1000000000 \times 10^1 + 0.1000000000 \times 10^{-9}$. Le résultat devrait comporter 11 chiffres significatifs, un de trop. La machine va donc arrondir ce résultat :*

$$1 + 0.0000000001 = 1$$

Tout nombre réel est donc absorbant par rapport à d'autres. Dans la foulée, il n'est pas difficile de voir que pour une machine, l'addition n'est pas associative, pas plus que la multiplication, que celle-ci n'est pas non plus distributive par rapport à l'addition. Bien entendu, la plupart des nombres n'ont pas d'inverse. (Il est intéressant de déterminer ceux qui en ont un.) Quant à la racine carrée ...

L'arithmétique d'une machine n'a pas que des propriétés négatives.

EXEMPLE 6.5.3 *L'addition et la multiplication sont commutatives.*

N'en déduisons pas qu'il nous est loisible d'effectuer les opérations dans n'importe quel ordre : dès qu'il y a plus d'une opération à effectuer, nous avons intérêt à organiser le calcul soigneusement.

EXEMPLE 6.5.4 *Pour calculer une somme $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ de réels d'ordres de grandeurs fort différents, il y a souvent intérêt à ranger les nombres $x_1, \ldots x_n$ du plus petit au plus grand.*

En additionnant d'abord les petits nombres entre eux, on limite l'éventuel effet absorbant des plus grands nombres par rapport aux plus petits.

Pour éviter le plus possible une augmentation importante des erreurs relatives, il est également déconseillé de soustraire deux nombres très voisins ou de diviser l'un par l'autre des nombres très petits.

EXEMPLE 6.5.5 *Un algorithme de calcul de π consiste à inscrire dans un cercle un carré, puis un octogone, un hexadécagone, etc. Le calcul du périmètre de ces polygones revient à déterminer la longueur de la corde d'un demi arc de cercle en fonction de la longueur de la corde de l'arc. Via le théorème de Pythagore, on obtient sans peine l'algorithme suivant, où s_n désigne la longueur du côté du polygone régulier à 2^{n+1} côtés :*

$$s_1 = \sqrt{2} \text{ et } s_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$$

Il reste alors à imprimer la suite des valeurs de $\ell_n = 2^n s_n$ pour obtenir une suite qui converge vers π.

Programmé sur le tableur `Excel`, cet algorithme nous a fourni le tableau suivant. La première colonne contient les valeurs de s_n, la deuxième, celles de 2^n, enfin la troisième colonne constituée des nombres l_n doit normalement converger vers π.

On constate que jusqu'à la 15e itération, les valeurs trouvées semblent bien se rapprocher de π. Ensuite elles s'en écartent, jusqu'à s'annuler pour $n = 28$ (comme le montrerait le tableau prolongé). Il ne sert à rien de mettre en cause le tableur et de refaire le calcul avec un autre logiciel. Le phénomène se reproduira peut-être un peu plus tard si on augmente la précision du calcul. Que s'est-il passé ?

1,41421356	2	2,82842712
0,76536686	4	3,06146746
0,39018064	8	3,12144515
0,19603428	16	3,13654849
0,09813535	32	3,14033116
0,04908246	64	3,14127725
0,02454308	128	3,1415138
0,01227177	256	3,14157294
0,00613591	512	3,14158773
0,00306796	1024	3,14159142
0,00153398	2048	3,14159235
0,00076699	4096	3,14159258
0,0003835	8192	3,14159263
0,00019175	16384	3,14159265
9,5874E-05	32768	3,14159265
4,7937E-05	65536	3,14159261
2,3968E-05	131072	3,14159291
1,1984E-05	262144	3,1415917
5,9921E-06	524288	3,14159655
2,9961E-06	1048576	3,14159655
1,498E-06	2097152	3,14151884
7,4892E-07	4194304	3,14120797
3,7461E-07	8388608	3,14245127

Il se fait que la suite s_n converge vers zéro. Le nombre $\sqrt{4-s_n^2}$ se rapproche donc de 2, et la différence $2-\sqrt{4-s_n^2}$ porte sur deux nombres voisins l'un de l'autre. Les erreurs d'arrondi augmentant constamment finissent par l'emporter sur la « vraie valeur » et le résultat obtenu n'a plus aucune signification. Pour ne rien arranger, l'opération finale $2^n * s_n$ porte sur un nombre qui se rapproche de zéro et l'autre qui devient de plus en plus grand. Autant diviser deux nombres très petits.
Dans un tel cas, il faut retravailler l'algorithme, pour le mettre sous une forme qui se prête au calcul sur machine en éliminant les opérations litigieuses. Ici, nous ferons disparaître la soustraction $2-\sqrt{4-s_n^2}$ en multipliant et divisant par $2+\sqrt{4-s_n^2}$.

De façon précise :

- Pour tout n, posons $w_n = \sqrt{2+\sqrt{4-s_n^2}}$.
- On vérifie sans problème que $w_{n+1} = \sqrt{2+w_n}$.
- Alors

$$\ell_{n+1} = 2^{n+1}s_{n+1} = 2^{n+1}\frac{\sqrt{2-\sqrt{4-s_n^2}}\cdot w_{n+1}}{w_{n+1}} = \frac{2^{n+1}s_n}{w_{n+1}} = \frac{2\ell_n}{w_{n+1}}$$

- En programmant cet algorithme transformé, on obtient une suite qui n'a pas le comportement pathologique rencontré plus haut.

6.5.2 Numériser l'algèbre

En plus de logiciels adaptés à des sujets particuliers dont nous ne saurions faire ici un inventaire même restreint, nous devons attirer l'attention sur l'importance de l'emploi de *tableurs*. Nous venons de donner un exemple d'un tel usage à l'occasion du calcul de valeurs approchées de π. Nous en rencontrerons encore à plusieurs reprises. Les tableurs sont des outils de programmation très simples à manipuler et dont les versions actuelles permettent des réalisations remarquables, y compris sur le plan graphique. Au vu de leurs possibilités, la maîtrise de la manipulation de ces logiciels doit être considérée comme une compétence à acquérir par tous les élèves du secondaire, et cela dès les premières années de celui-ci.

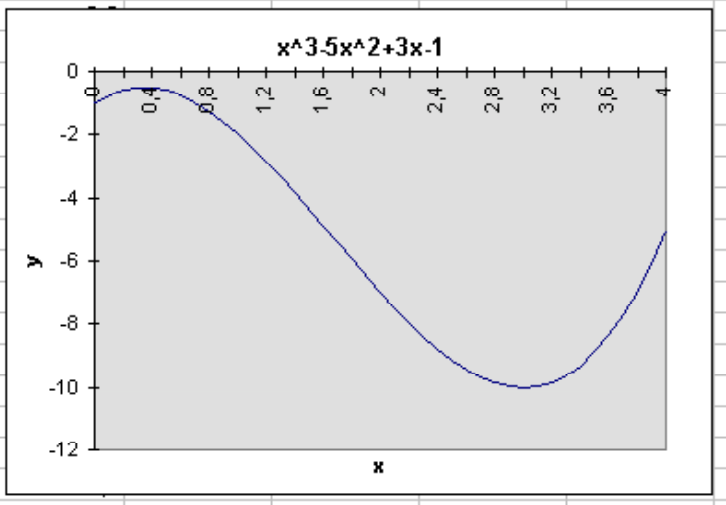
EXEMPLE 6.5.6 *Étude graphique d'une fonction*

L'étude graphique d'une fonction peut être réalisée

1. *en attribuant une colonne de cellules aux valeurs de la variable indépendante. Il suffit d'introduire dans la cellule de tête de cette colonne la valeur initiale et dans celle située juste en-dessous, une formule « de récurrence » du type « $= A_1 + 0,2$ ». En recopiant cette formule telle quelle dans les cellules suivantes de la même colonne, le domaine de la fonction est entièrement déterminé. Ce domaine est discrétisé, il a la forme d'une progression arithmétique. D'autres formes sont évidemment possibles.*
2. *en définissant la fonction dans une cellule située à côté de celle qui contient la valeur initiale de la variable et en recopiant cette définition dans les cellules situées en dessous. La fonction est automatiquement tabulée sur le domaine déterminé par la colonne des valeurs de la variable indépendante.*
3. *en faisant dessiner le graphique de la fonction à l'aide des commandes adéquates du menu.*

B2 =A2*A2*A2-5*A2*A2+3*A2-1

A	B	C
0	-1	0,2
0,2	-0,592	0,2
0,4	-0,536	0,2
0,6	-0,784	0,2
0,8	-1,288	
1	-2	
1,2	-2,872	
1,4	-3,856	
1,6	-4,904	
1,8	-5,968	
2	-7	
2,2	-7,952	
2,4	-8,776	
2,6	-9,424	
2,8	-9,848	
3	-10	
3,2	-9,832	
3,4	-9,296	
3,6	-8,344	
3,8	-6,928	
4	-5	0.2



Il suffit alors de modifier la valeur figurant dans la cellule de tête de la colonne-domaine pour obtenir à la fois une tabulation de la fonction sur un autre intervalle et le graphique correspondant. La présence simultanée à l'écran du tableau des valeurs de la fonction et du graphique correspondant permet à l'enseignant de centrer l'attention des élèves sur l'analyse des propriétés de la fonction plutôt que sur le calcul des valeurs et le dessin du graphique. La possibilité de modifier rapidement et avec aisance le tableau et le graphique permet de donner à cette analyse toute la finesse désirée.

Les tableurs se prêtent également très bien au calcul de sommes et de différences. Ils pourraient donc servir de support à la préparation algébrique d'un cours de calcul différentiel et intégral. Nous n'avons pas la possibilité de développer ce point de vue dans le cadre de ce travail. Contentons-nous de montrer une application au calcul des sommes des puissances k^{e} des naturels, $\sum_{n=1}^{N} n^k$.

EXEMPLE 6.5.7 *Nous nous situons dans une classe dont les élèves ont déjà rencontré les coefficients binomiaux* $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$. *A l'aide d'un tableur, et de la récurrence fondamentale* $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, *construisons le triangle de Pascal. La cellule intersection de la ligne* $n+1$ *et de la colonne* $k+1$ *contient la valeur de* $\binom{n}{k}$. *Sélectionnons les cellules* $n°0$ *à* $n+1$ *de cette colonne* $k+1$. *Si notre tableur dispose d'une fonction « somme automatique » , nous voyons apparaître la somme des valeurs sélectionnées à la dernière ligne de la fenêtre du tableur.*

Nous constatons (voir ci-dessous) que cette somme se trouve également dans la cellule située en colonne $n+2$, ligne $k+2$. De plus, il ne s'agit pas d'un hasard : faisant varier les valeurs de n et k, nous faisons toujours la même constatation. Nous pouvons donc conjecturer l'identité

$$\sum_{n=0}^{N} \binom{n}{k} = \binom{N+1}{k+1}$$

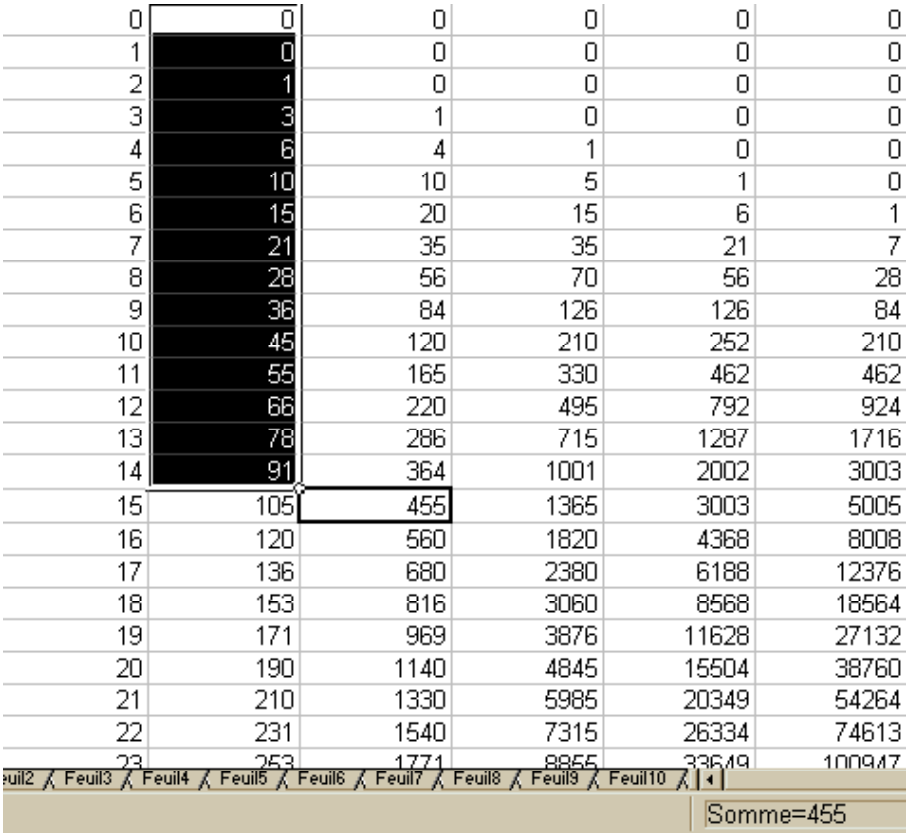
Le rappel de la récurrence fondamentale permet de justifier rapidement notre conjecture. Nous en déduisons par exemple

$$\sum_{n=1}^{N} n = \binom{N+1}{2} = \frac{N(N+1)}{2}$$

mais aussi puisque $n^2 = 2\frac{n(n-1)}{2} + n$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} n^2 &= 2\sum_{n=1}^{N} \binom{n}{2} + \sum_{n=1}^{N} n = 2\binom{N+1}{3} + \binom{N+1}{2} \\ &= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \end{aligned}$$

Par récurrence, nous pouvons ainsi calculer $\sum_{n=1}^{N} n^k$ quel que soit k.



0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0
3	3	1	0	0	0
4	6	4	1	0	0
5	10	10	5	1	0
6	15	20	15	6	1
7	21	35	35	21	7
8	28	56	70	56	28
9	36	84	126	126	84
10	45	120	210	252	210
11	55	165	330	462	462
12	66	220	495	792	924
13	78	286	715	1287	1716
14	91	364	1001	2002	3003
15	105	455	1365	3003	5005
16	120	560	1820	4368	8008
17	136	680	2380	6188	12376
18	153	816	3060	8568	18564
19	171	969	3876	11628	27132
20	190	1140	4845	15504	38760
21	210	1330	5985	20349	54264
22	231	1540	7315	26334	74613
23	253	1771	8855	33649	100947

6.5.3 Numériser l'analyse

Nous l'avons déjà remarqué au chapitre 3, les débuts de l'analyse, l'introduction de la notion de limite en particulier, sont délicats du fait de ce que nous ne disposons pas d'une procédure analytique générale pour déterminer la limite d'une suite quelconque.

La tentation est alors très forte de se contenter d'une introduction intuitive du genre $\lim_{n\to\infty} s_n = u$ si et seulement si s_n se rapproche d'aussi près que l'on veut de u lorsque n grandit. De cette façon, on installe chez les élèves un premier modèle mental. Mais, si après quelques exemples, on formule immédiatement la définition en ε, n_0, on se situe à un niveau conceptuel beaucoup plus élevé et qui n'a pas été suffisamment préparé. Le résultat est trop souvent inconsistant.

La seule procédure vraiment générale pour étudier la convergence d'une suite est d'en calculer un grand nombre de valeurs, et de faire apparaître le phénomène de *stabilisation des décimales*.

Après suffisamment d'exemples, il deviendra naturel de se poser des questions du genre

A partir de quel terme de la suite, la 5e décimale ne change-t-elle plus ?

Autrement dit, *quel est le plus petit n tel que* $|s_n - u| \leqslant \frac{1}{2}10^{-5}$ *?* Il sera alors peut-être temps de penser à conceptualiser la notion de limite, et le formalisme des quantificateurs deviendra indispensable.

Dans un tel schéma, il est clair qu'un tableur peut rendre de grands services. L'exemple ci-contre ci-après illustre le calcul de $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Malheureusement, comme on l'a vu plus haut, les choses ne fonctionnent pas toujours aussi harmonieusement que dans cet exemple. Des erreurs d'arrondi peuvent venir fausser les résultats au point que ceux-ci perdent toute signification.

Il ne conviendrait pas d'éviter systématiquement tout exemple de ce genre : ce serait donner aux élèves une confiance trop grande en la machine. Mais il faut certainement éviter de traiter de ce problème de fiabilité en même temps qu'on introduit un concept aussi important que celui de limite : ce serait semer la confusion la plus totale. Une fois le concept assimilé, il sera nécessaire de revenir sur la question et de faire remarquer, par exemple, que sur ordinateur une *série* de nombres converge dès que son terme général tend vers 0, ce qui, en mathématique, est en réalité faux.

L'emploi d'un tableur permettrait une approche procédurale d'autres sujets tels que la dérivée ou l'intégrale (voir par exemple au chapitre 12, la séquence d'enseignement consacrée à l'intégration).

D6

A	B
1	1,57079633
0,5	1,04719755
0,25	1,01072102
0,125	1,00262265
0,0625	1,00065219
0,03125	1,00016283
0,015625	1,00004069
0,0078125	1,00001017
0,00390625	1,00000254
0,00195313	1,00000064
0,00097656	1,00000016
0,00048828	1,00000004
0,00024414	1,00000001
0,00012207	1
6,1035E-05	1
3,0518E-05	1
1,5259E-05	1
7,6294E-06	1

6.5.4 Numériser les probabilités

Avec les probabilités, nous abordons un domaine propice à la réalisation de véritables *expériences mathématiques*. Le concept même de probabilité résulte d'une *modélisation* de la notion de *fréquence* liée à l'observation *répétée* d'un phénomène particulier. Et nous savons que, pour faire apparaître une stabilisation de la fréquence, l'observation doit réellement être répétée de nombreuses fois. En termes pseudo-techniques, pour « gagner une décimale », il faut faire 100 fois plus d'observations.

Des expérimentations effectives (jets de pièces ou de dés, tirages de cartes, relevé des résultats du Lotto, etc) sont indispensables au début d'un cours de probabilité. Mais les circonstances concrètes de l'enseignement rendent malaisée la répétition d'une observation un très grand nombre de fois, disons *plusieurs milliers de fois*, alors que certains phénomènes n'apparaîtront qu'avec des expériences menées à une telle échelle.

Exemple 6.5.8 *Combien de fois au minimum faut-il lancer une pièce de monnaie parfaitement symétrique pour que la probabilité d'avoir une séquence d'exactement dix jets consécutifs identiques soit supérieure à* $\frac{1}{2}$ *?*

On peut calculer la probabilité d'apparition d'une suite de n jets consécutifs identiques pour $n = 1, 2, \ldots$: chaque fois qu'on lance une pièce, il y a une chance sur deux pour que le lancer suivant donne le même résultat. Il y a donc une chance sur deux pour qu'un lancer soit isolé, une chance sur 4 pour qu'il soit le premier d'une suite de deux, etc. Ainsi la longueur moyenne d'une suite de jets consécutifs identiques est $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \cdots = 2$.

Par conséquent, sur n jets, nous devons nous attendre en moyenne à $\frac{n}{2}$ séquences de jets consécutifs identiques. La probabilité d'une séquence d'exactement 10 jets consécutifs identiques étant $\frac{1}{2^{10}}$, la probabilité qu'il y en ait au moins une parmi $\frac{n}{2}$ séquences de longueur variable vaut $1 - \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right)^{n/2}$. Cette probabilité est supérieure à $0,5$ dès que $n \geqslant 1419$.

L'exemple précédent n'est certainement pas destiné à des débutants. Il n'a pour but que de montrer l'utilité et même la nécessité de répéter certaines expériences un très grand nombre de fois si on veut faire apparaître les deux principales caractéristiques des phénomènes qui relèvent de la théorie des probabilités : une *régularité globale* qui permet de faire des prédictions à long terme, accompagnée d'une *variabilité locale* qui empêche toute prédiction à court terme et ne permet d'exclure l'apparition d'aucun événement même très peu probable.

Dans ce contexte, l'ordinateur est destiné à jouer un rôle particulièrement important en vue de *simuler* des expériences aléatoires. La *simulation* est la méthode qui accompagne nécessairement toute étude probabiliste expérimentale. Elle permet aussi de *valider* les résultats obtenus lors des études théoriques.

La simulation repose sur l'emploi d'un *générateur de nombres aléatoires*. Pour éviter toute mauvaise interprétation, il importe de faire comprendre en quoi consiste un tel générateur. Il s'agit — par exemple — de calculer une suite de nombres compris entre 0 et 1, de façon qu'ils soient uniformément répartis dans cet intervalle *comme le seraient des nombres qui auraient réellement été tirés au sort par un procédé mécanique quelconque*. Mais un ordinateur est absolument incapable de procéder à un véritable tirage au sort. Il ne peut « fabriquer » un nombre qu'à l'aide d'une procédure de calcul.

> La génération d'une suite de nombres aléatoires résulte d'un procédé déterministe, seul le premier nombre de la suite étant éventuellement choisi (au hasard ?) par l'utilisateur. Les autres nombres sont calculés, chacun à partir du précédent, à l'aide d'une formule de récurrence bien choisie.

Il est facile de constater qu'il n'existe aucun générateur de nombres aléatoires qui soit parfait. En effet puisque un ordinateur ne peut traiter qu'un nombre fini de nombres, une répétition apparaît nécessairement lorsqu'on engendre une suite suffisamment longue de nombres par une formule de récurrence. La suite est donc périodique.

Certaines formules de récurrence conviennent bien pour engendrer une suite de nombres aléatoires. Nous entendons par là que la suite engendrée a une période tellement longue qu'on ne verra pas les répétitions apparaître et que les valeurs engendrées passent avec succès une série de tests d'uniformité de répartition. Dans [124], L. Råde décrit un générateur de nombres aléatoires facile à programmer et largement suffisant pour les besoins de l'enseignement :

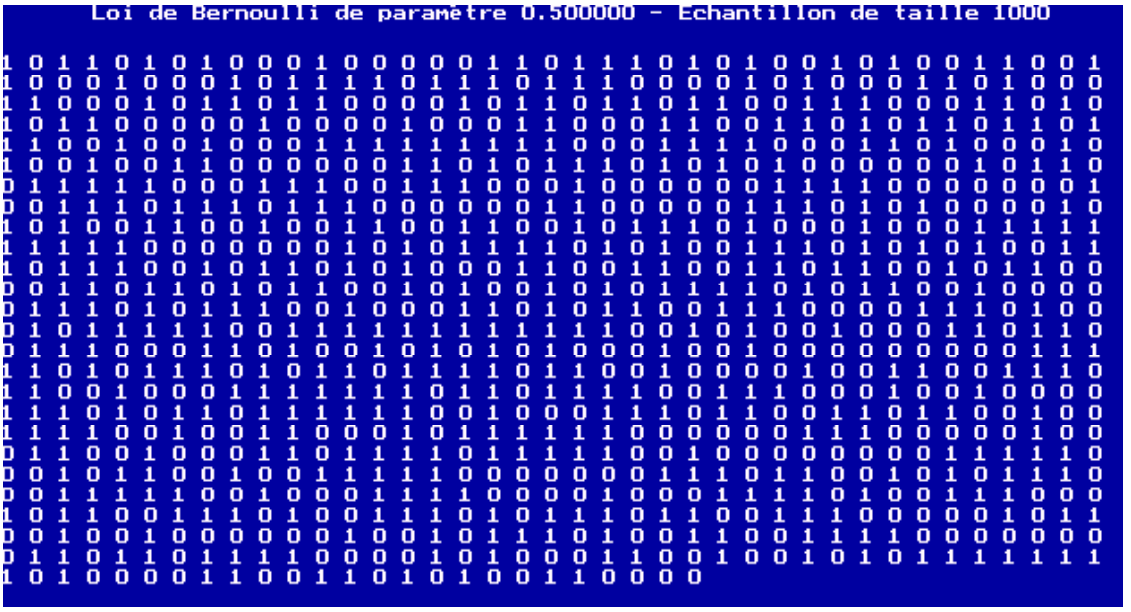
1. L'utilisateur choisit arbitrairement un nombre compris entre 0 et 1 et ayant au moins 6 à 7 décimales non nulles. Ce sera la *semence* du générateur, c'est-à-dire le premier nombre x_0 de la suite.
2. Quel que soit n, le nombre x_n est la partie décimale de $147x_{n-1}$.

Pour simuler un jeu de pile ou face, on engendre une suite de nombres par le procédé qui vient d'être indiqué et on décide que le n^{e} lancer est « pile » si $x_n \leqslant 0,5$, face sinon.

La programmation d'un générateur de nombres aléatoires peut aider à en faire comprendre le fonctionnement. Vu la nécessité lors d'une simulation de répéter un très grand nombre de fois un même calcul, l'utilisation d'un tableur ne permet pas d'arriver à des résultats acceptables : la prise en compte de plus d'une centaine de lignes ou de colonnes n'est guère possible. De plus tous les tableurs ne disposent pas d'un générateur de nombres aléatoires.

Il est alors nécessaire soit d'effectuer un peu de programmation dans un langage plus sophistiqué, soit d'utiliser un logiciel adéquat.

EXEMPLE 6.5.9 *Des logiciels existent qui permettent de simuler le lancer d'une pièce de monnaie, d'un dé ou plus généralement d'événements aléatoires obéissant aux grandes lois classiques : de Bernoulli, binômiale, de Poisson, etc.*



Ces logiciels comptent le nombre d'occurrences d'un événement donné, dressent des tableaux, dessinent divers graphiques, etc.

Dans bien des cas, la simulation d'une expérience nécessite une analyse soigneuse de la situation. Rédiger un programme de simulation est une *modélisation numérique*. Le programme doit donc être validé, et cela doit être fait avec d'autant plus de soin que nous connaissons la facilité avec laquelle des erreurs peuvent être commises en probabilité.

EXEMPLE 6.5.10 *Pour illustrer cette remarque, reprenons le problème 6.3.3 du bâton brisé en trois morceaux de longueurs aléatoires. Simulons ce problème de la façon suivante :*

1. *Nous admettons que le bâton est le segment* $[0, 1]$. *Le couper aléatoirement en trois morceaux revient donc à choisir deux nombres* x *et* y *compris entre 0 et 1.*
2. *Nous convenons d'appeler* x *le plus petit des deux nombres et* y *le plus grand.*
3. *La fonction* `Alea(a,b)` *nous fournit un nombre aléatoirement entre* a *et* b. *Nous engendrons donc* x *par un appel à* `Alea(0,1)` *puis* y *par un appel à* `Alea(x,1)`.
4. *Les trois morceaux du bâton sont de longueur* x, $y - x$ *et* $1 - y$. *Nous testons donc les inégalités* $x < 1 - x$, $y - x < x + 1 - y$ *et* $1 - y < y$, *soit* $x < \frac{1}{2}$, $y - x < \frac{1}{2}$ *et* $y > \frac{1}{2}$

Nous appliquons l'algorithme précédent un grand nombre de fois, et nous comptons combien de fois les trois inégalités sont satisfaites. Nous savons par l'analyse géométrique effectuée précédemment que cette fréquence doit être raisonnablement proche de $0,25$. Or en exécutant le programme correspondant à cet algorithme, nous trouvons systématiquement des valeurs proches de $0,19$.

Nous nous trouvons donc en présence de deux modélisations qui donnent des résultats différents. Une d'entre elles n'est pas valide. Un peu de réflexion montre que notre simulation n'a pas été effectuée correctement : le choix de y devrait être indépendant de celui de x alors qu'il ne l'est visiblement pas. Les valeurs de y ne sont pas uniformément réparties entre 0 et 1. Nous devons modifier la procédure appliquée : engendrer y comme x par un appel à `Alea(0,1)` puis permuter éventuellement les valeurs de x et y de façon que x soit le plus petit des deux.

Nous voyons ici apparaître l'utilité dans certains cas de modéliser une situation de plusieurs façons différentes. Ces modélisations se valident mutuellement et mettent l'accent sur des aspects différents du problème étudié, enrichissant ainsi considérablement les compétences conceptuelles et procédurales de l'élève.

6.5.5 Numériser la géométrie

Nous conclurons cette longue section consacrée à l'emploi des moyens de calcul en examinant les diverses possibilités de numériser la géométrie.

Quelle que soit la présentation utilisée, un problème de géométrie ne peut être traité par ordinateur qu'à travers une algébrisation. Ce sont donc deux changements de cadre successifs qui sont opérés. Mais les logiciels peuvent masquer totalement ou partiellement aux yeux de l'utilisateur le fait que l'ordinateur ne manipule que des informations numériques.

EXEMPLE 6.5.11 *Lorsque Cabri-Géomètre teste si trois droites passent par un même point, il détermine en réalité si un nombre réel est nul, c'est-à-dire inférieur à un certain ε. Le choix de cet ε comporte une large part d'arbitraire et peut varier d'une machine à l'autre.*

Contentons-nous de mentionner trois types de logiciels géométriques (par ailleurs largement connus) pouvant intéresser l'enseignement des mathématiques.

6.5.5.1 Les logiciels de type Cabri-Géomètre

Nous disons « LES logiciels ... » car il en existe plusieurs. A côté de Cabri-Géomètre (dû pour l'essentiel à Jean-Marie Laborde), qui est sans doute à la fois le premier, le plus connu et le plus complet d'entre eux, mentionnons, disponibles sur Internet : `Dr. Geo` (4) et `Déclic` (5). Ces logiciels sont adaptés à la géométrie synthétique, le passage par le cadre algébrique étant invisible pour l'utilisateur.

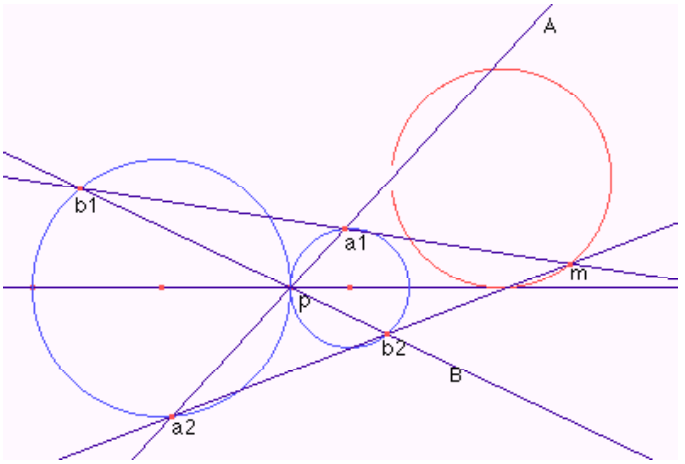
Ce sont d'abord des outils permettant la construction aisée de figures mêmes relativement complexes. Ils contribuent ainsi à *procéduraliser la géométrie*. Le fait de pouvoir construire de façon assez précise et en un temps limité des figures de qualité est de nature à aider puissamment à la formation des concepts, notamment en dégageant les propriétés qui justifient les constructions. L'apprentissage de la démonstration ne peut qu'en bénéficier.

(4) http ://xoom.com/FeYiLai
(5) http ://home.nordnet.fr/ eostenne/declic.htm

L'aspect le plus spectaculaire de ces logiciels est la possibilité de modifier une figure tout simplement en saisissant un point à l'aide du curseur de la souris et en le déplaçant sur l'écran. On peut ainsi se convaincre qu'une propriété qui semble apparaître sur une figure est bien *vraie* car indépendante de la figure particulière qui a été construite. Les démonstrations restent nécessaires car elles permettent de montrer *pourquoi* les propriétés sont vraies.

Une autre caractéristique remarquable de ces logiciels est la construction de lieux géométriques dont l'élève ignore la nature. L'ayant découverte sur l'écran, il sait désormais comment il doit orienter son raisonnement.

EXEMPLE 6.5.12 *Deux cercles sont tangents en un point p par lequel passent deux droites A, qui recoupe les cercles en a_1 et a_2, et B, qui recoupe les cercles en b_1 et b_2. On note m le point d'intersection des droites a_1b_1 et a_2b_2. Quel est le lieu de m lorsque B tourne autour de p, la droite A restant fixe ?*



Sans Cabri, rares sont les élèves (et même les professeurs) qui affirmeront que le lieu est un cercle. Il reste à trouver une démonstration.

Pour plus d'exemples d'utilisation de Cabri-Géomètre, nous nous permettrons de renvoyer à la littérature existante, notamment les manuels d'accompagnement du logiciel, les textes écrits par ses auteurs, les articles [53], [54], [55], [56] dûs à Francis Denis et Sylvain Courtois parus dans *Mathématique et Pédagogie*, les deux volumes [60] de R. Cuppens, le site Internet http ://www-cabri.imag.fr consacré à Cabri et la revue bimestrielle *Abracadabri*.

6.5.5.2 Le Logo

Le langage Logo a été créé vers la fin des années 60 par Seymour Papert (voir [113]). Il permet également une approche procédurale de la géométrie. Mais les propriétés qu'il permet de mettre en évidence ne sont pas nécessairement les mêmes que celles que l'on rencontre traditionnellement. A tout moment, l'état de la tortue est déterminé par deux paramètres : sa position et son cap.

EXEMPLE 6.5.13 *En* LOGO*, on dessine un cercle à l'aide d'une instruction analogue à la suivante :* REPETE 30 [AV 10 DR 12]

Autrement dit, nous ordonnons à la tortue d'effectuer 30 fois une suite de deux opérations : avancer de 10 unités, tourner à droite de 12 degrés. Nous savons qu'une telle instruction ne saurait dessiner un cercle mais bien un polygone régulier à 30 côtés. Mais ce polygone est suffisamment proche d'un cercle pour que la différence ne puisse être perçue à l'œil nu. C'est donc bien un cercle approché (tout résultat produit par un ordinateur est approché). Mais ce cercle n'est pas construit à l'aide de la propriété courante : un cercle est l'ensemble des points à distance donnée d'un point donné. Ni le centre, ni le rayon du cercle ne sont utiles pour la tortue qui obéit à l'instruction ci-dessus. La tortue ne connaît que la longueur de chaque « côté du cercle » et l'angle dont elle tourne à chaque pas. Ces deux paramètres déterminent la courbure de la courbe dessinée.

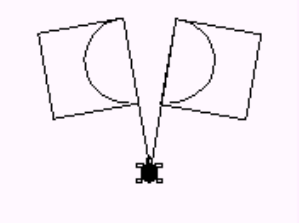
En Logo un cercle est construit comme étant une courbe à courbure constante.

A tout moment, la tortue avance un peu et tourne un peu. C'est une géométrie *locale* qui la gouverne. La programmation Logo se prête donc bien à l'étude de propriétés locales. Elle pourrait par exemple être utilisée pour dessiner des courbes solutions d'une équation différentielle $y' = f(x, y)$, sans résoudre l'équation.

Puisqu'elle permet de rencontrer des propriétés différentes des propriétés usuelles, la « géométrie-tortue » constitue un outil qui complète les outils géométriques usuels sans les remplacer. En permettant un certain dépaysement, elle peut relancer la motivation. Ce serait une erreur de la confiner — comme on le fait souvent — à l'école primaire.

Elle a aussi une autre caractéristique : en programmant en Logo, l'élève a réellement une activité de type informatique. Il doit rédiger des routines et des sous-routines, mettre en place des itérations, exploiter éventuellement la récursivité. Il peut aussi remarquer comment certaines propriétés d'une figure peuvent se traduire au niveau du programme Logo.

EXEMPLE 6.5.14 *Si une programme* LOGO *dessine une figure F, pour dessiner l'image de F par une symétrie axiale, il suffit de remplacer partout l'instruction* DR *(tourne à droite) par l'instruction* GA *(tourne à gauche) et vice-versa. L'axe de la symétrie est déterminé par la position et le cap de la tortue au départ du programme et il faut bien entendu ramener la tortue à ce point entre les deux exécutions.*



Cette approche informatique met bien en évidence les invariants d'une symétrie axiale. De plus, en `Logo`, les angles sont nécessairement orientés.

Nous pouvons aussi obtenir, à peu de frais, des figures dont le côté esthétique ne peut être négligé et qui possèdent une symétrie circulaire prégnante. Imaginons une tortue situé au point P_0, avec un cap α et considérons une séquence d'instructions `Logo` qui amène la tortue en un point P_1 et avec le cap $\alpha+60$ (tous les angles sont mesurés en degrés). Que se passe-t-il si nous exécutons la séquence d'instructions une deuxième fois, la tortue repartant de P_1 ? Elle occupera alors un point P_2, avec le cap $\alpha+120$. Après une troisième exécution, elle sera en P_3 avec le cap $\alpha+180$. Continuant de la sorte, nous voyons qu'après six exécutions de la séquence d'instructions, la tortue sera en un point P_6, avec le cap α.

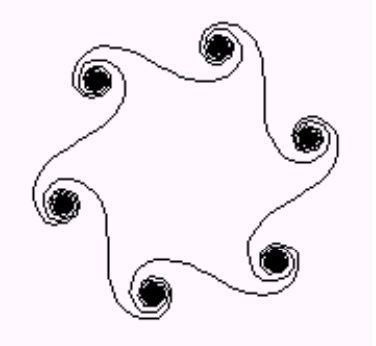
Mais tous les segments $[P_0P_1]$, $[P_1P_2]$, ..., $[P_5P_6]$ ont même longueur. Il est alors clair que $P_0 = P_6$ et que les points P_0, P_1, ..., P_5 sont les sommets d'un hexagone régulier. Et cela quelle que soit la séquence d'instruction exécutée (la seule condition étant qu'elle augmente le cap de 60°).

EXEMPLE 6.5.15 *Considérons le programme suivant :*

```
POUR ROSACE :L :A
REPETE 120 [AV :L TG :A DONNE "A :A+3]
FIN
```

Exécutons `ROSACE 5 1` *. Le programme ne comporte qu'une seule instruction d'avancer,* `AV :L`*, dans laquelle* `:L` *aura toujours 5 pour valeur et une seule instruction de tourner à gauche* `TG :A` *dans laquelle* `:A` *vaut au départ 1°. Mais ces deux instructions sont exécutées 120 fois, et à chaque fois la valeur de* `:A` *augmente de 3°.*

A l'issue du programme, la valeur de `:A` *a augmenté de 360°, autrement dit elle est redevenue de 1° (ce qui permettra un enchaînement harmonieux avec la seconde exécution de* `ROSACE 5 1`*). Quant à la tortue, elle a tourné de* $1 + 4 + 7 + \cdots + 357 = 21480$ *degrés, soit 300° vers la gauche, ou encore 60° vers la droite. En enchaînant 6 exécutions, (*`REPETE 6 [ROSACE 5 1]`*) on obtient par conséquent une figure qui a nécessairement une symétrie d'ordre 6, comme le confirme la figure suivante :*



Le fait que les caractéristiques géométriques intéressantes d'une figure se retrouvent dans un programme qui dessine cette figure n'est en soi pas spécialement étonnant, mais cela rend les changements de cadre considérés d'autant plus fructueux.

On trouvera d'autres exemples d'utilisation du Logo dans la brochure *La géométrie hors des sentiers battus*, [51], publiée en 1988 par le service de l'Organisation des Etudes du Ministère de l'Education Nationale. (Voir aussi [109]).

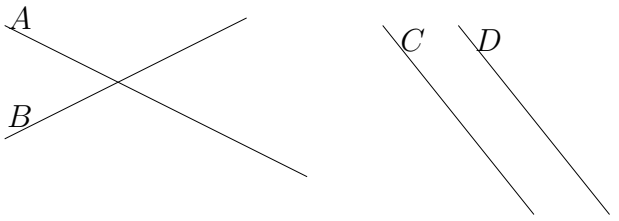
6.5.5.3 La représentation de l'espace

Un autre domaine géométrique pour lequel il nous semble important de rappeler l'intérêt d'un traitement informatique est celui de la représentation plane des figures de l'espace. Un des gros problèmes rencontrés par les élèves est en effet de « voir dans l'espace ». Cette expression ne doit évidemment pas être prise au pied de la lettre : les élèves (ou les adultes) qui « ne voient pas dans l'espace » sont parfaitement capables de monter dans un autobus sans rater la marche.

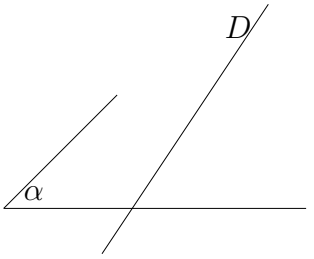
> « Ne pas voir dans l'espace » signifie « Ne pas être capable de reconstituer mentalement la réalité spatiale à partir d'une de ses représentations planes ».

La raison de cette non-reconstitution est simple : dans n'importe quelle représentation plane de l'espace, chaque point du plan représente une infinité de points de l'espace. Toute représentation plane est donc ambiguë. Malheureusement, bien des figures « simples » utilisées traditionnellement dans les débuts de l'étude de l'espace ne permettent pas de lever cette ambiguïté et en conséquence ne permettent pas non plus de « voir » la situation.

Exemple 6.5.16 *La figure située ci-dessous à gauche représente aussi bien deux droites non coplanaires que deux droites sécantes, celle de droite représente aussi bien deux droites non coplanaires que deux droites parallèles.*

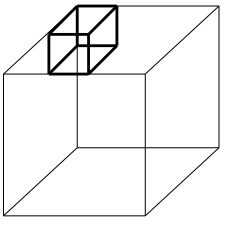


Quant à la figure qui suit, elle représente un plan et une droite qui coupe ce plan. Mais où est le point d'intersection ?



Des figures telles que les précédentes sont ce que nous appelons des *figures flottantes* : les éléments qui constituent la figure ne sont accrochés ni entre eux, ni à un référentiel. Un premier moyen d'aider à « voir dans l'espace » est de bannir les figures flottantes et de ne considérer que des figures dont les éléments sont « accrochés » à des objets géométriques familiers tels qu'un polyèdre, celui-ci étant évidemment très souvent un cube. Mais même dans ce cas, des ambiguïtés peuvent empêcher l'élève de reconstituer mentalement la figure spatiale.

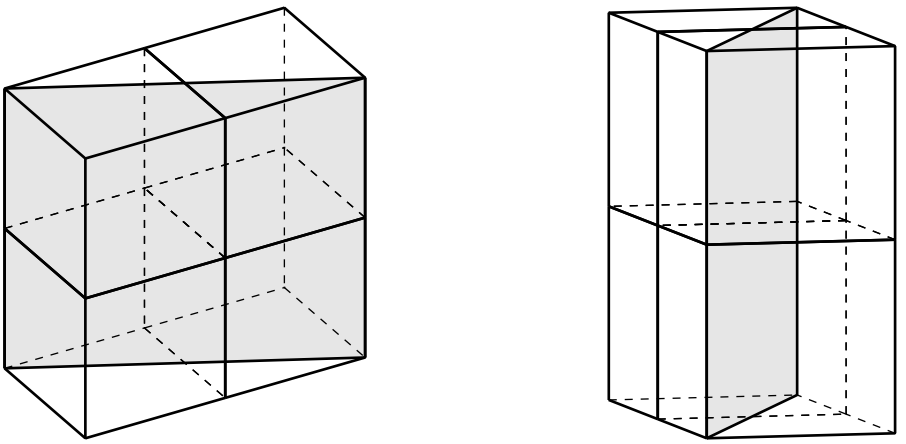
Exemple 6.5.17 *La figure ci-dessous comporte un grand cube et un petit cube. Le petit cube est-il situé au-dessus ou à l'intérieur du grand ?*



Pour rencontrer des problèmes de ce genre, l'école primaire fait en sorte que l'élève puisse prendre en main un objet ayant la forme voulue et le manipuler à sa guise. Ce type d'activité est encore réalisable au début du secondaire, mais devient de plus en plus difficile au fur et à mesure que les situations rencontrées deviennent plus complexes. Un logiciel de géométrie spatiale doit donner aux élèves la possibilité non seulement de construire des figures accrochées à des référentiels, mais aussi d'examiner ces constructions sous divers angles de vue. En faisant tourner les objets spatiaux à l'écran autour de divers axes, on facilite la reconstitution mentale de la situation.

Divers logiciels existent qui permettent d'atteindre cet objectif. On nous pardonnera de mentionner le logiciel `Reseau` réalisé par les auteurs du présent document durant l'année 1996-97, dans le cadre d'une recherche portant sur l'enseignement de l'algèbre linéaire au troisième degré du secondaire (voir [28] ([6])). Ce logiciel permet de créer divers objets géométriques en exploitant les possibilités d'un réseau cubique, et de représenter ces objets non seulement sous n'importe quel angle de vue, mais aussi selon trois systèmes différents de représentation spatiale : la perspective cavalière, la projection orthogonale et la perspective centrale.

EXEMPLE 6.5.18 *Les figures ci-dessous ont été construites à l'aide du logiciel* RESEAU. *Elles présentent la même situation sous deux angles de vue différents.*



([6]) Le rapport complet de cette recherche devrait être publié prochainement par les services de l'Organisation des Études

6.6. Probabiliser

Si l'élève arrive dans l'enseignement secondaire en ayant déjà un bagage non négligeable en arithmétique et en géométrie, il n'en est certainement pas de même en probabilité. Qui plus est, ce sujet restera généralement absent de l'enseignement des mathématiques jusqu'au début de la cinquième année. Dans cette classe, on devra dégager le concept même de probabilité des activités de traitement numérique de données rencontrées soit dans le milieu extérieur à l'école (journaux, radio et télévision par exemple) soit lors des cours de mathématiques des années précédentes. On arrive ainsi à cette situation tout à fait particulière que la première activité de « probabilisation » proposée aux élèves n'a pas tant pour objectif de construire un modèle d'une situation donnée, en vue de résoudre un problème, que d'introduire le concept (nouveau) de probabilité lui-même.

C'est donc dans le cadre d'une séquence d'enseignement qu'il conviendrait de construire les premières activités de modélisation probabiliste. Une telle séquence devrait *in fine* faire apparaître notamment les faits suivants :

1. Pour que les résultats possibles d'un phénomène aléatoire puissent être étudiés par les méthodes de la théorie des probabilités, il convient que les « chances » d'apparition de ces résultats puissent être quantifiées de façon relativement précise, par une méthode quelconque.
2. Dans certains cas, la quantification dont il vient d'être question résulte de propriétés de symétrie, qui permet de considérer certains résultats comme étant équiprobables.

> EXEMPLE 6.6.1 *On admet qu'au jeu de « pile ou face », les deux possibilités ont même probabilité d'apparition* $\frac{1}{2}$
>
> Cependant, nous savons qu'aucune pièce n'est parfaitement symétrique et qu'en conséquence nous commettons une erreur en acceptant de modéliser de la sorte le jeu de « pile ou face ». Nous le faisons quand même, car nous savons aussi que l'erreur commise est extrèmement faible. Dans certains cas par contre, il peut nous arriver d'utiliser un modèle équiprobable alors que ce modèle serait insuffisant pour une analyse fine.

Exemple 6.6.2 *Les statistiques montrent que la probabilité de naissance d'un garçon est sensiblement supérieure à* $0,5$. *Nous utilisons néanmoins souvent le modèle équiprobable dans un but didactique.*

3. Si aucune propriété de symétrie ne permet d'évaluer *a priori* les probabilités des résultats possibles, la quantification résulte généralement d'une observation d'un grand nombre de réalisations de cette expérience et de la mesure de la fréquence d'apparition des différents résultats. Ceci suppose évidemment que l'expérience soit reproductible à volonté. Dans le cas où l'on estime que des conditions de symétrie existent, la comparaison des probabilités *a priori* avec les fréquences d'apparition permet de confirmer ou d'infirmer cette hypothèse.

   Exemple 6.6.3

   (a) C'est en dénombrant les naissances de garçons et de filles que l'on a constaté que ces deux événements n'étaient pas équiprobables.

   (b) L'observation de longues séries de tirages du « Lotto » permet de se convaincre que la loterie nationale n'a pas trafiqué ses appareils.

   C'est la *loi des grands nombres* qui permet de considérer une probabilité comme étant une fréquence limite. Il serait cependant absurde d'attendre que l'enseignement ait rencontré cette loi — qui se situe à un niveau très conceptuel — avant d'avoir des activités — de type procédural — qui donnent à la notion de probabilité le statut de modèle théorique de celle de fréquence.

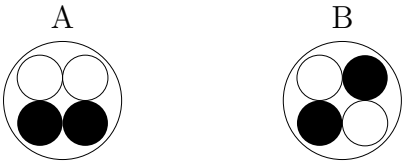
4. Enfin, si une expérience n'est pas reproductible et qu'aucune symétrie ne permet d'estimer les chances d'apparition des divers résultats, il vaut mieux ne pas se risquer à des raisonnements probabilistes.

   Exemple 6.6.4 *Il n'y a aucun sens à parler de la probabilité de découvrir un trésor lors du creusement d'un trou au pied de son pommier préféré.*

D'autres remarques — mettant en évidence d'autres types de compétences associées aux probabilités — peuvent être formulées concernant ces activités de modélisation qui ont pour objectif de « déterminer » les probabilités des résultats d'une expérience aléatoire.

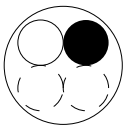
Par exemple, certaines situations, tout en présentant des symétries qui justifient un *calcul* de probabilités, nécessitent une analyse soigneuse.

EXEMPLE 6.6.5 *Deux billes noires et deux billes blanches sont contenues dans un tube cylindrique transparent dont le diamètre est tel que les quatre billes se placent nécessairement aux sommets d'un carré lorsqu'on dépose le tube verticalement sur une table. Dans ces conditions, deux configurations sont possibles pour les quatre billes :*



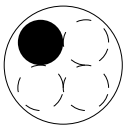
Un des deux raisonnements suivants est-il correct ? Si oui, lequel ?

1. *Fatalement, au moins une bille doit noire doit être adjacente à une bille blanche. Nous pouvons donc toujours placer ces deux billes comme suit :*



Il y a alors deux façons de placer les deux dernières billes dans les cases vides. Chacune des configurations A et B est donc de probabilité $\frac{1}{2}$.

2. *Commençons par placer une bille noire.*



La seconde bille noire peut être placée en trois endroits différents dont une seule correspond à la configuration B. La probabilité de celle-ci est donc $\frac{1}{3}$.

Lorsque nous cherchons à déterminer une probabilité à partir de l'observation d'un grand nombre de réalisations d'une expérience, deux points de vue peuvent être adoptés. Dans certains cas, il est raisonnable d'adopter comme probabilité la fréquence observée elle-même.

EXEMPLE 6.6.6 *Lorsqu'on jette une punaise sur une table, la punaise peut atterrir « pointe en haut » ou « pointe en bas ». Si h_N est le nombre d'événements « pointe en haut » en N jets, il est raisonnable de choisir $\frac{h_N}{N}$ — ou une valeur arrondie de cette fraction — comme probabilité de cet événement. Il convient évidemment de rester conscient de ce que en considérant N' jets, avec $N' \neq N$ le résultat aurait été différent.*

Des constatations de ce genre et le besoin d'éclaircir la situation, amèneront — lorsque la théorie aura été suffisamment développée —, à déterminer des *encadrements probabilistes* (encore appelés *intervalles de confiance*). On pourra alors choisir une valeur de N assurant (avec une probabilité fixée) la précision souhaitée.

Dans d'autres cas, nous pouvons chercher à aller plus loin en essayant de déterminer une véritable *loi de probabilité* jouant le même rôle que les lois des sciences naturelles. En clair, il s'agit de trouver *une expression analytique* permettant de prédire de façon *raisonnablement précise* les fréquences observées.

EXEMPLE 6.6.7 *Lors d'une des journées du championnat de football belge de mars 1993, 31 matches ont été joués dans les promotions A à D. Le relevé des nombres de buts inscrits par les équipes visitées nous fournit le tableau suivant :*

Nombre de buts marqués	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Nombre de matches	*8*	*9*	*7*	*4*	*1*	*2*

Nous ne nous intéressons qu'aux buts marqués par les équipes visitées afin de pouvoir considérer ces nombres de buts comme des événements indépendants. (On pourrait s'intéresser séparément aux nombres de buts marqués par les équipes visiteuses.)

Au total, quarante-neuf buts ont été marqués, de sorte que le nombre moyen de buts par rencontre est $\frac{49}{31} = 1,58\ldots$. *La question posée est alors de trouver une formule donnant en fonction de* n *la probabilité pour qu'au cours d'un match l'équipe visitée marque* n *buts.*

Une réponse acceptable en première approximation est connue depuis longtemps : le nombre de buts marqués peut-être modélisé par une loi de Poisson dont le paramètre vaut le nombre moyen de buts. Autrement dit, la probabilité de marquer n *buts serait calculée (dans le cas de nos données) par*

$$p_n = e^{-1,58}\frac{(1,58)^n}{n!}$$

On aurait ainsi par exemple $p_0 = 0.2058\ldots$, $p_1 = 0,3253\ldots$, $p_2 = 0,2571\ldots$, $\ldots$. *Ces valeurs permettent de compléter le tableau précédent à l'aide d'une dernière ligne qui indique en fonction de* n *la valeur moyenne du nombre de matches au cours desquels* n *buts sont marqués. Afin de tenir compte des petits effectifs, nous regroupons en une seule les colonnes correspondant à* $n > 2$.

Nombre de buts marqués	*0*	*1*	*2*	*>2*
Nombre observés de matches	*8*	*9*	*7*	*7*
Nombre moyen de matches	*6,4*	*10,1*	*8*	*6,6*

> *La comparaison des deux dernières lignes du tableau ne permet pas de considérer comme absurde l'idée que le nombre de buts inscrits au cours d'un match obéit effectivement à une loi de Poisson. Si l'hypothèse est admise (des techniques plus fines permettent de la tester de façon plus précise), nous pouvons en relevant les scores d'un plus grand nombre de matches contrôler la stabilité du paramètre de la loi de Poisson, examiner s'il est différent pour les divisions supérieures et les divisions inférieures, comparer avec les résultats des équipes visiteuses, ...*

L'utilisation de lois de probabilités données sous forme analytique est fréquente dans les sciences naturelles, l'exemple le plus connu étant celui de la *loi normale*. Celle-ci intervient aussi de façon interne aux probabilités en fournissant par exemple une approximation de la loi binômiale dans le cas de tirages suffisamment nombreux. Nous sommes alors en présence d'une *seconde modélisation* : la loi binômiale modélise de façon discrète une situation expérimentale et la loi normale modélise de façon continue la loi binômiale.

Références

[43], [28], [53], [54], [55], [56], [52], [60], [63], [104], [106], [109], [113], [126], [124], [5].

Chapitre 7

Le point de vue didactique

7.1 Introduction 145
7.2 Un découpage en épisodes 146
7.2.1 Phase 1 : Analyse du problème 148
7.2.2 Phase 2 : Élaboration d'une stratégie 151
7.2.3 Phase 3 : Vérification et validation de la stratégie 153
7.2.4 Phase 4 : Communication des résultats 154
7.2.5 En observant ces épisodes 155
7.3 Des stratégies 156
7.3.1 Travailler en marche arrière 157
7.3.2 Travailler en marche avant 158
7.3.3 Étudier des cas particuliers 160
7.3.4 Rechercher des exemples et des contre-exemples 161
7.3.5 Changer de registre ou de cadre 163
7.3.6 Effectuer des représentations graphiques 164
7.3.7 Raisonner par élimination 166
7.3.8 Raisonner par analogie 167
7.3.9 Essayer et exploiter d'éventuelles erreurs 169
7.3.10 Tenir compte des symétries des données 170
7.3.11 Rechercher des invariants 171
7.3.12 Éliminer tout présupposé quant au résultat à obtenir 172
7.3.13 Communiquer à d'autres, oralement ou par écrit, le résultat, même partiel et provisoire, de ses cogitations 173

7.4 Le contrôle de son activité par l'élève 174
7.5 Du côté des professeurs 175

7.1. Introduction

En préconisant d'utiliser dans les classes une pédagogie centrée sur la résolution de problème, notre intention est de permettre aux élèves de pratiquer des activités mathématiques significatives dans un contexte qui leur soit adapté. L'une des retombées en serait l'appropriation par les élèves d'un plus grand nombre de concepts et de procédures mathématiques.

En particulier, on peut penser qu'ils maîtriseraient mieux des procédures et des concepts inventés ou étudiés dans le cadre d'une résolution de problème et pourraient de ce fait les transférer à d'autres contextes.

Dans ce chapitre, nous allons détailler diverses stratégies de résolution de problèmes, tout en rappelant qu'il n'existe aucune méthode universelle permettant d'arriver au but. La considération de *stratégies* de résolution s'inscrit dans le cadre de l'analyse faite du point de vue didactique au chapitre 4.

Mais avant de commencer, nous tenons à mettre en évidence un élément qui a de l'importance *avant même* que la résolution ne commence. Il s'agit des *systèmes de croyances* que les élèves ont *a priori*.

Ce sont les points de vue de chacun sur le monde des mathématiques, et l'approche individuelle des tâches mathématiques. Ces croyances peuvent modifier la façon d'attaquer un problème, ainsi que les techniques utilisées ou abandonnées. Elles établissent donc le contexte de travail lors d'une résolution de problème (1).

Exemple 7.1.1 *Si l'habitude est prise dans une classe de ne jamais présenter de « problèmes » dont la résolution dépasse les dix minutes (il s'agit alors plutôt d'exercices), un élève de cette classe aura tendance à croire qu'*aucune *résolution ne doit durer plus longtemps. En conséquence, un tel élève risque de très vite baisser les bras devant un problème sur lequel il aura travaillé sans succès durant plus de dix minutes. Il sera persuadé de son incapacité à trouver la solution et cessera de s'y intéresser.*

(1) Schoenfeld discerne quatre dichotomies concernant les croyances estudiantines : empirisme et déduction, signification et forme, problèmes et exercices, passivité et activité mathématiques, voir [130].

7.2. Un découpage en épisodes

Les quatre phases de la résolution d'un problème énumérées au chapitre 4 étaient

1. l'analyse du problème
2. l'élaboration d'une stratégie
3. la vérification et la validation de la stratégie
4. la communication du résultat

En parallèle à ces phases, A.H. Schoenfeld a, dans ses travaux (voir [130]), fait ressortir divers types d'*épisodes* (c'est-à-dire des périodes durant lesquelles le chercheur se penche sur une tâche précise ou un ensemble de tâches destinées à atteindre un même but) susceptibles d'apparaître et de se répéter au cours de la résolution.

Seules les trois premières phases sont concernées par les épisodes. La phase de communication soulève en effet des questions d'une nature toute différente.

Les épisodes que nous discernerons sont les suivants :

- Lecture
- Planification
  C'est un type d'épisode dans lequel on tente de structurer la résolution, de la découper en sous-problèmes, de choisir une stratégie.
  Ce type d'épisode peut être *global* (il porte alors sur l'ensemble de la résolution et vient assez tôt) ou *local* (plan d'attaque d'un problème secondaire, qui peut se faire à tout moment).
- Analyse
  Ce sont des séquences de quête de propriétés découlant *directement* des données.
  A défaut d'une analyse suffisante, des méthodes alternatives (et souvent incorrectes) peuvent apparaître. Certains élèves cherchent des structures dans ce qui leur est proposé mais se basent plus sur les apparences que sur le sens. Des lacunes dans l'explication sont alors comblées de façon inadéquate. L'interprétation personnelle peut ainsi se substituer à la compréhension et empêcher le véritable apprentissage.
- Exploration
  Dans ce type d'épisode, l'élève tente de dégager des résultats en utilisant ses connaissances et les résultats des éventuels épisodes d'analyse.

La différence entre ces deux derniers types d'épisode est principalement qualitative puisque les épisodes d'analyse apportent souvent des résultats importants, qu'un peu d'exploration bien menée permet de transformer en la (les) réponse(s) souhaitée(s). La différence devient également quantitative quand on voit à quel point le temps consacré à des épisodes d'analyse peut être court par rapport aux épisodes d'exploration.

- Nouvelles informations
  Dans ce type d'épisode, généralement très bref et pouvant intervenir à tout moment, une nouvelle information importante apparaît. Ce peut être l'un des résultats obtenus au terme d'un épisode d'exploration ou d'analyse, ou encore *au cours* de l'un de ces épisodes. Dans ce dernier cas l'information apparaît un peu par surprise, et son utilité ne sautera généralement pas immédiatement aux yeux de l'élève. Elle ne sera éventuellement utilisée que dans un épisode ultérieur.
- Vérification
  Il s'agit d'épisodes dans lesquels, avant d'aller plus loin dans son analyse ou son exploration, l'élève tente de vérifier si une information, ou une idée, est correcte (ou efficace).

Notons qu'à ces types d'épisodes viennent s'ajouter des moments de transition, des joints entre les épisodes. Les décisions de *contrôle* (dont nous parlons plus loin) se prennent à ces moments. Elle peuvent casser ou mener à bien une résolution.

Nous allons à présent voir comment peuvent se répartir ces épisodes dans les diverses phases principales.

7.2.1 Phase 1 : Analyse du problème

Épisodes mis en jeu : lecture, analyse

La phase 1 est cruciale. Elle comporte toujours un épisode de lecture de l'énoncé. Ce temps consacré à la plongée dans le problème peut parfois être trop court.

Dans le cas d'une résolution en classe, la *dévolution* du problème à la classe, c'est-à-dire sa prise en charge par la classe *motivée* par la lecture de l'énoncé est un facteur important de réussite.

Notons que c'est lors de la première phase que les élèves vont délimiter un autre facteur important : les *ressources* dont ils disposent.

Par ce terme, on entend généralement :

- La maîtrise des concepts et des procédures, algorithmiques ou pas, liées au domaine du problème.
- Les concepts et procédures de base qui ne relèvent pas du domaine du problème, mais font partie du bagage mathématique supposé acquis.
- Divers faits particuliers liés au problème.
- Le temps.

Il faut en fait considérer les ressources que l'élève *suppose* siennes (mais qui peuvent être fausses ou inutilisables en vérité). Certains élèves se contentent d'étudier des procédures « mécaniques » dans des domaines sans les assimiler. Ces procédures et ces concepts « appris » non maîtrisés ne sont pas vraiment utiles et peuvent difficilement être considérés comme des ressources.

Après la lecture, un élève passe directement à la phase 2 si une méthode de résolution lui saute immédiatement aux yeux. Sinon, il passe dans un épisode d'analyse dont le but est la compréhension *en profondeur* ([2]) du problème.

Afin d'accomplir cet épisode, l'élève doit pouvoir :

1. isoler la (ou les) question(s) posée(s) dans le problème ainsi qu'éventuellement une ou des réponses possibles (que nous appellerons les *buts*),
2. discerner les données pertinentes,
3. comprendre les liens éventuels entre les données.
4. discerner les transformations applicables aux données (nous dirons les *opérations permises*),

([2]) Cette notion est très subjective et reflète l'avis de l'élève.

5. discerner les contraintes à respecter par les opérations permises,

Notons que cet épisode comprend l'élimination des informations *parasites* (qui n'ont aucune utilité quant à la résolution et peuvent égarer l'élève), et la recherche d'éventuelles informations *implicites* (qui sont parfois bien cachées et cependant très utiles).

EXEMPLE 7.2.1 *Dessiner quatre triangles isométriques au moyen de six allumettes, de façon que tout côté d'un triangle soit une allumette. On ne peut ni couper une allumette, ni en faire chevaucher deux.*

Nous allons appeler *état* du problème à un moment précis l'ensemble des informations disponibles à ce moment (à savoir les objets sur lesquels on opère, les opérations permises, les contraintes, et les éventuels résultats obtenus).

Dans notre exemple, l'état 1 est constitué de :

- BUT *: quatre triangles ayant des allumettes pour côtés,*
- DONNÉES *: 6 allumettes en vrac,*
- OPÉRATIONS PERMISES *:*
  - *positionner les allumettes (ce qui représente beaucoup d'opérations possibles !),*
  - *transformer le problème (modélisation, généralisation, ...),*
- CONTRAINTES *:*
  - *ne pas couper les allumettes,*
  - *ne pas faire chevaucher les allumettes,*

Les transformations du problème sont souvent oubliées, de même que les contraintes et les opérations permises sont souvent mal perçues.

Dans notre exemple, la solution apparaîtra lorsqu'on pensera à utiliser un positionnement tridimensionnel qu'aucune contrainte n'exclut. Si nous n'avons pas directement cette idée, nous pouvons transformer le problème en élaborant un modèle. Nous passerons du cadre « matériel » à un cadre « combinatoire » en dessinant un tableau à deux entrées (d'une part les six allumettes et d'autre part les quatre triangles). Une croix dans la case (A_j, T_k) du tableau signifie que l'allumette A_j est un côté du triangle T_k.

N'exclure aucune possibilité

Changer de cadre

L'état 2 du problème est donc le suivant :

- DONNÉES *: un tableau vide,*

	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1				
A_2				
A_3				
A_4				
A_5				
A_6				

- OPÉRATIONS PERMISES *: inscrire des croix dans le tableau*
- BUT *: disposer les croix de façon qu'il y en ait trois dans chaque colonne (tout triangle a trois côtés) et au moins une dans chaque ligne (toute allumette doit être côté d'au moins un triangle).*
- CONTRAINTES *:*
  - *ne pas couper les allumettes,*
  - *ne pas faire chevaucher les allumettes,*

  Ces deux contraintes ne s'expriment pas en termes de croix. Mais la première est automatiquement satisfaite tant que nous ne plaçons que des croix dans un tableau : nous ne « manipulons » ainsi que des allumettes entières. Il conviendra de vérifier que la seconde contrainte a bien été respectée.

On peut considérer que la construction du modèle achève la phase d'analyse. Il s'agit à présent d'élaborer une stratégie.

7.2.2 Phase 2 : Élaboration d'une stratégie

Épisodes mis en jeu : analyse, exploration, planification

Par le choix d'une stratégie, nous entendons l'élaboration d'une suite d'opérations permises liant les données au but (ou à l'un des buts).

Une stratégie peut apparaître immédiatement. Sinon, un nouvel épisode d'analyse ayant pour but le choix d'une stratégie peut succéder à l'analyse effectuée dans la phase 1. Ou encore, on peut réaliser un épisode d'exploration. c'est-à-dire une recherche plus ou moins heuristique de ce qui peut être utile *autour* du problème initial.

Si de nouvelles informations apparaissent au cours d'un épisode d'exploration, il peut y avoir un retour à un épisode d'analyse pour mieux comprendre le problème. Les nouvelles données ou contraintes sont propres au modèle choisi, mais doivent avoir la même signification que les données originelles (sans quoi on perd de vue le problème à résoudre). Nous trouvons donc ici des contraintes et des opérations modélisées. Le gain d'abstraction peut augmenter le nombre de contraintes.

La suite de la phase consiste en la mise au point d'un plan global d'application de la stratégie, l'élève passe donc dans un épisode de planification.

> *Dans notre exemple, la stratégie est assez claire : placer trois croix dans une colonne pour déterminer un triangle, puis trois croix dans la colonne suivante, etc. Mais combien de croix peut-on placer en ligne ? Un épisode d'analyse permet de préciser la stratégie : quatre triangles ont ensemble 12 côtés. Puisque nous avons 6 allumettes, il est normal d'essayer d'utiliser chacune deux fois. On essaye donc de placer deux croix dans chaque ligne et trois dans chaque colonne en tenant compte que deux triangles différents ne sauraient avoir qu'un seul côté en commun. Après quelques essais, on obtient la solution suivante, qui constitue l'état n°3 :*

Essais et erreurs

- DONNÉES *: le tableau*

	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	×	×		
A_2	×		×	
A_3	×			×
A_4		×	×	
A_5		×		×
A_6			×	×

- BUT *: un tableau comportant trois croix dans chaque colonne et au moins une dans chaque ligne,*
- OPÉRATIONS PERMISES *: aucune puisque le but a été atteint,*
- CONTRAINTES *: ne pas faire chevaucher les allumettes.*

Le fait qu'il reste une contrainte est dû à la transformation que nous avons fait subir au problème en construisant un modèle qui ne prenait pas cette contrainte en compte. Nous devons donc encore valider notre solution en retournant dans le cadre de départ : il s'agit de réaliser matériellement la configuration obtenue.

7.2.3 Phase 3 : Vérification et validation de la stratégie

Épisodes mis en jeu : planification, vérification, analyse, exploration

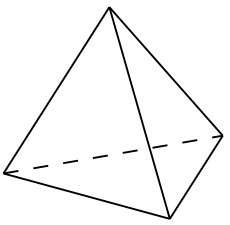
Dans cette phase, l'élève est amené à prendre des décisions majeures pour la résolution du problème, des décisions par lesquelles il *contrôle* son activité.

Ce sont des décisions sur les chemins à prendre, sur les directions à abandonner. Elles ouvrent de nouvelles voies, au risque de tomber sur une impasse ou de demander beaucoup d'efforts pour atteindre la solution.

Notons que les épisodes de planification vécus dans cette phase peuvent être locaux et concerner des sous-problèmes éventuels.

Lors d'une résolution, il arrive très fréquemment que l'on *boucle* sur les phases 2 et 3.

> *Dans notre exemple, la phase de vérification consiste à construire matériellement l'assemblage d'allumettes. Même si l'on est convaincu que les allumettes ne peuvent se placer que conformément aux indications du tableau, un blocage peut persister si inconsciemment on tient compte d'une contrainte inexistante : placer les allumettes dans un plan. Une nouvelle analyse des contraintes doit déboucher sur l'élimination de cette contrainte parasite et permettre de découvrir un tétraèdre régulier qui constitue l'état n°4 :*



7.2.4 Phase 4 : Communication des résultats

Les épisodes dont parle A.H. Schoenfeld ne sont plus concernés ici.

C'est dans la phase 4, au niveau des élèves, que la mise au point finale des idées intervient, que des avis se prennent (lorsque la communication se fait entre groupes), ...

La solution est rédigée de façon précise en respectant le formalisme usuel, qui prend alors tout son sens puisque les idées mises en forme sont celles des élèves eux-mêmes.

Cette quatrième phase de la résolution précède et intervient dans l'étape d'*institutionnalisation* qui a lieu à la fin du travail (voir chapitre 10).

Nous nous penchons plus précisément sur la communication des résultats dans des chapitres suivants, qui relatent des expériences faites en classe. Les unes furent ponctuelles (chapitre 18), et d'autres furent vécues sur un temps plus long (chapitre 20).

7.2.5 En observant ces épisodes

Étudier de divers points de vues l'activité d'un élève en train de résoudre un problème permet de mettre en évidence les épisodes décrits ci-dessus. Lorsque l'on s'attelle à une pareille tâche, il faut cependant veiller à repérer *toutes* les attitudes intéressantes d'un élève d'une part, et à optimiser d'autre part l'objectivité de l'étude. Pour ce faire, il faut distinguer soigneusement ce qui relève du comportement de l'élève des effets dus à l'interaction entre l'élève et l'enseignant.

Pour chaque personne qui résout un problème, on peut dresser un schéma qui ventile la répartition du temps de résolution entre les différents épisodes. C'est ce que nous avons fait à la fiche 2 du chapitre 11. La comparaison de ces schémas a permis à Schoenfeld de constater que les novices ne passent souvent que quelques instants à lire, et consacrent le reste du temps à de l'exploration. Au fur et à mesure que l'élève acquiert de l'expérience, il modifie son activité. Il en résulte que plus d'épisodes interviennent et que la répartition du temps entre les épisodes est modifiée en conséquence.

La difficulté de ce type d'étude est de bien cerner les épisodes, et de parvenir à les évaluer objectivement (notamment les procédures de prise de décision).

7.3. Des stratégies

Mais qu'entend-on au juste par stratégie ? Il s'agit de procédés de résolution (donc de choix d'une suite d'opérations permises) relativement indépendants de la nature du problème étudié. Ce sont en fait des conseils, souvent imprécis, qu'il faut savoir appliquer au moment opportun, mais qu'il faut aussi savoir NE PAS appliquer. De telles stratégies apparaissent chez un certain nombre d'auteurs, dont le plus connu est Georges Polya. S'il n'existe aucune méthode universelle permettant de résoudre n'importe quel problème, les stratégies dont il va être question peuvent aider considérablement à la découverte de la solution d'un problème en évitant de s'engager dans une voie sans issue et en contribuant à faire mûrir la situation jusqu'au point où le chercheur perçoit — souvent de façon intuitive — la démarche qui l'amènera au résultat escompté.

Ces stratégies font partie de l'*heuristique*. Par ce terme, on entend l'art de la recherche et de l'invention. Dans le cadre de la résolution d'un problème, c'est tout ce qui se passe *avant* que l'on ne trouve la « bonne » solution et que l'on procède à sa mise en forme. L'heuristique organise l'utilisation de différents processus mentaux (à divers niveaux de formalisation), y compris l'utilisation temporaire de processus déductifs.

Apprendre à résoudre des problèmes nous transforme en notre propre interrogateur. La résolution peut progresser si des questions pertinentes, permettant d'éviter de fausses interprétations sont envisagées. Parmi les plus fréquentes, on trouve : dénombrement (*Combien ? De combien de façons ?*), maximisation et minimisation, recherche de propriétés, recherche d'analogies, modélisation, ...Ces questions sont posées lors d'épisodes d'analyse ou d'exploration.

Passons à présent en revue quelques stratégies qui nous ont semblé importantes.

7.3.1 Travailler en marche arrière

Cette méthode est utile pour des problèmes satisfaisant à deux critères :

- le but est spécifié de façon unique (par exemple, les problèmes de preuve)
- les opérations permises sont inversibles

Dans cette méthode, on part du ou des buts possibles et on essaie de deviner un état ou un groupe d'états qui les précèdent et y conduisent.

Cependant, le but n'est pas traité en tant que donnée comme dans les démonstrations par l'absurde : la démarche reste orientée dans le sens des données vers le but.

7.3.2 Travailler en marche avant

Il s'agit dans cette méthode de partir des données et de leur appliquer des opérations permises en essayant de se rapprocher de plus en plus du but. On citera dans cette catégorie la modélisation (dont nous avons déjà parlé plus haut) ainsi que la méthode particulière du *Hill climbing* décrite par Wickelgren (voir [159]) et que nous illustrons par l'exemple suivant :

EXEMPLE 7.3.1 *On part de la suite de six bits* $1, 1, 1, 0, 0, 0$. *On demande d'aboutir à la suite* $1, 0, 1, 0, 1, 0$ *en un minimum de mouvements constitués de l'inversion (on remplace* 1 *par* 0 *et vice versa) simultanée de deux bits voisins.*

Les états du problème sont ici les suites de 0 et de 1 auxquelles on peut arriver en appliquant les « mouvements » indiqués. A part les transformations du problème imaginées par celui qui le résout, les seules opérations permises consistent à inverser deux bits voisins. L'état n°1 est donc constitué de

- DONNÉE : la suite $1, 1, 1, 0, 0, 0$,
- BUT : la suite $1, 0, 1, 0, 1, 0$,
- OPÉRATIONS PERMISES :
  - remplacer simultanément deux bits voisins par leurs inverses,
  - transformer le problème,
- CONTRAINTES : il n'y en a pas

Dans la suite, nous n'énumérerons plus systématiquement les données, les buts, les opérations permises et les contraintes pour chaque état.

Pour appliquer le *Hill Climbing*, on définit une fonction d'évaluation qui à chaque état du problème associe un nombre, pouvant être interprété comme étant la distance séparant l'état considéré du but. La stratégie consiste alors, à chaque étape, à effectuer une opération permise qui entraîne une diminution de la valeur de la fonction d'évaluation.

Dans cet exemple, un état est une suite de six bits égaux à 1 ou 0. Les opérations permises sont les inversions de deux bits adjacents. L'avant-dernière étape ne doit donc présenter que deux bits incorrects, et ces deux bits doivent être côte à côte. Dans la position de départ $1, 1, 1, 0, 0, 0$ *en considérant une numérotation de gauche à droite, on voit qu'il n'y a que deux bits incorrects, situés aux positions n°2 et n°5. Ces deux bits sont à la distance 3.*

Créer une fonction d'évaluation

Nous adopterons comme fonction d'évaluation celle qui associe à chaque état la plus grande distance entre deux bits incorrects. Le but ne comporte aucun bit incorrect. La fonction d'évaluation vaut dans ce cas 0.

La stratégie consiste à chaque étape à effectuer une opération permise qui fait diminuer la valeur de la fonction d'évaluation.

Par exemple, de l'état 1 ($1, 1, 1, 0, 0, 0$*), il est possible de passer à un quelconque des cinq états suivants :*

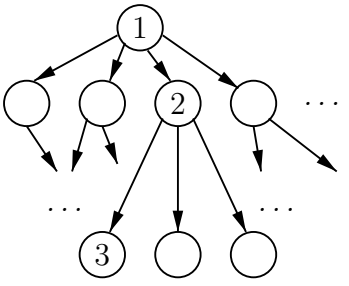
État	*Bits incorrects*	*Évaluation*
$0, 0, 1, 0, 0, 0$	*1 et 5*	*4*
$1, 0, 0, 0, 0, 0$	*3 et 5*	*2*
$1, 1, 0, 1, 0, 0$	*2, 3, 4 et 5*	*3*
$1, 1, 1, 1, 1, 0$	*2 et 4*	*2*
$1, 1, 1, 0, 1, 1$	*2 et 6*	*4*

Choisir la solution la plus efficace

Choisissant par exemple la suite $1, 0, 0, 0, 0, 0$ *comme état 2, on passe ensuite à* $1, 0, 1, 1, 0, 0$ *(évaluation :1) puis au but* $1, 0, 1, 0, 1, 0$.

Cette solution est minimale puisque la fonction d'évaluation décroît à chaque étape et que l'on ne peut espérer la faire diminuer de plus d'une unité à chaque étape. Dans cet exemple, un dessin du graphe complet des états permet de déterminer tous les chemins minimaux menant de la donnée au but.

En toute généralité, le graphe des transitions entre états est l'inventaire des états possibles ainsi que les opérations permises permettant de passer d'un état à un autre. La représentation par un graphe de ces états et de ces opérations permises peut aider à élaborer une stratégie de résolution. Notons que plusieurs chemins peuvent mener au même but.



7.3.3 Étudier des cas particuliers

Les deux stratégies que nous allons à présent aborder sont très proches, chacune gardant cependant ses spécificités. L'étude d'un cas particulier intervient lorsque l'on a déjà en tête la nécessité d'une généralisation, et il faut s'arranger pour que le cas choisi permette de mettre en évidence les propriétés du problème général.
La recherche d'exemples et de contre-exemples, comme nous le verrons ci-dessous, n'a pas pour objectif principal de généraliser, mais plutôt la familiarisation, la mise au point et la mise à mort de conjectures.

EXEMPLE 7.3.2 *Que vaut la somme des n premiers entiers ?*

A moins d'avoir atteint un niveau conceptuel dans la manipulation des nombres, et qualifier d'exercice trivial ce problème, un élève passera par un cas particulier. Il se donnera une valeur de n, et raisonnera sur cette valeur, à l'instar de Gauss dans sa jeunesse.

> *Choisissons* $n = 100$. *C'est un nombre suffisament élevé pour que le calcul ne soit pas évident, et suffisament petit pour être manipulé facilement.*
>
> $$\begin{array}{rccccccc} & 1 & 2 & 3 & \dots & 98 & 99 & 100 \\ + & 100 & 99 & 98 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ \hline & 101 & 101 & 101 & \dots & 101 & 101 & 101 \end{array}$$
>
> *Dans ce cas particulier, on voit donc que la somme vaut* $\frac{100\times101}{2}$ *c'est-à-dire* 5050. *La méthode se généralise facilement, et on conclut :*

Généraliser

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n.(n+1)}{2}$$

Pour donner une autre référence classique, nous aurions pu également déduire la résolution générale du problème des *tours de Hanoï* en partant d'un cas à 6 disques, ...

Signalons à titre d'exemple plus parlant, l'installation du concept de somme de Darboux qui a fait l'objet d'une expérience en classe et dont nous parlerons plus loin (voir chapitre 12). Les élèves commencent par des découpages très simples (2 ou 4 intervalles) sur lesquels ils calculent procéduralement avant de comprendre le fonctionnement et de trouver des algorithmes.

7.3.4 Rechercher des exemples et des contre-exemples

Que dire sur cette stratégie qui ne soit déjà connu de tous ? La recherche d'exemples permet à la fois de s'approprier le problème et d'aboutir à des conjectures (qu'un contre-exemple peut démolir). Nous reprenons en illustration l'exercice cité par J. Mason dans [99].

EXEMPLE 7.3.3 *Prouver que tous les palindromes à quatre chiffres sont divisibles par* 11.

Notons qu'une définition peut s'avérer nécessaire (ici pour la notion de *palindrome*), et déjà faire l'objet d'une exhibition d'exemples. Mais l'exemplification lors de la résolution est différente puisque menée dans le but de répondre au problème.

Comme il existe 90 *palindromes à quatre chiffres, compris entre* 1001 *et* 9999, *une vérification sur chacun d'eux serait très longue. On regarde les plus petits d'entre eux :* 1001, 1111, 1221, 1331 *et on peut en tirer une première conjecture :*

Conjecturer

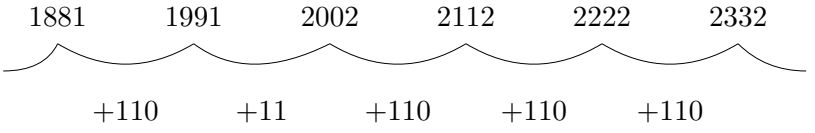
> *On passe d'un palindrome à quatre chiffres au suivant en ajoutant* 110.

Or, comme 1001 *et* 110 *sont divisibles par* 11 ($\frac{1001}{11} = 91$ *et* $\frac{110}{11} = 10$), *j'en conclus la thèse.*

Si d'aventure, on envisageait de s'arrêter là, il serait bon de suggérer la quête de contre-exemples à la conjecture ci-dessus.

Remettre en question en question la conjecture

Si la conjecture était correcte, tous les palindromes à quatre chiffres se termineraient par 1. *Or,* 2002 *est un palindrome à quatre chiffres, la conjecture est donc fausse. Il faut plus d'exemples pour mettre en évidence le principe de construction.*



Grâce à cette exemplification plus avancée, on est amené à observer le passage au millier supérieur, et à conjecturer :

On passe d'un palindrome à quatre chiffres au suivant en ajoutant 110 *au sein d'un même millier, et l'on passe au millier suivant en ajoutant* 11.

Et cette fois, on a couvert tous les cas.

Cependant, rien n'empêche une première exemplification de mener à comprendre la *structure* de ces palindromes.

Les palindromes à quatre chiffres s'écrivent $ABBA$ où A et B sont des chiffres. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} ABBA &= 1000.A + 100.B + 10.B + 1.A \\ &= 1001.A + 110.B \\ &= 11.(91.A + 10.B) \end{aligned}$$

et on a la thèse.

C'est là une résolution toujours basée sur l'exemplification, mais empreinte d'un niveau beaucoup plus conceptuel. Les manipulations sont effectuées sur la structure des palindromes, et non plus sur les palindromes eux-mêmes.

7.3.5 Changer de registre ou de cadre

Nous avons rencontré les changements de cadre et de registre aux chapitres 5 et 6. Contentons-nous d'attirer l'attention sur l'utilité de faire — en début d'une activité de résolution de problème — l'inventaire des cadres dans lesquels le problème peut éventuellement être traduit.

Le choix du registre, c'est-à-dire du mode d'expression, peut également influencer le travail de la résolution de façon substantielle. Trop souvent les registres graphiques sont méconnus. Abordons ce point.

7.3.6 Effectuer des représentations graphiques

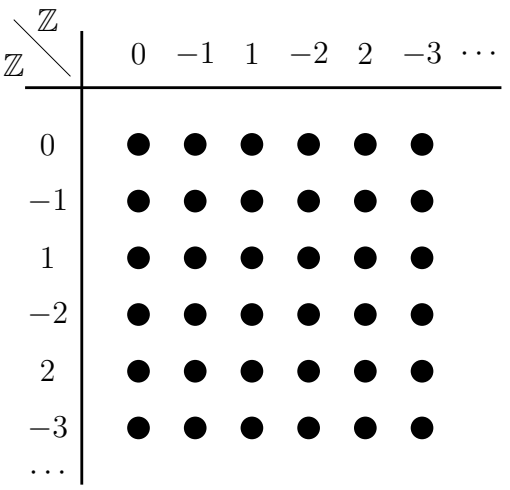
Nous avons déjà parlé des images mentales au chapitre 3. Le passage à une représentation graphique est un changement de registre, nous n'allons donc pas modifier la nature des objets impliqués.

Sans même aller jusqu'à une manipulation possible dans le registre graphique, la réalisation (à des niveaux variables d'élaboration) d'un schéma représentant la situation peut aider à soutenir la pensée, voire à faire naître des idées neuves.

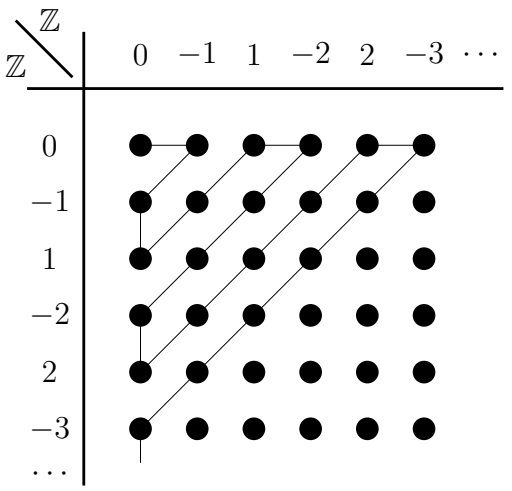
EXEMPLE 7.3.4 *Etablir une bijection entre l'ensemble des nombres naturels* $\mathbb{N}$ *et l'ensemble des* $\mathbb{Q}$ *des rationnels.*

On constate d'abord que tout rationnel est donné par un couple d'entiers, mais que des couples d'entiers différents peuvent donner le même rationnel. La réflexion sur des nombres peut n'aboutir à rien. Mais il n'est pas trop difficile de dessiner un tableau dans lequel chaque point représente un couple d'entiers.

Dessinons le tableau suivant :



Le problème revient à relier tous les points en continu. On peut procéder de la manière suivante :



Nous avons ainsi concrétisé et défini une bijection $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}^2$. *De là, on passe à une bijection* $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ *en éliminant les redondances.*

Notons l'efficacité de cette représentation graphique qui nous a permis non seulement de trouver la bijection, mais de la définir rapidement, sans avoir à écrire son *algorithme* de construction. Ecrire cet algorithme et le programmer constitueraient un autre problème.

7.3.7 Raisonner par élimination

Une telle stratégie peut être envisagée lorsque le problème posé est ouvert, en ce sens qu'il n'énonce pas explicitement le but à atteindre ou qu'il énonce plusieurs buts possibles mais dont un seul est effectivement réalisable à partir des données et des opérations permises. L'exemple le plus simple d'une telle situation est celui d'une question à choix multiples, où le nombre de buts possibles reste généralement assez petit.

On peut alors effectuer une partie du chemin en partant des données, puis partir d'un but possible en tentant de remonter là où le chemin descendant s'est arrêté. Parfois, les deux morceaux de chemin ne peuvent pas se raccorder. Dans ce cas, on élimine le but qui vient ainsi d'être testé, et on essaie à partir d'un autre.

On peut considérer qu'une démonstration par l'absurde est un raisonnement par élimination : on élimine la négation de la thèse. Notons toutefois que dans ce cas, on ne construit pas un chemin remontant à partir de la négation de la thèse, mais bien un chemin descendant.

Il est possible que le nombre de buts possibles soit très grand, voire infini. On parle dans ce cas d'un *grand espace de recherche*. On applique alors la méthode à des classes de buts.

Exemple 7.3.5 *Parmi 24 pièces de monnaie apparemment identiques, une pièce plus lourde que les autres s'est immiscée. On dispose d'une balance à deux plateaux. Comment retrouver la pièce plus lourde en un minimum de mouvements ?*

Chacune des pièces est un but possible. L'espace de recherche est donc assez grand. Nous diviserons les pièces en trois tas de huit pièces, et nous comparerons les poids de deux de ces tas. S'ils ont même poids, alors la pièce lourde est dans le tas restant. Sinon, elle est dans le plus lourd des deux tas pesés. Seize des buts possibles sont déjà éliminés !

Il nous reste huit pièces, dont nous extrairons deux tas de trois pièces. Si ces deux tas s'équilibrent, alors la pièce lourde est l'une deux pièces restantes, et une pesée de plus permet de la trouver. Sinon, elle est dans le plus lourd des deux tas et une comparaison de deux des trois pièces de ce tas, permet de découvrir la pièce lourde.

On trouve donc la solution en trois pesées, à condition de s'intéresser à des *classes* (dans ce cas, des tas) de buts (ici, les pièces).

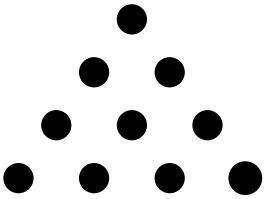
7.3.8 Raisonner par analogie

Le raisonnement par analogie est la quête de *structures* communes dans des problèmes différents, qui ne sont pas équivalents (c'est-à-dire dont les différences ne se limitent pas à la présentation ou au vocabulaire employé).

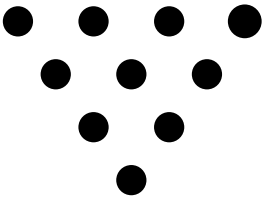
Un exemple facile serait la reprise du problème de la *pièce lourde* évoqué ci-dessus, mais avec un nombre de pièces ayant d'autres diviseurs que ceux de 24. Avec 25 pièces, par exemple, nous devrions résoudre le problème différemment, tout en reprenant le principe de la résolution à 24 pièces.

Considérons le problème des *boules de bowling* :

EXEMPLE 7.3.6 *Passer de la configuration A à la configuration B en ne déplaçant que trois quilles.*

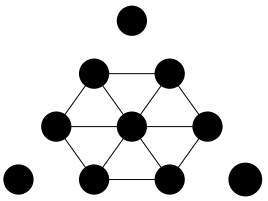


configuration A

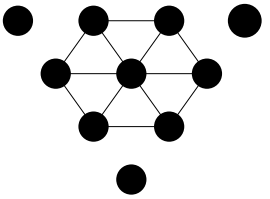


configuration B

On ne peut modifier la position que de trois quilles. Par conséquent, sept d'entre elles restent fixes. Essayons donc de trouver sept quilles dont les positions subsistent en passant de la configuration A à la position B. Seules les quilles suivantes vérifient cette condition :



configuration A

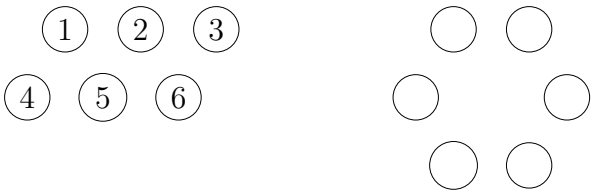


configuration B

La façon de déplacer les trois quilles restantes saute aux yeux.

Il est utile de se remémorer la résolution de ce problème de quilles lorsque l'on s'attaque au problème analogue suivant, le problème *des jetons* :

EXEMPLE 7.3.7 *Passer de la configuration A à la configuration B en ne déplaçant que deux jetons.*



configuration A configuration B

On réinvestit la résolution du problème précédent en s'arrangeant pour trouver un ensemble de quatre jetons fixes. Ici, les jetons $(1, 2, 4, 6)$ *font l'affaire, ou encore les jetons* $(1, 3, 5, 6)$*. Il suffit de déplacer les deux jetons restants.*

Le raisonnement par analogie n'est bien entendu efficace que si l'on a déjà résolu beaucoup de problèmes auparavant, et que l'on a une bonne mémoire. Il faut donc essayer de se construire une « *problèmothèque* ».

7.3.9 Essayer et exploiter d'éventuelles erreurs

On distingue les méthodes :

- aléatoire (essayer tout et n'importe comment),
- systématique (on garde le souvenir de ce qui se passe à chaque essai),
- classificatrice (on range les divers essais dans des classes menant au même type de résultat).

7.3.10 Tenir compte des symétries des données

Cette méthode consiste à déterminer les données qui jouent le *même rôle*, et notamment à n'introduire des dissymétries dans le problème *que si* on a de bonnes raisons de le faire.

L'exemple du problème des lunules, dans la fiche 1 du chapitre 11 illustre cette méthode : une fois que l'on a compris la symétrie du problème, la solution devient presque triviale.

7.3.11 Rechercher des invariants

Lorsque l'on passe d'une étape à une autre dans la résolution d'un problème, il reste parfois des éléments qui ne varient pas.

On sait par exemple que le $PGCD$ de deux nombres naturels a et b tels que $a > b$ est égal au $PGCD$ de b et r où r est le reste de la division euclidienne de a par b. A chaque étape de ce calcul par l'*algorithme* d'Euclide, le $PGCD$ est donc un invariant, et l'on se sert de cette propriété dans la résolution.

7.3.12 Éliminer tout présupposé quant au résultat à obtenir

Nous donnerons plus loin un exemple dans lequel cette stratégie se révèle utile (voir le chapitre 9).

Cette section est à rapprocher des sections précédentes à propos des symétries des données et des invariants.

7.3.13 Communiquer à d'autres, oralement ou par écrit, le résultat, même partiel et provisoire, de ses cogitations

Voilà une stratégie qui, bien qu'informelle, est sans nul doute l'une des plus efficaces dans le milieu de la recherche, ainsi qu'au sein de groupes d'élèves résolvant des problèmes.

La découverte d'un contre-exemple, une remise en question par d'autres conjectures, l'apport de résultats inédits sont entre autres les avantages d'un travail de groupe.

Cette stratégie permet de coordonner toutes les autres, et de les faire fonctionner *en parallèle*.

7.4. Le contrôle de son activité par l'élève

Lors d'un *contrôle*, l'élève évalue son activité et la réoriente éventuellement dans une nouvelle direction. C'est par exemple au niveau du contrôle que sont gérées les ressources disponibles : les a-t-on toutes prises en compte ? Ne les a-t-on pas transformées ou altérées ?

La surveillance et l'auto-évaluation permanentes ainsi que le souvenir des essais infructueux, sont des composantes majeures d'un contrôle effectif de la résolution. Si le contrôle est efficace, toute ressource fait toujours l'objet d'un intérêt potentiel, et est prise en compte lors d'un changement de cap ([3]).

Nous distinguons trois sources de « points de contrôle » importantes qui peuvent apparaître au cours d'une résolution de problème.

- Les joints entre les épisodes.
- Les épisodes faisant apparaître des informations nouvelles, susceptibles de permettre une approche nouvelle. Ces apparitions peuvent avoir lieu au cours d'un épisode, mais ce n'est cependant qu'à la fin de celui-ci que l'élève les prend en compte.
- La présence de petites difficultés mineures indiquant qu'il y a peut-être quelque chose qui cloche (cette dernière catégorie est plus subtile).

([3]) Le lecteur trouvera un exemple de changement de cap chez un élève au cours d'une expérience réelle dans la fiche 1 du chapitre 11 (lorsque l'élève décide d'utiliser enfin l'information cruciale qui lui est apparue plus tôt).

7.5. Du côté des professeurs

Le travail des acteurs de l'enseignement varie de l'un à l'autre. Que font les enseignants lors d'une activité de résolution de problèmes ?

Faire travailler des élèves sur un problème requiert une certaine approche sociale (difficulté du travail en équipe, en classe), une bonne culture mathématique, une documentation importante et des moyens technologiques adéquats.

Dans ce cadre, les enseignants doivent être aussi des étudiants de l'apprentissage des élèves en situation de résolution de problème au lieu d'être eux-mêmes ceux qui résolvent les problèmes.

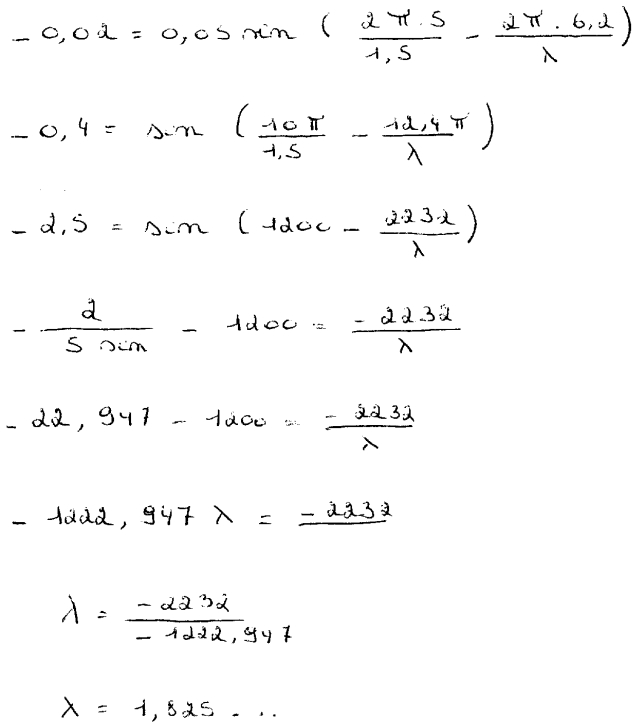
Le professeur doit pouvoir observer ses élèves, et ne donner des informations qu'au bon moment. Il ne faut pas qu'il en dise trop, et doit jouer un rôle de naïf vis-à-vis de ce que les élèves lui soumettent afin que les résultats soient *véritablement* obtenus par eux, et acquièrent un sens qui les convainque de l'efficacité de leurs méthodes et de la valeur de leurs résultats.

L'observation par le professeur peut parfois modifier involontairement le comportement de l'élève. Conscient de ce fait lorsqu'il pose des problèmes oralement, Allan Schoenfeld (voir [130]) intervient le moins souvent possible afin d'évaluer l'importance et le développement de certains phénomènes. Une autre raison de ce non-interventionnisme est que des remarques faites sur un premier problème (« *pourquoi as-tu choisi cette voie ?* », « *comment savoir si cette construction va aboutir à quelque chose ?* ») peuvent influencer la façon de résoudre un second problème. L'observation est alors faussée.

Lorsqu'un professeur et un élève dialoguent avec des appréhensions différentes des règles qui gouvernent leur discussion, il y a de grandes chances de voir apparaître de mauvaises interprétations et de l'incompréhension mutuelle. Afin de faire une étude utile, les réponses et le comportement de l'élève doivent être interprétées dans son référentiel propre, et non dans celui du professeur.

Illustrons ce type de dialogue de sourds par l'exemple suivant, tiré d'un copie d'un élève de rhéto (4 heures de math/semaine).

Exemple 7.5.1



Tout d'abord, on y voit une confusion entre le nombre π et un angle de π radians, puisque le *symbole* π est allégrement remplacé par 180. Dans l'exemple, ce remplacement n'a pas de conséquence — sous la condition que l'élève aie remarqué que l'on prend alors la fonction sinus sur les angles en degrés et non plus sur les réels — mais on obtient une première source de conflit élève/professeur.

En effet, mettons-nous dans la peau de quelqu'un qui n'a aucun intérêt pour la mathématique, mais qui se voit *obligé* d'en pratiquer pour des raisons sociales. Il suffit pour résoudre l'exercice de remplacer π par 180. Pourquoi se compliquer la vie en tentant de comprendre la raison de cette possibilité de remplacement ? La conséquence devient alors la cause : « π vaut 180 », et le conflit naîtra dans d'autres exercices où interviennent des expressions comme $\sin(2\pi - \frac{2}{6})$.

Dans l'extrait ci-dessus, une seconde source de conflit se marque par l'apparition à la cinquième ligne du nombre $22,947$. Ce nombre est la valeur donnée à l'expression $\frac{2}{5 \sin}$.

Dans le référentiel de l'élève, le sinus n'est autre qu'une touche sur une calculatrice, et l'exécution de la suite de commandes $2/(5\ \sin)$ donne le résultat $22,947$.

A un tel élève, il est très laborieux de faire comprendre que, bien que la machine donne un résultat, ce résultat ne correspond pas à la situation.

Références

[130], [159], [99].

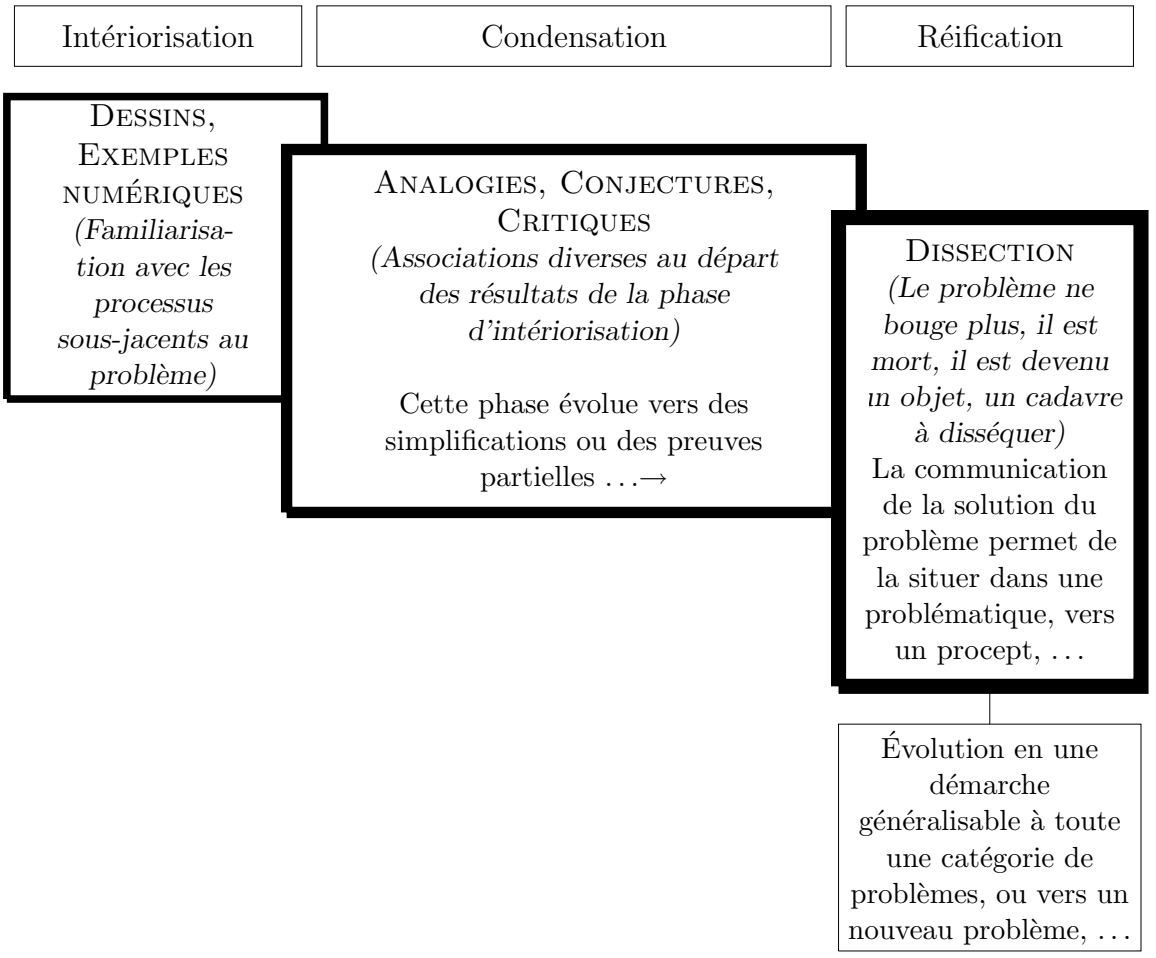
Chapitre 8

Le point de vue psychologique

8.1 Une modélisation de résolution d'un problème 178
8.2 Une taxonomie d'objectifs cognitifs 184
8.3 Les niveaux de van Hiele 186
8.3.1 Le modèle 187
8.3.2 Les propriétés du modèle 189
8.3.3 Les phases de l'apprentissage 191
8.3.4 L'expérimentation 192
8.4 Une conclusion provisoire 196

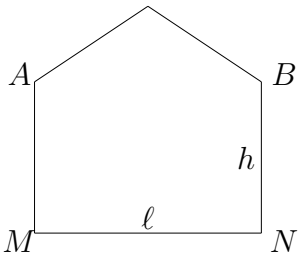
8.1. Une modélisation de résolution d'un problème

Au paragraphe 3.3.1, nous avons présenté la description due à A. Sfard de l'évolution du procédural au structural. Le schéma ci-après présente une adaptation de cette description au cas d'une résolution de problème. Illustrons ce schéma par un exemple.



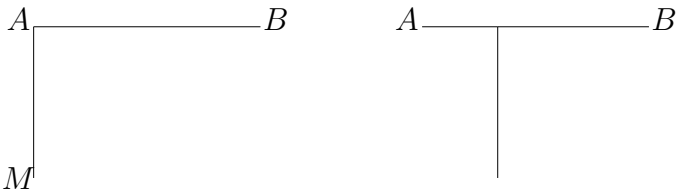
Exemple 8.1.1 [(1)] *:* Le problème de la gouttière *(d'après une idée de F. Buekenhout).*

Énoncé. Comment raccorder en T ou en Y les sorties de gouttières lorsqu'elles débouchent à la même hauteur sur le pignon d'une maison, pour que la longueur totale des tuyaux utilisés soit minimale ?



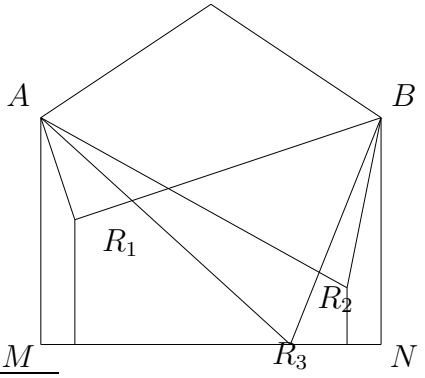
L'étape d'intériorisation.

1. **Notations.** L'énoncé du problème ne comporte aucune mesure privilégiée. On se permet donc de noter $|MN| = l$ et $|AM| = |BN| = h$.
2. **Première observation.** *Tous* les raccordements du type suivant



sont de longueur $\ell + h$. Y en a-t-il de plus court ?

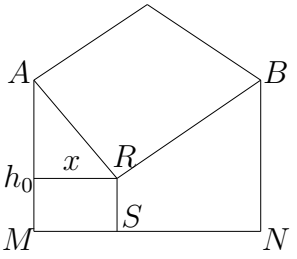
3. **Simulation numérique.** Quelques essais graphiques/numériques permettent de se convaincre qu'il y a en effet des raccordements plus courts que ceux de longueur $\ell + h$.



(1) Cette rédaction ne résume que très succinctement les étapes éventuelles de résolution du problème. Ce résumé est néanmoins relativement objectif : il décrit le cheminement du rédacteur lorsqu'il s'est employé à trouver une solution lui-même.

L'étape de condensation.

1. **Apparition d'une fonction.** L'exemple du raccord en R_3 ci-dessus fait apparaître les triangles *rectangles* AMR_3 et BNR_3. C'est là une configuration plus simple que celles en R_1 ou R_2, et qui suggère surtout — si besoin est — le recours au théorème de Pythagore pour calculer les distances appropriées. On peut en tirer :
   - un tableau de valeurs pour l'expression de la longueur totale de tuyaux en fonction de la distance $|MR| = x$, quand on suppose toujours que le raccord R est situé au sol, en choisissant par exemple $l = 12$ et $h = 5$, etc ...
   - l'expression algébrique de cette fonction, à savoir
   $$G(x) = \sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{(l-x)^2 + h^2}$$
2. **Un premier résultat ...?** Le tableau de valeur ci-dessus montre — si la géométrie de la situation ne l'a pas encore fait — que le problème « admet un axe de symétrie » : la médiatrice MN. De plus, ce même tableau suggère que la fonction $G(x)$ admet un *minimum* en $x = \frac{l}{2}$. L'étude de la dérivée de $G(x)$ permet de confirmer assez facilement cette conjecture.
3. **Une analogie qui fait avancer les choses.** Comme tout semble bien compris lorsque le raccord est à hauteur nulle, on reprend le *même* raisonnement en supposant cette fois-ci que le raccord est situé à une hauteur h_0 quelconque.



On obtient pour la fonction $G_0(x)$ qui décrit alors la longueur totale de tuyaux

$$\begin{aligned} G_0(x) &= |AR| + |RS| + |RB| \\ &= \sqrt{(h-h_0)^2 + x^2} + h_0 + \sqrt{(h-h_0)^2 + (l-x)^2} \end{aligned}$$

où x est l'« abscisse » $|MS|$. Quant à la recherche d'un extremum, tous les calculs se trouvent être *formellement analogues* à ceux réalisés dans l'étape précédente, de telle sorte que — quelle que soit la hauteur h_0 — la fonction $G_0(x)$ admet encore et toujours un minimum pour $x = \frac{l}{2}$.

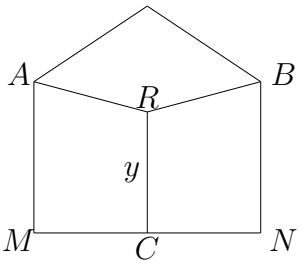
4. **Le problème devient moins difficile ...** Les calculs précédents s'interprètent de manière très simple : un *lieu* des points où *doit* se situer le raccord R si on veut que la longueur totale de tuyaux soit minimale est la médiatrice du segment $[MN]$.
5. **... Et tout semble correct !** On observe en effet que si $h_0 = h$:

$$G_0(x) = \sqrt{(h-h)^2 + x^2} + h + \sqrt{(h-h)^2 + (l-x)^2} = x + h + (l-x) = h + l$$

On retrouve ainsi une situation considérée dans l'étape d'intériorisation.

6. **Le coup de grâce.** Il reste à déterminer la « bonne » position du point R sur la médiatrice du segment $[MN]$. Cela revient à déterminer un (éventuel ?) minimum de la fonction

$$D(y) = y + 2\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + (h-y)^2}$$



Cela ne présente plus guère de difficultés sérieuses : à partir de la dérivée de la fonction $G_0(x)$, on trouve comme seule valeur possible

$$y = h - \frac{l}{2\sqrt{3}}$$

dont il reste à discuter la plausibilité ([2]) ...

L'étape de réification.

Si le problème semble sur le point de s'achever, les résultats obtenus laissent néanmoins insatisfait : on ne comprend pas pourquoi la solution n'est pas aussi géométrique que l'énoncé le laissait imaginer. L'étape de réification se propose d'*aller au fond des choses* et de démonter géométriquement les résultats obtenus.

1. **Est-ce vraiment si compliqué ?** Si on revient sur les calculs concernant la fonction $D(y)$ et sa dérivée, on observe que

([2]) En particulier dans le cas où $h < \frac{l}{2\sqrt{3}}$ ...

$$D'(y) = 0 \iff \frac{2(h-y)}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + (h-y)^2}} = 1$$

qui fournit une égalité bien plus intéressante que la valeur de y qu'on en a tirée plus haut :

$$(h-y)\sqrt{3} = \frac{l}{2}$$

ou

$$\frac{h-y}{\frac{l}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30^o$$

Ainsi

$$\widehat{ARC} = \widehat{CRB} = \widehat{ARB} = 120^o$$

D'où vient cette soudaine simplicité ?

- On sait que le point de raccordement R est nécessairement à la verticale du point C, milieu du segment $[MN]$.
- Il s'agit donc de déterminer un point R tel que la somme de ses distances aux *trois* points *fixes* A, B et C soit minimale.
- Un tel point s'appelle le *point de Steiner* ([3]) du triangle ABC, et se caractérise facilement à l'aide d'une analogie mécanique. Si on place en chacun des points A, B et C une poulie et qu'on relie en étoile trois masses identiques en faisant passer chaque fil de l'étoile par une des poulies, la position d'équilibre du système ([4]) s'obtient lorsque la résultante des forces appliquée au point de jonction de l'étoile est nulle ([5]), ce qui n'a lieu que si les fils de l'étoile forment entre eux des angles égaux : chacun d'entre eux vaudra donc 120°.

2. **Une solution elliptique.** On peut enfin se demander — en dehors de tout calcul — pourquoi le point de raccordement R correspondant à une longueur de tuyaux *minimale* est *toujours* situé sur la médiatrice du segment $[MN]$. Or, à une hauteur h_0 fixée, la question revient à minimiser la seule somme $|AR| + |BR|$. D'autre part, il faut savoir qu'une ellipse est le lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux points fixes — les foyers — est constante. On peut alors raisonner comme suit, en considérant toutes les ellipses dont les points A et B sont les *foyers*.

([3]) Un tel point est parfois appelé point de Fermat, ou de Toricelli. Il a une importance essentielle dans la théorie des réseaux de toutes sortes à cause de la propriété de minimum de distance qui le caractérise. Cfr. [61], exercice 186 et [34].
([4]) Sous la seule action de la pesanteur.
([5]) Des raisonnements analogues s'appliquent à certaines surfaces formées à partir de films de savon, et la notion de point de Steiner y intervient à nouveau.

- Chaque position du point R sur l'horizontale de hauteur h_0 détermine une ellipse dont la longueur du grand axe égale $|AR| + |BR|$.
- La plus petite de ces ellipses est toujours celle qui admet l'horizontale en question comme *tangente*.
- Dans ce cas, le point R est situé sur le *petit axe* de l'ellipse, qui est la médiatrice du segment $[AB]$.

C'est bien ce qu'on souhaitait établir !

3. **En route vers de nouvelles aventures ...** Le problème peut évoluer vers une variante plus corsée : il suffit de supposer que les points A et B ne sont plus situés à la même hauteur ...

8.2. Une taxonomie d'objectifs cognitifs

La taxonomie d'objectifs cognitifs en mathématique élaborée par Régis Gras, [80], a été élaborée vers 1978 dans le cadre d'un courant d'idées qui, à la suite des travaux de Bloom, cherchait au maximum à opérationnaliser les *objectifs* attribuables à un enseignement de mathématique et à les classer selon le niveau de difficulté des opérations mentales qu'il amène les élèves à mettre en œuvre.

Si le vocabulaire a changé, on peut considérer que le contenu du mot *objectif* de l'époque était sensiblement équivalent à celui du mot *compétence* aujourd'hui. Cependant, la pression en vue de l'opérationnalisation fut à ce point forte que les chercheurs furent amenés à passer au stade des *micro-objectifs*, plus faciles à élaborer et surtout à évaluer. Il leur est ainsi arrivé de découper la matière — suivant les principes de l'enseignement programmé de type Skinnerien — en micro-boulettes censées être plus faciles à avaler et digérer par l'élève.

Si cette méthode permet sans doute d'acquérir des connaissances techniques relativement limitées, elle s'est dans la suite révélée plutôt inefficace pour ce qui est de l'apprentissage de concepts globaux. Nous pouvons en particulier considérer que

> La résolution de problèmes est une compétence globale dont l'acquisition suppose celle de compétences subordonnées, mais ne peut s'atomiser en une myriade de compétences microscopiques.

Après quelques années, l'enseignement par micro-objectifs fut abandonné et les taxonomies qui avaient été élaborées simultanément entrèrent en sommeil. Le moment est peut-être venu de les réveiller au moins partiellement, en essayant de les inscrire dans la description du processus d'apprentissage effectuée au chapitre 3 et poursuivie dans le présent chapitre. Les taxonomies répartissent en effet les activités mentales en différents niveaux dont — comme par hasard — les premiers relèvent du stade procédural, les derniers du stade conceptuel.

Il s'agit donc d'affiner l'analyse du processus de transition du procédural vers le structural. Il s'agit aussi de contrôler le type d'activités soumises aux élèves en veillant à varier les niveaux de complexité. Il est important à cet égard de remarquer que le niveau taxonomique d'un énoncé ne dépend pas uniquement de celui-ci, mais aussi et peut-être surtout, de l'élève, de ses acquis, de ses aptitudes. Il en résulte qu'il est très difficile de donner des exemples concrets sans se référer à une situation scolaire particulière, ce qui sortirait du cadre qui est le nôtre.

Régis Gras distingue cinq niveaux taxonomiques.

Niveau A : Connaissance des outils de préhension de l'objet et du fait mathématiques

On rangera dans cette catégorie la connaissance du vocabulaire et des faits mathématiques élémentaires, ceux-ci pouvant aller jusqu'à l'exécution d'algorithmes simples.

Niveau B : Analyse de faits et transposition

Mettre un problème en équation, faire un graphique, changer de registre, ce sont des activités qui peuvent intervenir lors d'une phase d'intériorisation. Elles permettent de s'approprier un problème, pas encore de le résoudre.

Niveau C : Compréhension des relations et des structures

Ce niveau relève clairement du stade conceptuel (il en sera de même des suivants). Il s'agit de mettre en relation des concepts variés, de raisonner, d'appliquer un résultat à des situations familières.

Niveau D : Synthèse et créativité

Construire des démonstrations et des exemples, résoudre des problèmes, généraliser. L'élève qui atteint ce niveau d'activité est un élève qui ne se contente pas d'avoir des connaissances, il est efficace.

Niveau E : Critique et évaluation

Être capable d'évaluer et de s'auto-évaluer, choisir une méthode de résolution, critiquer une procédure, une démonstration, construire des contre-exemples.

Parallèlement à ce découpage en niveaux, R. Gras répartit aussi l'activité mathématique en classes, qu'il caractérise par des verbes :

Heuristique : bricoler, tâtonner, chercher.

Traductive : changer de langage, représenter, transposer.

Classificatoire : organiser, discerner, identifier.

Calculatoire : dénombrer, algorithmiser.

Logique : prouver, convaincre, déduire.

Technique : soigner, préciser.

Réinvestissement : analyser, traduire, morcéliser.

Créative : inventer, imaginer, exemplariser.

Critique : interpréter, évaluer, valider, invalider, optimiser.

Prédictive : estimer, induire, prévoir, conjecturer.

Cette approche est sans doute plus facile à mettre en relation avec la matière que celle basée sur les niveaux cognitifs. Elle n'en est pas non plus disjointe.

8.3. Les niveaux de van Hiele

8.3.1 Le modèle

Les van Hiele distinguent 5 niveaux de pensée. Ils les expliquent dans le cadre de la géométrie.

Niveau 0

Ce niveau est purement visuel. Les figures sont jugées d'après leur apparence globale. Leurs propriétés ne sont pas reconnues et encore moins énoncées. L'individu ne pourra donc dire que les angles d'un rectangle sont droits ou que les côtés sont deux à deux parallèles. Par contre, il distinguera un carré d'un rectangle et les considérera comme des entités différentes. A ce niveau, un carré n'est donc pas un rectangle et un losange n'est pas un parallélogramme.

Niveau 1

L'élève distingue maintenant les propriétés de certaines figures. Il est donc capable d'effectuer certaines analyses. Il reconnaît qu'un carré, comme un rectangle, a quatre angles droits. Une figure peut se reconnaître à ses propriétés : si j'informe l'élève que la figure tracée au tableau possède quatre angles droits, il accepte que ce soit un rectangle, même si elle n'est pas tracée avec soin. Mais il n'établit pas de relations entre les propriétés : de ce que les côtés de ce quadrilatère sont deux à deux parallèles, il ne déduit pas des égalités d'angles. De même, la propriété « être un carré » n'entraîne pas la propriété « être un rectangle ». Ainsi, la déduction n'est pas encore disponible.

Niveau 2

A ce niveau, les propriétés s'ordonnent, elles se déduisent les unes des autres. C'est le stade du « je sais que ... je déduis que ». L'élève toutefois n'est pas encore en mesure de comprendre des argumentations comportant plusieurs inférences successives. Il peut éventuellement comprendre le passage de chaque ligne à la suivante. Il ne comprend pas pour autant ce qu'est une démonstration. Quant aux figures elles sont maintenant *définies* par leurs propriétés, elles peuvent être l'objet de classifications. Un carré est reconnu comme étant un rectangle.

Niveau 3

Cette fois, l'élève comprend ce que sont un axiome, un théorème, une définition. Il est capable de se mouvoir dans un système axiomatique. Il peut élaborer lui-même des démonstrations. Il a assimilé la différence entre condition nécessaire et condition suffisante, il distingue un théorème de sa réciproque.

Niveau 4

> L'existence du dernier niveau est controversée. P. VAN HIELE dans certains textes ou certaines déclarations (voir [152]) fait part de ses hésitations. Dans [156], après avoir décrit les niveaux 0 à 3, il déclare « *on peut probablement ainsi distinguer 5 niveaux de pensée en géométrie* » mais il s'abstient de décrire le 5e niveau. Celui-ci serait le niveau à atteindre pour accepter que les axiomes d'une théorie n'ont pas une vérité absolue, que des systèmes axiomatiques différents, voire contradictoires, peuvent coexister. En particulier admettre l'existence de géométries non euclidiennes supposerait d'atteindre ce niveau.
>
> Ce qui semble clair, c'est que ce niveau ne concerne guère les étudiants du secondaire, et que les expériences menées dans cet enseignement ne pourraient que difficilement le mettre en évidence. C'est sans doute pour cela que son existence même est parfois mise en doute.

Les niveaux qui viennent d'être décrits sont parfois appelés respectivement les niveaux de la reconnaissance, de l'analyse, de l'ordonnancement, de la déduction et de la rigueur.

On notera que les niveaux 0 et 1 sont décrits essentiellement en termes d'aptitudes géométriques (reconnaissance de formes et de propriétés), alors que les niveaux 2, 3 et 4 sont décrits essentiellement en termes d'aptitudes au raisonnement. Ceci montre le caractère général de la théorie développée. Cela montre aussi le rôle particulier de la géométrie dans l'apprentissage du raisonnement, tout au moins dans le contexte des mathématiques scolaires de 1960, lequel de ce point de vue, n'a sans doute pas beaucoup changé.

On notera encore que, à l'époque, il n'était évidemment pas question, lorsqu'on considérait des objets géométriques, de faire intervenir des transformations du plan. C'est en termes de propriétés des figures que les deux premiers niveaux sont décrits. Il serait intéressant de voir comment les niveaux se différencient lorsqu'on considère des transformations géométriques. On pourrait également se poser le problème de l'intervention de l'informatique, et en particulier de celle du langage LOGO.

8.3.2 Les propriétés du modèle

Les VAN HIELE ne se contentent pas d'énoncer une suite de niveaux. Ils énumèrent les propriétés de ces niveaux et envisagent le passage d'un niveau à l'autre.

Pour eux, les niveaux ont un caractère absolu, ils ont une réalité psychologique, ils sont indépendants de la méthode d'enseignement utilisée. Cependant, certaines méthodes d'enseignement peuvent contrarier, voire empêcher, le passage d'un niveau au suivant. Il importe donc que l'enseignant soit conscient de l'existence de ces niveaux et qu'il y adapte sa méthodologie.

En particulier il faut tenir compte des points suivants :

1. Les niveaux constituent une suite FIXE. Ainsi, un individu donné passe nécessairement par les différents niveaux dans l'ordre indiqué. Pour « fonctionner » au niveau n, cet individu doit avoir développé les stratégies des niveaux précédents. Inutile donc de vouloir « brûler les étapes ».
2. Les niveaux constituent une suite DISCRÈTE. Le processus d'apprentissage est discontinu. A certains moments, il apparaît comme stoppé, ensuite il reprend de lui-même. Entretemps, l'élève a « mûri ».
3. Ce qui est implicite (intrinsèque) à un niveau donné devient explicite (extrinsèque) au niveau suivant. Ainsi, au niveau 0, l'enfant reconnaît des figures sans être capable d'expliciter sa démarche. Par contre, au niveau 1, les propriétés des figures sont mises en évidence. De façon plus générale, H. FREUDENTHAL, [72], estime que les moyens d'organisation à un niveau donné deviennent un objet d'étude au niveau suivant.
4. Chaque niveau a ses propres symboles linguistiques et son propre réseau de relations unissant ces symboles. Il en résulte qu'une affirmation peut être correcte à un niveau (« Un carré est un rectangle ») et fausse à un autre niveau.
5. Deux personnes qui raisonnent et s'expriment à des niveaux différents ne peuvent se comprendre. C'est — paraît-il — ce qui arrive souvent dans une classe.

Les conséquences méthodologiques des considérations qui précèdent sont claires : le professeur doit se mettre au niveau de l'élève. Bien sûr,

Il est possible d'enseigner à un élève doué des aptitudes au-dessus de son propre niveau, comme on peut entraîner de jeunes enfants à un calcul de fractions sans leur dire ce que sont des fractions, ou de plus âgés au calcul différentiel et intégral, bien qu'ils ne sachent pas ce que sont une dérivée et une intégrale. Pour apprendre à un élève des techniques au-dessus de son niveau, l'enseignant est amené à lui décrire les actions à effectuer sous forme d'algorithmes qui peuvent être appliqués sans en connaître la signification. Évidemment, l'élève avec qui on aura procédé de la sorte ne saura pas appliquer ses connaissances. Mais il est possible de compenser cette déficience en lui apprenant de la même manière les principales applications. Il y a encore le danger de mélanger les applications, mais ceci aussi peut être empêché par une mémorisation convenable. Dans de nombreux cas, cela sera suffisant, particulièrement s'il n'est pas nécessaire de retenir les connaissances acquises au-delà d'une date fixe, celle de l'examen par exemple. Mais même dans ces cas, il n'est pas certain que la réduction de la matière à un niveau inférieur ne soit pas une méthode plus maladroite que celle qui consisterait à amener l'élève au niveau supérieur. Il peut même arriver qu'un processus d'apprentissage soit entravé ou définitivement stoppé parce que l'élève n'aurait pas eu l'occasion d'atteindre un niveau plus élevé. ([6])

([6]) Cité dans [72].

8.3.3 Les phases de l'apprentissage

Si la suite des niveaux est — selon les VAN HIELE — discrète, la maturation qui permet à un élève de passer d'un niveau au suivant ne l'est pas nécessairement. Elle comporterait plusieurs phases sur lesquelles le professeur peut agir. « *Le but de la didactique est de poser la question de savoir comment ces phases sont parcourues et comment une aide effective peut être fournie à l'élève.* » ([156], p.27).

Cinq phases sont distinguées.

Information
: L'élève explore le sujet qui lui est soumis. Il effectue des observations à l'aide d'un « matériel » (expression à prendre au sens large). Il découvre une certaine structure. Le dialogue avec le professeur amène l'introduction d'un vocabulaire spécifique. Des questions sont soulevées. L'enseignant en profite pour déterminer quelle connaissance l'élève a déjà du sujet. L'élève sent dans quelle direction le travail va évoluer.

Orientation dirigée
: L'élève explore le sujet à l'aide de matériel élaboré par le professeur de façon à faire apparaître graduellement les structures caractéristiques au niveau considéré. La plus grande partie du matériel sera constituée de tâches courtes provoquant des réponses spécifiques.

Explicitation
: Le symbolisme linguistique du niveau considéré est mis en place, le réseau de relations entre ces symboles linguistiques est partiellement élaboré.

Orientation libre
: Des tâches plus complexes sont entreprises. Elles peuvent être exécutées de plusieurs façons. Elles sont de nature ouverte. Des repères sont placés dans le champ d'investigation.

Intégration
: L'élève doit acquérir une vue d'ensemble du domaine. C'est une phase de synthèse.

A l'issue de cette cinquième phase, un nouveau niveau de pensée est atteint, avec son propre réseau de relations et sa propre intuition.

On remarquera évidemment la parenté entre la description faite par van Hiele et celle due à Sfard même si ces auteurs ne distinguent pas le même nombre d'étapes. Chaque transition d'un niveau au suivant s'apparente à une transition du procédural au structural.

8.3.4 L'expérimentation

Depuis une quinzaine d'années, un certain nombre d'expériences ont été réalisées dans le but de tester la théorie de VAN HIELE. La plupart sont américaines. Elles sont rapportées dans les articles [44], [87], [101], [152] mentionnés dans la bibliographie.

Ces expérimentations avait pour but de vérifier d'une part l'existence des niveaux de VAN HIELE, d'autre part, la possibilité d'attribuer un niveau à chaque élève. Elles ont consisté généralement en questionnaires à remplir par les élèves, parfois en interviews cliniques.

Dans les deux cas, l'élève se voit proposer une série de questions qui sont censées correspondre chacune à un niveau donné. Un élève est classé au niveau n s'il répond correctement à une majorité des questions relatives aux niveaux 0 à n, mais échoue aux questions du niveau $n+1$. La théorie est validée si un nombre suffisamment grand d'élèves peuvent ainsi se voir attribuer un niveau.

On perçoit immédiatement certaines difficultés du procédé :

- Comment être sûr qu'une question relève bien d'un niveau donné ?
- A quel pourcentage de questions du niveau n un élève doit-il pouvoir répondre pour que l'on puisse raisonnablement considérer qu'il a atteint et peut-être dépassé ce niveau ?
- Quel est le pourcentage d'élèves classables qui est au minimum nécessaire pour qu'on puisse considérer la théorie comme validée ?

Ces difficultés sont réelles et bien connues de tous ceux qui ont un jour essayé d'appliquer une taxonomie. Elles ne doivent pas pour autant faire renoncer à l'entreprise, mais elles doivent inciter les chercheurs à redoubler d'attention et de sens critique, et à rester prudents dans leurs conclusions.

Il n'est guère possible ici de présenter un compte-rendu détaillé de ces expériences. Contentons-nous de quelques indications et des conclusions.

8.3.4.1 Uziskin (1982)

Uziskin étudie une population très importante : plus de 2000 élèves inscrits à un cours de géométrie durant une année. Presque tous ont entre 14 et 17 ans, une petite majorité est en 10e année (soit la première année du secondaire supérieur).

Ces élèves sont soumis à deux tests, l'un lors de la première semaine de cours, l'autre vers la fin de l'année. Ils reçoivent un questionnaire destiné à évaluer leur niveau de van Hiele, ainsi que d'autres questionnaires plus généraux ayant pour but de les situer par rapport à d'autres critères connus.

Les tests destinés à évaluer le niveau de van Hiele sont identiques au début et à la fin de l'année. Ils comportent cinq questions. Deux critères différents ont été utilisés pour déterminer si un élève a réussi les questions d'un niveau donné : soit réussir trois questions au moins sur cinq, soit réussir quatre questions au moins sur cinq.

Un élève est classé au niveau n s'il vérifie le critère pour les niveaux 0 à n et ne le vérifie pas pour le niveau $n + 1$. Deux classements sont donc possibles selon qu'on utilise le critère 3/5 ou le critère 4/5.

Au surplus, Uziskin tient également compte de ce que le 5e niveau est un peu problématique. Il effectue une deuxième correction des questionnaires de façon à ne pas tenir compte de ce cinquième niveau. Par exemple un élève ayant satisfait au critère pour les niveaux 1, 2, 3 et 5 ne serait pas classé dans le premier schéma, mais serait classé au niveau 3 dans le second schéma. Chaque questionnaire peut ainsi être corrigé de quatre façons différentes. Et chaque élève a passé deux questionnaires. La masse de données était donc énorme.

Le rapport présenté par Uziskin est très long et détaillé. Il examine de nombreuses questions intéressantes, mais qui nous entraîneraient trop loin. Contentons-nous du tableau ci-dessous, qui indique quel pourcentage d'élèves était classable dans chacun des niveaux lors du test de début d'année, dans le cas où on tient compte du cinquième niveau.

Niveau	-1	0	1	2	3	4	Total
3/5	0.06	0.32	0.21	0.09	0.02	0.01	0.71
4/5	0.3	0.41	0.13	0.4	0	0	0.88

A ceux qui s'étonneraient de voir apparaître ici un niveau -1, signalons qu'on a classé à ce niveau les élèves qui n'atteignent le critère pour aucun niveau.

Passons aux principales conclusions de Uziskin :

- Le cinquième niveau (niveau 4) énoncé par les VAN HIELE, soit n'existe pas, soit n'est pas testable.

  Cela résulte de la difficulté qu'a eue l'équipe de Uziskin à rédiger des questions relevant de ce niveau, de l'imprécision de la description de ce niveau par van Hiele. Un nombre substantiellement plus important d'élèves sont classables quand on ignore ce niveau.
- Selon la sévérité du critère utilisé et selon qu'on tient compte ou non du cinquième niveau, entre 65 et 90 % des étudiants ont répondu aux questionnaires de façon telle qu'il a été facile de leur attribuer un niveau.
- Le côté arbitraire du critère utilisé a pour conséquence de modifier le niveau attribué à de nombreux étudiants.

Il est possible dit Uziskin que les étudiants classé au niveau n selon le critère $3/5$ et au niveau $n-1$ selon le critère $4/5$ soient en transition d'un niveau à l'autre.

- Il y a une très grande variabilité dans le changement de niveau entre le début et la fin de l'année : un tiers des élèves restent au même niveau ou descendent, un tiers montent d'un niveau et un tiers de deux niveaux ou plus.
- Si on utilise les niveaux de van Hiele comme critère, près de la moitié des élèves reçoivent un cours de géométrie qu'ils ont une chance sur deux seulement de réussir.

8.3.4.2 Les autres expériences

Les autres expériences ont porté sur des nombres d'étudiants beaucoup plus faibles, parfois moins de 20. Elles ont parfois été menées de manière très différente.

Ainsi, dans [101], on n'essaye pas d'attribuer un niveau aux élèves pour l'ensemble du domaine « géométrie », mais bien sujet par sujet. Il apparaît ainsi que certains étudiants ont été classés au niveau 0 pour les domaines « triangles rectangles », « similitudes » et « congruences », mais au niveau 1 pour « carrés », « triangles isocèles » et « cercles ».

Une nouvelle question est ainsi posée : le niveau atteint par un élève peut-il dépendre du sujet étudié ? Les critères $3/5$ ou $4/5$ utilisés par Uziskin étaient au fond une façon de moyenner à travers les différents sujets relevant d'un domaine donné. Jusqu'à quelle finesse de décomposition d'un domaine pourrait-on être amené ? A vouloir trop détailler, on risque de perdre le contrôle de ce que l'on fait.

Cependant, cette expérimentation confirme l'existence de niveaux, dans la mesure où, pour chaque sujet, la hiérarchie normale des niveaux est, en gros, respectée.

L'étude relatée dans [44] confirme la nature hiérarchique des niveaux, mais aussi la difficulté de classer certains étudiants qui seraient en transition entre deux niveaux. Elle signale aussi que le niveau attribué à un étudiant ne semble pas strictement lié à l'âge, ni à l'année d'étude. Les niveaux apparaissent comme une structure complexe, faisant intervenir à la fois la matière et le processus de raisonnement.

Enfin, dans [44] le caractère discret de la suite des niveaux est également mis en doute. Les auteurs ont en effet eu l'occasion de constater des phénomènes d'oscillation d'un étudiant entre deux niveaux lors d'une tâche déterminée. Les niveaux leur apparaissent comme plutôt dynamiques que statiques et plus continus que discrets.

La dernière étude publiée, [87], la seule à ne pas être américaine, met directement en cause le caractère discret de la suite des niveaux, ainsi que le fait de chercher à attribuer un niveau et un seul à chaque étudiant. Les auteurs introduisent l'idée de « degré d'acquisition » d'un niveau, en distinguant cinq degrés : aucune acquisition, acquisition faible, intermédiaire, élevée ou complète. Un étudiant pourrait dans ce schéma avoir simultanément une acquisition élevée du niveau n et une acquisition faible du niveau $n+1$. (Cette idée pourrait sans doute être mise en relation avec les phases d'apprentissage qui étaient évoquées par les VAN HIELE eux-mêmes.)

L'équipe espagnole a donc élaboré une expérience dans laquelle un questionnaire comportant neuf questions de géométrie de l'espace a été soumis à une cinquantaine d'étudiants. A la correction, ils tiennent compte de ce qu'un problème peut être résolu en utilisant des démarches de niveau plus ou moins élevé. Ils déterminent ainsi un type de réponse. Par un processus de pondération assez complexe, ils attribuent finalement à chaque étudiant un degré d'acquisition de chaque niveau.

Ils constatent alors que la hiérarchie des niveaux de van Hiele est confirmée en ce sens que pour presque tous les étudiants, plus le niveau est élevé, plus le degré d'acquisition est faible. Quelques étudiants cependant montrent une meilleure acquisition du niveau 2 que du niveau 1, ce qui devrait susciter de nouvelles recherches. Enfin, les étudiants n'utilisent pas toujours un seul niveau de pensée.

8.4. Une conclusion provisoire

Nous venons de rencontrer plusieurs analyses possibles du processus de passage du procédural au structural et des activités mentales impliquées dans l'apprentissage des mathématiques. Ces analyses, dues à plusieurs auteurs, ont des points communs, sans coïncider. On doit s'attendre à en voir de nouvelles apparaître dans les prochaines années, en espérant qu'elles présentent une vision coordonnée des idées essentielles déjà développées et qu'elles s'appliquent plus aisément aux situations concrètes d'enseignement.

Références

[61], [34], [80], [152], [156], [72], [44], [87], [101].

Chapitre 9

Un problème passé au crible

9.1 Introduction 198
9.2 Origine et exposé du problème 199
9.3 La quête 201
9.4 Retour à l'algèbre 207
9.5 Commentaires 209

9.1. Introduction

Nous avons personnellement voulu expérimenter une activité de résolution de problème. Voici un exemple de situation que nous avons rencontrée, et qui nous a plongés dans un environnement problématique. Dans la suite, nous tentons de cerner chacune des étapes de notre résolution.

Les deux « *décalages* » (voir plus loin) que nous avons appliqué au problème de départ montrent notamment comment l'esprit peut vagabonder et tenter de généraliser à partir d'une situation très précise.

Les fausses certitudes du départ (elle prendront leur sens au cours de la résolution) sont différentes des conjectures que l'on peut émettre, en ce sens qu'elles ne découlent pas d'observations, et qu'à aucun moment dans les premières étapes il n'a été envisagé de les remettre en question ou d'essayer de les prouver. C'est donc un facteur à ne pas négliger, des résolutions de problèmes peuvent aider à effacer des idées fausses.

9.2. Origine et exposé du problème

Le point de départ fut l'énoncé suivant :

PROBLÈME 9.2.1 *Une machine automatique distribue des timbres de* 3 *et* 5 *francs. Montrer que pour tout* $n \geqslant 8$*, la machine peut distribuer des timbres pour une valeur totale de* n *francs.*

On peut démontrer la thèse suggérée ci-dessus en employant la récurrence, et en déduire des algorithmes (récursif et itératif) donnant le nombre de timbres de chaque type pour atteindre la somme voulue.

A partir de là, nous nous sommes demandés quels étaient les couples de naturels engendrant tous les naturels à partir de leur somme par combinaison linéaire *naturelle*.

Un premier décalage du problème

DÉFINITION 9.2.2 *Une combinaison naturelle de deux entiers positifs* a *et* b *est une combinaison linéaire* $pa + qb$ *avec* $p, q \in \mathbb{N}$.

Bien entendu, par combinaison naturelle de deux nombres a et b, nous ne pouvons engendrer que des multiples de leur p.g.c.d. Et si nous pouvons les engendrer tous à partir de leur somme $a + b$, alors a et b sont nécessairement premiers entre eux. Dans ce cas, le théorème de Bachet-Bézout :

> *Étant donnés deux nombres entiers* a *et* b*, il existe deux entiers (non nécessairement positifs)* p *et* q *tels que la combinaison linéaire* $p.a + q.b$ *soit égale au p.g.c.d. de* a *et* b

nous permet d'être sûr de l'existence de deux entiers p et q tels que $pa + qb = 1$.

On trouve alors rapidement une condition *nécessaire* pour que deux nombres a et b premiers entre eux engendrent tous les naturels à partir de leur somme. En effet, puisqu'il existe dans ce cas des naturels ℓ et m tels que $a + b + 1 = \ell.a + m.b$, on a aussi

$$1 = (\ell - 1).a + (m - 1).b$$

Et comme $\ell \geqslant 0$ et $m \geqslant 0$, il existe des entiers p et q tels que $p.a + q.b = 1$ et

$$\begin{cases} p \geqslant -1 \\ q \geqslant -1 \end{cases}$$

Les coefficients p et q de la décomposition $1 = p.a+q.b$ ne sont pas uniques mais nous savons désormais que parmi les couples de tels coefficients, il en existe un constitué de deux nombres supérieurs ou égaux à -1. Par exemple, 3 et 5 engendrent tous les naturels à partir de leur somme et on a bien $1 = 2.3 + (-1).5$.

La condition n'est pas suffisante : si elle entraîne bien que $a+b+1$ est combinaison naturelle de a et b, elle n'entraîne pas que $a+b+2$ l'est aussi. Elle permet donc tout au plus de montrer que certains couples de naturels N'ENGENDRENT PAS tous les naturels à partir de leur somme.

Par exemple, IL N'EXISTE PAS d'entiers $p \geqslant -1$ et $q \geqslant -1$ tels que $p.11 + q.13 = 1$:

$$p.11 + q.13 = 1 \iff p = \frac{1 - q.13}{11}$$

et

$$p \geqslant -1 \Rightarrow \frac{1 - q.13}{11} \geqslant -1 \Rightarrow q \leqslant \frac{12}{13}$$

Alors

$$q \geqslant -1 \Rightarrow \begin{cases} q = 0 \text{ ou} \\ q = -1 \end{cases}$$

Or, si $q = 0$, alors $p = \frac{1}{11}$ et si $q = -1$, alors $p = \frac{14}{11}$. Dans les deux cas, p n'est pas entier. 11 et 13 n'engendrent pas tous les naturels à partir de 24. Par exemple, 25 n'est pas combinaison naturelle de 11 et 13.

Un second décalage du problème

Cependant, nous pouvons essayer de chercher s'il existe toujours un nombre, éventuellement plus grand que $a+b$ à *partir duquel*, deux naturels a et b premiers entre eux engendrent tous les naturels.

Utilisation de nos acquis

Supposons $a < b$. Il est clair que si a et b engendrent a naturels consécutifs n, $n+1$, …, $n+a-1$, alors a et b engendrent tous les naturels supérieurs à n.

En effet, supposons que $n, n+1, \ldots, n+a-1$ sont tous des combinaisons naturelles de a et b :

$$n = p_1.a + q_1.b, \qquad n+1 = p_2.a + q_2.b, \qquad \ldots$$

Alors :

$$n + a = (p_1 + 1).a + q_1.b, \qquad n + a + 1 = (p_2 + 1).a + q_2.b, \qquad \ldots$$

Munis de cette idée, il nous restait à trouver le plus petit n possible tel que n, $n+1$, …, $n+a-1$ soient des combinaisons naturelles de a et b.

9.3. La quête

Les deux grosses erreurs qui nous ont — dans un premier temps — menés loin de la solution sont déjà présentes à ce moment dans nos réflexions :

Analyser des certitudes

- la conviction qu'il n'y a pas de formule simple donnant toujours la plus petite valeur possible de n, et que tout ce que nous pouvons espérer est découvrir un algorithme de calcul de cette valeur,
- la *dissymétrisation* du problème en donnant à a, le plus petit des deux nombres, un rôle particulier alors que ce n'est pas utile. Cette dissymétrisation était induite par la remarque précédente.

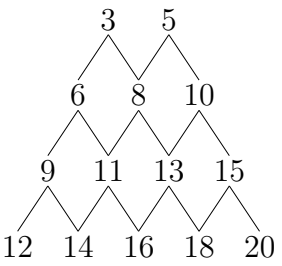
Nous sommes alors partis dans deux directions parallèles, l'une géométrique, l'autre algébrique, dans une quête de la solution entravée par les mauvaises pistes données ci-dessus.

Coordonner des cadres

La voie algébrique

Cette voie fut ouverte par la construction d'un arbre montrant quels nombres peuvent être engendrés par combinaisons naturelles de 3 et 5 :

Utiliser des exemples numériques



Chaque nœud de l'arbre possède deux fils obtenus l'un en ajoutant 3, l'autre en ajoutant 5. Comme les trois nombres consécutifs 8, 9 et 10 apparaissent sur l'arbre et que cette suite est la première à apparaître, on retrouve la réponse déjà connue.

Un graphe analogue, construit à partir de 11 et 13 montre que ces deux nombres engendrent tous les naturels à partir de 120.

Une réflexion sur la construction de ces tableaux nous a menés aux résultats suivants.

Émettre et vérifier des conjectures

Précisons d'abord le fait que, a et b étant deux naturels premiers entre eux tels que $a < b$, tout naturel est une combinaison linéaire à coefficients entiers non nécessairement naturels de a et b.

LEMME 9.3.1 *Il existe deux nombres entiers naturels c_a et c_b vérifiant les deux conditions suivantes :*

- $0 < c_a < b$ *et* $0 < c_b < a$
- *quel que soit le naturel p inférieur à a il existe des entiers $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$ tels que $p = x_1.a + y_1.b$ et $-c_a < x_1 < 0$ et des entiers $x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $p = x_2.a + y_2.b$ $-c_a < y_2 < 0$.*

On détermine les nombres c_a et c_b de la manière suivante :

Première remarque : Puisque $0 < p < a < b$, dans toute décomposition du type $p = x.a + y.b$, un et un seul des deux coefficients x, y est strictement négatif.

Deuxième remarque : Puisque $b.a + (-a).b = 0$, si $p = x.a + y.b$, alors on a aussi $p = (x+b).a + (y-a).b$. Nous pouvons donc, si $x \leqslant -b$, ajouter b à x autant de fois que nécessaire pour obtenir une relation $p = x_1.a + y_1.b$ avec $-b < x_1 \leqslant 0$. La première remarque entraîne de plus $x_1 \neq 0$, donc $-b < x_1 < 0$.

Troisième remarque : Nous pouvons aussi écrire $(-b).a + a.b = 0$, ce qui nous permet par le même raisonnement, d'écrire $p = x_2.a + y_2.b$ avec $-a < y_2 < 0$.

Faisant varier p de 0 à $a - 1$, nous obtenons $a - 1$ valeurs de x_1 et $a - 1$ valeurs de y_2. Nous noterons c_a le maximum des valeurs absolues de x_1, et c_b les maximum des valeurs absolues de y_2. Le lemme est ainsi démontré.

■

On obtient en conséquence le résultat suivant :

PROPOSITION 9.3.2 *Tout naturel au moins égal à $c_a.a$ ou à $c_b.b$ est une combinaison naturelle de a et b.*

Considérons d'abord $n = c_a.a$. Nous savons qu'il suffit d'établir que $n + 1$, ..., $n + a - 1$ sont des combinaisons naturelles de a et b. Soit p un naturel, avec $0 < p < a$. D'après le lemme, nous pouvons écrire $p = x_1.a + y_1.b$, avec $-c_a < x_1 < 0$ et $y_1 > 0$. Donc $(c_a + x_1).a + y_1.b$ est une combinaison naturelle de a et b égale à $n + p$. On procède de même pour $n = c_b.b$.

■

Cette proposition nous donne donc deux nombres à partir desquels nous sommes sûrs de retrouver tous les naturels sans pour autant affirmer que le plus petit d'entre eux est la solution optimale. Il suffit de considérer le cas $a = 3$, $b = 5$ pour constater qu'en effet, nous ne trouvons pas ainsi le plus petit naturel à partir duquel tout naturel est engendré par a et b. Remarquons néanmoins qu'il en découle que tous les entiers sont certainement engendrés à partir de $a.b$.

A ce niveau, nous sommes bloqués. Il aurait cependant suffi d'un peu de recul pour détecter la solution finale dans les exemples numériques !

La voie géométrique

Voici un exemple frappant de changement de registre et d'une nouvelle vision des choses qui peut en découler.

Changer de cadre

Toujours en supposant que a et b sont des naturels premiers entre eux tels que $a < b$, on écrit :

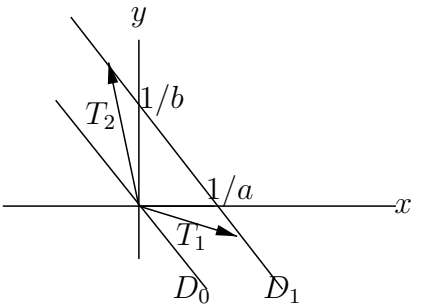
$$\begin{cases} b.a - a.b = 0 \\ -b.a + a.b = 0 \end{cases}$$

Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\begin{cases} \alpha.a - \beta.b = 1 \\ (\alpha - b).a + (a - \beta).b = 1 \end{cases}$$

On s'arrange pour avoir $\alpha, \beta \geqslant 0$ et $\beta < a$. Dans ce cas, $a - \beta \geqslant 0$ et $\alpha - b \leqslant 0$.

Dans $\mathbb{R}^2$, dessinons les droites D_k d'équations $x.a + y.b = k$ où $k \in \mathbb{N}$. Si le nombre k est engendré par a et b, la droite D_k contient un point $\binom{x}{y}$ à coordonnées naturelles. Nous dirons que ce point $\binom{x}{y}$ représente le nombre k. Notre problème consiste à déterminer à partir de quelle valeur de k, la droite D_k passe toujours par un point à coordonnées naturelles (entières et positives ou nulles).



Puisque $\alpha.a - \beta.b = (\alpha - b).a + (a - \beta).b = 1$, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, les deux translations T_1 et T_2 définies ci-dessous appliquent la droite D_k sur la droite D_{k+1} :

$$T_1 : \binom{x}{y} \mapsto \binom{x+\alpha}{y-\beta} \qquad T_2 : \binom{x}{y} \mapsto \binom{x+\alpha-b}{y+a-\beta}$$

Ces translations T_1 et T_2 appliquent tout point à coordonnées entières sur un point à coordonnées entières, mais pas nécessairement tout point à coordonnées naturelles sur un point à coordonnées naturelles. On pourrait faire remarquer que d'autres translations encore appliquent D_k sur D_{k+1}. Mais il n'est pas bien difficile de voir que si ni T_1 ni T_2 n'appliquent un point donné à coordonnées naturelles sur un point à coordonnées naturelles, alors aucune des autres translations ne le fait non plus.

Ainsi, si le nombre n est engendré par a et b, la droite D_n contient un représentant $\binom{x}{y}$ de n. Si le nombre $n+1$ est aussi engendré par a et b, l'un au moins des deux points $T_1\binom{x}{y}$ et $T_2\binom{x}{y}$ doit aussi être à coordonnées naturelles et représenter $n+1$.

Introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
P_0 &= \left\{ \binom{x}{y} \;\middle|\; x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \right\} \\
P_1 &= \left\{ \binom{x}{y} \in P_0 \;\middle|\; T_1\binom{x}{y} \in P_0 \text{ ou } T_2\binom{x}{y} \in P_0 \right\} \\
P_2 &= \left\{ \binom{x}{y} \in P_0 \;\middle|\; T_1\binom{x}{y} \in P_1 \text{ ou } T_2\binom{x}{y} \in P_1 \right\} \\
&\vdots \\
P_n &= \left\{ \binom{x}{y} \in P_0 \;\middle|\; T_1\binom{x}{y} \in P_{n-1} \text{ ou } T_2\binom{x}{y} \in P_{n-1} \right\}
\end{aligned}$$

L'interprétation de ces notations est claire. Choisissons un point à coordonnées entières $\binom{x}{y}$ et posons $n = x.a + y.b$:

- $\binom{x}{y} \in P_0$ signifie que n est engendré par a et b.
- $\binom{x}{y} \in P_1$ signifie que n et $n+1$ sont engendrés par a et b.
- $\binom{x}{y} \in P_2$ signifie que n, $n+1$ et $n+2$ sont engendrés par a et b.
- ...

Notre problème revient donc à trouver l'élément $\binom{x}{y}$ de P_{a-1} qui minimise $x.a+y.b$, ce qui peut se faire en construisant P_{a-1}.

La construction est basée sur les deux remarques suivantes :

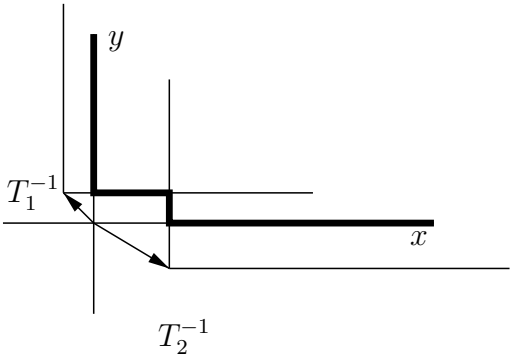
- P_0 est l'ensemble des points à coordonnées naturelles. Graphiquement, il est représenté par le premier quadrant.
- Quel que soit n, $\binom{x}{y} \in P_n \iff \binom{x}{y} \in P_0$ et $\left(\binom{x}{y} \in T_1^{-1}P_{n-1} \cup T_2^{-1}P_{n-1}\right)$

Ainsi, l'ensemble P_1 se construit en translatant P_0 par T_1^{-1} et par T_2^{-1} et en prenant l'intersection avec P_0 de l'union des images. On répète cette construction pour obtenir tous les P_i.

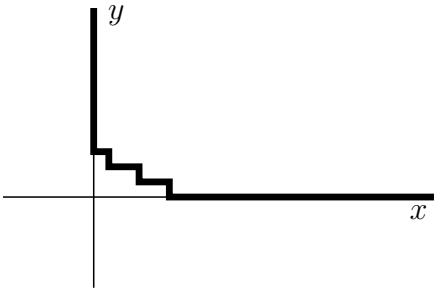
Prenons l'exemple de $a = 4$ et $b = 7$. On a alors $1 = 2.4 + (-1).7 = (-5).4 + 3.7$, donc

$$T_1^{-1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 15 \end{pmatrix}, \qquad T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Le *sommet* de P_0 est le point $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, notons-le p_0. Nous en déduisons les coordonnées des trois sommets de P_1 : $p_{11} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $p_{12} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ et $p_{13} = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$. Nous pourrions dire que P_1 s'obtient à partir de P_0 en en y faisant une « encoche ».



En répétant l'opération, nous construisons les ensembles P_2, P_3 et P_4. A l'étape k, nous considérons les images de P_{k-1} par T_1^{-1} et T_2^{-1} et nous éliminons les parties situées en dehors du premier quadrant. A chaque étape, nous constatons l'apparition d'une encoche supplémentaire. Les sommets sont successivement les points $\binom{5}{1}$ (étape 1), $\binom{3}{2}$ (étape 2), $\binom{1}{3}$ (étape 3). L'étape 4 n'apporte pas de modification à la figure finale :



L'ensemble P_4 est limité par la ligne brisée de sommets successifs $\binom{0}{3}$, $\binom{1}{3}$, $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{2}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{0}$. La valeur minimum de $x.4 + y.7$ est atteinte en $\binom{1}{2}$ et vaut 14. On note au passage que cette valeur minimum sera toujours atteinte non en un des sommets des encoches, mais en un des creux créés par ces encoches.

Dans l'exemple traité, une seule encoche supplémentaire apparaissait à chaque étape. Mais cette propriété ne se généralise pas nécessairement. La situation est alors devenue difficile à maîtriser, un nouveau blocage nous a fait abandonner cette voie.

Nous avons pourtant regardé le naturel $(b - \alpha).a + \beta.b = b.a - \alpha.a + \beta.b = b.a - 1$ qui est représenté par le sommet $\begin{pmatrix}b-\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ de la première encoche. C'est ce sommet qui par translations successives engendre les autres sommets des encoches de la ligne brisée obtenue finalement.

Or à chaque translation créant une nouvelle encoche, le naturel représenté par le sommet diminue de 1, et tout sommet de la ligne terminale est obtenu en au plus $a-2$ translations à partir de $\binom{b-\alpha}{\beta}$ Ainsi nous pouvons être sûr que le minimum cherché ne sera pas supérieur à $a.b-1-(a-2) = ab-a+1$. Et même moins puisque clairement, le minimum ne sera pas réalisé en un sommet de la ligne brisée mais en un creux. L'expression $ab-a$ commence à nous trotter dans le crâne et vient mettre en cause la certitude que nous avions au départ, à savoir qu'il n'existerait pas de formule simple donnant la valeur du minimum. Simultanément, l'autre certitude est remise en question et nous voyons clairement apparaître notre problème de dissymétrie !

9.4. Retour à l'algèbre

Ce détour dans le monde de la géométrie, la maturation qu'il a provoqué, nous ont permis d'avoir l'intuition de la bonne réponse. Munis de ce $a.b - a + 1$, et ayant surpassé la dissymétrie, une idée a surgi. Le nombre cherché serait tout simplement $ab - a - b + 1 = (a - b)(b - 1)$. Un rapide contrôle montrait que dans tous les cas rencontrés antérieurement, la réponse était bien donnée par cette formule. Il ne restait plus qu'à trouver une démonstration.

Abandon des fausses certitudes

Nouvelle conjecture

PROPOSITION 9.4.1 *Soient a et b deux naturels premiers entre eux. Alors*

$$n \geqslant a.b - a - b + 1 \Rightarrow \exists\, x, y > 0 : n = a.x + b.y$$

Démontrer

Choisissons d'abord $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $n = a.x + b.y$. Nous pouvons supposer $0 \leqslant x < b$: si cette relation n'était pas satisfaite, nous remplacerions x par son reste x_1 modulo b, et nous ajusterions y en conséquence, le remplaçant par y_1.

Il reste à prouver $y_1 \geqslant 0$. Or, $n > a.b - a - b$, donc :

$$a.b - a - b < a.x_1 + b.y_1 \leqslant a.(b - 1) + b.y_1 = a.b - a + b.y_1$$

D'où successivement $-b < b.y_1$, $-1 < y_1$ et enfin $0 \leqslant y_1$.

■

Ainsi tout naturel au moins égal à $a.b - a - b + 1$ est combinaison naturelle de a et b. Pour établir que $a.b - a - b + 1$ est *le plus petit* naturel à partir duquel tous les nombres naturels sont des combinaisons naturelles de a et b, il reste à montrer que $a.b - a - b$ n'est pas combinaison naturelle de a et b.

PROPOSITION 9.4.2 *Soient a et b deux naturels premiers entre eux. $a.b - a - b$ n'est pas combinaison naturelle de a et b.*

Supposons que $\exists x,\ y \in \mathbb{N} : a.b - a - b = a.x + b.y$

Alors $a.b = a.(x+1) + b.(y+1)$. Donc b divise $a.(x+1)$ et a divise $b.(y+1)$. Comme $\text{PGCD}(a, b) = 1$, on voit que b divise $x + 1$ et a divise $y + 1$.

Autrement dit, il existe des naturels q et r tels que $x + 1 = b.q$ et $y + 1 = a.r$, c'est-à-dire $x = b.q - 1$ et $y = a.r - 1$.

Alors,

$$a.x + b.y = a.b.(q + r) - a - b = a.b - a - b$$

Puisque $a.b \neq 0$, il faut donc $q + r = 1$, ce qui laisse les possibilités :

$q = 0$ et $r = 1$; alors $x = -1$ et $y = a - 1$
ou
$q = 1$ ou $r = 0$; alors $x = b - 1$ et $y = -1$

Dans les deux cas, on arrive à une contradiction puisque x et y sont des naturels.

■

Remarquons qu'il s'en déduit très facilement une condition nécessaire et suffisante pour que deux naturels a et b premiers entre eux engendrent (comme 3 et 5) tous les naturels *à partir de leur somme* :

$$\begin{aligned}(a-1).(b-1) = a + b \quad &\Longleftrightarrow \quad a.b - a - b + 1 = a + b \\ &\Longleftrightarrow \quad a.(b-2) - 2.b + 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad a = \frac{2.b - 1}{b - 2} \text{ avec } b > 2\end{aligned}$$

Ceci revient à demander que $b - 2$ divise $2.b - 1$ et n'est possible que si $b = 3$ (alors $a = 5$) ou $b = 5$ (alors $a = 3$).

9.5. Commentaires

L'évolution de notre résolution de ce problème illustre diverses étapes par lesquelles on peut passer, et dont nous avons déjà discuté auparavant. La résolution a fait intervenir des épisodes d'analyse, d'exploration, des changements de cadre.

Nous avons fortement exemplifié le problème afin d'en saisir le fonctionnement avant de nous lancer dans sa résolution générale. Nous avons tenté de prouver différentes conjectures en les affinant peu à peu, et nous sommes passés par des phases graphiques nous montrant l'essence du problème sous un autre point de vue. Enfin, lors de nos blocages, nous avons toujours écrit toutes les idées qui nous sont venues, en passant en revue ce qui n'allait pas.

Au sens de [21], le problème que nous venons de présenter peut être qualifié de *problème ouvert* ([1]). Son énoncé est en effet court, et n'induit ni la méthode ni la solution. Les élèves peuvent s'emparer aisément de la situation.

Ce n'est par contre sûrement pas une *situation-problème*, et on perçoit le défaut de ne pas établir directement de passerelle vers autre chose. A part un peu d'arithmétique et d'algèbre, n'offrant dans ce cadre que très peu de possibilité d'extension, le problème s'arrêtera avec sa résolution, ne laissant finalement pas beaucoup d'*impressions* réutilisables par la suite. Cependant la « gymnastique intellectuelle » intervenue dans les différentes tentatives de résolution n'est pas nécessairement sans intérêt et a permis finalement la maturation débouchant sur l'*eureka* final.

Remarque

Nous avons peu de temps après nous être penchés sur ce problème appris que son énoncé figurait dans *au moins* un recueil de questions de type *Olympiades Mathématiques* (voir [15]).

De plus, il existe un mémoire de licence, réalisé à l'Université de Mons, présentant *le grand frère* de notre problème, puisqu'il s'agit de la résolution dans $\mathbb{N}^3$ de l'équation $a.x + b.y + c.z = n$ avec $a < b < c$ premiers entre eux (voir [35]).

On peut aussi se référer à un article (voir [149]) qui parle plutôt du problème d'origine (celui des timbres) et de deux autres problèmes de combinatoire.

Références

[21], [15], [35], [149].

([1]) A condition de ne pas donner le résultat dès le départ.

Chapitre 10

La problématisation du cours de mathématiques

10.1 Un contraste à réduire 212
10.1.1 Deux discours qui s'opposent 213
10.1.2 Ou deux discours qui s'épaulent mutuellement 214
10.2 Une structure commune 215
10.2.1 Une modélisation de séquence d'apprentissage 216
10.3 Plusieurs espèces de problèmes 221
10.3.1 Les problèmes d'introduction 222
10.3.2 Les problèmes d'application 224
10.4 En guise de conclusion 225

L'enseignement des mathématiques ne se propose pas seulement de développer chez les élèves des méthodes de résolution de problèmes. En effet, « faire » des mathématiques, ce n'est pas seulement résoudre des problèmes, c'est aussi dégager de la solution d'un ensemble de problèmes des méthodes nouvelles, dans l'espoir d'en tirer, à terme, la solution de nouveaux problèmes. Cet indispensable travail de synthèse est l'objectif réservé à ce qu'on appelle en général le « cours de théorie ». La question qui se pose alors est de savoir s'il est possible — et comment ? — d'intégrer efficacement la résolution de problèmes à ce cours de théorie, ou, plus précisément, de déterminer comment l'organisation globale du cours de mathématiques peut contribuer à renforcer les compétences des élèves en matière de résolution de problèmes.

10.1. Un contraste à réduire

10.1.1 Deux discours qui s'opposent . . .

Le cours de théorie est en général présenté sous une forme *déductive* : partant de définitions générales (sinon d'axiomes), on en déduit des propriétés, des propositions, des théorèmes et des corollaires, illustrés de ci de là d'exemples ou d'applications *a posteriori*.

Au contraire, la résolution d'un problème est — de par sa nature même — vécue sous une forme *inductive* : à partir d'une étude de cas particuliers, on accède par une suite discontinue d'étapes plus ou moins empiriques à une solution brute, qui mérite souvent un effort de nettoyage avant d'être tout à fait convaincante.

Or, lorsque ces deux formes de progression sont trop distantes l'une de l'autre dans l'organisation du cours, elles engendrent des effets antagonistes dans l'esprit de l'élève, une sorte de conflit entre ce qu'il se sent ou est capable de réaliser lorsqu'il est livré à lui-même dans une résolution d'exercices ou de problèmes, et ce que l'enseignant lui présente comme un discours idéal en mathématique.

Plus précisément, le modèle de progression donné en classe par l'enseignant lorsqu'il est au tableau — qu'il « fait cours », comme on dit — ne correspond qu'à l'état *final* de ce que l'élève doit être capable de (re)produire : une définition « léchée », un théorème bien poli et astiqué, l'enchaînement irréprochable des arguments, . . . Mais ce modèle néglige les états intermédiaires, plus approximatifs et même souvent imparfaits, qui précèdent la fixation d'une théorie et qui ont l'intérêt de mettre en valeur les *raisons d'être* des définitions ou des axiomes et qui légitiment *a priori* les résultats.

Or, ces états intermédiaires sont évidemment essentiels s'il s'agit de promouvoir chez l'élève l'art de la découverte : ce sont eux qui ouvrent les portes, c'est là qu'est la clé de la résolution d'un problème. Les effets de ce contraste trop marqué entre la pratique et la théorie se révèlent fréquemment dans les copies de devoirs, d'interrogations ou de tests. Le cours de théorie y est restitué, sinon utilisé, tel que la mémoire de l'élève l'a figé : sans plus aucun sens critique. Comme il est bien connu, seuls les élèves brillants sont capables de réaliser par eux-même cette transition — particulièrement significative en mathématique — de l'inductif au déductif, d'un faisceau d'idées à son exposition technique.

10.1.2 . . . Ou deux discours qui s'épaulent mutuellement

Il semble donc nécessaire de faire *explicitement* en classe avec les élèves, ce passage d'une pensée inductive à une pensée déductive, c'est-à-dire d'établir les raisons d'être d'une pensée déductive formalisée.

Dans cette optique, quand le professeur anime le cours de théorie, cela signifie qu'il s'emploie à reconstruire un enchaînement théorique avec les élèves, et à les convaincre du bien fondé de cette reconstruction, sans arguments d'autorité, mais bien en tirant de l'expérience antérieure de tout le groupe les raisons qui justifient cette reconstruction. C'est ce qu'on appelle parfois — en didactique des mathématiques — la phase d'*institutionnalisation* du savoir.

Une telle organisation du cours de mathématique se pratique déjà à des degrés variables et depuis plusieurs années chez certains enseignants « militants » de tous les réseaux d'enseignement de la Communauté Française. Parmi les groupes qui se distinguent ainsi, if faut signaler : le Centre de Didactique des Sciences de l'Université de Mons-Hainaut (CDS), le Groupe des Collèges Jésuites/Réflexions sur l'Enseignement des Mathématiques (COJEREM), le Centre Technique et Pédagogique de la Communauté Française (CTPCF), le Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM), la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française (SBPMef) et l'Unité de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (UREM-ULB), sans oublier le Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) que nous avons déjà évoqué ailleurs. Ces groupes s'expriment dans diverses publications dont on peut trouver une liste dans le « Catalogue des publications belges de langue française sur l'Education Mathématique » (CREM ASBL, avril 1998), ou à l'occasion de conférences lors des congrès de la SBPMef, de groupes de contact, de formations continues, . . .

Par ailleurs, cette nouvelle organisation du cours de mathématique est déjà présente dans les programmes d'autres pays, comme on l'a souligné dans le chapitre 1.

C'est au niveau de la reconstruction globale du cours de théorie au départ de la résolution de problèmes qu'il convient donc de développer des modèles efficaces et des exemples détaillés. Comme on vient de le signaler, ces modèles et ces exemples commencent à être relativement bien documentés, en particulier en ce qui concerne les deux premiers degrés de l'enseignement secondaire comme l'illustrent les quatre volumes de la série « De question en question », issus des travaux du GEM (cfr. [155]). Mais des résultats analogues à propos des deux années terminales semblent moins nombreux. Les sections suivantes tentent d'apporter quelques éléments de réflexion à ce sujet, tant au niveau d'un modèle que d'exemples.

10.2. Une structure commune

L'objet de cette section est de montrer que le modèle d'apprentissage du savoir mathématique que nous avons désigné par le « slogan » *du procédural au structural* permet de réconcilier la pratique et la théorie dans le cours de mathématique, c'est-à-dire de construire une théorie déductive au départ d'un acquis inductif.

Le modèle en question a été décrit au chapitre 3. Il s'appuie sur des raisons théoriques liées à l'évolution historique des théories mathématiques et à l'étude des processus d'apprentissage en mathématiques. Nous avons déjà constaté au chapitre 8 que le modèle de Sfard peut être transposé à la résolution d'un problème. Nous allons ci-dessous le réutiliser à nouveau dans le cadre de la construction d'une séquence d'apprentissage.

10.2.1 Une modélisation de séquence d'apprentissage

Lorsqu'il s'agit d'élaborer (1) une séquence d'apprentissage sur un thème du programme, il convient — comme souligné plus haut — de mettre en valeur les raisons d'être des définitions ou des axiomes, et de légitimer *a priori* les résultats.

Dans ce contexte, la description par A. Sfard de l'évolution du stade procédural au stade structural permet de préciser les étapes propres à l'apprentissage d'un concept mathématique.

L'étape d'intériorisation.

Elle correspond à une mise en scène du processus ou de la notion qui est au centre du thème (2) à aborder. Elle peut se réaliser sur base d'un problème simple, dont les difficultés techniques sont de peu d'importance, mais qui a un caractère mobilisateur, sinon paradoxal ... La résolution de ce problème doit mettre en relief les grandes lignes à venir du thème.

L'étape de condensation.

Elle correspond au développement d'une (ou de plusieurs) problématique(s), c'est-à-dire d'une séquence pédagogique de clarification construite à partir de plusieurs problèmes-clés. Dans ce contexte, un problème est une occasion d'enrichir un processus, de le faire évoluer vers un statut de concept. Cette étape peut être traversée de synthèses partielles, qui permettent par exemple de fixer des règles de calculs qui se sont révélées efficaces, ou de s'accorder sur l'énoncé et même la démonstration d'une propriété. Il est fondamental dans cette étape que les problèmes abordés présentent des aspects aussi diversifiés que possible de l'objet principal d'étude. C'est là une condition essentielle si l'on désire progresser vers un point de vue conceptuel.

L'étape de réification.

Elle organise définitivement tout ce que la problématique a permis de dégager. Cette étape a pour vocation à la fois

- de fixer les résultats et d'y mettre de l'ordre,
- de commencer à créer une nouvelle intuition.

(1) Et il en est évidemment de même lors de la construction d'une synthèse en classe avec les élèves (institutionnalisation).

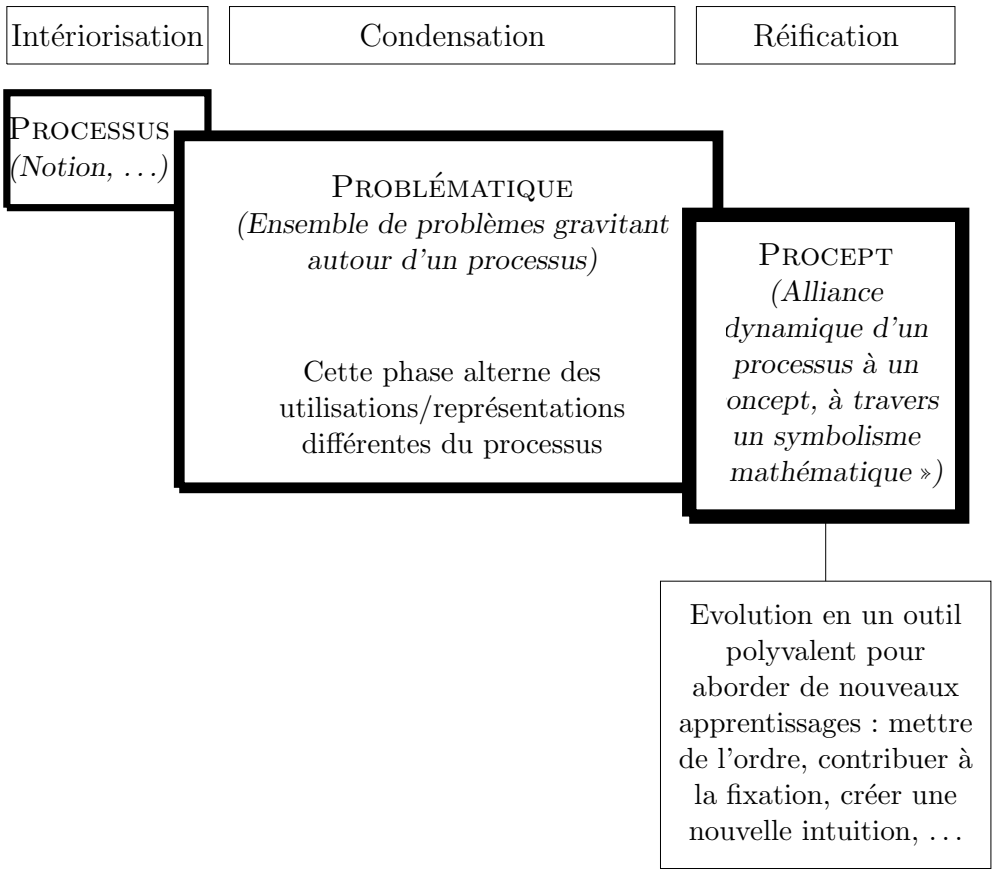
(2) Ou, si l'on préfère : du chapitre du programme ...

Tous les enseignants savent à quel point les concepts mathématiques sont d'autant plus efficaces qu'ils sont riches d'interprétations diverses. L'étape de réification doit — idéalement — cristalliser les interprétations diverses d'un même concept. Elle y arrivera d'autant mieux que les problèmes retenus dans l'étape de condensation auront été choisis pour cette raison-là. E. Gray et D. Tall (cfr. [83]) ont inventé le terme de « procept » pour définir cet état d'association permanente d'un concept au processus qui l'a fait naître, à travers un symbolisme mathématique approprié. Ainsi

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

désigne à la fois la valeur de cette limite, mais aussi *tout* le processus de calcul de cette limite. Dans l'écriture, $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ c'est le sens du « = » qui crée la difficulté.

Le diagramme ci-dessous résume ce modèle d'évolution. Il est sujet à répétitions : la fin d'une séquence s'accroche au début d'une ou plusieurs autres séquences.



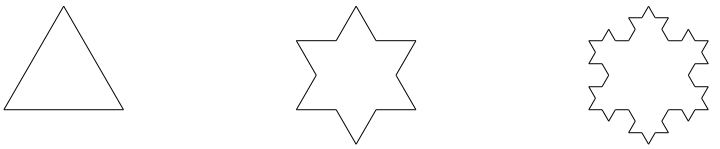
Exemple 10.2.1 Le concept de limite d'une suite numérique

L'étape d'intériorisation.

1. **Enoncé (Le problème du flocon de Von Koch.)** Un flocon mathématique s'obtient par le processus suivant. On divise chaque côté d'un triangle équilatéral en trois parties égales. Sur chaque tiers médian, on construit un nouveau triangle équilatéral extérieur. On divise à nouveau chaque côté de l'étoile ainsi obtenue en trois parties égales et sur chaque tiers médian, on construit un nouveau triangle équilatéral extérieur, et ainsi de suite ...

   Quelle est la longueur de la ligne polygonale ainsi obtenue après 2, 3, ...n itérations ?

   Quelle est l'aire délimitée par cette ligne polygonale après 2, 3, ...n itérations ? Que deviennent ces résultats si le processus ne s'arrête jamais ?



2. **Commentaires**

   - Si on suppose que le côté du triangle est de longueur unité, on obtient pour la longueur après n itérations

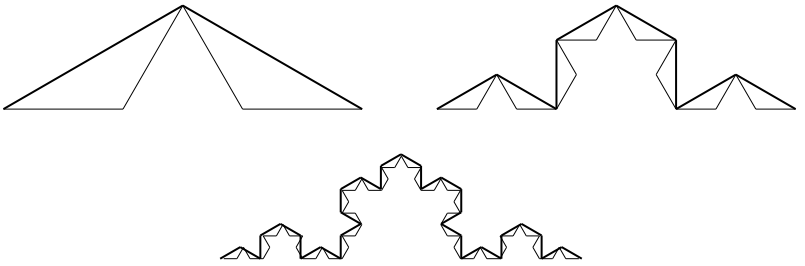
   $$l_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

   tandis que pour l'aire après n itérations, on trouve

   $$a_n = a_0 + 3 \cdot \frac{1}{9}a_0 + 3 \cdot \frac{4}{9^2}a_0 + \cdots + 3 \cdot \frac{4^{n-1}}{9^n}a_0$$

   $$= a_0 \left(1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4}{9} + \cdots + \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}}\right)\right)$$

   - Si le processus ne s'arrête jamais, le calcul de l'aire équivaut à évaluer une somme *infinie*, tandis que celui de la longueur revient à calculer un produit *infini*.
   - Si le processus ne s'arrête jamais, le résultat est paradoxal : la ligne polygonale est « de longueur infinie », mais borde une surface d'aire finie, égale aux $\frac{8}{5}$ de l'aire initiale.
   - Le problème fournit un contexte pour établir et discuter la formule qui donne la somme des termes d'une progression géométrique.
   - La géométrie particulière du processus permet d'encadrer « supérieurement » et « inférieurement » les grandeurs étudiées. Ces encadrements peuvent ultérieurement être exploités de façons diverses.



L'étape de condensation.

De nouveaux problèmes sont introduits dans des contextes variés.

1. **Problématique géométrique ou cinématique**
   - **La carpette de Sierpinski.** Un carré unité est divisé en 9 carrés égaux, le carré central est colorié. Les 8 carrés restants sont à leur tour divisés et coloriés suivant le même procédé. Si on continue ainsi indéfiniment, que devient l'aire de la surface blanche ?
   - **L'éponge de Menger.** D'un cube plein de côté unité, on retire les 7 cubes centraux (celui du centre et ceux occupant le centre de chaque face) parmi les 27 cubes résultant de la subdivision de chaque arête du cube initial en trois parties égales. On répète le processus pour chacun des petits cubes restants. Si on continue ainsi indéfiniment, que deviennent le volume et la surface latérale de l'objet ?
   - **Le volume d'une pyramide.** Comment calculer le volume d'une pyramide en la décomposant en deux familles de prismes homothétiques ?
   - **Le problème de la mouche.** Deux locomotives sont distantes de 100 km. Elles roulent l'une vers l'autre à la vitesse de 50 km/h. Une mouche qui se déplace à 100 km/h part d'une des deux locomotives et vole vers l'autre, puis revient vers la première, puis repart vers la seconde, etc. Quelle distance cette mouche aura-t-elle parcourue avant d'être écrasée dans la collision des deux locomotives ?
   - **Paradoxes de Zénon, etc.**
2. **Problématique numérique**
   - **L'écriture décimale des nombres rationnels.** Quelle est la fraction associée à 0,12 681 681 681 681 681 ... ?
   - **La série harmonique et la divergence lente.** La somme infinie

     $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$$

     est-elle bornée ? Etc.
   - **Le calcul d'approximations rationnelles très rapides de $\sqrt{D}$.** En élevant les inégalités

     $$0<\sqrt{2}-1<\frac{1}{2}$$

à des puissances suffisamment grandes, construire des approximations rationnelles de $\sqrt{2}$ dont on peut mesurer *a priori* la précision.

- Opérateurs Δ ($\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$), équations linéaires aux différences finies à coefficients constants, etc.

Nous avons déjà constaté que quelle que soit l'activité que l'on considère, l'étape de condensation semble un lieu privilégié de *changements de cadre* et de *changements de registre*. Dans le cas d'une résolution de problème, le changement de cadre ou de registre permet d'évoluer vers une solution. Dans le cas d'une séquence d'apprentissage, le changement de cadre ou de registre participe de façon décisive à l'évolution vers la maîtrise d'un concept.

Par exemple, les problématiques qui ont été proposées ci-dessus mettent en scène le même concept mais dans des cadres différents : géométriques, cinématiques, numériques. L'étude ultérieure des limites de fonctions permet d'y ajouter le registre graphique, etc.

Il ne faut néanmoins pas se cacher que de tous les comportements dont on peut souhaiter la maîtrise par l'élève, ceux associés aux changements de cadres ou de registres semblent — de par leur flexibilité même — les plus difficiles à développer.

L'étape de réification. Une synthèse est élaborée qui fait apparaître notamment les concepts et les résultats principaux. Des prolongements ultérieurs sont préparés.

1. **Concepts**
   - Limite, convergence et divergence d'une suite numérique.
   - Encadrements, caractérisation des nombres réels, ...
   - Le « procept » associé à $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
2. **Résultats**
   - Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} q^i = \frac{1}{1-q}$, et sinon cette limite n'existe pas.
3. **Prolongements**
   - Les limites de suites introduisent l'étude des limites de fonctions.
   - L'opérateur de différence finie prépare de manière numérique la notion de dérivée.
   - Les processus infinis géométriques ouvrent la voie au calcul intégral.

10.3. Plusieurs espèces de problèmes

Il est bien évidemment exclu de proposer n'importe quel problème à n'importe quelle classe. D'une façon générale, on peut affirmer que

> Un problème est lié à une matière en cours d'étude.

Mais ce lien peut lui-même être de nature variable.

10.3.1 Les problèmes d'introduction

Le problème peut servir à introduire une nouvelle tranche de matière, à lui conférer le sens sans lequel l'élève n'a aucune raison de s'y intéresser, en montrant qu'elle permet de répondre à des questions auparavant inabordables. On parle de *situation-problème* pour désigner des problèmes ainsi destinés à l'introduction ou l'étude d'un nouveau sujet. Ce point de vue n'est pas nouveau, puisque Alexis Clairaut, dans [49], veut déjà ... *occuper continuellement ses lecteurs à résoudre des problèmes*, considérant qu'*en suivant cette voie, les commençants aperçoivent, à chaque pas qu'on leur fait faire, la raison qui détermine l'inventeur.* ([3])

La brochure [9] adopte le même point de vue. Elle constate notamment que

> *C'est dans un champ de contraintes et de nécessités que la construction d'une connaissance, comme solution d'un problème, peut apparaître justifiée et intégrable.*

Plus loin, elle s'interroge :

> *Quelles composantes didactiques doivent constituer les situations–problèmes dont nous devrions jalonner le temps d'enseignement ?*

Elle répond à cette question en décrivant la *démarche scientifique* de façon très proche de la description faite plus haut de ce que nous avons appelé la *méthode axiomatique*, mais en y ajoutant quelques éléments, mentionnés en gras dans l'encadré suivant, qui tiennent compte du rôle des situations-problèmes : introduire de nouvelles connaissances dans une classe. Ainsi, il s'agit

- de partir du questionnement d'une situation, mais **en inscrivant son sens dans une perspective théorique** [...] ;
- de modéliser, et donc suspendre provisoirement le seul sens personnel en faveur d'une formalisation **admise par le groupe-classe** ;
- ...
- de **participer à l'institutionnalisation [des résultats]**, une objectivation qui est une phase de mise en accord entre les sujets du groupe-classe ;
- **d'expliquer, généraliser, anticiper, prévoir dans des situations comparables et donc élargir le sens du questionnement initial.**

([3]) Ces citations sont reprises dans un texte d'Evelyne Barbin, [26].

Les problèmes d'introduction doivent donc être choisis soigneusement. En particulier, la situation d'enseignement doit être suffisamment porteuse de sens pour que l'élève fasse sienne les questions posées. De cette façon, le concept nouveau apparaît comme significatif car c'est un instrument pour résoudre des problèmes.

Un début d'opérationnalisation de ces principes résulte des travaux de divers auteurs ([64], [21]) :

- L'élève doit pouvoir s'engager dans la résolution du problème, il doit pouvoir envisager ce qu'est une réponse possible.
- Les connaissances de l'élève sont en principe insuffisantes pour qu'il résolve immédiatement le problème.
- La situation-problème doit permettre à l'élève de décider si une solution trouvée est convenable ou non.
- La connaissance que l'on désire voir acquérir par l'élève doit être l'outil le mieux adapté à la résolution du problème par l'élève.

La dernière condition doit en particulier éviter que trop d'approches différentes puissent être proposées par la classe, ce qui rendrait la situation ingérable en ne conduisant pas à l'introduction et l'institutionnalisation du point de matière prévu.

10.3.2 Les problèmes d'application

Un problème peut être une application de la matière venant d'être étudiée. Dans ce cas, sa complexité peut être assez grande, mais il ne nécessite normalement pas l'acquisition de nouvelles matières. Les acquis de l'élève doivent suffire, ce qui n'exclut pas une réorganisation éventuelle de ces acquis en vue de trouver la solution ou leur mise en relation avec d'autres acquis antérieurs. Le problème contribue alors au phénomène de compression des connaissances mathématiques de l'élève, ce qui, — normalement — rend celui-ci plus performant.

Un problème de ce type peut éventuellement être traité en plusieurs phases, alternant du travail en classe et du travail à domicile.

10.4. En guise de conclusion

Promouvoir un enseignement qui considère la résolution de problèmes comme une compétence terminale signifie en particulier promouvoir un enseignement qu'on qualifie parfois de « génétique » ([4]). D'une certaine manière, un tel enseignement prolongerait celui pratiqué déjà au premier degré, et qui s'amorce au second degré du secondaire.

Dans cette approche génétique des matières et des thèmes, il semble important de mettre clairement en évidence les *idées* à la base des problématiques et des concepts, de quasiment décrire certaines *idées* comme des thèmes à part entière ! Cet objectif est bien exprimé par le mathématicien américain W. P. Thurston [145] :

> *We mathematicians need to put far greater effort into communicating mathematical* ideas. *To accomplish this, we need to pay much more attention to communicating not just our definitions, theorems, and proofs, but also our ways of thinking. We need to appreciate the value of different ways of thinking about the same mathematical structure. We need to focus far more energy on understanding and explaining the basic mental infrastructure of mathematics . . . This entails developing mathematical language that is effective for the radical purpose of conveying ideas to people who don't already know them.*

Pour ne citer qu'un exemple : associer la dérivée à un *quotient* particulier, et l'intégrale à un produit particulier permet de situer immédiatement le rôle central du théorème fondamental de l'analyse, qui explicite justement la relation entre produits et quotients « infinitésimaux ». Il en va de même pour la règle de dérivation des fonctions composées ou celle de changement de variables dans une intégrale.

En ce sens, les titres et les sommaires d'un curriculum pourraient cristalliser de telles idées-forces.

Si les contenus des programmes n'ont pas de raisons d'être modifiés radicalement, le *développement* de certains d'entre eux n'en est pas moins sensiblement modifié dès qu'il s'agit de prendre en compte non pas des exigences « académiques », mais bien la logique d'une démarche d'explorations de problèmes ([5]).

([4]) Au sens où il s'agit d'expliquer et d'évaluer les concepts ou les résultats en termes de leur genèse, de leur raisons d'être et de leurs développements ultérieurs, en particulier dans l'environnement des problèmes (mathématiques ou autres) qui les ont fait naître. Cfr. par exemple [147], [67], . . .

([5]) Il est probable qu'une telle écriture de programmes implique la disparition de certains thèmes classiques au profit d'une augmentation des exigences dans la maîtrise des thèmes retenus.

Dans ce contexte, un programme pourrait être conçu comme un ensemble de problématiques

- destinées à fournir à l'élève les moyens d'*augmenter son autonomie* tant dans la maîtrise des matières que dans celle des principes et des stratégies utiles à la résolution de problèmes,
- qui respecte évidemment le niveau de compétence visé (par exemple dans le choix d'une option à 2, 4 ou 6 heures/semaine),
- qui accorde une attention suffisante à des thèmes périphériques polyvalents, dans les sciences exactes, les sciences humaines, l'économie, etc ...

Des exemples de rédaction de curriculum de ce type ont été signalés dans le chapitre 1.

Pour conclure, il semble bien que l'*organisation globale* du cours de mathématiques peut contribuer à renforcer les compétences des élèves en matière de résolution de problèmes parce qu'**il est possible de reproduire dans le cours de théorie le « schéma intellectuel » qui gouverne la résolution de problèmes.**

Références

[145], [147], [67], [64], [21], [9], [26], [49], [83], [155].

Deuxième partie

Des problèmes

Chapitre 11

Des fiches-problèmes

11.1 Structure des fiches 231
11.1.1 Enoncé du problème 232
11.1.2 Les moyens nécessaires 233
11.1.3 Un exemple de résolution du problème 234
11.1.4 Des commentaires sur la situation et son évaluation 235
11.2 Fiche N° 1 : Un calcul d'aires 236
11.2.1 L'énoncé 237
11.2.2 Les moyens nécessaires 238
11.2.3 Exemple de résolution 239
11.2.4 Etude d'une expérience menée auprès d'élèves 242
11.3 Fiche N° 2 : La longueur d'une ellipse 250
11.3.1 L'énoncé 251
11.3.2 Les moyens nécessaires 253
11.3.3 Exemple de résolution 254
11.3.4 Commentaires 259
11.4 Fiche N° 3 : Un problème d'aire 263
11.4.1 L'énoncé 264
11.4.2 Les moyens nécessaires 265
11.4.3 Exemple de résolution 266
11.4.4 Commentaires 268
11.4.5 Prolongeons le problème 269
11.5 Fiche N° 4 : Des pavages du plan 275

11.5.1 L'énoncé 276
11.5.2 Les moyens nécessaires 278
11.5.3 Exemple de résolution 279
11.5.4 Prolongements possibles 290
11.6 Fiche N° 5 : Un peu de probabilité 292
11.6.1 L'énoncé 293
11.6.2 Les moyens nécessaires 295
11.6.3 Exemple de résolution 296
11.6.4 Un autre exercice 299
11.7 Fiche N° 6 : Le duopoly de Cournot 301
11.7.1 L'énoncé 302
11.7.2 Les moyens nécessaires 304
11.7.3 Exemple de résolution 305
11.8 Fiche N° 7 : Le problème des confetti 307
11.8.1 L'énoncé 308
11.8.2 Les moyens nécessaires 310
11.8.3 Exemple de résolution 311
11.8.4 Passage à la dimension 3 313
11.8.5 Mise en évidence de quelques suites 314
11.8.6 Prolongements possibles 315
11.9 Fiche N° 8 : Le problème de l'eau et du vin 316
11.9.1 Introduction 317
11.9.2 Les énoncés 318
11.9.3 Les moyens nécessaires 320
11.9.4 Exemple de résolution 321
11.9.5 Etude d'une expérience menée auprès d'élèves 323
11.9.6 La résolution *in extenso* d'un élève 327

Cette partie du travail est constituée de fiches traitant chacune d'une situation-problème. L'objectif poursuivi est d'illustrer les considérations développées dans la partie théorique. Nous ne nous contenterons donc pas de décrire l'exploitation mathématique des situations proposées. Nous formulerons également une série de considérations méthodologiques, mettant en évidence les compétences abordées au travers de ces situations.

11.1. Structure des fiches

Chaque fiche comporte les points suivants :

11.1.1 Enoncé du problème

Il s'agit non seulement d'énoncer le problème mais aussi de le situer dans plusieurs contextes. Nous les énumérons ici séparément, il importe toutefois de remarquer qu'ils ne sont pas nécessairement indépendants les uns des autres.

Le contexte mathématique

On situera ici la situation par rapport à la mathématique elle-même, indépendamment de son exploitation en classe.

Il importe de savoir si la situation étudiée est porteuse de sens, si elle est connectée à des théories importantes sur les plans théorique ou pratique. On sera ainsi amené à évoquer des faits destinés uniquement aux enseignants et non aux élèves.

La situation pourrait aussi n'être qu'un simple « exercice de style ». Ce genre d'activités n'est pas nécessairement à dédaigner, mais il sera difficile de l'intégrer dans la construction structurée d'un cours.

Le contexte scolaire

La situation doit normalement avoir un lien avec la matière dont l'étude est prévue au programme. Il convient donc d'expliciter ces liens.

Le contexte méthodologique

La situation pourrait être exploitée avec des intentions différentes. Deux possibilités existent *a priori* :

- La situation peut être intégrée à une séquence d'apprentissage (voir la description qui en est faite au chapitre 10). Dans ce cas, on peut envisager de la faire intervenir dans l'étape d'intériorisation, dans celle de condensation ou dans celle de réification.
- La situation peut être déconnectée de tout apprentissage d'un nouveau point de matière. Dans ce cas elle constitue un exercice un peu plus original ou plus complexe que les exercices didactiques de simple illustration, sans préoccupation théorique.

On indiquera donc quelles sont *a priori* les exploitations possibles, c'est-à-dire celles auxquelles les auteurs du présent document ont pensé. Ces indications ne peuvent en aucun cas être considérées comme des contraintes pour le professeur qui décide d'utiliser la fiche. Il demeure seul juge de l'emploi du matériel fourni.

11.1.2 Les moyens nécessaires

Nous rassemblons dans cette rubrique les outils tant intellectuels que matériels dont l'élève aura besoin pour résoudre le problème. On mentionnera en particulier

- les prérequis théoriques,
- les moyens de calcul,
- les instruments de dessin, ou plus généralement de représentation graphique,
- les sources éventuelles de documentation,
- ...

11.1.3 Un exemple de résolution du problème

Le but de cette rubrique N'est PAS de fournir aux enseignants LA résolution d'un problème, mais bien de leur en fournir UNE. Il ne peut s'agir que d'un exemple de résolution car certains problèmes peuvent être résolus de façons différentes. De plus, les démarches des élèves sont susceptibles d'être tellement variées et, même inattendues, qu'il serait hasardeux et même nuisible de prétendre ne rencontrer qu'une seule résolution. Dans cette partie, exclusivement réservée aux enseignants, nous utilisons aussi — fatalement — le symbolisme et le type de raisonnement utilisés par des mathématiciens confirmés, alors qu'un élève, non guidé de près par l'enseignant, va vraisemblablement inventer ses propres notations, ses propres démarches. Les résolutions que nous indiquerons ne peuvent donc en aucun cas être considérées comme des modèles pour le travail que l'on espère susciter dans la classe. Elles sont dues à des « experts », non à des débutants.

Cependant la description d'une résolution possible est importante car elle doit permettre à l'enseignant de s'informer sur certaines difficultés de la situation et de décider éventuellement de l'exploiter en l'adaptant aux conditions réelles de ses classes.

Les informations fournies doivent donc être très détaillées. Répétons qu'elles n'ont pas pour but d'imposer à l'enseignant une méthode particulière de résolution, et que dans la classe, ce sont les élèves qui doivent, avec leurs moyens propres, élaborer leur propre méthode, sous la direction de l'enseignant.

11.1.4 Des commentaires sur la situation et son évaluation

Selon la situation considérée, les commentaires peuvent être très divers. Des variantes ou des prolongements peuvent être indiqués. On procédera au moins à une analyse des difficultés rencontrées dans les différentes variantes. Par exemple, sont-elles de type procédural ou de type conceptuel ? Des trucs ou astuces peut-être ingénieux mais pas nécessairement réutilisables ont-ils été mis en œuvre ? Des changements de cadre ou de registre ont-ils été utiles ou nécessaires ?

Les compétences activées lors de l'étude de la situation sont mentionnées dans des notes en marge au fur et à mesure de leur mise en œuvre.

On ne peut passer sous silence la question de l'évaluation, tout en insistant sur le fait que plusieurs points peuvent être évalués : la situation elle-même, les acquis des élèves en terme de connaissances et de comportements. Les difficultés de l'exploitation de la situation pour le professeur devraient également être envisagées. Cette évaluation, ou plus exactement ces évaluations, doivent normalement être effectuées APRÈS expérimentation. Elles doivent permettre de juger si les intentions initiales ont été réalisées. Nous traitons la question de l'évaluation de façon plus détaillée dans la dernière partie de ce travail

11.2. Fiche N° 1 : Un calcul d'aires

11.2.1 L'énoncé

PROBLÈME 11.2.1 *Déterminer l'aire de l'intersection de deux demi-cercles construits sur les bords rectilignes d'un quart de cercle (de diamètre deux fois plus grand), ainsi que l'aire incluse au quart de cercle et non-incluse aux deux demi-cercles.*

Ce problème est extrait de [7].

Volontairement, le dessin est réalisé grossièrement, afin que la position du point intersection des deux demi-cercles pose problème.

11.2.2 Les moyens nécessaires

Les prérequis

- Savoir déterminer l'aire d'un disque et d'un carré.
- Savoir reconnaître une symétrie axiale.

Les instruments de dessin

Au pire, on utilisera la règle et le compas, mais un bon cerveau est suffisant.

11.2.3 Exemple de résolution

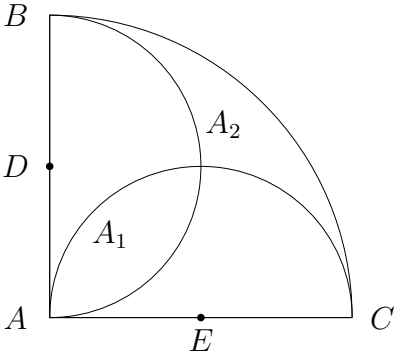
La lecture et l'analyse de l'énoncé doivent déboucher sur :

- La réalisation d'une figure *correcte*.
- La prise de conscience de la symétrie axiale existant dans cette figure, et de ses conséquences (en particulier, le quadrilatère $AEFD$ que nous décrirons plus loin se révélera être un carré).

Nous adopterons les notations suivantes.

Formaliser un énoncé

- Q est le quart de grand disque
- A est son centre
- B et C sont les sommets de Q
- le rayon de Q est noté r
- D_1 et D_2 sont les demi-disques de diamètres respectifs $[A, B]$ et $[A, C]$ et de centres respectifs D et E
- A_1 est la lunule $D_1 \cap D_2$
- A_2 est $Q \backslash (D_1 \cup D_2)$
- S est le secteur angulaire déterminé par l'angle aigu $\widehat{BAE}$
- les aires de chacune des surfaces ci-avant nommées porteront les mêmes noms, mais écrits en minuscules



La bissectrice d de S est un axe de symétrie de Q.

Exploiter les symétries d'une figure

Cette symétrie applique D sur E, donc le disque de centre D et de diamètre $[A, B]$ sur le disque de centre E et de diamètre $[A, C]$. Or, la symétrie envoie les points du premier quadrant sur les points du premier quadrant. Par conséquent, D_1 est envoyé sur D_2.

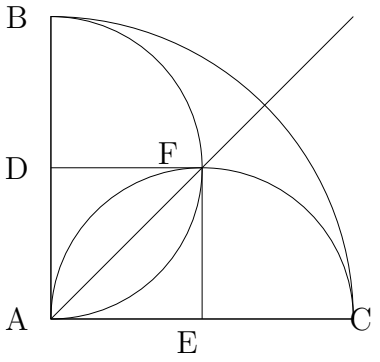
Appelons F l'intersection du bord de D_1 et de d. Ce point est bien entendu fixe pour la symétrie d'axe d, il appartient donc aussi au bord de D_2.

Les bords de D_1 et D_2 se coupent en A et F.

Comme $[D, A]$ et $[D, F]$ sont deux rayons d'un même demi-cercle, le triangle ADF est isocèle, de même que AEF.

De plus, les angles $\widehat{DAF}$ et $\widehat{FAE}$ valent 45°, donc $\widehat{DFA} = \widehat{AFE} = 45°$ et l'angle $\widehat{DFE}$ est droit.

On en arrive donc à la conclusion que le quadrilatère $AEFD$ est un carré. Une justification plus détaillée ne doit pas nécessairement être produite par des élèves.



Comparer des grandeurs

Montrons à présent que les aires a_1 et a_2 sont égales . Remarquons tout d'abord que $d_1 = d_2$ puisque D_1 et D_2 sont chacun la moitié d'un disque de même rayon.

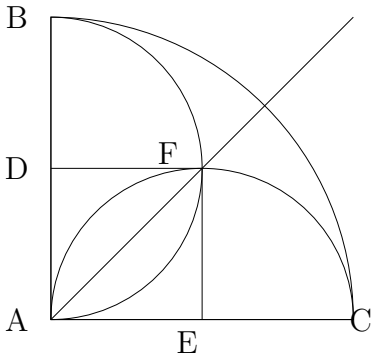
$$q = \frac{\pi.r^2}{4}$$

$$d_1 = d_2 = \frac{\pi.(\frac{r}{2})^2}{2} = \frac{\pi r^2}{8}$$

Nous pouvons aisément exprimer l'aire a_2 en fonction des autres aires. Puisque $Q \backslash A_2 = D_1 \cup D_2$, on a :

$$\begin{aligned} q - a_2 &= d_1 + d_2 - a_1 \\ a_2 &= q - d_1 - d_2 + a_1 \\ &= \frac{\pi r^2}{4} - 2 \times \frac{\pi r^2}{8} + a_1 \\ &= a_1 \end{aligned}$$

Considérons le carré $AEFD$. Son aire vaut $(\frac{r}{2})^2 = \frac{r^2}{4}$



On a donc :

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 &= \frac{d_1}{2} - \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \frac{d_1}{2} \\ &= d_1 - \frac{r^2}{4} \\ &= \frac{\pi.r^2}{8} - \frac{r^2}{4} \\ &= \frac{r^2}{8}.(\pi - 2) \end{aligned}$$

On a ainsi trouvé les deux aires demandées.

11.2.4 Etude d'une expérience menée auprès d'élèves

Nous avons filmé, individuellement ou par groupe de deux, des élèves de dernière année du secondaire provenant de sections auxquelles au moins six heures de mathématiques sont dispensées par semaine. Au cours de ces prises de vues, ils avaient accepté de se soumettre à la résolution d'un problème.

La question posée était celle qui est proposée ci-avant. Les élèves avaient pour consigne de la résoudre en une vingtaine de minutes, sans possibilité d'obtenir un renseignement autre que l'énoncé. Un dessin rapide et imprécis (sur lequel la position du point d'intersection des deux petits demi-cercles n'était pas flagrante) accompagnait cet énoncé.

Afin de mieux saisir nos expériences, nous présentons tout d'abord les faits exhaustifs de l'une d'entre elles. De toutes les expérimentations réalisées, nous avons ensuite réalisé des graphiques, lesquels sont inspirés par les compte-rendus de A.H. Schoenfeld ([130]).

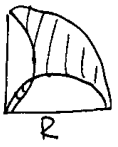
Ces graphiques présentent le temps consacré à chaque *épisode* de la résolution. Les significations que nous donnons (voir chapitre 7) aux divers épisodes ne sont pas *strictement* les mêmes que celles que donnent Schoenfeld, mais elles collent mieux à la présente expérience.

Rappelons que chaque transition entre les épisodes est un moment de remise en question, et que des changements de direction peuvent survenir à cette occasion.

11.2.4.1 Une expérience

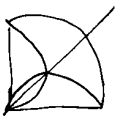
Voici donc le récit de l'expérience ayant abouti au graphique de l'exemple 1, repris ci-dessous. Nous appellerons V l'élève. Celui-ci effectue ses dessins au tableau. Nous les reproduisons ici, aussi fidèlement que possible. Toutefois, nous isolons les fragments utiles de dessin lors des passages où l'entièreté de l'épure est confuse.

1 min 20 s

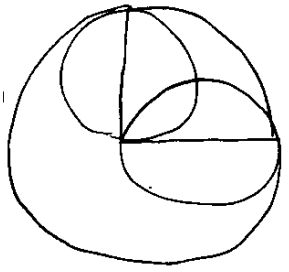


Le dessin est encore incorrect. V nomme R le rayon. L'aire du demi-disque dont le bord rectiligne est horizontal vaut $\frac{R^2}{4}\pi$. Il faudra plus tard enlever cette aire de celle du quart de grand disque.

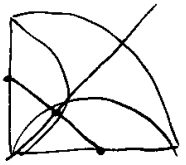
Ici se terminent successivement de très courts épisodes de lecture, d'analyse (aire du demi-disque) et de planification.



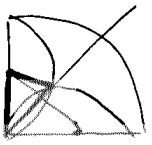
V trace la bissectrice. 2 min



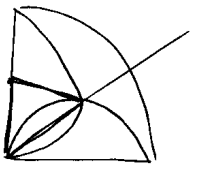
Nouveau dessin, toujours basé sur celui, imprécis, de l'énoncé. 2 min 50 s



V relie les centres des deux demi-cercles et met en évidence leur intersection avec la bissectrice. 3 min 19 s



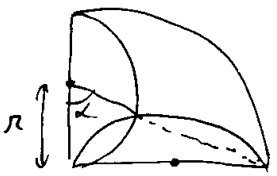
V porte son attention sur un triangle. 3 min 40 s



La demi-aire du « fuseau » sera l'aire du secteur circulaire contenant le triangle moins l'aire du triangle.

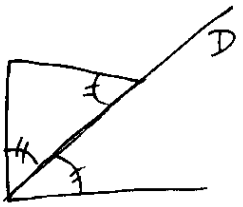
V vient de finir un épisode d'analyse, qui débouche sur un court épisode de planification.

Le triangle est isocèle, car deux de ses côtés sont en fait des rayons du demi-cercle et ont par conséquent la même longueur. 4 min 10 s



V croit que le triangle pourrait peut-être se prolonger en un triangle rectangle (voir dessin). Il essaie alors de calculer l'angle α sachant que $R = 2r$. Cette idée est vite abandonnée. 4 min 40 s

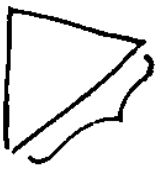
5 min 20 s



Deux des angles du triangle sont égaux et valent 45° puisque la droite D est la bissectrice d'un angle droit. Le troisième angle du triangle doit donc être un angle droit. Cette dernière constatation étonne l'élève et il croit s'être trompé.

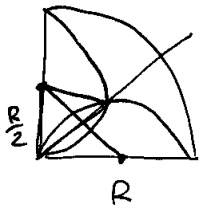
Voilà un épisode d'apparition d'information nouvelle qui prend fin, suivi d'un bref épisode oral de vérification (incomplète). Il faudra encore du temps pour que cette information soit vraiment utilisée. A présent commence une longue exploration.

6 min



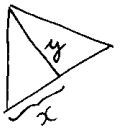
Puis, V veut connaître la longueur de la base du triangle. Il pose $2x$ = base du triangle et écrit

$$\begin{aligned} 4x^2 &= \frac{R^2}{4} + R^2 \\ x^2 &= \frac{5R^2}{16} \\ x &= \frac{\sqrt{5}}{4}R \end{aligned}$$



Il a donc dit que la distance entre les centres des deux demi-cercles est $2x$ aussi, et a appliqué le théorème de Pythagore (il se rend compte, consciemment ou pas, que son losange est un carré). Cependant, il se trompe dans ses notations et écrit R au lieu de $\frac{R}{2}$.

7 min 40 s



V pose y = hauteur du triangle (remarquons qu'il devrait avoir immédiatement $y = x$ puisque c'est ce qu'il avait supposé au départ !).

$$\begin{aligned} y^2 + \frac{5R^2}{16} &= \frac{R^2}{4} \\ y &= \ldots \end{aligned}$$

Arrivé ici, il voit que quelque chose ne va pas et reprend le calcul de x.

$$\begin{aligned} 4x^2 &= \frac{R^2}{4} + \frac{R^2}{4} \\ x^2 &= \frac{R^2}{2} \end{aligned}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}R^2$$

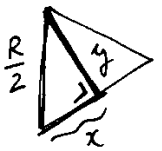
Puis, il corrige à nouveau :

$$x^2 = \frac{R^2}{8}$$
$$x = \frac{R}{\sqrt{8}}$$

Il préfère laisser le $\sqrt{8}$, et reprend le calcul de y.

$$y^2 + \frac{R^2}{8} = \frac{2R^2}{8}$$
$$y^2 = \frac{R^2}{8}$$
$$y = \frac{R}{\sqrt{8}}$$

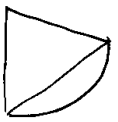
10 min 21 s



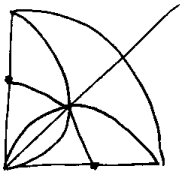
Il estime alors l'aire du triangle à $T = \frac{R^2}{8}$.

Puis, V essaie de trouver l'aire du secteur circulaire correspondant au triangle.

11 min

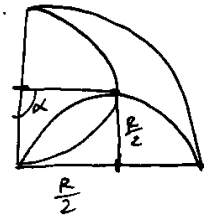


Pour ce faire, il dessine un deuxième triangle. Il réfléchit longuement et dit qu'une fois qu'il aura l'aire du secteur, il aura l'aire du fuseau et trouvera ainsi l'aire du « champignon ». Il décide enfin de faire un nouveau dessin.



Son exploration se termine, il est acculé et doit utiliser enfin son information apparue plus tôt. Il va tout d'abord passer dans un épisode de vérification, puis repartir sur un nouvel épisode d'exploration jusqu'à la fin de sa résolution.

14 min 36 s



Dans le nouveau dessin, les deux triangles forment un carré. L'angle α serait-il un angle droit ? Oui, mais V ne le prouve pas vraiment. Il vérifie ses réponses (les valeurs de x et de y) sur le nouveau dessin.

Il déduit l'aire du secteur $= \frac{R^2}{16}\pi$.

$$\begin{aligned} \text{Aire du fuseau} &= 2\left(\frac{R^2}{16}\pi - \frac{R^2}{8}\right) \\ &= 2\left(\frac{R^2}{8}(\frac{\pi}{2} - 1\right) \\ &= \frac{R^2}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \end{aligned}$$

Donc l'aire du « champignon » est $\frac{R^2}{4}\pi - \frac{R^2}{4}\pi + \frac{R^2}{4}(\frac{\pi}{2} - 1)$. Il ne voit pas tout de suite la simplification. Lorsqu'il s'en rend compte, ça l'étonne et il croit d'abord s'être trompé.

17 min 50 s

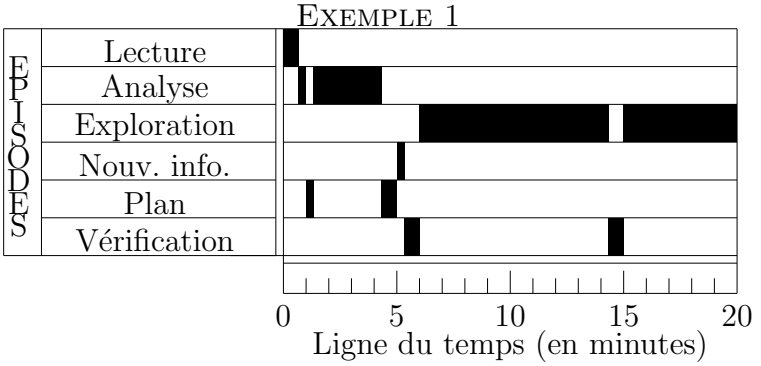
Il en conclut finalement que les deux aires sont égales.

20 min

11.2.4.2 Graphiques et conclusions

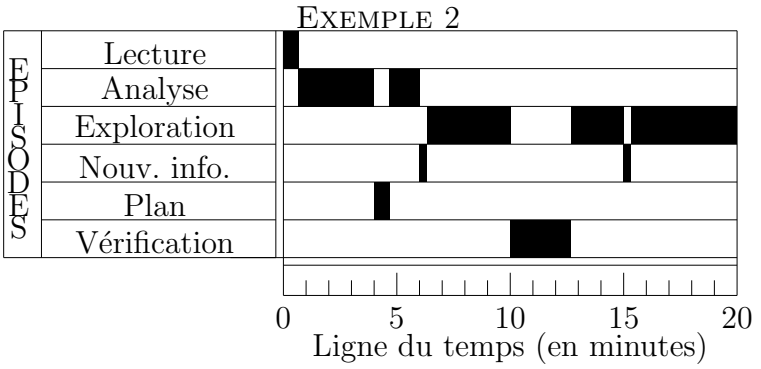
Reportons à présent les divers épisodes décelés dans cette expérience sur un graphique en fonction du temps que chacun d'eux a pris à V.

Exemple 1



Dans la suite, nous présentons et commentons des graphiques de ce type tirés d'expériences avec d'autres élèves. Grâce à ce support, le lecteur pourra apprécier synthétiquement des différences et des ressemblances de comportements au sein d'un même problème.

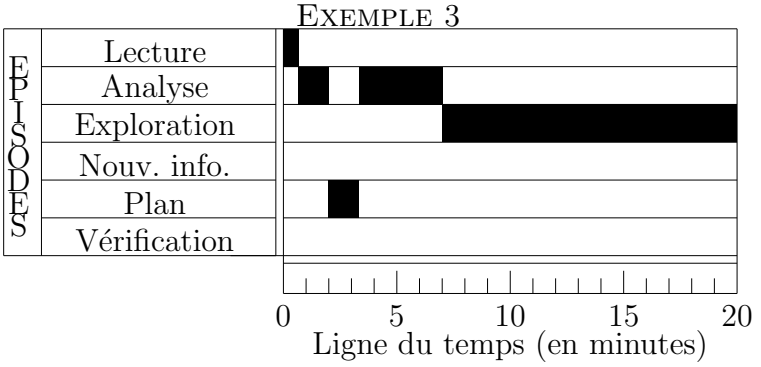
Le graphique de l'exemple 2 résume une expérience très proche de celle que nous venons de relater (de *bons* (1) élèves dans les deux cas).



Les deux premiers exemples reflètent une période *chaotique* après la lecture de l'énoncé. Ce chaos, qui échappe souvent à toute analyse, semble propre aux esprits les plus dégourdis en mathématique. Chez des *experts*, ce chaos peut devenir quasi-instantané et inconscient.

Notons également, dans ces exemples, des épisodes de vérification bien placés (par rapport à la résolution menée par ces élèves). Ces épisodes sont d'autant mieux situés que des raisonnements préalables ont pu se baser sur des faits non vérifiés (rappelons l'emploi par V du théorème de Pythagore pour obtenir un résultat, avant même d'avoir montré que le triangle est bien rectangle).

Ce type d'élèves montre une disposition à pouvoir appliquer diverses stratégies à un même problème, et à pouvoir en changer le cas échéant. L'exemple suivant est une illustration de l'*absence* de cette maîtrise.



Ici, nous ne voyons pas apparaître de nouvelle information, car l'élève pense d'*emblée* à la position du point d'intersection des petits demi-cercles. Cette information n'est donc pas ici un résultat mais une intuition.

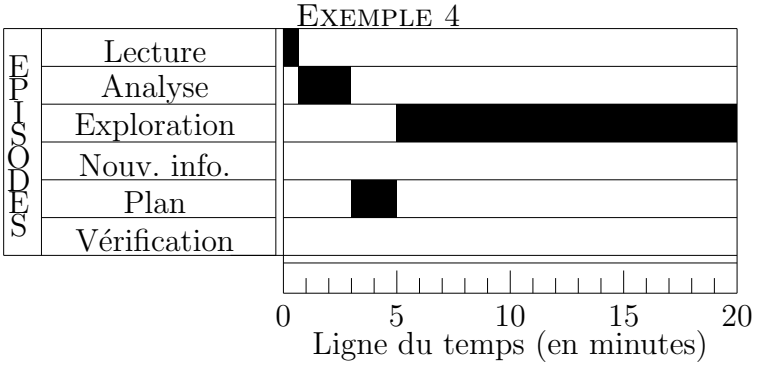
(1) Adjectif employé sans intention péjorative.

Cependant, la façon de penser de l'élève est fortement analytique, et il n'arrive pas à passer à un registre géométrique. La conséquence en est que, malgré la possession de l'information cruciale, l'élève va tenter d'*intégrer* pour connaître la surface a_1 au lieu de raisonner géométriquement. L'élève ne produira d'ailleurs que peu de dessins, alors qu'il y en avait une pléthore dans l'exemple 1. Il y a bien ici une impossibilité de changer de stratégie, l'attaque restant analytique jusqu'au bout et ne permettant pas d'arriver à la solution endéans les vingt minutes.

Il semblerait donc qu'un *mauvais* dessin au départ est troublant au point de perturber encore ceux qui parviennent à le corriger, mais n'ont pas suffisamment de *recul*, de maîtrise des stratégies.

Il serait intéressant de refaire cette expérience en donnant avec l'énoncé un dessin rigoureusement correct, quitte à l'inclure dans un quadrillage.

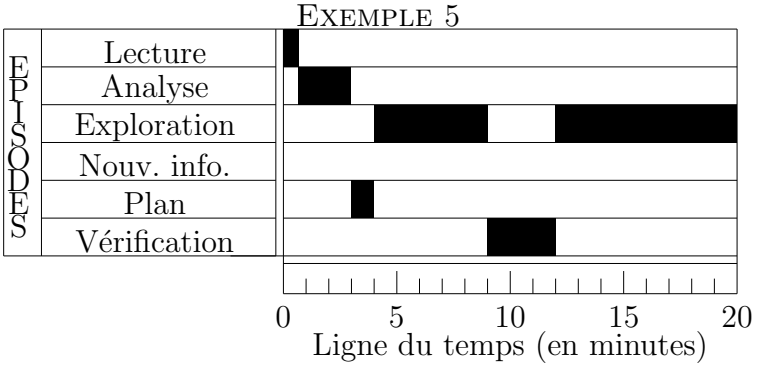
Exemple 4



Voici un schéma *classique*, relevé d'autre part par A.H. Schoenfeld, de la production d'un élève moyen : lecture, éventuellement une très rapide analyse (se limitant à des propriétés immédiates, comme ici l'aire du quart de cercle) précédant ou suivant un épisode d'exploration couvrant le reste du temps disponible.

Dans ce cas, l'élève est parvenu à dégager l'égalité des aires a_1 et a_2, presque par hasard. C'est l'occasion de remarquer que dans cette expérience, les élèves ont *toujours* voulu exprimer a_2 à partir des autres aires. Cette aire est donc manipulée comme un *objet* qui a atteint un stade conceptuel. Cependant, l'aire a_1 a *très souvent* été calculée comme le résultat d'une intégration. On reste au stade procédural. Chez les élèves qui intègrent de la sorte, la notion d'aire n'est pas encore totalement maîtrisée, passant selon les cas d'un stade à l'autre.

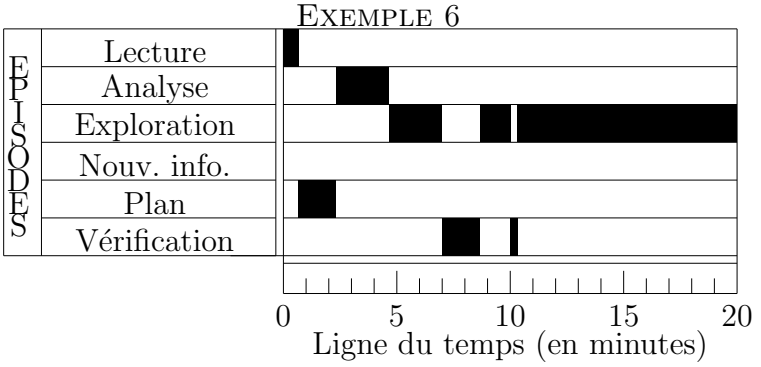
Exemple 5



Cet exemple est proche du précédent, à ceci près que nous voyons apparaître un épisode de vérification coupant l'exploration. Ici, deux élèves sont interrogés simultanément. La forte influence de l'un sur l'autre et le besoin de se mettre d'accord expliquent la présence de cette longue vérification.

Les calculs déjà accomplis sont effectués à nouveau pour tenter de mettre en évidence une erreur encore indéterminée. Ces élèves n'arriveront à aucun résultat. Ils avoueront avoir été gênés par l'absence de valeurs numériques dans l'énoncé. Les calculs formels les rebutent donc, ainsi apparemment que la géométrie, puisqu'à nouveau l'intégration est invoquée.

Exemple 6



Cet exemple est à rapprocher des deux premiers, car c'est le graphique qui peut se rencontrer chez quelqu'un qui ne manque pas d'idées, mais qui à force de vouloir être trop général finit par s'embrouiller.

Il n'est pas clair ici que les aires n'aient pas atteint un stade conceptuel, ni que diverses stratégies puissent être maîtrisées. Mais il est clair que ce type d'élève fonce trop vite dans une méthode d'attaque.

Dans ce cas, l'élève a gardé pour la fin (mais il n'en a pas eu l'occasion) le calcul de la position du point d'intersection des deux petits cercles. Il a déployé une lourde machinerie analytique (intégration) pour calculer a_1. S'il avait décidé de calculer d'emblée la position du point crucial, peut-être aurait-il évité le calcul intégral (qui lui aurait pris bien plus de vingt minutes pour être mené à bien).

Références

[7], [130]

11.3. Fiche N° 2 : La longueur d'une ellipse

11.3.1 L'énoncé

PROBLÈME 11.3.1 *Déterminer la longueur d'une ellipse dont le demi-grand axe mesure 10 cm et dont le demi-petit axe mesure 6 cm.*

Contexte mathématique

Si le calcul de l'aire d'une ellipse est déjà réalisé par ARCHIMÈDE (−287,−212), celui de la longueur de cette ellipse s'avère nettement plus difficile. Il faut en effet attendre NEWTON (1642–1727) pour voir apparaître une formule donnant cette longueur sous la forme d'un développement en série.

Un siècle plus tard, Adrien-Marie LEGENDRE (1752–1833) jette les bases de la théorie des fonctions elliptiques avec Niels ABEL (1802–1829) et Carl JACOBI (1804–1851). La longueur d'une ellipse de demi-grand axe a et d'excentricité e est donnée par *l'intégrale elliptique complète de seconde espèce*

$$a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt$$

A. M. Legendre

Signalons aussi une formule approchée, due à Srinivasa RAMANUJAN (1887–1920), où a et b sont les mesures des deux demi-axes de l'ellipse :

$$\pi\left(3(a+b)-\sqrt{(a+3b)(3a+b)}\right)$$

La différence de difficulté entre le calcul de la longueur d'une ellipse et celui de son aire est d'origine conceptuelle : la notion de longueur d'une courbe plane n'est pas une notion affine, alors que la notion d'aire d'une partie du plan en est une. De façon précise, l'aire de l'image d'une partie P du plan par une transformation linéaire f de déterminant d est égale au produit de l'aire de P par le réel positif $|d|$. On trouve alors l'aire de l'ellipse de demi-axes a et b en la considérant comme l'image d'un disque de rayon a par un étirement de déterminant $\frac{b}{a}$.

Contexte scolaire

La détermination de la longueur d'une ellipse fait intervenir différents points des programmes de cinquième et sixième années des sections à 6 périodes de mathématique par semaine. Citons les plus importants : notions de conique, de corde et de tangente, de dérivée, de limite, d'intégrale. Elle permet aussi le retour sur la question de la longueur d'un cercle ou de l'aire d'un disque.

Par ailleurs, une caractéristique des intégrales elliptiques est qu'il est impossible d'en donner une expression analytique élémentaire. Seul un calcul numérique approché peut donc être réalisé, ce qui permet de rencontrer un autre point du programme des classes mentionnées et de provoquer l'emploi de moyens de calcul modernes.

Contexte méthodologique

Le traitement que nous présentons ci-dessous ne suppose pas connue la notion d'intégrale. La situation pourrait donc être exploitée lors de la séquence d'apprentissage de ce concept. Ses aspects techniques semblent toutefois un peu trop complexes pour qu'il soit réaliste de vouloir l'utiliser dans la phase d'intériorisation. C'est plutôt au cours de la phase de condensation que nous lui voyons une place.

La situation pourrait aussi servir d'application du concept d'intégrale. Le traitement devrait alors être différent : on partirait de l'intégrale et — devant l'impossibilité de la calculer analytiquement — on en chercherait des approximations par des sommes. Le problème consisterait alors à discrétiser l'intégrale de façon efficace.

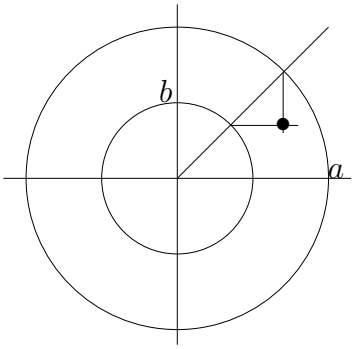
11.3.2 Les moyens nécessaires

Les prérequis

- La notion générale d'ellipse.
- Les équations paramétriques d'une ellipse de demi-axes a et b :

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

- La construction d'une ellipse correspondant à ces équations :



- Les formules trigonométriques d'addition et les formules de Simpson.
- La formule donnant la distance de deux points en fonction de leurs coordonnées.
- La méthode d'approximation de la longueur d'un cercle par inscription de polygones réguliers.
- Éventuellement : une maîtrise de la programmation.

Les moyens de calcul

On pourra être amené à utiliser des machines à calculer programmables ou des ordinateurs. Éventuellement, l'enseignant peut fournir les données et les résultats des calculs.

Les instruments de dessin

Ils sont classiques : règle et compas.

11.3.3 Exemple de résolution

Rappelons d'abord les remarques que nous avons effectuées au paragraphe 11.1.3 : la résolution que nous présentons ci-dessous n'a pas pour but de « standardiser » le travail dans les classes. De plus, la rédaction que nous faisons n'étant PAS destinée à être lue par les élèves, nous n'avons fait aucun effort pour qu'elle puisse être comprise par eux. Si d'aventure un collègue désirait traiter le problème de la longueur d'une ellipse dans une classe, il devrait bien évidemment donner à la résolution du problème une forme très différente de la nôtre.

Les élèves ayant beaucoup plus d'imagination que nous, nous n'allons pas non plus essayer de « reproduire » les détails de ce qu'ils pourraient faire, mais prendre du recul et centrer notre réflexion sur la *méthode*. Par exemple, bien que l'énoncé du problème nous invite à utiliser d'emblée des valeurs numériques pour les demi-axes de l'ellipse, nous conserverons le plus longtemps possible ces demi-axes à l'état de variables littérales, notées a et b ($a \geqslant b$). Nous pourrons ainsi vérifier, en supposant $a = b$, que nos formules contiennent celles relatives au cercle comme cas particulier.

Discrétiser

L'idée de la résolution est d'utiliser le schéma qui a servi à déterminer la longueur d'un cercle. Nous allons donc inscrire à l'ellipse considérée des polygones (non réguliers) ayant successivement 4, 8, 16, ... côtés.

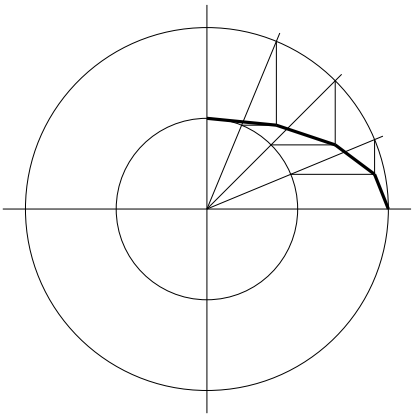
Utiliser des équations paramétriques de l'ellipse

Plus précisément, nous considérons l'ellipse d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

Nous y inscrivons un quadrilatère en joignant les points correspondant aux valeurs $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ et $\frac{3\pi}{2}$ du paramètre t. Ensuite nous considérons l'octogone déterminé en prenant pour t les valeurs $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \ldots, \frac{7\pi}{4}$.

Construire une ellipse



D'une façon générale , un polygone à 2^n côtés inscrit à l'ellipse est obtenu en subdivisant l'intervalle $[0, 2\pi]$ en 2^n parties de longueur $\frac{\pi}{2^{n-1}}$. Nous poserons donc

Algébriser

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{\pi}{2^{n-1}}, \quad \dots \quad t_k = \frac{k\pi}{2^{n-1}}, \quad \dots t_{2^n-1} = \frac{(2^n-1)\pi}{2^{n-1}}, \quad t_{2^n} = 2\pi$$

puis

$$\begin{cases} x_k = a\cos t_k \\ y_k = b\sin t_k \end{cases} \qquad (0 \leqslant k \leqslant 2^n)$$

et nous noterons P_k le point de coordonnées (x_k, y_k).

La longueur du côté $[P_k, P_{k+1}]$ est donnée par la formule

Utiliser des acquis des années antérieures

$$|P_kP_{k+1}|^2 = a^2(\cos t_{k+1} - \cos t_k)^2 + b^2(\sin t_{k+1} - \sin t_k)^2$$

Appliquant les formules de Simpson, on obtient

$$\begin{aligned} |P_kP_{k+1}|^2 &= 4a^2\sin^2\frac{t_{k+1}-t_k}{2}\sin^2\frac{t_{k+1}+t_k}{2} + 4b^2\sin^2\frac{t_{k+1}-t_k}{2}\cos^2\frac{t_{k+1}+t_k}{2} \\ &= 4\sin^2\frac{\pi}{2^n}\cdot\left(a^2\sin^2\frac{t_{k+1}+t_k}{2} + b^2\cos^2\frac{t_{k+1}+t_k}{2}\right) \\ &= 4\sin^2\frac{\pi}{2^n}\cdot\left(a^2 - (a^2-b^2)\cos^2\frac{t_{k+1}+t_k}{2}\right) \end{aligned}$$

Introduisant l'excentricité e de l'ellipse, donnée par la formule

$$e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}},$$

nous obtenons

$$|P_kP_{k+1}|^2 = 4a^2\sin^2\frac{\pi}{2^n}\cdot\left(1 - e^2\cos^2\frac{t_{k+1}+t_k}{2}\right)$$

Et par conséquent, la longueur du polygone à 2^n cotés, inscrit à l'ellipse de demi-axes a et b vaut

Utiliser le signe sommatoire

$$L_n = 2a\left|\sin\frac{\pi}{2^n}\right|\sum_{k=0}^{2^n-1}\sqrt{1 - e^2\cos^2\frac{t_{k+1}+t_k}{2}}$$

Pour trouver la longueur de l'ellipse, ou tout au moins une approximation de cette valeur, il reste à calculer la somme précédente pour des valeurs de n de plus en plus grandes. Ceci pose un problème d'organisation des calculs, puis un problème de programmation.

Déterminer des approximations

La première chose à faire est de tenir compte des symétries de l'ellipse en limitant la sommation à $k = 2^{n-2} - 1$ puis à multiplier le résultat par 4. La partie du polygone constituée des 2^{n-2} premiers côtés est en effet inscrite dans le quart de l'ellipse située dans le premier quadrant. Ceci a aussi l'avantage supplémentaire que toutes les valeurs considérées des fonctions sin et cos sont positives.

Tirer profit des symétries de l'ellipse

Puisque $\frac{t_k+t_{k+1}}{2} = \frac{2k+1}{2^n}\pi$, il s'agit de calculer

$$L_n = 8a \sin\frac{\pi}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \frac{2k+1}{2^n}\pi}$$

Commençons par déterminer les valeurs de $\sin\frac{\pi}{2^n}$ et $\cos\frac{\pi}{2^n}$ pour $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$:

Numériser

Pour $n = 1$, on a $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ et $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Ensuite, exploitant la formule $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, on remplit la deuxième colonne du tableau suivant. La formule $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ permet d'en déduire les valeurs mentionnées dans la troisième colonne :

x	$\cos x$	$\sin x$
$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{\pi}{2^2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{2^3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{2^4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
$\frac{\pi}{2^5}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Pour une valeur fixée de n, nous avons aussi besoin des valeurs de $\cos\frac{2k+1}{2^n}\pi$, pour $k = 0, \ldots, 2^{n-2} - 1$. La différence entre deux valeurs consécutives de $\frac{2k+1}{2^n}\pi$ vaut $\frac{2\pi}{2^n} = \frac{\pi}{2^{n-1}}$. Le plus simple est de calculer $\cos\frac{2k+1}{2^n}\pi$ et $\sin\frac{2k+1}{2^n}\pi$ à partir des valeurs de $\cos\frac{2k-1}{2^n}\pi$ et $\sin\frac{2k-1}{2^n}\pi$. C'est l'occasion de pratiquer un peu de calcul matriciel :

Utiliser des acquis des années antérieures

$$\begin{pmatrix} \sin\frac{2k+1}{2^n}\pi \\ \cos\frac{2k+1}{2^n}\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2^{n-1}} & \sin\frac{\pi}{2^{n-1}} \\ -\sin\frac{\pi}{2^{n-1}} & \cos\frac{\pi}{2^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\frac{2k-1}{2^n}\pi \\ \cos\frac{2k-1}{2^n}\pi \end{pmatrix}$$

Construire un algorithme

Avec les éléments qui précèdent, nous pouvons écrire un programme informatique, rédigé ici en « langage d'algorithme » . Il doit bien entendu être traduit dans le langage de programmation correspondant à la machine utilisée. La colonne de droite contient les commentaires explicatifs.

Introduction des données.

`1. Lire (a,b)`	a et b sont les mesures des deux demi-axes de l'ellipse.
`2. Lire (N)`	N est le nombre d'itérations à effectuer.

Initialisation

`3. e2 ← 1-(b*b)/(a*a)`	Calcul du carré de l'excentricité.

`4. c0 ← 0, s0 ← 1`	c0 et s0 contiendront les valeurs de $\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}$ et $\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}$. Au départ, $n = 2$.
	Boucle calculant la longueur d'un polygone inscrit
`5. Pour n de 2 à N, faire`	Démarrage
`5.1 c1 ← sqrt ((1+c0)/2), s1 ← sqrt ((1-c0)/2)`	c1 et s1 contiennent les valeurs de $\cos\frac{\pi}{2^n}$ et $\sin\frac{\pi}{2^n}$.
	Initialisation de la boucle de calcul de $\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1}\sqrt{1-e^2\cos^2\frac{2k+1}{2^n}\pi}$
`5.2 S ← 0`	S contiendra la valeur de la somme
`5.3 c2 ← c1, s2 ← s1`	c2 et s2 contiendront les valeurs de $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}$ et $\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n}$. Au départ, $k = 0$.
`5.4 Pour k de 0 à 2↑(n-2)-1, faire`	Démarrage de la boucle de calcul de S
`5.4.1 S ← S + sqrt(1-e2*c2*c2)`	La valeur de S augmente du terme correspondant à la valeur de k

`5.4.2 ss ← s2`
`s2 ← c0*ss + s0*c2`
`c2 ← -s0*ss + c0*c2`
	Mise en mémoire temporaire de $s2$ et calcul des valeurs de $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}$ et $\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n}$ correspondant à $k+1$.

`5.4.3 Fin Faire`	Incrémentation de k et retour au début de la boucle.
`5.5 L ← 8*a*s1*S`	Calcul de la longueur du polygone à 2^n côtés.
`5.6 Écrire (L)`	Affichage de la longueur L de ce polygone.
`5.7 c0 ← sqrt((1+c0)/2)` `s0 ← sqrt(1-c0*c0)`	Calcul des valeurs de $\cos\frac{\pi}{2^n}$ et $\sin\frac{\pi}{2^n}$.

`5.8 Fin Faire`	Incrémentation de n et retour au début de la boucle.
`6. Fin`	Fin du programme

Numériser

Exécuté avec les données indiquées dans l'énoncé du problème ($a = 10$, $b = 6$), ce programme a fourni les résultats suivants, affichés ici avec six décimales :

Nombre de côtés	Longueur du polygone
4	46,647 615
8	49,766 482
16	50,726 600
32	50,972 025
64	51,033 497
128	51,048 872
256	51,052 716
512	51,053 677
1024	51,053 918
2048	51,053 978
⋮	⋮

11.3.4 Commentaires

1. La résolution que nous venons de détailler se termine avec la réponse à la question posée : on obtient une approximation de la longueur de l'ellipse. Nous ne demandons pas à l'élève d'expliciter l'intégrale sous-jacente. C'est à l'enseignant de reprendre le contrôle de la classe et de dégager ce concept du travail réalisé.

   Si la situation a été traitée lors de la phase de condensation de la séquence d'apprentissage de l'intégrale, il n'est plus nécessaire d'expliquer que l'intégrale est une limite de sommes de produits, mais il convient de faire apparaître quelle est la fonction que l'on intègre, ce qui n'est pas toujours si simple.

   Repartons de la formule de calcul de la longueur L_n du polygone à 2^n côtés inscrit à l'ellipse :

$$L_n = 8a \sin\frac{\pi}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \frac{2k+1}{2^n}\pi}$$

   Nous devons lui donner l'aspect d'une « somme de Riemann » : $\sum_{k=0}^{N} \Delta t_k \cdot f(t'_k)$ où $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ est la longueur du k^{e} intervalle de subdivision et où t'_k est un point de cet intervalle.

   Faire le lien avec une autre matière

   Dans la formule ci-dessus, on constate d'abord que $N = 2^{n-2} - 1$: l'intervalle d'intégration est découpé en 2^{n-2} sous-intervalles $[t_k, t_{k+1}]$, avec $t_k = \frac{k\pi}{2^{n-1}}$. La fonction à intégrer est la fonction $\sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}$, les nombres t'_k sont les points milieux des intervalles $[t_k, t_{k+1}]$: $t'_k = \frac{t_k + t_{k+1}}{2} = \frac{2k+1}{2^n}\pi$.

   Mais la largeur $\Delta t_k = \frac{\pi}{2^{n-1}}$ de l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ n'apparaît pas dans l'expression de L_n. En lieu et place, nous trouvons l'expression $\sin\frac{\pi}{2^n}$. Mais lorsque n tend vers l'infini, $\frac{\pi}{2^n}$ tend vers 0. On pourra alors exploiter la formule $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. On écrira donc

$$\sin\frac{\pi}{2^n} = \frac{\pi}{2^n} \frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}$$

   La longueur de l'ellipse est donc

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} L_n \\ &= \lim_{n\to\infty} 8a \sin\frac{\pi}{2^n} \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \frac{2k+1}{2^n}\pi} \\ &= \lim_{n\to\infty} 8a \frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} \frac{\pi}{2^n} \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \frac{2k+1}{2^n}\pi} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 8a\frac{\pi}{2^n}\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1}\sqrt{1-e^2\cos^2\frac{2k+1}{2^n}\pi}$$
$$= \lim_{n\to\infty} 4a\frac{\pi}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1}\sqrt{1-e^2\cos^2\frac{2k+1}{2^n}\pi}$$

Nous avons cette fois obtenu la forme classique des sommes de Riemann. Ainsi

$$L = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt$$

2. La résolution comporte deux phases. La première se termine avec l'établissement de la formule de L_n. Il reste alors à programmer le calcul numérique. Cette phase n'est réalisable que si les élèves ont déjà une certaine maîtrise de la programmation. Si ce n'est pas le cas, l'enseignant pourrait ne demander aux élèves d'appliquer la formule que pour des petites valeurs de n (2 ou 3, ce qui correspond aux polygones à 4 et 8 côtés), et donner lui-même les résultats des calculs pour les valeurs suivantes, afin de mettre en évidence la convergence de la suite des valeurs approchées.
3. Une autre possibilité, une fois établie la formule donnant la valeur de L_n serait non d'en calculer des valeurs particulières, mais de l'utiliser pour déterminer des encadrements de la longueur de l'ellipse . Partant de la relation $\sqrt{1-x} \leqslant 1-\frac{x}{2}$, nous obtenons

Réaliser des encadrements

$$\begin{aligned}\sqrt{1-e^2\cos^2\frac{2k+1}{2^n}\pi} &\leqslant 1-\frac{1}{2}e^2\cos^2\frac{2k+1}{2^n}\pi\\ &\leqslant 1-\frac{1}{2}e^2\left(\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2k+1}{2^{n-1}}\pi\right)\right)\\ &\leqslant 1-\frac{1}{4}e^2\end{aligned}$$

Dès lors

$$L_n \leqslant 8a\sin\frac{\pi}{2^n}2^{n-2}\left(1-\frac{1}{4}e^2\right)$$

Par passage à la limite, on obtient alors

$$L \leqslant 2a\pi\left(1-\frac{1}{4}e^2\right)$$

De même, pour tout k, on a $\sqrt{1-e^2\cos^2\frac{2k+1}{2^n}\pi} \geqslant \sqrt{1-e^2}$. Par conséquent

$$L_n \geqslant 8a\sin\frac{\pi}{2^n}2^{n-2}\sqrt{1-e^2}$$

et par passage à la limite :

$$L \geqslant 2a\pi\sqrt{1-e^2}$$

Un intérêt de ce calcul d'encadrements est précisément la manipulation d'inégalités.

4. Les équations paramétriques de l'ellipse $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ peuvent être interprétées comme décrivant le mouvement d'un point mobile sur l'ellipse. Le paramètre t est alors le *temps*. L'expression $\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = a\sqrt{1 - e^2\cos^2 t}$ n'est autre que la longueur du vecteur dérivé, c'est-à-dire du vecteur vitesse. Les produits $a\Delta t_k\sqrt{1 - e^2\cos^2\frac{t_k+t_{k+1}}{2}}$ qui apparaissent dans les sommes de Riemann sont des produits d'un intervalle de temps par des vitesses, donc représentent bien des longueurs.
5. La formule obtenue pour la longueur d'une ellipse est aussi un cas particulier de la formule générale qui donne la longueur d'une courbe définie par des équations paramétriques $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(a \leqslant t \leqslant b)$:

$$L = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$$

6. Pour résoudre le problème, l'élève doit d'abord penser à inscrire un polygone dans l'ellipse et à augmenter indéfiniment le nombre de côtés de ce polygone. Ayant rencontré cette démarche lors du calcul de la longueur d'un cercle (détermination du nombre π), il doit effectuer un transfert. Toutefois, vu que c'est en 4e année que la détermination de la longueur d'un arc aura été rencontrée d'après les programmes actuels, il est à craindre que le transfert soit particulièrement difficile à réaliser. Il serait donc utile que le cas du cercle (et donc du calcul de π) soit revu à l'occasion de l'apprentissage du concept de limite d'une suite (en 5e année). effectuer un transfert
7. Il ne suffit pas que l'élève pense à inscrire des polygones dans l'ellipse. Encore faut-il que ces polygones soient bien choisis pour que les calculs ne soient pas inextricables. L'utilisation de la représentation paramétrique de l'ellipse permet d'orienter l'élève vers un choix acceptable. Le travail en coordonnées cartésiennes ne paraît pas présenter les mêmes avantages. Il ne semblerait pas en tous cas judicieux de placer les sommets des polygones aux points d'intersection avec l'ellipse des droites qui font des angles t_k avec l'axe des abscisses.
8. Une fois franchis les deux obstacles qui viennent d'être mentionnés, les difficultés restantes sont essentiellement techniques. Les élèves peu habitués à la manipulation d'expressions formelles devraient néanmoins arriver à certains résultats en se limitant à des petites valeurs particulières du nombre de côtés des polygones.
9. On remarque aussi qu'à tout moment, la démarche peut être contrôlée en vérifiant que la formule obtenue est correcte dans le cas du cercle, c'est-à-dire dans le cas $a = b$. Vérifier

10. Outre la capacité à réaliser un transfert, les plus importantes des compétences activées au cours du travail relèvent de la *discrétisation* (remplacer une courbe par un polygone), de l'*approximation* (évaluer une longueur par un passage à la limite) et de l'*algébrisation* (convertir un problème de géométrie synthétique en un problème de géométrie analytique, voire d'analyse).

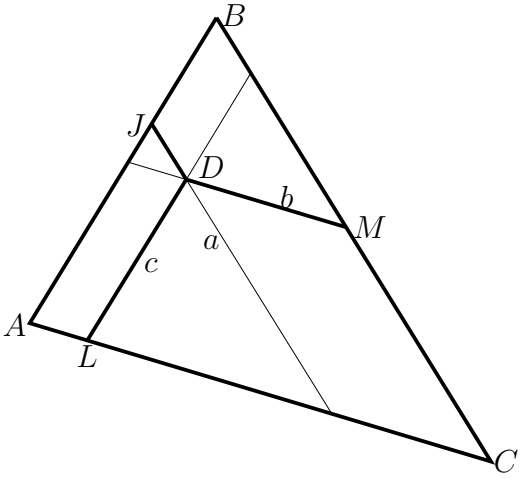
    A des niveaux plus bas dans la hiérarchie des compétences, on trouve la manipulation des formules trigonométriques ainsi que des expressions formelles.

    L'aptitude à *numériser* (calculer des valeurs numériques d'une expression littérale), qui implique la maîtrise des instruments de calcul, doit également être signalée.

11.4. Fiche N° 3 : Un problème d'aire

11.4.1 L'énoncé

Problème 11.4.1 *Par un point D intérieur à un triangle ABC, on trace les trois droites a, b et c, parallèles aux côtés BC, CA, AB. On note J, M, L les points d'intersection $a \cap AB$, $b \cap BC$ et $c \cap CA$. Déterminer une position de D pour laquelle les trois trapèzes $JDLA$, $MDJB$ et $LDMC$ ont même aire.*



Ce problème est extrait de [41].

Contexte mathématique

Il n'est pas nécessaire de disserter longuement sur l'importance de la notion d'aire. Nous sommes ici en présence de figures élémentaires, utilisées pour construire des découpages de figures (légèrement) plus complexes, ce qui est un processus mathématique tout aussi fondamental.

Contexte scolaire

Sous la forme donnée dans l'énoncé, le problème est accessible dès la troisième année du secondaire. Des variantes obtenues en considérant des points D situés à l'extérieur du triangle ou en remplaçant celui-ci par un polygone quelconque pourraient être traitées au cours des années ultérieures, y compris jusqu'en rhétorique.

Ces variantes peuvent faire intervenir le calcul barycentrique, des coniques, la notion d'aire orientée, le produit vectoriel. Elles peuvent éventuellement être intégrées à la préparation du calcul intégral. Nous reparlerons de l'une de ces variantes dans la suite.

Contexte méthodologique

S'il est limité à l'énoncé figurant ci-dessus, le problème ne dépasse pas le niveau de l'application de résultats connus, en particulier le théorème de Thalès.

11.4.2 Les moyens nécessaires

Les prérequis

- Le barycentre d'un triangle est situé aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir du sommet.
- Le théorème de Thalès, les propriétés élémentaires des parallélogrammes.

Les instruments de dessin

Les instruments usuels suffisent. Du « papier triangulé » constituerait une aide intéressante.

Les moyens informatiques

Cabri-Géomètre (ou tout autre logiciel équivalent) facilitera une exploration de la situation.

11.4.3 Exemple de résolution

Il nous semble important de remarquer préalablement l'existence de deux énoncés jumeaux du problème. En effet, le lecteur aura compris que l'on peut considérer un autre découpage du triangle selon les traits plus fins (voir la figure). Dans la suite, nous verrons que le résultat du problème *posé dans l'énoncé* est indépendant de ce choix.

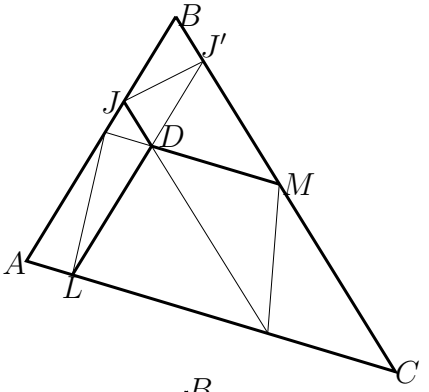
Pour comparer les aires des trapèzes $JDLA$, $LDMC$ et $JBMD$, une idée est nécessaire. Elle peut résulter d'une exploration de la situation à l'aide d'un logiciel tel que Cabri-Géomètre.

L'idée viendra d'autant plus facilement qu'on découpera chaque trapèze en trois triangles, ce qui n'est pas une démarche artificielle lorsqu'on veut comparer des aires.

Comparer des aires par découpage

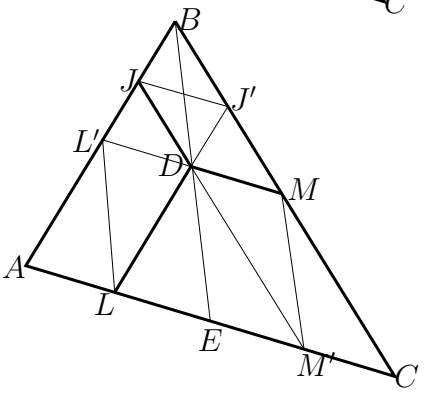
En déplaçant le point D, on remarquera, et on justifiera, que les trois triangles constituant le trapèze $JBMD$ sont isométriques lorsque la droite JJ' est parallèle au côté AC.

Explorer, Justifier



Par la même occasion, on constate que le triangle JDL' est également isométrique à BJJ', $JJ'D$ et $J'MD$. On en tire une première conclusion :

*Les trapèzes $JBMD$ et $JDLA$ ont même aire si JJ' est parallèle à AC **et** LL' est parallèle à BC.*



Et par conséquent :

Les trois trapèzes $BMDJ$, $JDLA$ et $DMCL$ ont même aire si JJ' est parallèle à AC, LL' est parallèle à BC et MM' est parallèle à AB.

Généraliser

Mais si $JJ' \,//\, AC$, alors $|L'D| = |DM|$ (considérer les parallélogrammes $JJ'DL'$ et $JJ'MD$). Réciproquement, si $|L'D| = |DM|$, alors $JJ' \,//\, AC$. (Si D est le milieu de $[L'M]$, alors J est le milieu de $[BL']$, J' est le milieu de $[BM]$ et JJ' est parallèle à $L'M$.)

Raisonner déductivement

Ainsi

$$JJ' \,//\, AC \Leftrightarrow BD \text{ est une médiane de } BL'M$$

Or

$$BD \text{ est une médiane de } BL'M \Leftrightarrow BD \text{ est une médiane de } ABC$$

En effet, en notant E le point d'intersection de BD et AC, on a via le théorème de Thalès :

Exploiter un acquis

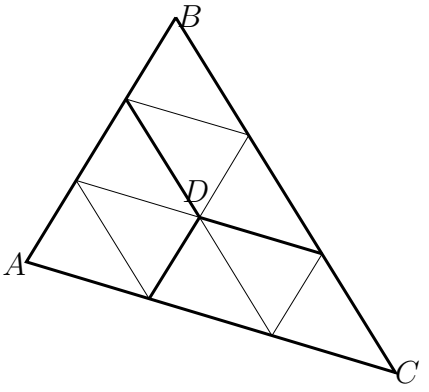
$$\frac{|L'D|}{|AE|} = \frac{|BD|}{|BE|} = \frac{|DM|}{|EC|}$$

D'où

$$|AE| = |EC| \Leftrightarrow |L'D| = |DM|$$

On a prouvé que

> *Les trois trapèzes ont même aire si AD, BD et CD sont les trois médianes du triangle ABC, c'est à dire si D est le barycentre de ce triangle.*



11.4.4 Commentaires

1. Il n'est pas difficile de vérifier que le barycentre D est le seul point *situé à l'intérieur du triangle* qui détermine ainsi trois trapèzes de même aire, en l'occurrence celle de trois petits triangles. Considérons en effet une autre position D' de D. Elle est fatalement située soit au bord soit à l'intérieur de l'un des trois trapèzes déterminés par D. L'un (au moins) des trois trapèzes déterminés par D' aura donc une aire inférieure à celle de trois petits triangles et comme ces trois trapèzes doivent avoir la même aire, leur aire totale ne saurait être celle du triangle ABC, soit celle de neuf petits triangles.
2. Le raisonnement qui précède est basé sur le fait que la somme des aires des trois trapèzes vaut neuf petits triangles et est donc constante lorsque le point D se déplace à l'intérieur de ABC.
3. Nous avons fait remarquer au départ qu'il y a deux façons de découper le triangle ABC en trois trapèzes. Il est clair que le barycentre D est la solution du problème posé quel que soit le découpage choisi.
4. Tel qu'il a été énoncé, le problème posé peut être traité avec des élèves dès que ceux-ci maîtrisent les propriétés élémentaires de géométrie plane. Il n'en va pas de même du prolongement qui suit. Celui-ci fait appel aux techniques et méthodes de la géométrie analytique et de l'algèbre linéaire. C'est donc avec des élèves du 3e degré que la situation pourrait être étudiée. Elle est l'occasion de parler d'aire orientée. Ce concept une fois rencontré, la seule difficulté est d'établir la formule donnant l'aire orientée d'un quadrilatère. La résolution du problème posé est alors régulière, ce qui nous amène ci-dessous à la présenter sous forme expositive.

11.4.5 Prolongeons le problème

Que se passe-t-il lorsque le point D *sort du triangle* ?

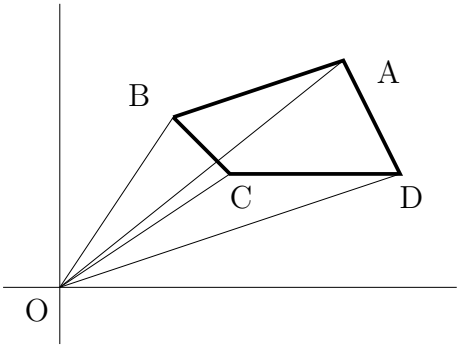
Nous allons chercher des solutions *extérieures au triangle*. Nous nous baserons sur une formule remarquable qui permet de calculer l'aire d'un quadrilatère à partir des coordonnées de ses sommets : si $A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} x_D \\ y_D \end{pmatrix}$, alors l'aire du quadrilatère $ABCD$ est donnée par la formule :

$$\frac{1}{2}\left((x_A y_B - x_B y_A) + (x_B y_C - x_C y_B) + (x_C y_D - x_D y_C) + (x_D y_A - x_A y_D)\right)$$

Cette formule est valable pour autant que l'unité d'aire soit celle du parallélogramme construit sur les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Elle est classique. Dans le souci d'être complet, nous la justifierons au paragraphe suivant. Ensuite, nous la mettrons en œuvre.

11.4.5.1 Des aires orientées

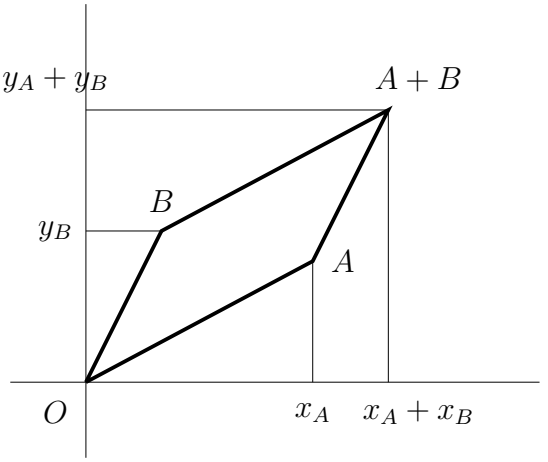
Dessinons un quadrilatère quelconque et joignons chaque sommet à l'origine, faisant ainsi apparaître quatre triangles dont l'origine est un sommet commun :



L'aire du quadrilatère $ABCD$ s'obtient en additionnant les aires des triangles OAB et ODA et en soustrayant de la somme obtenue les aires des triangles OCD et OBC.

Nous voyons apparaître ici l'utilité d'introduire la notion d'aire *orientée* : une orientation du plan (celle du cercle trigonométrique) étant choisie et baptisée « positive », le sens de parcours d'un polygone convexe détermine le signe de son aire. Des quatre triangles OAB, OBC, OCD et ODA, deux sont parcourus dans le sens positif, les deux autres dans le sens négatif. En utilisant des aires orientées, l'aire du quadrilatère $ABCD$ est la *somme* des aires des triangles OAB, OBC, OCD et ODA. Il nous reste à exprimer l'aire orientée d'un triangle, par exemple OAB, en fonction des coordonnées de ses sommets.

Complétons OAB en un parallélogramme :



L'aire du parallélogramme $OA(A + B)B$ est celle du rectangle extérieur, $(x_A + x_B)(y_A + y_B)$, amputée de celles de deux triangles, $\frac{1}{2}x_Ay_A$ et $\frac{1}{2}x_By_B$ et de deux trapèzes, $\frac{1}{2}x_B(y_A + (y_A + y_B))$ et $\frac{1}{2}y_A(x_B + (x_A + x_B))$.

Développant les calculs, on obtient pour l'aire du parallélogramme $x_Ay_B - x_By_A$. On remarque qu'il s'agit bien d'une aire orientée : en permutant les points A et B, l'aire change de signe. On retrouve bien évidemment une expression liée au produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

L'aire du triangle OAB est la moitié de cette expression et l'aire du quadrilatère $ABCD$ est bien donnée par la formule indiquée plus haut. Cette formule est valable dans tous les cas, même celui des quadrilatères croisés.

11.4.5.2 Retour au problème

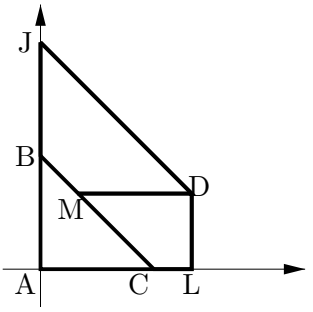
A présent, nous pouvons nous attaquer à la recherche des solutions externes de notre problème de départ. Cette fois, nous devons considérer les deux « découpages » possibles du triangle ABC.

Plaçons-nous dans le cadre de la géométrie analytique, et désignons par D le point de coordonnées encore inconnues (x, y), sommet commun aux trois trapèzes.

Nous allons considérer d'abord le cas particulier où le triangle ABC est isocèle et rectangle en A. Nous discuterons ensuite la façon d'étendre les résultats au cas général.

Prenons le point A comme origine et graduons les axes de façon à avoir $B = \binom{0}{3}$ et $C = \binom{3}{0}$. L'aire du triangle ABC vaut donc $\frac{9}{2}$, l'unité d'aire étant maintenant celle de deux des petits triangles de jadis. Notons aussi que $\binom{1}{1}$ est le barycentre de ABC.

Le plan étant orienté de la façon usuelle, construisons les trois trapèzes, en plaçant tout d'abord le point D au hasard.



Les trois trapèzes (non orientés) sont $BMDJ$, $JDLA$ et $MDLC$. Pour certaines positions de D, certains d'entre eux pourraient être croisés. Comment les orienter ? Décidons de nous inspirer de la figure accompagnant le problème 11.4.1, obtenue lorsque le point D est intérieur au triangle ABC. Dans ce cas, les trois trapèzes doivent être orientés de la même manière, et il est naturel de chosir le sens anti-horlogique. Les trapèzes orientés sont donc $DJAL$, $DMBJ$ et $DLCM$. Nous conservons ces orientations lorsque D est extérieur à ABC.

On trouve facilement les coordonnées des différents points :

Point	Abscisse	Ordonnée
A	0	0
B	0	3
C	3	0
D	x	y
J	0	$x+y$
L	x	0
M	$3-y$	y

Il ne nous reste qu'à appliquer trois fois la formule donnant l'aire d'un quadrilatère. Nous trouvons

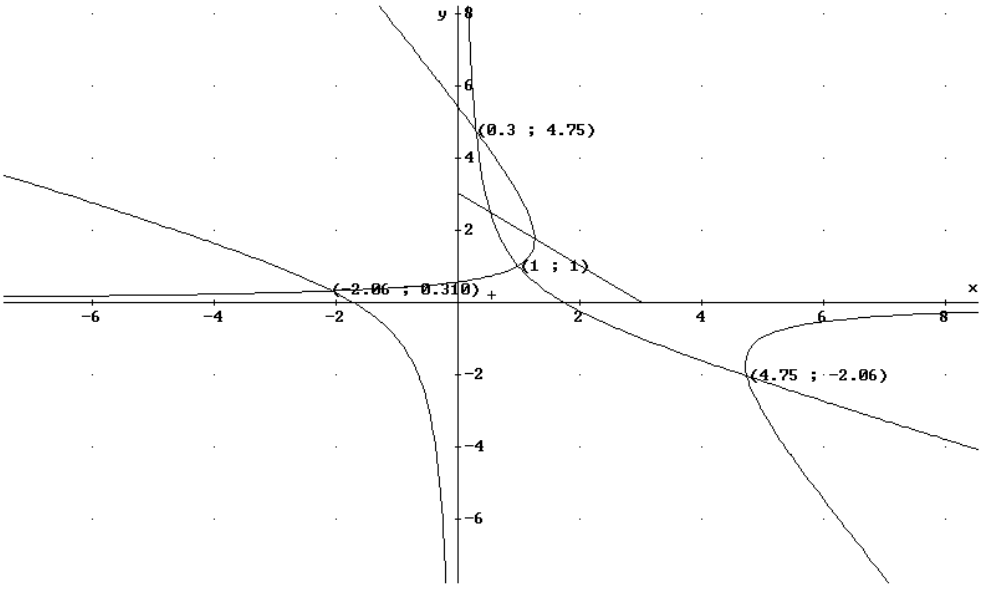
$$\begin{aligned} \text{aire } (DJAL) &= \frac{1}{2}(x^2+2xy) \\ \text{aire } (DMBJ) &= \frac{1}{2}(-x^2+y^2-6y+9) \\ \text{aire } (DLCM) &= \frac{1}{2}(-y^2-2xy+6y) \end{aligned}$$

Une simple addition, et nous constatons que la somme des aires des trois trapèzes est constante, égale à celle du triangle ABC. Ainsi si un point D, intérieur ou extérieur au triangle ABC, détermine trois trapèzes de même aire orientée, celle-ci ne peut valoir que $\frac{3}{2}$. Le point D doit donc être situé sur les trois hyperboles d'équations :

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy &= 3 \\ x^2 - y^2 + 6y - 9 &= -3 \\ y^2 + 2xy - 6y &= -3 \end{aligned}$$

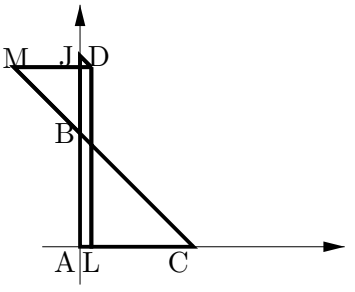
La troisième équation étant la différence des deux premières, nous sommes ramenés à rechercher l'intersection de deux de ces trois hyperboles.

La figure ci-après représente la première et la troisième hyperbole. Elles se coupent en quatre points qui sont les quatre solutions du problème. (Une d'entre elles est celle qui est intérieure au triangle ABC : le point $\binom{1}{1}$).



Les coordonnées notées sur les dessins sont des évaluations des positions des points cherchés via les possibilités graphiques du logiciel DERIVE. Remarquons que la transformation affine $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ 3-x-y \end{pmatrix}$ laisse fixe la solution $\binom{1}{1}$ interne au triangle et permute cycliquement les trois autres.

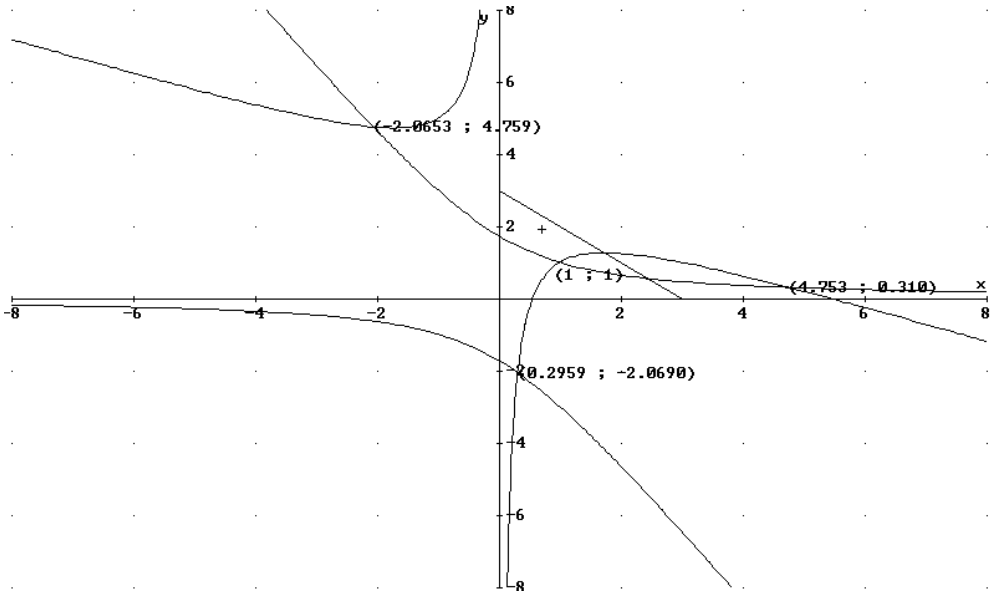
La figure ci-contre correspond à la solution $\binom{0.3}{4.75}$.



Nous pouvons procéder à la même recherche en ce qui concerne le second découpage du triangle. Nous trouvons cette fois des points différents, aux intersections des hyperboles d'équations :

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy - 6x &= -3 \\ x^2 - y^2 - 6x + 9 &= 3 \\ y^2 + 2xy &= 3 \end{aligned}$$

On note que ces hyperboles s'obtiennent à partir des précédentes en permutant x et y, donc en appliquant une symétrie par rapport à la première bissectrice. Une image nous montre les points :



Il reste à envisager le cas d'un triangle ABC quelconque. Il se ramène à celui que nous venons de considérer. En effet, étant donnés deux triples de points non alignés (A, B, C) et (A_0, B_0, C_0), on peut toujours trouver une transformation affine h qui applique A sur A_0, B sur B_O et C sur C_0. Comme les transformations affines conservent les rapports d'aire, la solution du problème pour ABC s'obtient en appliquant la transformation réciproque h^{-1} aux solutions obtenues pour $A_0B_0C_0$.

Dans le cas particulier considéré ci-dessus ($A_0 = \binom{0}{0}$, $B_0 = \binom{0}{3}$, $C_0 = \binom{3}{0}$), à chacun des deux découpages possibles correspondaient quatre solutions (dont une, le barycentre du triangle, était commune aux deux découpages) situées aux intersections de deux hyperboles. Il en est donc de même dans le cas général.

De plus, pour un découpage donné, les trois solutions autres que le barycentre, sont appliquées cycliquement l'une sur l'autre par une transformation affine qui respecte les symétries éventuelles du triangle considéré. Il serait anormal qu'il en soit autrement ! Par exemple si ABC est un triangle équilatéral, cette transformation est une rotation de 120°.

Référence

[41].

11.5. Fiche N° 4 : Des pavages du plan

11.5.1 L'énoncé

Problème 11.5.1 *Réalisez des pavages du plan en utilisant les formes polygonales mises à votre disposition. Dessinez — au choix — l'un des pavages réalisés.*

Contexte mathématique

Les pavages du plan sont connus depuis belle lurette, et cela par les civilisations les plus diverses. On ne peut pas ne pas rappeler par exemple la présence dans l'Alhambra de Grenade de mosaïques correspondant aux 17 groupes d'isométries de pavages périodiques (voir [17]) et réalisées par les Maures à l'époque où ils occupaient l'Espagne. D'emblée nous percevons donc les pavages, en particulier les pavages polygonaux, à la fois comme objets d'étude et comme moyen d'accès à l'étude des groupes de transformations. Ils partagent ces caractéristiques avec les pavages de l'espace, mais aussi avec les polyèdres, les méthodes et les résultats de ces diverses théories ayant bien des points communs.

Qu'ils soient du plan ou de l'espace, les pavages n'intéressent pas seulement le mathématicien. Le physicien, cristallographe en particulier, est aussi un grand « consommateur » de réseaux, de polyèdres et de groupes discrets d'isométries.

De plus, la mise en évidence par Roger Penrose, [118], dans les années septante, de pavages non périodiques remarquables, ayant des symétries locales d'ordre 5, a été suivie quelques années plus tard de la découverte par les cristallographes de quasi-cristaux qui du point de vue géométrique ont des propriétés analogues mais ont de plus des propriétés physiques particulièrement intéressantes.

Ainsi, les pavages du plan ne sont pas seulement connectés à des théories mathématiques fondamentales, ils sont aussi directement liés à des applications scientifiques et techniques de premier plan.

Contexte scolaire

Les pavages du plan et de l'espace fournissent des situations exploitables à des niveaux très divers, dans une optique d'enseignement en spirale. En faire une étude systématique serait certainement un plat trop copieux qui deviendrait aussi indigeste que d'autres sujets. Par contre, y revenir à maintes reprises, par le biais de problèmes variés, permet de rencontrer de nombreux sujets énoncés dans les programmes. Dès le secondaire inférieur, il est ainsi possible de manipuler des polygones et des isométries à des niveaux différents de formalisation.

Les aspects esthétiques, voire ludiques des activités susceptibles d'être élaborées autour des pavages du plan sont de nature à motiver les élèves, non seulement pour « plancher » sur des résultats géométriques, mais aussi pour pratiquer des démarches inductives et déductives. La constatation de l'existence de pavages ayant des propriétés semblables peut aussi être exploitée en vue de réaliser une synthèse concernant les isométries du plan et, par là-même, à introduire la structure de groupe (de transformations), comme le prévoit le nouveau programme du troisième degré.

Contexte méthodologique

La fiche ([2]) proposée ici n'a pas pour objectif d'effectuer une étude exhaustive des pavages du plan, ni même une étude restreinte aux pavages de la catégorie des pavages archimédiens. Elle décrit une possibilité d'activités dans une classe du premier degré, en mettant particulièrement en évidence les compétences mises en œuvre. Celles-ci relèvent à la fois des socles de compétence et des compétences terminales, ce qui n'a rien d'étonnant car il serait complètement absurde de considérer qu'il y aurait une coupure entre les deux types de compétences et que les compétences terminales ne se rencontrent pas avant le troisième degré. Au premier degré, tout au plus devons-nous insister sur le fait qu'il s'agit alors de compétences « à développer » plutôt que « à atteindre ».

Notre fiche n'épuise donc pas le sujet. Vu l'aspect largement ouvert du problème posé, il est plus que jamais hors de question d'en proposer une solution « modèle ». Aussi trouvera-t-on ci-dessous uniquement une *simulation* de ce que *pourrait être* l'activité d'une classe du premier degré en présence de la situation-problème qui est proposée. Les compétences qui seront sollicitées sont mises en évidence soit dans le corps du texte, en écrivant certains mots en PETITES CAPITALES, soit par des notes en marge.

Conditions de travail au départ : des groupes de 4 élèves disposant de formes polygonales diverses et d'une surface libre d'au moins 1m sur 2m.

Le professeur indique que le travail s'organisera en différentes étapes qui seront précisées au fur et à mesure des besoins, que celles-ci se dérouleront tantôt en groupes, tantôt collectivement et que l'étape finale sera un travail individuel à domicile.

([2]) Cette fiche a pour origine un texte inédit de Yolande Noël–Roch (IESPECF Mons).

11.5.2 Les moyens nécessaires

Les prérequis

Ils concernent essentiellement les polygones réguliers à 3, 4, ..., n côtés mais sont très limités : l'élève doit simplement être capable de distinguer des polygones d'après leur forme. Un peu de pratique du `Logo` pourrait s'avérer utile.

Du matériel

Des polygones réguliers ayant tous même longueur de côté. Prévoir au moins des triangles, des carrés, des pentagones, des hexagones et des octogones. Choisir environ 5 cm comme longueur des côtés pour obtenir des ébauches de pavages de taille « raisonnable ».

Les instruments de dessin :

Ils sont classiques : règle et compas.

11.5.3 Exemple de résolution

11.5.3.1 Première étape

Chaque groupe doit d'abord se mettre d'accord sur le matériel dont il souhaite disposer, en tenant compte du fait que tous les groupes doivent pouvoir travailler. Après accord, **un élève** est désigné par chaque groupe, il va chercher ce matériel **en une fois**.

Le rôle du professeur jusqu'ici :

- mettre les polygones en vrac de manière à ce que tous les types de polygones soient visibles, sans donner aucune précision sur leur régularité ni leur nombre ;
- choisir les groupes ou les laisser se former aussi librement que possible ;
- distribuer l'énoncé écrit à chaque groupe ;
- préciser le déroulement global et la première étape ;
- attendre les délégués de groupe auprès du matériel.

Sauf pour constituer les groupes, le rôle du professeur a été à peu près muet. Il accueille maintenant chaque délégué de groupe et juge si la collecte de polygones est raisonnable. Il n'intervient que si une demande entrave les possibilités des groupes suivants. S'il intervient, il justifie son intervention. Par exemple si le premier groupe menace d'emporter tous les polygones ayant même forme. Par contre, il n'intervient pas si une seule forme est choisie et qu'il en reste pour les suivants.

Il est possible que certains élèves perçoivent les triangles comme étant « plus petits » que les octogones et qu'ils n'imaginent pas immédiatement que les « petits » et les « grands » polygones peuvent être mélangés dans un pavage. La différence de grandeur en surface occulterait donc l'égalité en longueur. Le professeur n'intervient pas : il profitera plus tard du travail d'un groupe pour mettre les choses au point. L'essentiel ici est d'apprécier les images suscitées par le matériel *avant toute manipulation de celui-ci*.

Apprécier des grandeurs en vue de réaliser un choix

Dès que tous les groupes disposent de leur matériel, ils réalisent librement ce qui leur paraît répondre au problème. Les groupes plus rapides sont simplement encouragés à construire plusieurs exemples. Pour faire patienter un groupe, le professeur peut distribuer une grande feuille blanche et demander de reproduire l'exemple jugé « le plus beau », le pavage étant reproduit en dessinant au crayon les contours des polygones utilisés. Les dessins constituent des documents utiles pour la suite de l'exploitation et les polygones libérés sont réinvestis dans de nouveaux pavages.

Réaliser des pavages, créer, imaginer

Dessiner

Pendant cette étape du travail, le rôle du professeur consiste à encourager un groupe sans lui donner aucun renseignement mathématique, à enregistrer (sans les commenter) les initiatives exploitables dans la suite, à inciter par exemple à « faire quelque chose de beau » ou « quelque chose de plus varié ». Si un groupe améliore sa perception du problème et a besoin de matériel supplémentaire, il est invité à bien réfléchir à sa demande (il ne peut en faire qu'une) et elle est satisfaite dans la mesure du possible.

S'organiser

Il est souhaitable que chaque groupe réalise au moins deux ébauches de pavage avant de passer à l'étape suivante.

11.5.3.2 Deuxième étape

Observer

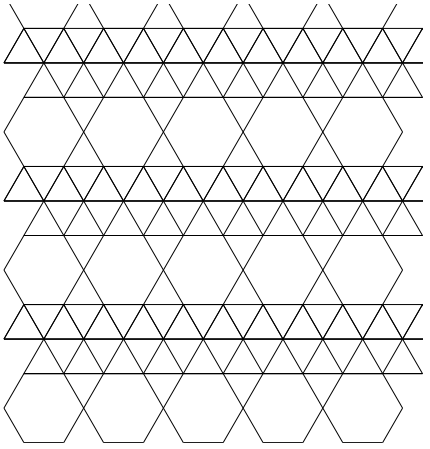
Rassembler de la documentation

Tout le monde regarde les pavages réalisés par tous les groupes. Les groupes se reforment immédiatement ensuite. Chaque groupe peut poser des questions ou commenter le travail d'un autre groupe. Pour le prochain cours, chaque groupe rassemblera des pavages. Pour cela, chacun regardera autour de lui et notera les « vrais » pavages qu'il rencontrera, cherchera des représentations (publicités, photos, ...) de pavages et les apportera. Au début du prochain cours, chaque groupe choisira un document (parmi ceux qu'il aura rassemblés) et l'affichera au tableau.

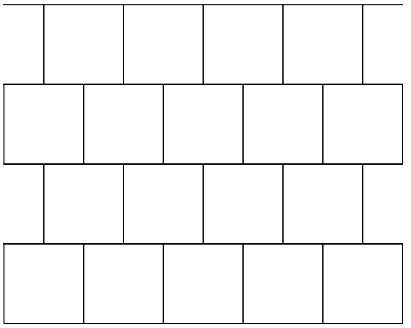
La confrontation des productions des différents groupes permet aux élèves de prendre conscience d'éléments qui leur auraient échappé et de ce qu'une GRANDE LIBERTÉ leur est laissée dans la recherche.

Ainsi, un groupe qui a manqué d'IMAGINATION ou d'AUDACE peut constater

- qu'on peut utiliser des formes différentes dans le même pavage,



- qu'un sommet d'un polygone peut toucher un autre polygone ailleurs qu'en un sommet,



- ...

La recherche de pavages peut alors être relancée. Les élèves peuvent aussi tirer parti des documents qui auront été apportés : des photos de très beaux pavements, décors muraux ou autres, peuvent même dépasser la notion habituelle de pavage mais cela n'est pas gênant ici.

Si nous ne sommes pas en fin de cours, le temps encore disponible est exploité à une recherche nouvelle, enrichie par l'ÉCHANGE D'IDÉES, et à la représentation sur papier de quelques pavages réalisés. Ces dessins peuvent être de deux types :

Communiquer

Schématiser, s'accorder

- soit des SCHÉMAS qui serviront dans la suite pour SE METTRE D'ACCORD sur ce que LA CLASSE CONSIDÉRERA COMME UN PAVAGE,
- soit des dessins plus SOIGNÉS.

En ne donnant à ce stade aucune information à ce sujet, il est possible de laisser « foncer » un élève en pleine CRÉATIVITÉ ... mais aussi de laisser DESSINER AVEC SOIN un élève moins imaginatif.

Si des polygones ne sont pas disponibles en assez grand nombre, un « modèle » dont on trace les contours permet d'escamoter pour le moment la difficulté technique du dessin. Des modèles sont prêtés à d'éventuels demandeurs en fin de leçon.

11.5.3.3 Troisième étape

Chaque groupe dispose des documents réalisés précédemment en classe ou à domicile. Il choisit parmi ces documents celui qu'il désire afficher au tableau. Lorsque l'affichage est terminé, chaque groupe explique son choix.

Un groupe peut rencontrer une grosse difficulté pour fixer son choix puisque plusieurs critères de valeur peuvent s'opposer : travail *personnel*, *belle* photo, dessin *soigné*, dessin *original*, ... Autant de critères acceptables qu'il est intéressant de DISCUTER AU SEIN DU GROUPE.

Auto-évaluation d'un groupe

Chaque groupe justifie son choix, éventuellement sa difficulté de choisir. D'autres pavages réalisés par les élèves sont ainsi ajoutés. Le professeur intervient alors pour en ajouter encore, en puisant dans ce que les élèves ont apporté. Il affiche enfin un (des) pavage(s) supplémentaire(s), en fonction des éléments qu'il veut mettre en évidence dans la quatrième étape. Celle-ci se déroule collectivement.

11.5.3.4 Quatrième étape

> Quelles sont les figures qui sont utilisées sur les dessins ? Toutes les formes ont-elles été utilisées ? Existe-t-il des ressemblances, des différences entre les pavages ? Etions-nous d'accord sur **ce qu'est un pavage** ?

Le déroulement collectif doit permettre cette fois de mettre au point certaines notions mathématiques ainsi que le vocabulaire relatifs à la situation. Des remarques des élèves vont être exploitées. En voici quelques vraisemblables :

- Je ne savais pas qu'on pouvait faire ça !
- Jules n'a utilisé que des triangles, Jim a utilisé des triangles et des carrés.
- Paul n'a pas placé les carrés comme Virginie.
- Une sorte de polygone n'a pas été utilisée.
- C'est Louis qui a utilisé le plus de formes différentes.

Rédiger

Analyser

Fixer une propriété

Les élèves COMMUNIQUENT leurs impressions. Le professeur décide de les noter lui-même ... ou de les faire noter mais la crainte de devoir ÉCRIRE ne doit pas arrêter un élève. Les élèves ANALYSENT des dessins pour en dégager des composantes (triangle, carré,...), ils RECONNAISSENT UNE PROPRIÉTÉ (segments de même longueur, façons de réaliser des pavages, en exigeant ou non que les sommets ne puissent toucher que des sommets, ...).

Ceci n'est possible que si le professeur a su rester discret en début d'activité : si un groupe dit qu'il ne comprend pas bien ce qu'on demande, il ne faut pas se mettre à « définir rigoureusement » ce qu'est un pavage mais temporiser en faisant allusion à un pavement, à un mur de briques, en répondant par une question (n'a-t-il jamais joué avec un puzzle ? des briques Lego ?).

Certains élèves peuvent exprimer leur frustration d'avoir eu moins de succès que d'autres : « Si on avait su qu'on pouvait ..., on aurait .... Si on avait eu plus de figures, on aurait ... » C'est l'occasion de relancer traîtreusement une recherche plus difficile qui favorisera les « raisonneurs » et d'introduire un travail technique qui favorisera les « soigneux ». La COMMUNICATION et l'ANALYSE de la première partie de la recherche nous ont donc contraints à NOUS METTRE D'ACCORD sur un mot contenu dans l'énoncé et peu précis dans le langage courant : quels « pavages »recherchons-nous ? Cette INSTITUTIONNALISATION permet au professeur d'orienter la cinquième étape, soit vers la recherche des pavages dits réguliers, soit vers la recherche des pavages réguliers ou semi-réguliers ([3]), (encore faudrait-il, pour être rigoureux, préciser la régularité en les sommets du pavage, ce dont nous ne nous soucions pas dans ce texte !)

11.5.3.5 Cinquième étape

Dans nos nouveaux pavages, les sommets d'un polygone ne peuvent toucher un autre polygone qu'en un sommet, deux côtés qui se touchent doivent coïncider sur toute leur longueur. Chaque groupe doit écarter les pavages éventuellement déjà dessinés et ne répondant pas à cette contrainte. Chaque groupe doit compléter sa collection de polygones en en dessinant ou découpant de nouveaux, de manière à pouvoir rechercher

- des pavages utilisant une seule sorte de polygones,
- des pavages utilisant plusieurs sortes de polygones.

Ce nouveau problème est lancé en travail de groupes pour deux raisons :

- la quantité de matériel nécessaire,
- la possibilité pour le groupe de confier les dessins et découpages les plus délicats aux plus adroits du groupe, une ORGANISATION du travail qui fait gagner du temps et apprend à COLLABORER,
- la difficulté d'interpréter positivement des essais voués à l'échec : trop d'élèves isolés se décourageraient vite face aux « pavages impossibles ».

Exploiter un échec

Le professeur devra gérer ici successivement deux sous-étapes fort différentes.

Dans la première (le dessin et le découpage de nouveaux polygones), il devra observer l'estimation de la tâche par le groupe et sa répartition au sein du groupe. Après un démarrage dans tous les groupes, certains échecs apparaîtront, tant dans l'organisation que dans l'exécution du travail. Une intervention sera nécessaire pour RECONNAÎTRE LES DONNÉES du problème : tous les côtés de tous les polygones doivent avoir même longueur puisqu'on doit pouvoir les « assembler ».

Analyser

([3]) Le lecteur intéressé peut consulter la bibliographie mentionnée à la fin de cette fiche. Il trouvera en particulier une classification des pavages réguliers et semi-réguliers dans une monographie du GEM, [18].

Pour utiliser en même temps les polygones déjà disponibles et les polygones construits, la longueur des côtés est donc imposée par le matériel du professeur. Certains polygones sont plus faciles à dessiner que d'autres : on limitera les exigences à la réalisation aux instruments de carrés, triangles et hexagones. Les autres polygones seront reproduits à partir d'un modèle prêté par le professeur.

Les souvenirs de l'école primaire seront les bienvenus et on mettra simplement l'accent sur l'adéquation du compas pour reproduire des longueurs égales. Cette partie avantage les élèves SOIGNEUX et ADROITS DANS LE MANIEMENT DES INSTRUMENTS DE DESSIN. Une répartition équitable de matériel sera assurée (matériel créé par les groupes et matériel du professeur) avant d'entamer la nouvelle recherche de pavages. Une certaine imprécision dans les tracés et les découpages seront les bienvenus dans la suite, pour motiver certains raisonnements. Il serait donc malheureux de mettre exagérément l'accent sur la précision.

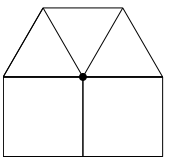
Dans la seconde sous-étape (la réalisation de nouveaux pavages), le professeur de nouveau relativement muet au début, sera très attentif aux diverses tentatives, de manière à choisir le moment du retour au travail collectif. Il suggérera une nouvelle tentative, rappellera éventuellement une CONSIGNE DONNÉE plus tôt mais ne fournira aucun jugement. Nos élèves de 12 ans n'ont pas été souvent stimulés à essayer de réaliser des choses impossibles et il est inutile de les laisser tous longtemps dans cette situation en espérant qu'ils raisonnent seuls pour la clarifier. Le professeur devra donc encourager habilement une recherche et en mettre une autre en attente pour maintenir un temps suffisant d'intérêt dans tous les groupes. Il devra choisir le moment de faire démarrer une SYNTHÈSE des travaux.

En prévision de cette exploitation collective, le professeur aura préparé quelques dessins de nœuds de pavages, c'est-à-dire des polygones assemblés autour d'un sommet commun de manière à constituer un circuit fermé (la somme des angles au sommet commun vaut 360°). Ces nœuds étaient restés bien cachés jusqu'ici.

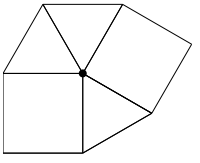
Les travaux réalisés permettent de nouveau des comparaisons : on ANALYSE les dessins en considérant spécialement les sommets. Des constats d'échecs et différentes configurations sont notées :

Organiser les résultats

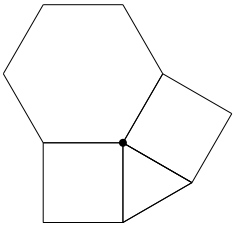
- personne n'a obtenu un pavage avec les seuls pentagones
- ... ni en n'utilisant que des octogones
- voici par contre plusieurs configurations autour d'un point :
  - carré–carré–triangle–triangle–triangle



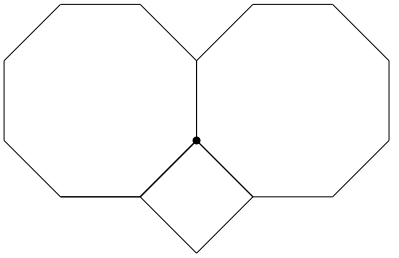
  - carré–triangle–carré–triangle–triangle



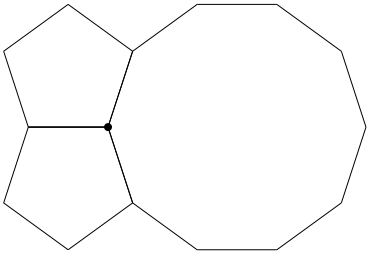
– carré–triangle–carré–hexagone.



– octogone–carré–octogone.

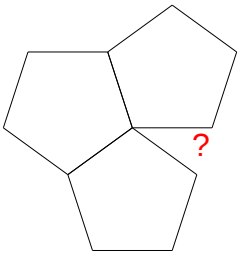


– pentagone–décagone–pentagone.

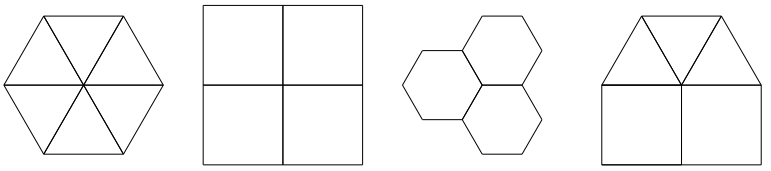


– éventuellement d'autres grâce à la documentation du professeur.

Il s'agit alors de mettre de l'ordre dans ces constatations. On assemblera 3 pentagones pour constater qu'on ne peut « fermer le tour »avec aucun polygone disponible.



On comparera à ce qui se passe en assemblant 6 triangles, 4 carrés, 3 hexagones, 2 carrés et 3 triangles, ...



Tant mieux si les polygones découpés par les élèves sont moins précis et moins maniables que le matériel du professeur : cela peut créer le doute sur certains assemblages. Comment savoir si nous avons une chance de réussir en utilisant un pentagone ou d'autres polygones, y compris des polygones dont nous ne disposons pas pour le moment ?

Déduire, structurer

L'idée d'utiliser des polygones non disponibles et une certaine difficulté de réalisation précise oblige à RAISONNER, à RECONNAÎTRE UNE PROPRIÉTÉ qui permet de pronostiquer que « ça marchera » ou que « ça ne marchera pas ». La manipulation met LA NOTION de tour EN RAPPORT AVEC LE PROBLÈME POSÉ : lorsqu'on utilise un seul type de polygones, on doit pouvoir couvrir la surface autour d'un point avec un certain nombre de secteurs de même amplitude.

Les élèves qui ont travaillé auparavant en LOGO savent qu'on exécute un tour en 360°. Pour les autres, le pavage omniprésent des feuilles quadrillées permet de DÉDUIRE l'angle de 360° à couvrir. La DÉMARCHE INVERSE donne la valeur des angles des triangles équilatéraux et des hexagones réguliers. On peut aussi trouver autrement les valeurs dans les hexagones à partir de celles des triangles. C'est le moment de PRÉCISER ensemble un peu de VOCABULAIRE : triangle équilatéral, pentagone régulier, polygone régulier, en attirant l'attention sur SEGMENTS DE MÊME LONGUEUR ET SECTEURS DE MÊME AMPLITUDE.

Pour pouvoir paver autour d'un point avec des polygones d'un seul type, IL FAUT que 360° soit un multiple des angles de ces polygones. Ainsi apparaît l'ébauche d'un tableau :

polygone régulier	nombre de côtés	angle	nombre de polygones	assemblage
triangle	3	60°	6	$6 \times 60 = 360$
carré	4	90°	4	$4 \times 90 = 360$
pentagone	5	?	2	$2\times\ ? < 360$
			3	$3\times\ ? < 360$
			4	$4\times\ ? > 360$
hexagone	6	120°	3	$3 \times 120 = 360$
octogone	8	?	2	$2\times\ ? < 360$
			3	$3\times\ ? > 360$
...	...	...		

Si les élèves ont auparavant travaillé en LOGO, ils calculent facilement les valeurs manquantes dans ce tableau. En effet, pour dessiner les polygones, ils ont utilisé les angles extérieurs. Dans le cas du pentagone régulier par exemple, la tortue passe d'un côté au suivant en tournant de 72° (PARCE QUE 360 : 5 = 72). Les élèves peuvent en DÉDUIRE que les angles qui les intéressent cette fois valent 108° (PARCE QUE $180 - 72 = 108$). Ils ASSOCIENT alors trois propriétés :

- les pentagones réguliers ont des angles de 108°,
- 108 n'est pas un diviseur de 360,
- il est impossible d'assembler des pentagones réguliers autour d'un point.

S'ils n'ont pas cette expérience, le tableau permet d'INDUIRE que les amplitudes des angles (intérieurs) semblent augmenter avec le nombre de côtés. La superposition des polygones découpés confirme le fait. Après avoir EXPLICITEMENT ACCEPTÉ cette propriété, nous en DÉDUISONS que les amplitudes sont strictement comprises entre 90 et 120 pour le pentagone. Nous ne les calculons pas mais cette information SUFFIT pour conclure à l'impossibilité de paver. Dans ce cas, les élèves ASSOCIENT

Induire

- la liste des diviseurs de 360,
- la double inégalité « 90 < amplitude < 120 » (sans que cette écriture soit utilisée nécessairement !).
- il est impossible de paver en n'utilisant que des pentagones réguliers.

Si certains assemblages sont douteux (par manque de précision), un calcul simple confirmera par exemple la validité de la configuration

$$\text{hexagone} - \text{carré} - \text{triangle} - \text{carré}$$

sous la forme

$$120^\circ + 90^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 360^\circ$$

11.5.3.6 Sixième étape

Un pavage est **régulier** si les sommets de chaque polygone ne touchent que des sommets d'autres polygones **et** s'il est formé avec un seul type de polygones réguliers. Quels sont les pavages réguliers déjà réalisés ? En existe-t-il d'autres ?

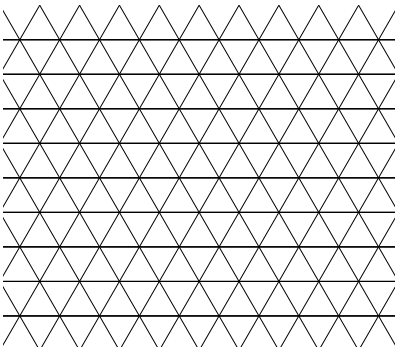
Le professeur contrôlera d'abord ici l'aptitude des élèves à LIRE. Éventuellement, l'énoncé sera expliqué avant de laisser un temps de recherche individuelle.

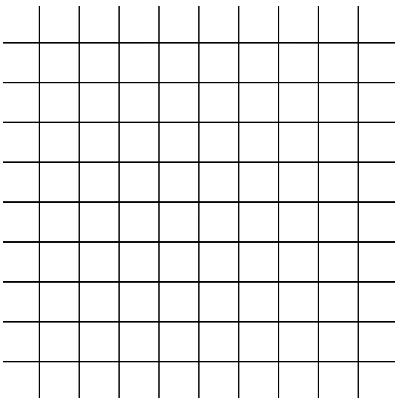
Lire un énoncé

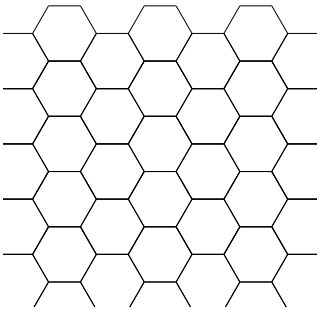
Le professeur observera qui réclame des polygones découpés, il invitera les élèves à raisonner sans manipulation et ne distribuera quelques polygones qu'aux élèves qui sont complètement bloqués. Il permettra les échanges d'idées en petits groupes. Il attendra raisonnablement pour laisser à quelques élèves la possibilité de TRANSFÉRER à d'autres polygones le RAISONNEMENT effectué dans le cas du pentagone.

Le professeur aide la classe à RECONNAÎTRE LE PROBLÈME dans le tableau ébauché précédemment :

- Nous pouvons paver régulièrement à l'aide de triangles, à l'aide de carrés, à l'aide d'hexagones.
- Nous savons qu'il est impossible de paver régulièrement avec des pentagones parce l'angle du pentagone régulier n'est pas un diviseur du tour.
- Il reste à envisager des polygones à 7, 8, 9, ... côtés.
- Nous savons que les amplitudes grandissent en même temps que le nombre de côtés des polygones. Ainsi, les amplitudes dans les polygones à 7, 8, 9, ... côtés sont supérieures à 120 (mais aussi inférieures à 180, mesure de l'angle plat en degrés).
- Nous connaissons tous les diviseurs de 360. Ce sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.
- Il est impossible de paver régulièrement avec une seule sorte de polygones réguliers à plus de 6 côtés puisque aucun nombre strictement compris entre 120 et 180 n'est un diviseur de 360. Les premier et dernier points ci-dessus nous permettent de DÉDUIRE la SYNTHÈSE cherchée : *il existe exactement trois pavages réguliers du plan.*







La dernière étape est un peu la cerise sur le gâteau. Il ne s'agit plus de faire progresser la connaissance mathématique, mais de faire réaliser par les élèves un travail soigné et plaisant.

11.5.3.7 Septième étape

(Travail à domicile) :

> Sur une feuille blanche dont le plus petit côté mesure au moins 30 cm, dessinez un beau pavage qui utilise au moins deux sortes de polygones.

Faire prendre conscience du matériel nécessaire :

- Une feuille A4 est insuffisante pour réaliser le travail. Deux feuilles assemblées seront donc acceptées mais le travail devra être soigné.
- Les polygones ne peuvent pas être trop grands, sinon nous n'aurons qu'un tout petit morceau de pavage.
- Il sera utile de réaliser plusieurs pavages pour choisir celui que nous voulons dessiner.

Après cette ANALYSE du travail, le professeur précise qu'une présentation soignée et la beauté seront les critères d'APPRÉCIATION du travail. Il distribue un stencil sur lequel les élèves disposent d'un modèle de polygone de chaque type. Les élèves sont libres de les reproduire et découper pour réaliser leur travail, d'embellir leur pavage selon leur goût. Seule contrainte : le résultat devra laisser bien apparent les tracés des polygones. Ceux-ci devront être précis et l'ensemble soigné.

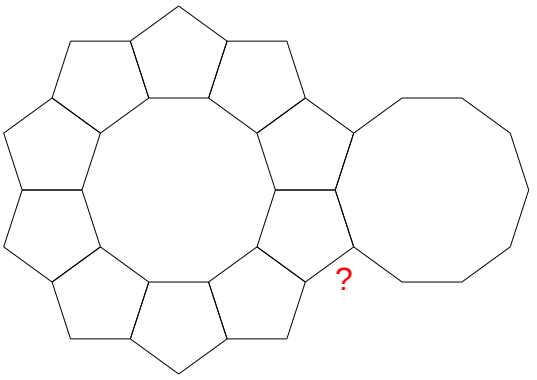
11.5.4 Prolongements possibles

L'activité précédente s'est terminée par la construction, d'une part, de « nœuds de pavage », d'autre part, des trois pavages réguliers et de certains pavages semi-réguliers.

Mais tous les cas n'ont pas nécessairement été rencontrés. *A fortiori* n'aura-t-on pas procédé à une classification exhaustive des pavages semi-réguliers.

Des prolongements possibles, dont certains ne seraient rencontrés qu'au deuxième ou au troisième degrés, pourraient porter sur les questions suivantes :

- A-t-on déterminé *tous* les nœuds de pavage possibles ?
  En plus de ceux qui figurent dans le texte, il faut noter les nœuds suivants :
  - triangle – triangle – triangle – triangle – hexagone
  - triangle – hexagone – triangle – hexagone
  - triangle – carré – triangle – dodécagone
  - carré – hexagone – dodécagone
  - triangle – dodécagone – dodécagone
- Tout nœud de pavage peut-il être prolongé en un pavage ?
  Le nœud pentagone – décagone – pentagone ne le permet pas : s'il est possible d'ajuster dix pentagones autour d'un décagone, il n'est par contre pas possible d'entourer un pentagone d'une chaîne constituée alternativement de pentagones et de décagones.



  Le nœud triangle – carré – triangle – dodécagone ne peut pas non plus être prolongé en un pavage.

- Déterminer tous les pavages semi-réguliers possibles.
  En plus des trois pavages réguliers, on doit trouver 8 pavages semi-réguliers.
- Déterminer les isométries d'un pavage régulier ou semi-régulier.
- ...

Références

[17], [18], [40], [51], [86], [118] [133].

11.6. Fiche N° 5 : Un peu de probabilité

11.6.1 L'énoncé

PROBLÈME 11.6.1 *Le tableau ci-dessous résume une situation possible de chômage dans un pays :*

Classe	*Tranche d'âge*	*Proportion*	*Taux de chômage*
I	*0–15 ans*	*35%*	*0%*
II	*15–25 ans*	*25%*	*20%*
III	*25–35 ans*	*15%*	*40%*
IV	*35–45 ans*	*10%*	*30%*
V	*>45 ans*	*15%*	*10%*

On demande la probabilité

1. *pour qu'un habitant pris au hasard soit un chômeur faisant partie de la classe III.*
2. *pour qu'un chômeur pris au hasard fasse partie de la classe III.*

Ce problème est tiré de [106].

Contexte mathématique

Le contexte est celui des probabilités conditionnelles. Celles-ci permettent de tenir compte d'une information nouvelle et de remplacer une probabilité *a priori* par une probabilité *a posteriori*.

Thomas BAYES

Thomas BAYES *naît en Angleterre en* 1702 *pour y mourir en* 1761. *Il est ordonné ministre non-conformiste à l'instar de son père, notamment à la Presbyterian Chapel de Tunbridge Wells. Ses deux articles* ([4]) *seront publiés à titre posthume. Les conclusions de Bayes sur les probabilités furent acceptées par Laplace en* 1781 *mais furent longtemps sujettes à controverses.*

([4]) *Essay towards solving a problem in the doctrine of chances* ainsi que *An introduction to the doctrine of fluxions.*

Inversement, le théorème de Bayes permet de reconstituer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles dans diverses circonstances tenant compte de tous les cas possibles. Les probabilités conditionnelles sont souvent aussi celles qui sont connues et permettent d'étudier l'évolution d'un système entre divers états possibles.

Contexte scolaire

Le contexte est celui des débuts de l'apprentissage de la théorie des probabilités.

Les données pourraient être extraites de l'actualité économique et sociale du pays. L'ensemble de la population de celui-ci étant prise en compte, la probabilité pour qu'un habitant pris au hasard appartienne à telle classe d'âge peut être assimilée à la fréquence de celle-ci.

Le remplacement des fréquences par des probabilités s'accompagne d'un changement de vocabulaire : *probabilité de* $0,25$ au lieu de *proportion de 25%*.

Contexte méthodologique

Le texte qui suit n'est pas demeuré une fiche-problème. Après quelques modifications, nous l'avons développé et intégré dans la séquence d'enseignement intitulée « Initiation aux probabilités » (voir chapitre 14).

11.6.2 Les moyens nécessaires

Les prérequis

- La notion de probabilité.
- Les règles d'addition et de multiplication des probabilités.

Les moyens de calcul

Une simple calculatrice est suffisante pour ce genre de problème.

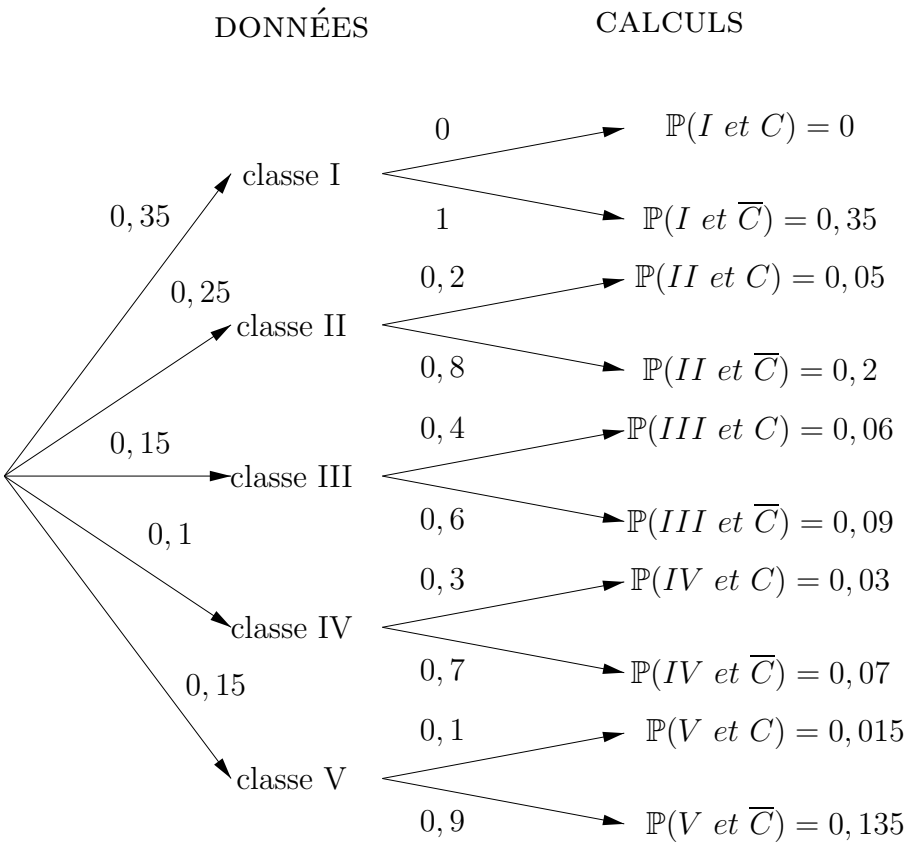
11.6.3 Exemple de résolution

La colonne *taux de chômage* donne les probabilités pour qu'un habitant soit chômeur *sachant* de quelle classe de la population il fait partie. Ce sont des probabilités conditionnelles.

Représentons les données sur un arbre.

Modéliser

La probabilité d'être chômeur se calcule alors par la règle d'addition.



Appliquer des règles à bon escient

En multipliant les probabilités rencontrées sur les branches le long d'un chemin de l'arbre, nous obtiendrons la probabilité d'arriver au bout de ce chemin. Ici, les probabilités aux extrémités de l'arbre sont les probabilités d'être dans une classe *et* d'être chômeur ou pas.

Par exemple, un habitant pris au hasard a une probabilité de $0,15$ de se trouver dans la classe III, et sachant cela, il a une probabilité de $0,4$ d'être chômeur. La probabilité $\mathbb{P}(III\ et\ C)$ vaut $0,15 \times 0,4 = 0,06$.

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(I\ et\ C) + \cdots + \mathbb{P}(V\ et\ C) = 0 + 0,05 + 0,06 + 0,03 + 0,15 = 0,155$$

En appliquant cette formule, nous voyons que le chômage apparaît dans $15,5\%$ du total de la population.

Changer de modèle

Munis de ce renseignement, nous pouvons dessiner un nouvel arbre dont le premier embranchement porte sur le chômage, et non plus sur l'âge.

Cette fois, nous ne disposons pas des probabilités conditionnelles qu'un individu soit dans une tranche d'âge donnée *sachant* s'il chôme ou non, mais nous allons pouvoir les calculer puisque nous connaissons les probabilités d'être dans l'une des classes *et* d'être chômeur ou non.

Par exemple, nous savons que $\mathbb{P}(II\ et\ C) = 0,05$. Or, la probabilité d'être chômeur $(0,155)$ doit être multipliée par la probabilité x pour qu'un chômeur appartienne à la classe II, afin de trouver la probabilité $(0,05)$ pour qu'un habitant soit un chômeur appartenant à la classe II.

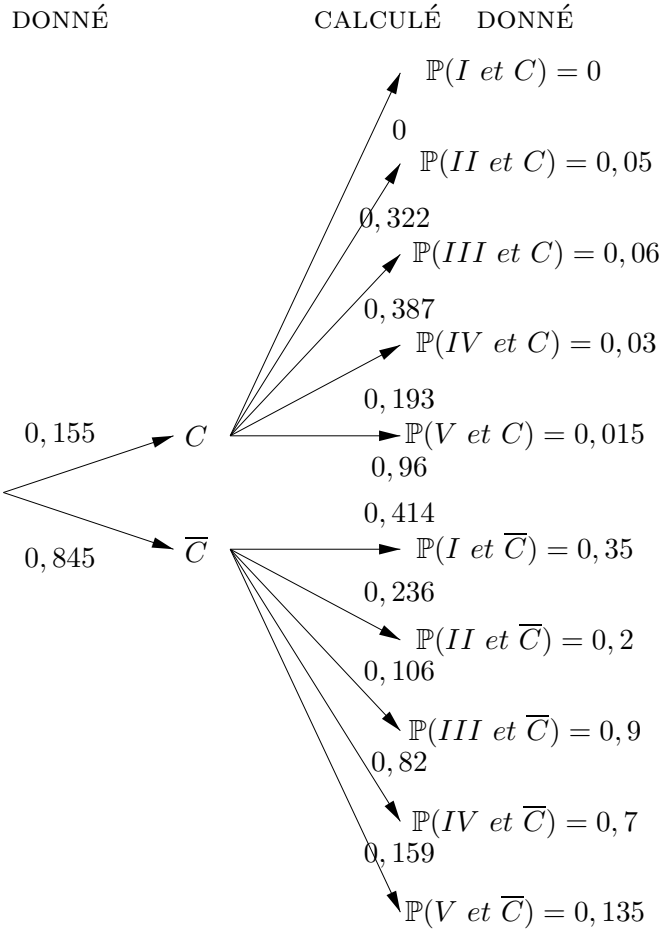
Ainsi $x = \frac{0,05}{0,155} = 0,32$.

Déduire

En dessinant l'arbre qui suit, l'élève applique le théorème de Bayes et peut le formaliser .

Formaliser

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(II \text{ sachant que } C) &= \frac{\mathbb{P}(II\ et\ C)}{\mathbb{P}(C)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(II\ et\ C)}{\mathbb{P}(I\ et\ C) + \cdots + \mathbb{P}(V\ et\ C)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(C \text{ sachant que } II).\mathbb{P}(II)}{\sum_{i=I}^{V} \mathbb{P}(i\ et\ C)}
\end{aligned}$$


DONNÉ
CALCULÉ
DONNÉ
$\mathbb{P}(I \text{ et } C) = 0$
0
$\mathbb{P}(II \text{ et } C) = 0,05$
0,322
$\mathbb{P}(III \text{ et } C) = 0,06$
0,387
$\mathbb{P}(IV \text{ et } C) = 0,03$
0,193
$\mathbb{P}(V \text{ et } C) = 0,015$
0,155
C
0,96
0,414
$\mathbb{P}(I \text{ et } \overline{C}) = 0,35$
0,845
$\overline{C}$
0,236
$\mathbb{P}(II \text{ et } \overline{C}) = 0,2$
0,106
$\mathbb{P}(III \text{ et } \overline{C}) = 0,9$
0,82
$\mathbb{P}(IV \text{ et } \overline{C}) = 0,7$
0,159
$\mathbb{P}(V \text{ et } \overline{C}) = 0,135$

11.6.4 Un autre exercice

Un test rapide de dépistage d'une maladie est fiable à 95%. Par ailleurs, les médecins estiment que la contamination touche 10% de la population. Quelle est la probabilité pour qu'un individu soit malade si son test se révèle positif ? Et s'il était négatif ?

Adoptons les notations suivantes pour les divers événements possibles :

- p représente un individu malade
- $\overline{p}$ représente un individu sain
- $+$ représente un test rapide positif
- $-$ représente un test rapide négatif

A priori, c'est-à-dire avant de passer le test, nous devons considérer qu'un individu a une chance sur dix d'être malade. Les médecins ont fait passer leur test rapide à des gens effectivement malades et d'autres effectivement sains, et en ont déduit les probabilités d'avoir un test positif ou négatif sachant si l'on est malade ou non. C'est ainsi qu'ils ont calculé l'efficacité du test.

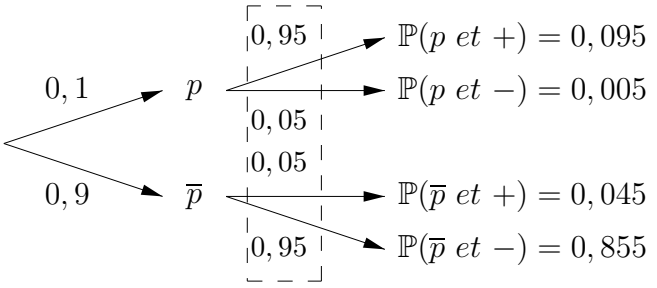
Dire que celle-ci est de 95% signifie que

Interpréter un énoncé

1. pour 95% des individus malades, le test est positif.
2. pour 95% des individus sains, le test est négatif.

Le diagramme ci-dessous modélise la situation.

Modéliser

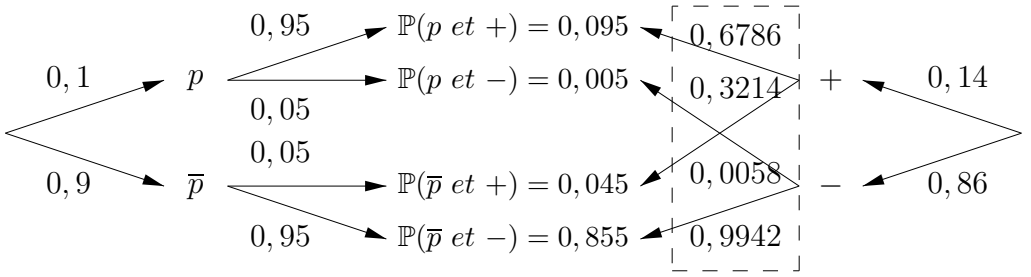


Nous voyons que la probabilité que le test se révèle positif est de $0,095 + 0,045 = 0,14$.

Lire un graphique

Mais ce qui nous intéresse, ce sont les probabilités d'être malade ou sain sachant si le test est positif ou négatif.

Nous allons pour les calculer compléter l'arbre précédent.



Dans l'encadré discontinu, nous calculons les probabilités recherchées. Nous observons que $67,86\%$ des individus dont le test est positif sont effectivement malades, tandis que $99,42\%$ des individus dont le test est négatif sont sains.

Références

[106], [148], [97], [42].

11.7. Fiche N° 6 : Le duopoly de Cournot

11.7.1 L'énoncé

PROBLÈME 11.7.1 *Les firmes* 1 *et* 2 *sont concurrentes, elles fabriquent en un an le même produit en des quantités* q_1 *et* q_2.
Le prix du marché pour une quantité unitaire *du produit est une fonction* P *de la quantité totale* $q_1 + q_2$. *Plus la quantité totale présente sur le marché est grande, plus le prix du marché baisse. Il y a aussi un plafond de* a *unités à ne pas dépasser, afin de ne pas noyer le marché. Ainsi, le prix unitaire pour une quantité totale de* x *unités est donné par la formule* $P(x) = a - x$, *vraie tant que* $x < a$ *(le prix est nul sinon). Quelles quantités les deux firmes doivent-elles produire cette année afin de gagner le plus possible l'une et l'autre, compte tenu de ce que la production de* q *unités entraîne pour la firme productrice un coût évalué à* cq, *où* c *est une constante ?*

Contexte mathématique

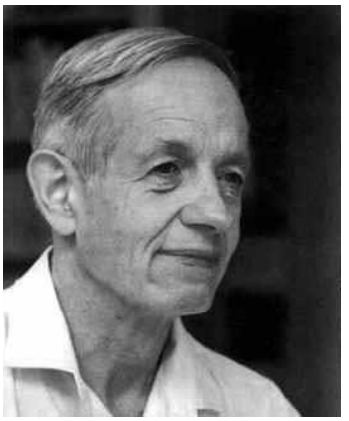
Nous nous intéressons ici à une version ultra-simplifiée d'un modèle de compétition entre deux firmes développé par l'économiste A.A. Cournot en 1838.

Antoine Augustin COURNOT

Antoine A. Cournot, pionnier de l'économie mathématique, naît le 28 août 1801 à Gray, en France. Il étudie les mathématiques à la Sorbonne notamment, en compagnie de Dirichlet. Il obtient un poste à l'Académie de Paris, puis une chaire d'analyse à Lyon. En 1838, il devient inspecteur général de l'éducation publique et meurt à Paris en 1877.

Cournot anticipe de près d'un siècle — mais dans le seul contexte d'un cas particulier — la notion d'équilibre développée par le prix Nobel d'économie J.F. Nash .

L'année 1928 voit la naissance de John F. Nash aux USA. Il étudie les mathématiques au Carnegie Institute of Technology et présente une thèse sur les jeux non-coopératifs *à Princeton. A partir de 1952, il enseigne au MIT, mais est bientôt victime de crises de schizophrénie. Il guérit en 1974 et remporte le prix Nobel d'économie — conjointement avec Selten — en 1994 grâce à un article écrit 45 ans plus tôt.*



John Forbes NASH

Le problème est un problème d'extremum en deux variables. Les fonctions à maximiser sont du second degré, les méthodes classiques sont donc applicables. La situation peut éventuellement aussi être rencontrée à l'occasion de l'étude du calcul des dérivées.

Contexte scolaire

Ce contexte est déterminé d'après le contexte mathématique.

Contexte méthodologique

La situation est plutôt un problème d'application. Le fait que deux variables soient présentes ne permet pas de l'utiliser en vue d'introduire la notion d'extremum, que ce soit en quatrième ou en cinquième année.

11.7.2 Les moyens nécessaires

Les prérequis

Les seuls prérequis sont de nature algébrique. Ils portent essentiellement sur les extrema d'un trinôme du second degré.

11.7.3 Exemple de résolution

Puisqu'aucune des deux firmes ne désire noyer le marché, les quantités produites q_1 et q_2 sont des réels appartenant tous deux à l'intervalle $[0, a[$.

Le profit de la firme i ($i \in \{1, 2\}$) est donné par la formule :

$$\begin{aligned} u_i(q_1, q_2) &= q_i P(q_1 + q_2) - cq_i \\ &= q_i(P(q_1 + q_2) - c) \\ &= q_i(a - q_1 - q_2 - c) \end{aligned}$$

Mettre en équation

Il s'agit de trouver un couple (q_1^*, q_2^*) qui soit la meilleure option pour les deux firmes parmi les couples (q_1, q_2) possibles. Un tel couple s'appelle un *équilibre de Nash*.

En fait, nous cherchons (q_1^*, q_2^*) tel que :

$$\forall q_1 \in [0, a[\ : \ u_1(q_1^*, q_2^*) \geqslant u_1(q_1, q_2^*)$$

et

$$\forall q_2 \in [0, a[\ : \ u_2(q_1^*, q_2^*) \geqslant u_2(q_1^*, q_2)$$

Ces inéquations expriment que le couple (q_1^*, q_2^*) est le plus avantageux pour les deux firmes simultanément.

Chacune des inéquations fournit une relation entre q_1^* et q_2^*. A l'aide des deux relations, on déduit les valeurs de ces inconnues.

Dans une classe de quatrième, nous tenons compte de ce que les deux fonctions u_1 et u_2 sont du second degré. Plus tard, certains préfèrent utiliser le calcul des dérivées. Dans les deux cas, il est bon d'exploiter la *symétrie* présente dans l'énoncé.

Première méthode Posons $q_1 = x$.

Calculer un extremum

$$\begin{aligned} u_1(x, q_2^*) &= x(a - x - q_2^* - c) \\ &= (a - q_2^* - c)x - x^2 \end{aligned}$$

Ce trinôme du second degré prend son maximum en $q_1^* = \frac{a - q_2^* - c}{2}$.
En utilisant la symétrie de la situation, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} q_1^* = \frac{a-q_2^*-c}{2} \\ q_2^* = \frac{a-q_1^*-c}{2} \end{cases}$$

Deuxième méthode Posons $q_1 = x$ et considérons la fonction f donnée par $f(x) = u_1(x, q_2^*) = x(a - x - q_2^* - c)$.

Déterminer un extremum

Déterminons le maximum de f :

$$f'(x) = a - 2x - q_2^* - c$$
$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{a-q_2^*-c}{2}$$
$$q_1^* = \frac{a-q_2^*-c}{2}$$

Vu la symétrie de la situation, les réponses cherchées satisfont aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} q_1^* = \frac{a-q_2^*-c}{2} \\ q_2^* = \frac{a-q_1^*-c}{2} \end{cases}$$

La suite de la résolution est commune aux deux méthodes.

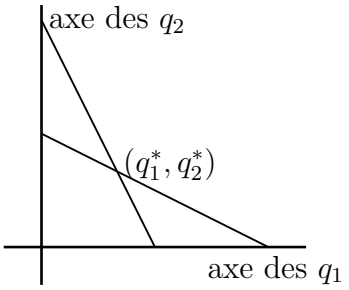
Nous avons un système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 2q_1^* + q_2^* = a - c \\ q_1^* + 2q_2^* = a - c \end{cases}$$

Résoudre dans des cadres différents

que nous pouvons en parallèle résoudre algébriquement et géométriquement (dans un plan muni d'un axe des q_1 et d'un axe des q_2).

La droite donnée par la première équation passe par les points $(\frac{a-c}{2}, 0)$ et $(0, a - c)$. La droite donnée par la seconde équation passe quant à elle par les points $(a - c, 0)$ et $(0, \frac{a-c}{2})$.



Le point d'intersection des deux droites est l'équilibre de Nash, et ses coordonnées sont données par :

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{3}$$

Cette solution vérifie bien la condition $q_1^* + q_2^* < a$, le marché n'est pas noyé !

Référence

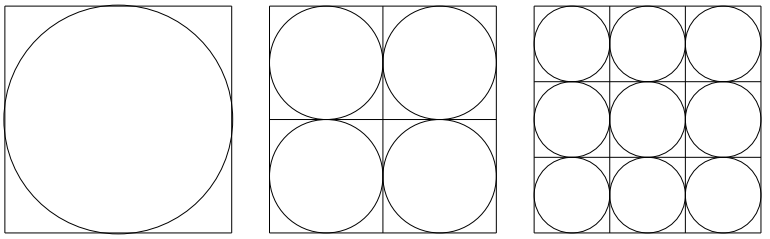
[74].

11.8. Fiche N° 7 : Le problème des confetti

11.8.1 L'énoncé

Problème 11.8.1 *Un fabricant de confetti parfaitement ronds décide de découper ses confetti dans des feuilles de papier carrées selon un réseau carré (voir dessin).*

Comment la proportion de papier perdue varie-t-elle en fonction du diamètre des confetti ? Considérer en particulier le cas de diamètres de plus en plus petits.



Extrait de [158].

Contexte mathématique

Le problème posé, bien que très élémentaire, est connecté à des questions mathématiques avancées. On peut en effet l'associer

- à des problèmes d'optimisation : comment disposer des disques dans un carré de façon à minimiser la place perdue. Ce problème a son équivalent en dimension 3 où il a des applications pratiques non négligeables (problèmes d'empilement) ([5]).
- à des problèmes de pavage du plan (ou de l'espace) : à l'aide de quelles formes géométriques peut-on paver un plan (ou l'espace de dimension 3).
- à des problèmes de théorie de la mesure et de dimension : si après avoir découpé des confetti dans un carré, on inscrit de nouveaux confetti les plus grands possibles aux parties connexes du complémentaire, et si on poursuit le processus à l'infini, quelle est la dimension de Hausdorff de l'ensemble résiduel, et quelle est sa mesure ?

Contexte scolaire

Le problème peut être traité dès les premières leçons de géométrie du degré d'observation. On peut aussi le rencontrer beaucoup plus tard lorsqu'on introduit en 5e année les notions de suite et de limite de suite.

Contexte méthodologique

([5]) La conjecture de Kepler consistait à affirmer que l'empilement de sphères le plus dense est celui *du maraîcher*. Elle a *enfin* été démontrée au début de l'année 1999.

Pour des élèves du premier degré, l'énoncé est un problème destiné à appliquer et entretenir les connaissances acquises. Il est relativement ouvert dans la mesure où certains paramètres peuvent être modifiés facilement : notamment la taille et la forme du papier, où la forme des confetti.

En 5e année, l'énoncé n'est pas vraiment un problème, tout au plus un exercice d'illustration destiné, par exemple, à montrer que des suites constantes peuvent apparaître naturellement. C'est aussi l'occasion de rencontrer une forme indéterminée du type « $0 \times \infty$. »

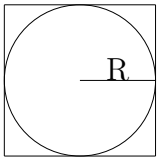
11.8.2 Les moyens nécessaires

Les prérequis

Les formules donnant l'aire d'un carré ou d'un disque sont les seuls prérequis « techniques ». Le concept de variable intervient également.

11.8.3 Exemple de résolution

Prenons d'abord le cas d'un confetti unique, inscrit à la feuille de papier, c'est-à-dire dont le diamètre $2R$ est égal au côté du carré. Dessiner



On constate que le rapport Appliquer une formule

$$\frac{\text{aire du disque}}{\text{aire du carré}} = \frac{\pi R^2}{(2R)^2} = \frac{\pi}{4}$$

est indépendant de la valeur de R.

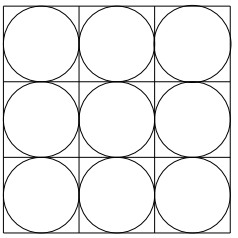
De plus, lorsque l'on considère une surface constituée d'un nombre arbitraire $n \in \mathbb{N}_0$ de carrés de côté $2R$ munis de disques inscrits de rayon R, le rapport Généraliser

$$\frac{\text{aire des disques}}{\text{aire totale}} = \frac{n\pi R^2}{n(2R)^2} = \frac{\pi}{4}$$

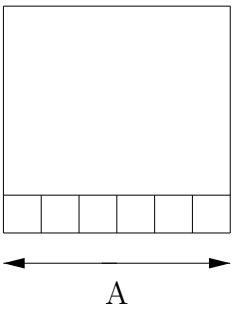
reste encore constant.

Comme n est arbitraire, on peut le choisir tel que $n = m^2$ avec $m \in \mathbb{N}$ de façon à pouvoir configurer nos n carrés sous la forme d'un seul grand carré.

Exemple : $m = 3$ donc $n = 9$. Organiser



Jusqu'ici tous ces carrés avaient même côté $2R$. On peut à présent s'arranger pour que le côté A du grand carré soit toujours égal à 1 en choisissant correctement R.



Comme une bande contient m petits carrés, il faut que $m(2R) = 1$, donc que $R = \frac{1}{2m}$. De cette façon, lorsque m croît dans $\mathbb{N}$, R décroît dans $\mathbb{Q}$. On découpe de plus en plus de confetti dans la feuille carrée de côté 1, mais ceux-ci sont de plus en plus petits et le rapport

$$\frac{\text{aire des confetti}}{\text{aire totale}}$$

reste constant et vaut $\frac{\pi}{4}$

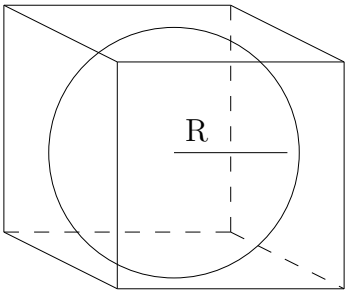
Comme on a choisi une aire totale fixe (même papier à chaque fois), l'aire utilisée pour la fabrication des confetti reste constante.

Conclure, valider

11.8.4 Passage à la dimension 3

Ci-dessus, nous avons recouvert notre feuille de papier d'un quadrillage régulier, à savoir un réseau carré.

Prenons à présent un cube, que nous allons munir d'un réseau cubique dont les mailles s'affineront au fil des étapes.



$$\frac{\text{volume de la sphère}}{\text{volume du cube}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{(2R)^3} = \frac{\pi}{6}$$

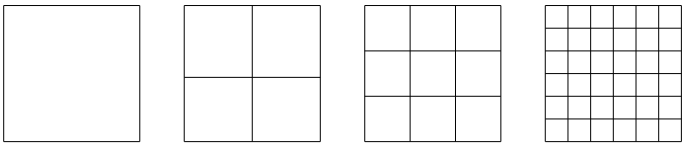
Prenons deux naturels n et m tels que $n = m^3$. Un cube de côté 1 contient m^3 petits cubes de côtés $\frac{1}{2m}$. Le rayon de la sphère inscrite à un tel cube est aussi $R = \frac{1}{2m}$ et le rapport

$$\frac{\text{volume des sphères}}{\text{volume du cube}}$$

sera toujours égal à $\frac{\pi}{6}$. Le volume total des sphères reste constant.

11.8.5 Mise en évidence de quelques suites

- Suite des réseaux :



- Suite A (m, Nombre de subdivisions d'un côté du grand carré) : 1, 2, 3, 4, ...
- Suite B (R, Rayon des confetti) : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, ...
- Suite C (n, Nombre de confetti) : 1, 4, 9, 16, ...
- Suite D (Aire d'un confetti) : $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{16}$, $\frac{\pi}{36}$, $\frac{\pi}{124}$, ...
- Suite E (Aire de tous les confetti) : $\frac{\pi}{4}$, $4\frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{4}$, $9\frac{\pi}{36} = \frac{\pi}{4}$, $16\frac{\pi}{124} = \frac{\pi}{4}$, ...
- Le terme général de la suite E est

$$\pi R^2 n = \pi \left(\frac{1}{2m}\right)^2 m^2 = \frac{\pi}{4}$$

  et c'est bien un nombre constant.

La suite A n'est autre que la suite des naturels. Chacun d'entre eux correspond à un quadrillage particulier.

Les élèves peuvent se rendre compte que C est une sous-suite de A, et que la suite E est constituée des produits des éléments des suites C et D, respectivemenent croissante et décroissante.

11.8.6 Prolongements possibles

Des pavages plans

Réseaux triangulés, hexagonaux (nids d'abeilles).

Des pavages de l'espace

Empilements de boulets, réseau cubique à faces centrées, ...

Références

[71], [114],[158].

11.9. Fiche N° 8 : Le problème de l'eau et du vin

11.9.1 Introduction

Le problème présenté ici a fait l'objet d'un test réalisé auprès d'élèves (des détails de l'expérience sont donnés plus loin), et dont l'un des buts était l'observation de la *compréhension* d'un énoncé lors de sa lecture.

Ceci explique la présence ci-dessous de trois moutures du même problème.

11.9.2 Les énoncés

11.9.2.1 Version « texte »

Problème 11.9.1 *Un premier seau contient une certaine quantité d'eau, un second seau contient une même quantité de vin.*
On prélève un verre de vin dans le seau à vin, et on le verse dans le seau à eau.
A l'aide du même verre, on prélève ensuite un verre du mélange obtenu dans le seau à eau et on le reverse dans le seau à vin.

- *Y a-t-il plus d'eau dans le seau à vin que de vin dans le seau à eau ?*
- *Y en a-t-il moins ?*
- *Les deux quantités sont-elles égales ?*
- *Qu'est-ce qui change si le second seau contient de l'huile à la place du vin ?*

11.9.2.2 Version « mixte »

Problème 11.9.2 *Un seau A contient une quantité V d'eau, un seau B contient une même quantité de vin.*
On prélève un volume v de vin dans le seau B , et on le verse dans le seau A.
On prélève ensuite un volume v dans le seau A et on le reverse dans le seau B.

- *Y a-t-il plus d'eau dans le seau B que de vin dans le seau A ?*
- *Y en a-t-il moins ?*
- *Les deux quantités sont-elles égales ?*
- *Qu'est-ce qui change si le seau B contient de l'huile à la place du vin ?*

11.9.2.3 Version « quantifiée »

Problème 11.9.3 *Un seau A contient 10 l d'eau, un seau B contient 10 l de vin.*
On prélève 25 cl de vin dans le seau B, et on le verse dans le seau A.
On prélève ensuite 25 cl dans le seau A et on le reverse dans le seau B.

- *Quel est le volume de vin dans le seau A et quel est le volume d'eau dans le seau B ?*
- *Qu'est-ce qui change si le seau B contient de l'huile à la place du vin ?*

Contexte mathématique

On peut considérer que la situation relève d'une théorie de la mesure des grandeurs. En cela, elle appartient à un courant du développement mathématique dont l'importance n'est plus à démontrer.

Cependant, de ce point de vue, la situation est de portée limitée, et ce sont surtout les facultés de modélisation qui devront être mises en œuvre. En particulier, il convient que l'élève admette qu'un modèle est nécessairement imparfait et qu'il est donc licite — lors d'une première modélisation — de considérer que tout en étant mélangé à l'eau, le vin conserve son volume propre.

Contexte scolaire

Vu le peu de connaissances techniques mises en œuvre, la situation pourrait être présentée à des élèves du début du secondaire. Toutefois, les difficultés liées à la modélisation semblent plutôt la réserver à la fin de cet enseignement.

Contexte méthodologique

La situation pourrait être exploitée en tant que problème isolé, mais non comme problème d'introduction ni comme problème intégré à une séquence organisée visant à l'introduction de concepts mathématiques nouveaux.

Elle pourrait cependant trouver sa place dans une séquence consacrée à un apprentissage de la modélisation.

11.9.3 Les moyens nécessaires

Les prérequis

D'un point de vue mathématique, il suffit de connaître — de façon pratique — le principe de la conservation des volumes et la règle d'addition des mesures de grandeurs disjointes.

Cependant, certaines façons d'aborder la résolution font intervenir des proportions. D'un point de vue physique, il faut dès lors que l'élève puisse distinguer une proportion d'un volume.

11.9.4 Exemple de résolution

11.9.4.1 Première méthode

Cette première méthode présente l'avantage d'être plus concrète, de paraître plus proche du problème. Elle a cependant le défaut d'être techniquement plus compliquée et de ne fournir une solution que dans le cas d'un mélange homogène (à savoir ici le cas de l'eau et du vin, on ne peut généraliser au cas de l'eau et de l'huile). De plus, il ne faut pas tenir compte de ce que le vin contient déjà de l'eau.

Dans ce qui suit, une notation telle que « V_{eau} » doit être considérée comme une abréviation de « un volume V d'eau ».

Etape 1 On a V_{eau} en A et V_{vin} en B.

Etape 2 On a $V_{eau} + v_{vin}$ en A et $V_{vin} - v_{vin}$ en B.

La proportion de vin en A est donc de $\frac{v}{V+v}$.

Modéliser par un rapport

Etape 3 On a $V_{eau} + v_{vin} - v_{mix}$ en A et $V_{vin} - v_{vin} + v_{mix}$ en B.

Puisque le mélange est homogène, la *proportion* de vin dans le volume v_{mix} est la même que dans le seau A. Le *volume* de vin dans le volume v_{mix} est donc $\frac{v^2}{V+v}$.

Maîtriser la conservation des rapports

Par conséquent, le volume de vin restant dans le seau A est v_{vin} auquel on a soutiré $\frac{v^2}{V+v}$, à savoir :

Repasser d'une proportion à un volume

$$v - \frac{v^2}{V+v}$$

D'autre part, le seul volume d'eau présent en B à l'étape 3 est celui qui est dans v_{mix}, à savoir v, diminué du volume de vin dans v_{mix}, ou encore :

$$v - \frac{v^2}{V+v}$$

Les deux volumes sont donc égaux.

11.9.4.2 Deuxième méthode

Il n'est en réalité pas nécessaire de déterminer avec précision la quantité de vin dans v_{mix}. On peut donc simplifier la méthode précédente et répondre en même temps à la question de l'eau et de l'huile.

Etape 1 On a V_{eau} en A et V_{vin} en B.

Etape 2 On a $V_{eau} + v_{vin}$ en A et $V_{vin} - v_{vin}$ en B.

Etape 3 On a $V_{eau} + v_{vin} - v_{mix}$ en A et $V_{vin} - v_{vin} + v_{mix}$ en B.

Or, v_{mix} est composé d'un certain volume d'eau et d'un certain volume de vin. On peut écrire :

Distinguer les composants d'un mélange

$$v_{mix} = v'_{eau} + v''_{vin}$$

Remarquons que si l'on est en présence d'huile plutôt que de vin, l'un de ces deux petits volumes peut éventuellement être nul, et cela ne modifie d'aucune façon la suite de la résolution.

Le volume de vin restant en A est en effet :

$$v_{vin} - v''_{vin}$$

et le volume d'eau présente en B est v'_{eau}, c'est-à-dire :

$$v_{mix} - v''_{vin}$$

via la composition du volume v_{mix}. Comme de plus les volumes v_{mix} et v_{vin} sont égaux par hypothèse, la résolution est terminée et vaut pour tous les types de mélanges.

11.9.5 Etude d'une expérience menée auprès d'élèves

Une dizaine d'élèves de cinquième ou de sixième année du secondaire ont été testés, tous suivant six heures de mathématique par semaine et la plupart suivant également deux heures supplémentaires consacrées à la préparation aux études supérieures.

Ces élèves proviennent d'athénées royaux et de collèges. Chacun d'eux a été filmé durant une vingtaine de minutes.

Endéans ce laps de temps, il leur a été demandé de lire les trois énoncés présentés ci-avant, de choisir l'un d'entre eux, puis de résoudre le problème choisi au tableau. La liberté leur était laissée de changer d'énoncé en chemin s'ils en éprouvaient le besoin.

Nous ne pouvons pas appliquer ici le découpage des sessions de résolution en épisodes comme nous l'avons fait à la fiche 1, car ce type d'analyse nécessite que l'élève agisse sans aide extérieure. Or, dans ce problème, nous avons dû sans cesse diriger les élèves afin de pouvoir tirer d'eux des résultats. Ce qui mène à la première conclusion.

11.9.5.1 Première conclusion : un problème trop compliqué ?

D'emblée, avouons que dans le temps imparti, AUCUN élève n'est parvenu au bout de la résolution malgré un soutien plus ou moins appuyé au cours de la session.

Les conclusions suivantes donnent des pistes pour l'explication de cet échec, mais d'après l'aveu de beaucoup d'élèves, la modélisation d'une situation « concrète » a été fortement perturbatrice. De plus, de petits problèmes parasites se sont greffés, comme le décantage du vin dans l'eau ou la différence de densité des deux liquides.

Certains élèves ont exprimé de l'étonnement lorsque nous les avons priés d'utiliser des calculs pour prouver leurs réponses. Ils n'avaient apparemment pas tendance à introduire une quantification dans une situation au départ non quantifiée.

11.9.5.2 Deuxième conclusion : l'appel du numérique

Vu cette peur de la modélisation, il est sans doute tout naturel qu'aucun élève n'ait choisi l'énoncé « texte ».

Les choix se sont répartis équitablement sur les deux autres versions, qui offrent un aspect un peu plus prédigéré et sont plus proches des habitudes.

Remarquons que les élèves ayant choisi la version « mixte » au départ se sont majoritairement orientés par après vers une version contenant des données numériques, soit par changement d'énoncé, soit par l'introduction personnelle de données.

La réflexion chez des élèves de ce niveau tend donc à se baser sur des valeurs numériques, et une généralisation ne se fait qu'éventuellement par la suite. Les expressions littérales ne sont plus inconnues (comme ce serait le cas au début du secondaire), mais ne sont pas encore suffisamment maîtrisées pour servir de support au raisonnement.

11.9.5.3 Troisième conclusion : attention aux *a priori*

Nous avons remarqué une autre conséquence de la présentation ([6]) de l'énoncé.

La plupart des élèves testés furent dès la lecture convaincus d'une réponse, et n'en ont pas démordu jusqu'à la fin. Il était clair pour eux qu'il restait plus de vin en A que d'eau en B, et l'intuition de cette réponse fut forte au point de rendre la résolution totalement triviale aux yeux de certains.

L'origine de l'intuition est claire : visuellement, un verre de *vin pur* est transvasé de A en B, et un même verre de *mélange* est transvasé de B en A. Cette image forte fait oublier les modifications de volumes au cours des opérations (nous en reparlons dans la cinquième conclusion).

Notons encore qu'un élève, par le biais d'erreurs successives, est parvenu à prouver tout le contraire de son intuition de départ. Il était tout aussi convaincu de sa réponse finale qu'il l'était de sa réponse initiale. Ce qui montre encore — si besoin est — une lacune dans l'examen critique de sa propre démarche.

11.9.5.4 Quatrième conclusion : une confusion aux lourdes conséquences

Cette expérience met également en évidence la terrible confusion qui existe entre les *proportions* d'une part et les *volumes* d'autre part.

Une erreur « classique » est la suivante :

> *Le seau A et le seau B ont chacun un volume de 10 litres. On prend* $\frac{1}{5}$ *de B pour le verser en A, puis on prend* $\frac{1}{5}$ *de A pour le reverser en B.*

Plus loin, nous donnons le récit d'une résolution dans lequel cette confusion intervient.

Voici un autre exemple, tiré de la résolution d'un élève ayant choisi la version quantifiée de l'énoncé :

([6]) Dans le sens où une présentation en dehors d'un contexte réel n'aurait peut-être pas amené ce type de réaction.

> *Après qu'on ait versé* 25 *cl de vin dans le seau A, le vin représente* $\frac{1}{41}$ *du seau A.* Après beaucoup de soutien, l'élève dit que l'*on a donc aussi* $\frac{1}{41}$ *de vin dans un verre de mélange. En volume, on a donc*
>
> $$\frac{25}{41} \text{ cl}$$
>
> *de vin dans le verre, et par conséquent, on a*
>
> $$\frac{16}{41} \text{ cl}$$
>
> *d'eau dans le verre !*

La confusion peut être plus subtile et venir des notations elles-mêmes. Un élève dit :

> *On trouve* $\frac{1}{41}$ cl *de vin dans le seau A lorsqu'on a mis les* 25 cl *de vin dans le seau A.*

Le même élève *écrit* au tableau :

> *En B, il y a* $\frac{40}{41}$.25 cl *d'eau.*

mais il est incapable de réaliser qu'il a répondu à la question, car pour lui, le calcul permettant de trouver le volume n'est pas fini. Il voudrait encore diviser par 25, ou exécuter une autre opération.

Ainsi, même chez les élèves qui ont manifestement compris la différence entre volume et proportion, apparaît une difficulté d'expression due à une maîtrise incomplète des notations appropriées.

Remarquons qu'il n'est pas rare de lire des recettes de cuisine dans lesquelles on dit par exemple : *prenez un volume de vodka pour trois volumes de gin* et autres ... Le contexte concret de notre problème faisant immanquablement appel à de telles références, nous pouvons peut-être voir là une origine de la confusion entre proportion et volume.

11.9.5.5 Cinquième conclusion : des problèmes algébriques

Parallèlement à la confusion mise en évidence ci-dessus, et peut-être à cause d'elle, deux problèmes — liés — surgissent au niveau algébrique.

Oubli de la conservation du volume total

> Beaucoup d'élèves oublient que le volume total de liquide présent à chaque instant est constant, et qu'il est donné par $2V$. Cette constante leur offre pourtant une possibilité de contrôle de leurs calculs.

Difficulté de trouver la proportion de vin dans l'eau

Vu que la modification des volumes n'est pas toujours bien prise en compte, et que les volumes sont confondus avec des proportions, il est vain d'espérer une expression correcte de la proportion de vin dans le seau A (et donc dans le verre de mélange).

Au *mieux* cette proportion est-elle donnée comme étant $\frac{v}{V}$. Et le pas vers le volume n'est alors pas encore franchi.

Notons, en sus, des difficultés de nature purement calculatoire (ne pas pouvoir réduire une fraction comme $\frac{25}{1025}$, ...).

11.9.6 La résolution *in extenso* d'un élève

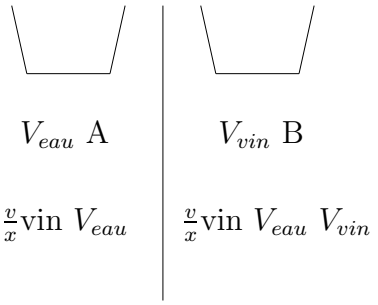
Comme on le constate à la lecture de ce qui suit, la principale difficulté rencontrée par cet élève a été le choix d'une modélisation à l'aide de proportions plutôt qu'à l'aide de volumes.

Après lecture des énoncés, l'élève choisit la version « mixte ». Il décrète très vite qu'il y a plus de vin en A que d'eau en B.

> *Le fait que du vin va revenir de A vers B ne semble pas lui indiquer que le vin présent en A après le premier transvasement va diminuer lors du second transvasement.*

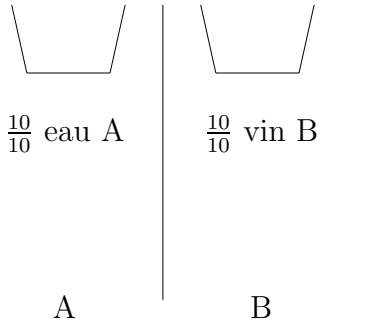
Pour fixer le volume v, il propose de prendre un *volume de* 10% *de B*. Cette suggestion révèle la présence de la confusion, ainsi que d'un attrait — voire d'une nécessité — des exemples numériques.

Il dessine :



Il dit qu'en A, la partie de vin est $\frac{v}{x}$, que la partie d'eau est V, et donc que l'on a montré ce qu'on voulait (sic).

Mais il ne s'arrête pas là et introduit à présent des valeurs.

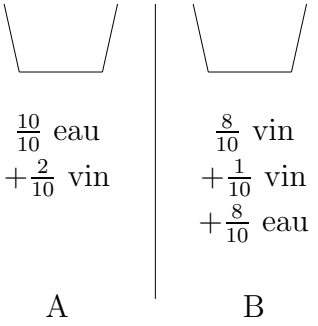


Il prend $\frac{2}{10}$ de vin en B et les verse en A. En A, on a donc :

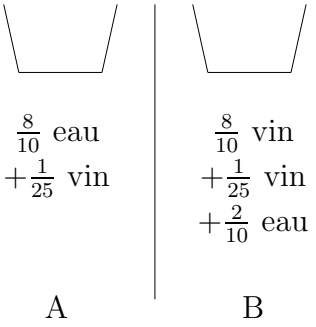
$$\frac{10}{10}\text{ eau} + \frac{2}{10}\text{ vin}$$

Comme l'eau et le vin sont mélangés, lorsqu'on prend $\frac{2}{10}$ de A, on prend en fait $\frac{2}{10}$ de l'eau et $\frac{2}{10}$ du vin.

Ici, l'élève ne se rend donc pas compte que $\frac{2}{10}$ de $\frac{12}{10}$ ne donne pas le même volume que $\frac{2}{10}$ de $\frac{10}{10}$.



Il réfléchit, puis « corrige » sa réponse :



Comme $\frac{1}{25} < \frac{2}{10}$, il y a donc plus d'eau en B que de vin en A, et on a prouvé ce qu'on voulait.

> *A ce stade, l'élève a donc prouvé le contraire de ce qu'il avait proposé. Ce résultat ne le gène aucunement, puisqu'il semble avoir oublié lui-même sa thèse de départ.*

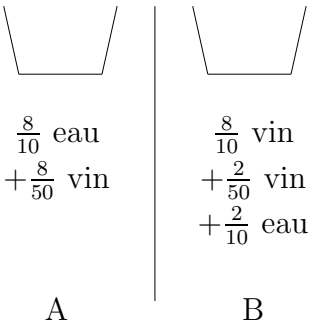
Nous lui suggérons alors de compter le total des volumes présents.

Il trouve $\frac{18}{10} + \frac{2}{25}$ et voit que ce n'est pas égal à $\frac{20}{10}$. Il avait donc de plus omis la conservation du volume total. Il recommence son calcul.

Il va prendre $\frac{1}{5}$ du seau A — où se trouvent $\frac{10}{10}$ d'eau et $\frac{2}{10}$ de vin — pour le verser en B où se trouvent $\frac{8}{10}$ de vin.

L'élève n'a toujours pas exprimé de volume, et nous lui demandons de relire l'énoncé. Nous lui demandons si le volume pris en B ($\frac{1}{5}$) et le volume pris en A ($\frac{1}{5}$) aux étapes idoines sont égaux.

Il revoit son calcul :



Et comme $\frac{2}{10} > \frac{8}{50}$, il y a donc plus d'eau en B que de vin en A.

> *L'élève n'a apporté de correction qu'à son erreur de calcul* $\frac{1}{25} + \frac{1}{25} = \frac{2}{10}$, *mais sa méthode de résolution reste inchangée.*

Cette fois, nous lui disons que les deux parts de $\frac{1}{5}$ qu'il considère ne correspondent pas au même volume. Cette discussion dure quelques minutes, mais il ne comprend toujours pas la distinction entre le volume et la proportion. Les idées préconçues sont donc tenaces et très difficiles à renverser.

Nous lui suggérons alors d'essayer de reprendre le problème avec des seaux contenant chacun 10 litres de liquide, mais il avoue ne pas savoir comment s'y prendre.

Enfin, un déclic se fait, et il comprend. L'instant est clairement marqué sur son visage lorsque l'on visionne la bande vidéo !

Il prend $V = 10\,l$ et $v = 2\,l$, puis dit que l'on doit en fait prendre $\frac{1}{6}$ des $\frac{10}{10}$ eau$+\frac{2}{10}$ vin pour avoir le même volume que le $\frac{1}{5}$ de vin pris au départ.

En effet,

$$\frac{1}{6} \text{ de } 12l = \frac{1}{5} \text{ de } 10l$$

Le temps imparti s'achève ici, mais l'élève aurait sans aucun doute abouti à la bonne réponse avec quelques minutes de plus.

Troisième partie

Séquences d'enseignement

Chapitre 12

Du discret au continu : l'intégrale

12.1 Présentation générale 334
12.1.1 Des objectifs en termes de compétences 335
12.1.2 Une mise au point par étapes 336
12.2 L'organisation pratique de l'expérience 339
12.2.1 Quelques renseignements généraux 340
12.2.2 Méthodologie 341
12.3 Un compte-rendu de l'expérimentation : la phase d'intériorisation . . 342
12.3.1 Extraits des notes fournies aux élèves concernant la section 1 : « Quelques situations initiales » 343
12.3.2 Commentaires et remarques 346
12.3.3 Extraits des notes fournies aux élèves concernant la section 2 : « Comment discrétiser un phénomène continu ? » 348
12.3.4 Commentaires et remarques 351
12.4 Un compte-rendu de l'expérimentation : la phase de condensation . . 353
12.4.1 Extraits des notes fournies aux élèves concernant la section 3 : « Le contrôle de l'approximation » 354
12.4.2 Extraits des notes fournies aux élèves concernant la section 4 : « Une définition procédurale de l'intégrale » 356
12.4.3 Commentaires et remarques 363
12.4.4 Extraits des notes fournies aux élèves concernant la section 5 : « Un théorème miraculeux ou naturel ? » 365
12.4.5 Extraits des notes fournies aux élèves concernant la section 6 : « Réinvestissement » 373

12.4.6 Commentaires et remarques 375
12.5 Un compte-rendu de l'expérimentation : la phase de réification 377
12.6 Des conclusions ... préliminaires 378
12.6.1 Quelques réactions des élèves 379
12.6.2 Quelques réactions des enseignants 380
12.6.3 Parmi nos premières conclusions 381
12.7 Postérité : une nouvelle version des notes de cours 382

12.1. Présentation générale

Ce chapitre est consacré à la description et l'analyse d'une séquence d'enseignement, expérimentée dans diverses classes de 6e transition durant le 3e trimestre de l'année scolaire 1997-1998. Après concertation avec les enseignants disposés à accueillir l'expérience dans leurs classes, le choix du sujet à enseigner s'est porté sur *l'intégrale* et le *théorème fondamental de l'analyse*.

12.1.1 Des objectifs en termes de compétences

L'objectif principal de l'expérimentation était d'étudier sur le terrain les questions liées à la mise au point d'une séquence d'enseignement en accord avec les conceptions de A. Sfard décrites au chapitre 10. La méthodologie de l'enseignement prévu s'est donc inscrite dans ce que nous avons appelé la *problématisation du cours de mathématiques* (cfr. chapitre 11) : des situations-problèmes sont l'occasion de dégager des procédures de calcul ou de raisonnement, puis de faire progresser ces procédures vers des stades de plus en plus conceptuels.

Dès le début de l'expérience, il a été convenu de construire l'intégrale en terme d'évaluation de certaines grandeurs par encadrements de plus en plus précis, et donc d'insister autant sur le processus d'approximation lui-même que sur le passage à la limite qui lui fait suite.

Dans ce contexte, l'outil technique retenu a été la notion de somme de Darboux, puisque l'aspect « encadrement d'une grandeur » y est fondamental.

Ces choix arrêtés, les principales compétences à atteindre au point de vue disciplinaire ont été définies. L'enseignement à mettre au point devait rendre chaque élève capable :

- d'encadrer par des sommes de Darboux certaines quantités dont l'expression élémentaire est un produit d'un type particulier (telles que l'énergie électrique, le travail, la distance parcourue, l'aire, ...),
- d'écrire l'intégrale associée à la valeur exacte d'une quantité approchée par une somme de Darboux,
- de se servir d'une calculatrice ou d'un logiciel pour calculer la valeur d'une somme de Darboux,
- de déterminer une borne supérieure de l'erreur commise en approchant une intégrale par une somme de Darboux,
- d'identifier les aspects linéaires (par rapport aux fonctions à intégrer, aux bornes d'intégration, ...) de l'intégrale,
- de justifier et d'utiliser à bon escient le théorème fondamental de l'analyse qui relie l'évaluation d'une intégrale au calcul d'une primitive.

La place à réserver aux situations-problèmes et la définition des compétences disciplinaires appropriées ont assuré la cohérence du projet à travers toutes les étapes de son évolution.

12.1.2 Une mise au point par étapes

La mise au point de l'ensemble de la séquence d'enseignement a été réalisée en plusieurs étapes.

Première étape : la construction d'un scénario, au départ de situations-problèmes pertinentes, et en accord avec l'évolution d'un stade procédural à un stade structural.

Ce scénario a été découpé comme suit. Les deux premières sections, intitulées :

- Quelques situations initiales,
- Comment discrétiser un phénomène continu ?

ont été consacrées à la phase d'*intériorisation*, c'est-à-dire de première familiarisation avec le processus à étudier.

Les quatre sections suivantes, intitulées :

- Le contrôle de l'approximation,
- Une définition procédurale de l'intégrale,
- Un théorème miraculeux ou naturel ?
- Réinvestissement,

ont été consacrées à la phase de *condensation*. Pour mémoire, cette phase cruciale dans le schéma d'A. Sfard consiste à faire évoluer le processus étudié vers un statut (idéal) de concept, à travers diverses séquences pédagogiques construites autour de quelques problèmes-clefs.

La dernière section, intitulée :

- Une synthèse théorique,

a été entièrement consacrée à la phase de *réification*, qui est celle qui fixe, ordonne et structure en termes conceptuels les résultats de toutes sortes accumulés dans les deux phases précédentes.

Deuxième étape : la rédaction d'un texte complet et autonome — c'est-à-dire qui se suffise à lui-même — adaptable à la fois aux élèves et aux enseignants, et qui soit en accord avec le scénario précédemment mis au point.

Cet aspect de l'expérience a été l'un des plus difficiles à gérer, à cause des contraintes multiples, et parfois contradictoires, qu'il a fait naître.

Ainsi, au début de la séquence, il est apparu qu'il valait mieux ne pas s'encombrer d'hypothèses techniques lorsque l'objectif prioritaire était de maîtriser un processus de discrétisation relativement subtil. Mais il devenait alors périlleux d'écrire un texte qui, la phase d'intériorisation une fois dépassée, pouvait paraître imprécis, sinon incorrect. Il convenait à tout le moins d'isoler dans la suite de la séquence quelques moments privilégiés où ces questions de précision dans les hypothèses devaient trouver des réponses appropriées.

Une autre contrainte est apparue dans la nécessité de fournir des solutions institutionnalisées ([1]) à certains problèmes — afin qu'elles soient à la disposition de tous les élèves — sans pour autant désamorcer l'intérêt de ces problèmes.

En fait, et de manière assez naturelle, c'est la définition d'un *style*, qui parvienne à assumer et à dépasser à la fois toutes les contraintes liées à la problématisation, qui s'est retrouvée au cœur de toutes les difficultés de rédaction.

Troisième étape : l'expérimentation dans les classes.

Comme signalé plus haut, un consensus s'est établi dès les premiers contacts avec les enseignants quant à l'objectif de cette étape de l'expérience : confronter le schéma de problématisation du cours à la réalité quotidienne des classes, et corriger en conséquence la première rédaction de la séquence d'enseignement.

L'observation a donc essayé de répondre à ces objectifs, et a été dès lors essentiellement qualitative : critique de l'efficacité à court terme du schéma, révision du vocabulaire, de la phraséologie, du style et du contenu des notes, relevé des comportements caractéristiques des élèves, ... Dans ce contexte, et vu la taille réduite de l'échantillon, il n'a pas été possible d'utiliser des méthodes d'investigation statistique, de comparaison avec des groupes témoins, ...

D'autre part, la méthodologie toute particulière à mettre en œuvre avec les élèves, en regard des exigences multiples de la problématisation, a interféré avec la rédaction du texte jusqu'à le faire modifier pendant l'expérience elle-même. En effet, les changements de rythmes entre les activités de résolution de problèmes, les institutionnalisations de certaines solutions, les approches théoriques, ... ont été parfois bien difficiles à stabiliser dans les classes.

Le but de cette phase expérimentale était en tous cas de tester un prototype de séquence d'enseignement sur le terrain, en s'adaptant à toute une série de nouvelles contraintes propres à la vie d'une classe : le niveau moyen des connaissances, la sensibilité particulière à tel ou tel aspect d'un problème, le temps disponible, le respect des programmes, ...

Quatrième étape : la révision du texte à la suite de l'expérimentation dans les classes.

([1]) Au sens donné à ce mot dans le chapitre 5.

Le texte complet de cette révision est l'objet de la dernière section de ce chapitre. La comparaison de ce nouveau texte avec les extraits des différentes versions qui ont été distribuées aux élèves lors de l'expérimentation — et qui sont reproduites dans les compte-rendus de l'expérience ci-après — permettra de mesurer le chemin parcouru. Il n'en reste pas moins à expérimenter encore cette nouvelle version, avant de la modifier peut-être à nouveau : rien n'est jamais acquis ou définitif dans l'enseignement d'un sujet tel que l'intégrale !

12.2. L'organisation pratique de l'expérience

12.2.1 Quelques renseignements généraux

L'expérience s'est déroulée dans trois classes de sixième transition ou technique, sous la conduite d'enseignants chevronnés :

- une classe de sixième transition générale (option de mathématiques à 6 périodes par semaine), composée de 10 élèves et prise en charge par Chantal Terryn (du 20 avril au 8 mai 1998),
- une classe de sixième transition générale (option de mathématiques à 6 périodes par semaine), composée de 22 élèves et prise en charge par Luc Terryn (du 20 avril au 14 mai 1998),
- une classe de sixième technique de qualification (chimie) (option de mathématiques à 4 périodes par semaine), composée de 7 élèves et prise en charge par Yves Hanssens (du 4 mai au 29 mai 1998).

Dans le cas de la classe de Yves Hanssens, et pour des raisons d'organisation des cours propres à l'établissement scolaire concerné, seules 3 heures sur les 4 ont été consacrées au projet qui nous intéresse. En tenant compte de la grille horaire des divers professeurs et des congés scolaires du mois de mai, le nombre d'heures effectivement consacrées au projet s'est trouvé réparti comme suit :

- Chantal Terryn : 13 heures,
- Luc Terryn : 20 heures,
- Yves Hanssens : 10 heures.

Durant la totalité de ces heures de cours, l'un d'entre nous au moins était présent à titre d'observateur (silencieux) dans les classes. Ainsi, Frédéric Pourbaix a assisté à toute l'expérience dans la classe de Chantal Terryn, et Philippe Tilleuil a fait de même dans les classes de Luc Terryn et de Yves Hanssens ; Guy Noël a aménagé son emploi du temps pour suivre quelques cours dans les classes de Chantal et Luc Terryn.

Cette répartition ne tient pas compte d'un certain nombre d'heures de cours qui ont été consacrées ultérieurement à des activités classiques de fixation du calcul intégral.

12.2.2 Méthodologie

Lors du travail par *situations-problèmes*, les élèves se sont regroupés de la manière suivante :

- dans la classe de Chantal Terryn : par groupes de 2, 3 ou 4 élèves (bancs assemblés),
- dans la classe de Luc Terryn : par groupes de 2 ou 4 élèves (bancs alignés),
- dans la classe de Yves Hanssens : un groupe de 3 et un groupe de 4 élèves (bancs assemblés).

La plupart du temps, la lecture de textes mathématiques s'est faite individuellement, mais il y a eu quelques essais d'une pratique différente chez Luc Terryn et Yves Hanssens (cfr. ci-dessous le compte-rendu détaillé). Les synthèses théoriques ont presque toujours été prises en charge par les professeurs.

En général, les textes ont été distribués section par section de telle sorte que des éléments de solution d'un problème puissent être présentés le cas échéant dans la section qui suivait celle où ce problème était posé. Malheureusement, il n'a pas été possible de disposer de matériel informatique (ordinateurs munis de tableurs ou de logiciels spécialisés) : seules des calculatrices scientifiques ont été utilisées par les élèves.

Il reste à signaler qu'indépendamment de la mise en œuvre du projet, un cours sur le calcul des primitives — sans relation signalée avec la notion d'intégrale — avait déjà eu lieu dans les trois classes au début du deuxième trimestre. Ceci explique que le calcul des primitives n'a quasiment pas été développé dans les séquences dont il est question ici.

12.3. Un compte-rendu de l'expérimentation : la phase d'intériorisation

Avertissement. *Cette section et les deux suivantes sont consacrées à un compte-rendu de l'expérimentation dans les classes. Ce compte-rendu est à chaque fois précédé d'extraits des notes de cours fournies aux élèves. Il n'a pas été jugé utile de livrer ici l'entièreté de ces notes* ([2]). *Seules les parties dont l'effet dans les classes a été le plus marqué ont été reproduites ; les points de suspension « . . . . . » signalent des parties omises. A titre documentaire, les notes dans leur version complète comportaient 75 pages* ([3]).

([2]) Au départ d'un noyau commun, ces notes ont souvent évolué dans des directions différentes suivant les desiderata des trois enseignants concernés.

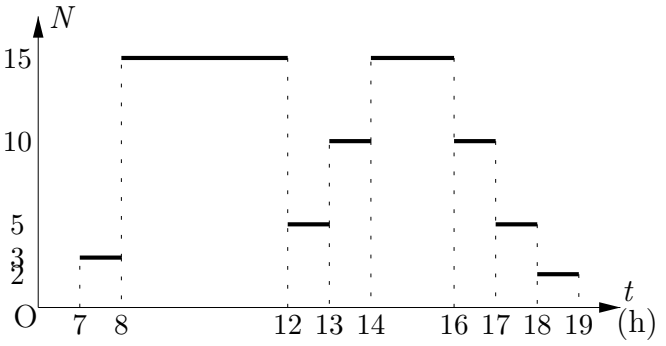
([3]) Mais la version simplifiée distribuée aux élèves de Yves Hanssens ne comptait qu'une trentaine de pages.

12.3.1 Extraits des notes fournies aux élèves concernant la section 1 : « Quelques situations initiales »

Deux situations élémentaires

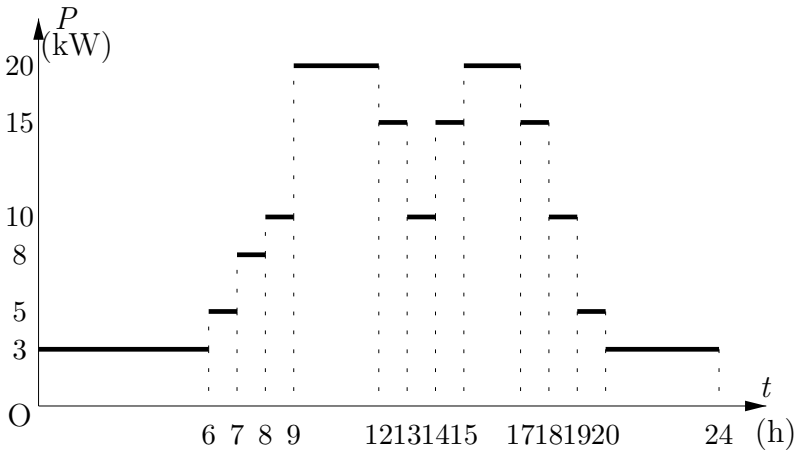
Problème 1 *Dans une entreprise de taille moyenne spécialisée dans la vente par correspondance, le traitement des bons de commande est assuré par un service du département « Comptabilité », qui comporte 15 employés. On estime qu'un employé traite 10 bons de commande en 1 heure. Le graphique ci-dessous décrit le nombre N d'employés présents en fonction du moment de la journée, les premiers employés arrivant à 7 heures du matin (il en faut !) et les derniers quittant le bureau vers 19 heures.*

On demande de représenter heure par heure, dans un tableau ainsi que graphiquement, la quantité de bons de commande traités dans le département depuis le début de la journée.



Les compagnies d'électricité établissent la facture de leurs clients en fonction de l'énergie électrique qu'ils consomment. Cette énergie électrique dépend de la puissance demandée par les différents appareils électriques et du temps pendant lequel cette puissance est demandée. Si, par exemple, une ampoule électrique d'une puissance de 60 watts reste allumée pendant 5 heures dans une maison, elle consomme une énergie de 300 wattheures, ou de 0,3 kilowattheures (en symbole : 300 Wh ou 0,3 kWh.) Si le kilowattheure est facturé à 4,80 F (hors T.V.A.), un tel éclairage coûte donc 1,44 F.

Problème 2 *Dans l'atelier d'un travailleur indépendant, la puissance électrique nécessaire à faire fonctionner les différentes machines est décrite dans le graphique ci-dessous en fonction du moment de la journée.*



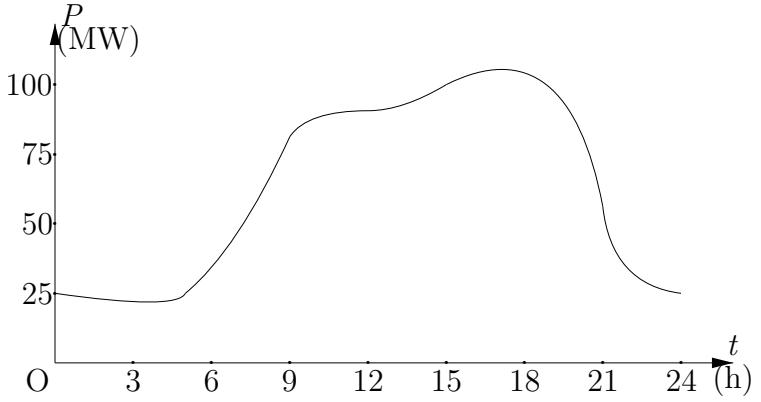
On demande de représenter heure par heure, dans un tableau, ainsi que graphiquement, l'énergie électrique consommée dans cet atelier depuis le début de la journée.

Un problème : la consommation d'énergie électrique d'une ville

La demande en puissance électrique varie d'après le moment de la journée. Dans certains cas — par exemple, celui de l'atelier considéré ci-dessus — cette demande est relativement constante sur des périodes de temps appropriées, et ne varie que par paliers.

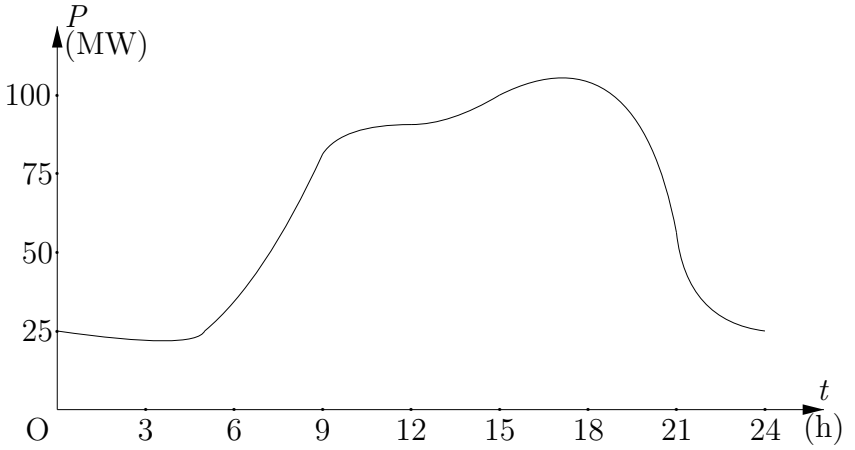
Mais lorsqu'on considère la consommation électrique à une plus grande échelle — par exemple, à l'échelle d'une ville — vu le grand nombre de consommateurs, la demande totale varie constamment, et il n'est plus possible de distinguer des paliers. Une telle demande peut se visualiser à l'aide d'une courbe continue, comme le propose le problème suivant.

Problème 3 *La puissance électrique nécessaire dans une ville de taille moyenne est décrite en fonction du moment de la journée dans le graphique ci-dessous (1 MW (megawatt) vaut* 10^6 *watts).*



On demande de calculer l'énergie consommée par cette ville pendant une journée, ainsi que le coût de cette énergie. Pour mémoire, le kilowatt-heure est facturé à 4,80 F, hors T.V.A.

Problème 3 *(Version détaillée) La puissance électrique nécessaire dans une ville de taille moyenne est décrite en fonction du moment de la journée dans le graphique ci-dessous (1 MW (megawatt) vaut* 10^6 *watts).*



On demande

1. *de découper la journée en intervalles de temps — même très petits — pendant lesquels la puissance électrique demandée ne varie pas de plus de dix mégawatts, c'est-à-dire pendant lesquels la puissance électrique demandée peut être raisonnablement* encadrée *par des puissances* constantes,
2. *d'en déduire un* encadrement correspondant *de l'énergie consommée par cette ville pendant une journée, ainsi que du coût de cette énergie (pour mémoire, le kilowattheure est facturé à 4,80 F, hors T.V.A.),*
3. *de* raffiner *ce processus, jusqu'à en déduire une valeur approchée à 100 mégawattheures près, et à 10 mégawattheures près (si possible ...), de l'énergie consommée par cette ville pendant une journée.*

12.3.2 Commentaires et remarques

Le temps consacré en classe à l'étude de la section 1 s'est réparti comme suit :

- CT ([4]) : 3 séances de 50 minutes,
- LT : 4 séances de 50 minutes,
- YH : 2 séances de 50 minutes.

Dès le premier cours, nous avons observé des difficultés diverses relatives à la lecture et la compréhension des énoncés :

- au cours de la résolution du problème 1 chez CT et LT, un élève a calculé « la quantité de bons de commande traités heure par heure » en oubliant de lire « depuis le début de la journée »,
- au cours des résolutions des problèmes 2 et 3, la confusion a été fréquente entre puissance et énergie.

Des difficultés systématiques à mettre en œuvre la notion d'*encadrement* ont été relevées. La mise en évidence de ce type de difficulté chez CT et LT a entraîné la modification de l'énoncé du problème 3 : c'est cette version que l'on trouve en première position dans les extraits ci-dessous, et qui a été la seule employée ensuite chez YH (avec succès). Chez LT et CT, la version détaillée de l'énoncé du problème 3 n'a été fournie aux élèves qu'après une bonne vingtaine de minutes, au vu des directions prises à la lecture de la première version ; l'effet en fut une plus grande homogénéité dans la suite du travail. Notons encore qu'un des groupes de CT était arrivé à une bonne approximation, mais sans pouvoir la comparer à la valeur exacte. Une intervention de l'enseignant mettant l'accent sur la signification de ce contrôle a montré aux élèves concernés l'utilité d'un encadrement.

Les sources probables de cette difficulté observée chez les élèves de CT et LT peuvent être diverses : le peu de pratique antérieure des encadrements, l'absence de références à un encadrement dans les problèmes 1 et 2, ...

Mais les conséquences de cette difficulté sur la suite de l'expérience n'ont pas été négligeables : certains élèves se sont repliés sur d'autres modes d'approximation (trapèzes, moyennes, ...) dont ils ont eu du mal à se dégager par la suite, les enseignants ont perdu pas mal de temps à réorienter le travail de ces élèves, le problème 3 n'a été complètement achevé que dans quelques groupes, ...

([4]) Afin d'alléger un peu la transcription, les abréviations suivantes sont utilisées systématiquement dans la suite : CT : pour Chantal Terryn, LT : pour Luc Terryn, YH : pour Yves Hanssens.

Dès ces toutes premières activités, un contraste s'est marqué entre la culture scolaire des élèves, selon qu'ils appartenaient à l'enseignement technique ou à l'enseignement général. De par l'expérience gagnée dans leurs cours techniques, les élèves de YH étaient manifestement plus à l'aise avec la résolution de problèmes, la manipulation de tableaux, graphiques et formules, ... Les élèves de l'enseignement général rencontraient à ce sujet des difficultés sensibles.

Signalons enfin qu'à ce stade-ci, l'image mentale d'aire ou de surface sous une courbe n'est apparue qu'épisodiquement chez les élèves, suivant une intention affichée dans la construction du cours.

12.3.3 Extraits des notes fournies aux élèves concernant la section 2 : « Comment discrétiser un phénomène continu ? »

Un processus de discrétisation en escaliers

Il s'agit de reconnaître les caractéristiques essentielles du processus qui a permis de résoudre le dernier problème de la section précédente.

La question était d'évaluer un nombre — l'énergie électrique consommée en un jour — associé à une grandeur variable au cours de la journée : la puissance électrique demandée. Il est fondamental d'expliciter ce que veut dire « associé » dans la phrase précédente. Cela signifie très exactement que *dans le cas particulier où la puissance demandée est* ***constante*** *durant un intervalle de temps fixé, l'énergie consommée pendant cet intervalle de temps est le* ***produit*** *de la puissance demandée par la durée de l'intervalle de temps.* C'est le fait que l'énergie soit « *associée* » *de cette façon-là* à la puissance qui sous-tend tout le processus en jeu !

Ceci précisé, le processus consiste à décomposer la journée de 24 heures de telle sorte que sur chaque sous-intervalle de cette décomposition, la puissance électrique — *a priori* variable avec le temps — puisse être assimilée raisonnablement à une constante.

La décomposition du domaine d'une fonction de façon à assimiler cette fonction à une fonction constante sur chaque sous-intervalle de la décomposition est ce qu'on appelle *un processus de discrétisation en escaliers* de la fonction en question. Ce processus de discrétisation permet de remplacer la fonction donnée par une fonction constante par morceaux qui en constitue une « bonne approximation ».

Pour le problème de l'énergie électrique, ce processus de discrétisation permet de remplacer un seul produit (énergie = puissance × temps) — qui n'a plus de signification dès que la puissance n'est pas constante — par une *somme de produits*. On a ainsi obtenu une valeur approchée de cette énergie en l'encadrant par des sommes du type

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot \triangle t_i$$

où P_i est une certaine valeur de la puissance — choisie pour majorer ou minorer selon le cas la puissance réelle sur l'intervalle de temps $\triangle t_i$ — et n est le nombre d'intervalles de temps nécessaires pour découper de manière adaptée les 24 heures d'une journée.

Cette construction d'une approximation d'un nombre à partir de la discrétisation d'une fonction se révèle être un outil particulièrement approprié dans tout un ensemble de problèmes. Ces problèmes ont une caractéristique commune : leur relation initiale avec un « produit élémentaire ».

La notion de somme de Darboux

La définition de subdivision d'un intervalle.

On appelle *subdivision (en n parties)* de l'intervalle $[a;b]$ la donnée d'une suite ordonnée de $n+1$ points

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{i-1} < a_i < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$$

Les n sous-intervalles

$$[a;a_1] = [a_0;a_1], [a_1;a_2], \ldots, [a_{i-1};a_i], \ldots, [a_{n-1};a_n] = [a_{n-1};b]$$

qui apparaissent ainsi sont appelés les intervalles *sous-jacents* à la subdivision.

La définition de sommes de Darboux.

On considère une fonction $f(x)$ définie sur un intervalle $[a;b]$ et une subdivision $D : a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{i-1} < a_i < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ de cet intervalle. On appelle **somme de Darboux inférieure** pour la fonction $f(x)$ et la subdivision D le nombre $s(f(x);D)$ défini par

$$s(f(x);D) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$$

où, quel que soit $1 \leqslant i \leqslant n$, le nombre x_i est défini comme celui qui donne à la fonction $f(x)$ sa *plus petite valeur* sur le sous-intervalle $[a_{i-1};a_i]$. On note souvent $\triangle x_i$ la longueur $a_i - a_{i-1}$ du sous-intervalle $[a_{i-1};a_i]$ dans lequel se trouve le nombre x_i. Cela permet d'écrire la définition précédente sous la forme

$$s(f(x);D) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \triangle x_i$$

Pareillement, on appelle **somme de Darboux supérieure** pour la fonction $f(x)$ et la subdivision D le nombre $S(f(x);D)$ défini par

$$S(f(x);D) = \sum_{i=1}^{n} f(X_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$$

où, quel que soit $1 \leqslant i \leqslant n$, le nombre X_i est défini comme celui qui donne à la fonction $f(x)$ sa *plus grande valeur* sur le sous-intervalle $[a_{i-1}; a_i]$. On note encore $\triangle X_i$ la longueur $a_i - a_{i-1}$ du sous-intervalle $[a_{i-1}; a_i]$ dans lequel se trouve le nombre X_i. Cela permet d'écrire la définition précédente sous la forme

$$S(f(x); D) = \sum_{i=1}^{n} f(X_i) \cdot \triangle X_i$$

On a évidemment $\triangle x_i = a_i - a_{i-1} = \triangle X_i$.

. . . . . .

(Le cas des fonctions monotones.)

. . . . . .

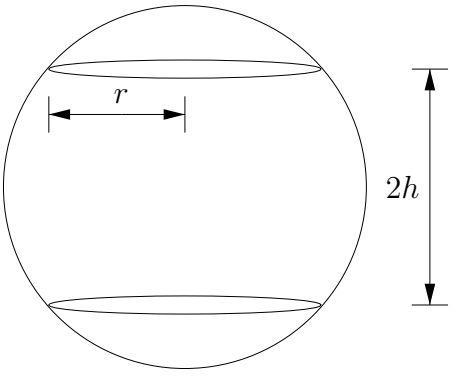
Quelques problèmes d'encadrement d'une grandeur par des sommes de Darboux

. . . . . .

(Le surplus du consommateur.)

. . . . . .

Problème 4 *On considère un tonneau sphérique, c'est-à-dire une sphère coupée par deux plans parallèles équidistants du centre de la sphère. On connaît la hauteur $2h$ du tonneau ainsi que le rayon r de son couvercle.*



On demande de décrire des encadrements de plus en plus précis du volume de ce tonneau.

. . . . . .

(La mesure des aires. Les sommes trapézoïdales.)

. . . . . .

12.3.4 Commentaires et remarques

Le temps consacré en classe à l'étude de la section 2 s'est réparti comme suit :

- CT : 3 séances de 50 minutes,
- LT : 3 séances de 50 minutes,
- YH : 4 séances de 50 minutes.

Cette section était la première à demander de la part des élèves une lecture autonome d'un texte théorique, bien qu'il ne s'agisse encore ici que de définitions et de notations. Et des embarras de lecture ont encore une fois été relevés, notamment au niveau des notations (symbole de sommation σ, ...). De plus, certains élèves ont rencontré des difficultés à évoquer correctement certains prérequis (fonctions croissantes ou décroissantes par exemple), ou à porter un regard critique sur le souvenir qu'ils avaient de ces prérequis.

Le niveau de concentration des élèves de CT et LT a été généralement faible. Lors des activités de mise au point du vocabulaire théorique, une bonne part des élèves étaient inattentifs, discutaient de sujets étrangers au cours, ...Paradoxalement, et malgré un chahut permanent dans une classe voisine, les élèves de YH ont été capables de travailler de manière continue, c'est-à-dire sans interruption pendant deux séances consécutives, avec une attention qui ne fut presque jamais prise en défaut.

Le problème du tonneau sphérique

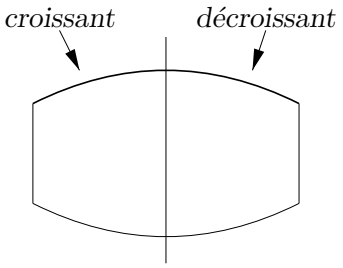
Plusieurs difficultés significatives nous ont frappés à l'occasion de ce problème :

- les élèves ne l'ont associé aux problèmes précédents qu'avec peine,
- ils n'ont découvert que très lentement la nécessité d'y faire apparaître une fonction,
- ils ont eu bien de la peine à déterminer l'expression algébrique de la fonction en question ; dans un premier temps, ils ont même eu recours systématiquement à des mesures pratiquées sur des dessins à l'échelle pour obtenir les rayons des cylindres utiles sans établir aucun lien *a priori* entre la situation étudiée et — par exemple — le théorème de Pythagore.

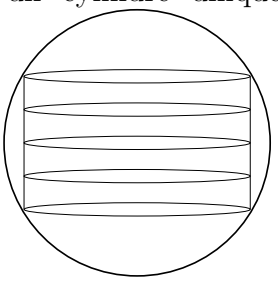
En plus des difficultés précédentes, des difficultés d'interprétation des notations (par exemple $2h$ pour la hauteur du cylindre au lieu de h), et des difficultés à évoquer certaines formules élémentaires telles que celles du volume du cylindre ont été observées.

Certaines modélisations peu opportunes se sont révélées à partir de dessins caractéristiques :

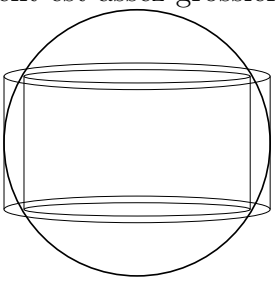
sur base de ce dessin, l'élève voulait réaliser deux calculs qu'il imaginait complètement différents :



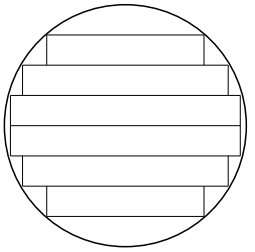
ce découpage-ci n'apporte rien par rapport à un cylindre unique :



l'approximation qui résulte de cet encadrement est assez grossière :



Mais le dessin ci-contre a indiqué le début de la maîtrise du processus chez les élèves concernés :



Toutes proportions gardées, venir à bout d'un tel ensemble de difficultés a pris plus de temps dans les classes de CT et LT que dans celle de YH.

12.4. Un compte-rendu de l'expérimentation : la phase de condensation

12.4.1 Extraits des notes fournies aux élèves concernant la section 3 : « Le contrôle de l'approximation »

. . . . . .

(Sommes de Darboux et mesure d'aire. Sommes de Darboux et encadrements associés à une fonction monotone.)

. . . . . .

Encadrements et sommes de Darboux

Si le calcul de sommes de Darboux a été entrepris pour approcher une grandeur G — s'il s'agit, par exemple, de calculer l'aire délimitée par le graphe d'une fonction $f(x)$, les verticales $x = a$, $x = b$ et l'horizontale $y = 0$ — alors on déduit de la construction des sommes de Darboux inférieure et supérieure une *inégalité d'encadrement* : $s(f(x); D) \leqslant G \leqslant S(f(x); D)$ et on interprète la différence $S(f(x); D) - s(f(x); D)$ comme une *mesure de la précision de l'approximation* de G par chacune des sommes de Darboux $s(f(x); D)$ ou $S(f(x); D)$, puisque

$$\begin{aligned} G - s(f(x); D) &\leqslant S(f(x); D) - s(f(x); D) \\ S(f(x); D) - G &\leqslant S(f(x); D) - s(f(x); D) \end{aligned}$$

Problème 5 *On veut calculer l'aire G du triangle curviligne délimité par l'intervalle $[0; 1]$ sur l'axe des x, la verticale $x = 1$ et le graphe de la fonction $f(x) = x^2$.*

1. *Déterminer une mesure de la précision de l'approximation de l'aire G par chacune des sommes de Darboux correspondant aux subdivisions de l'intervalle $[0; 1]$ décrites ci-dessous*
   - D_1 : $a_i = i \cdot \frac{1}{10}$ *pour* $0 \leqslant i \leqslant 10$,
   - D_2 : $a_i = i \cdot \frac{1}{10^2}$ *pour* $0 \leqslant i \leqslant 10^2$,
   - *etc.*
2. *Situer ces différentes valeurs de $s(x^2; D)$ et de $S(x^2; D)$ sur la droite réelle.*
3. *Expliciter cette mesure de précision lorsque la subdivision choisie D de l'intervalle $[0; 1]$ est formée de sous-intervalles de longueur constante mais non nécessairement égale à $\frac{1}{10^n}$?*
4. Majorer *cette mesure de précision lorsque la subdivision D choisie de l'intervalle $[0; 1]$ est formée de sous-intervalles de longueur* non constante *?*

5. *Comment peut-on généraliser tout ce qui précède au cas d'une fonction* $f(x)$ monotone *sur un intervalle* $[a; b]$. *Plus précisément, comment peut-on* majorer *la mesure de l'approximation* $S(f(x); D) - s(f(x); D)$ *lorsque la fonction* $f(x)$ *considérée est monotone et que la subdivision* D *choisie de l'intervalle* $[a; b]$ *est quelconque ?*

12.4.2 Extraits des notes fournies aux élèves concernant la section 4 : « Une définition procédurale de l'intégrale »

Comment mesurer la précision de l'approximation dans le cas des fonctions monotones ?

Les fonctions croissantes : le cas d'une subdivision régulière.

Si $f(x)$ est une fonction *croissante* sur l'intervalle $[a;b]$ muni de la subdivision *régulière* D définie par

$$D = \left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right)_{0 \leqslant i \leqslant n}$$

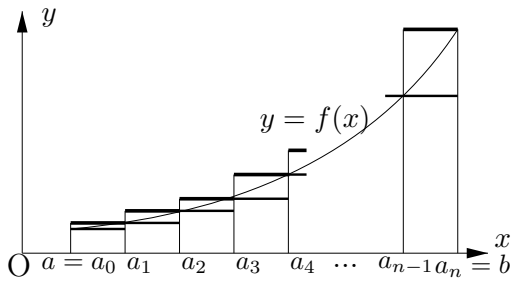
on établit une formule de mesure de l'approximation en explicitant les sommes de Darboux qui y apparaissent :

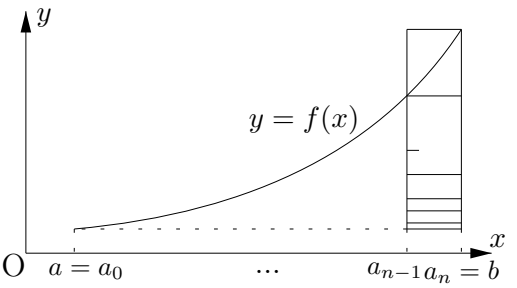
$$\begin{aligned} S(f(x);D) - s(f(x);D) &= \sum_{i=1}^{n} f(a_i) \cdot (a_i - a_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(a_{i-1}) \cdot (a_i - a_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(a_i) - f(a_{i-1})) \cdot (a_i - a_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(a_i) - f(a_{i-1})) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (f(a_i) - f(a_{i-1})) \end{aligned}$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot (f(a_1) - f(a_0) + f(a_2) - f(a_1) + \cdots + f(a_n) - f(a_{n-1}))$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot (-f(a_0) + f(a_n)) = \frac{b-a}{n} \cdot (f(b) - f(a))$$

On visualise ce raisonnement grâce à l'interprétation des sommes de Darboux en termes de mesure d'aires. Il suffit en effet de translater les petits rectangles appropriés au-dessus d'un sous-intervalle quelconque de la subdivision, par exemple $[a_{n-1}; a_n]$:





Les fonctions croissantes : le cas d'une subdivision quelconque.

Si la longueur des sous-intervalles de la subdivision considérée n'est plus constante, on ne sait obtenir qu'une *majoration* de l'erreur.

Plus précisément, on définit la *maille* δ d'une subdivision quelconque

$$D : a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{i-1} < a_i < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$$

par

$$\delta = \max\{a_i - a_{i-1} : 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

On calcule alors

$$\begin{aligned} S(f(x);D) - s(f(x);D) &= \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\cdot(a_i - a_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(a_{i-1})\cdot(a_i - a_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(a_i) - f(a_{i-1}))\cdot((a_i - a_{i-1})) \end{aligned}$$

Or, comme la fonction $f(x)$ est croissante, on a $\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n\ :\ f(a_i) - f(a_{i-1}) \geqslant 0$. D'autre part, suivant la définition de maille : $\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n\ :\ a_i - a_{i-1} \leqslant \delta$. On en déduit

$$S(f(x);D) - s(f(x);D) = \sum_{i=1}^{n} (f(a_i) - f(a_{i-1}))\cdot((a_i - a_{i-1})) \leqslant \sum_{i=1}^{n} (f(a_i) - f(a_{i-1}))\cdot\delta$$

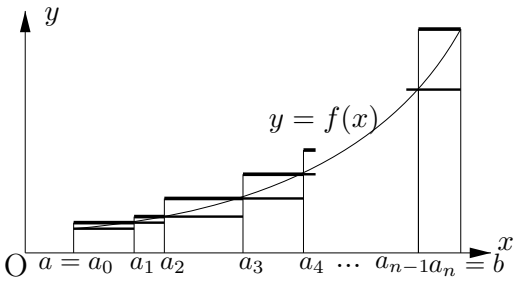
Mais, — et comme dans le cas d'une subdivision régulière — on a alors

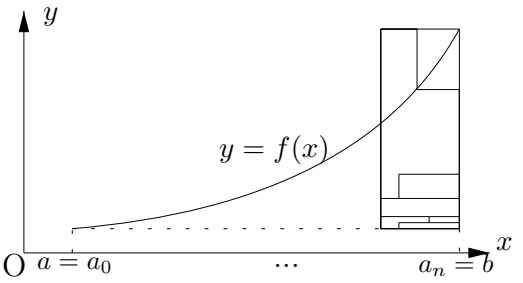
$$\sum_{i=1}^{n} (f(a_i) - f(a_{i-1}))\cdot\delta = (f(a_n) - f(a_0))\cdot\delta = (f(b) - f(a))\cdot\delta$$

de telle sorte que finalement, la majoration attendue s'écrit

$$0 \leqslant S(f(x);D) - s(f(x);D) \leqslant (f(b) - f(a)) \cdot \delta$$

On visualise encore ce raisonnement en termes de mesure d'aires. On translate les petits rectangles appropriés jusqu'à ce que leur bord droit se trouve à la verticale du point d'abscisse a_n. La somme de leurs aires ne peut pas s'exprimer par une formule simple, mais ne peut que se majorer par l'aire $(f(b) - f(a)) \cdot \delta$ d'un grand rectangle :





. . . . . .

(Les fonctions décroissantes.)

. . . . . .

Conclusion : la mesure de la précision de l'approximation pour une fonction monotone.

Si $f(x)$ est une fonction *monotone* sur l'intervalle $[a;b]$ muni d'une subdivision quelconque D de maille δ, on a une formule de mesure de la précision de l'approximation :

$$0 \leqslant S(f(x);D) - s(f(x);D) \leqslant |f(b) - f(a)| \cdot \delta$$

Le membre de droite de cette formule permet de retrouver celui obtenu dans le cas d'une subdivision régulière puisque, si

$$D = \left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right)_{0 \leqslant i \leqslant n}$$

est une telle subdivision, sa maille δ est alors donnée par

$$\delta = \frac{b-a}{n}$$

Un exemple.

On considère la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0;1]$, et les subdivisions régulières $D_n = \left(i \cdot \frac{1}{10^n}\right)_{0 \leqslant i \leqslant 10^n}$. La maille d'une telle subdivision est $\frac{1}{10^n}$, d'où

$$0 \leqslant S(x^2;D_n) - s(x^2;D_n) \leqslant (1-0) \cdot \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10^n}$$

et même, puisque les subdivisions sont régulières,

$$S(x^2; D_n) - s(x^2; D_n) = \frac{1}{10^n}$$

Ainsi, pour calculer à un centième près l'aire du triangle curviligne délimité par l'intervalle $[0; 1]$ sur l'axe des x, la verticale $x = 1$ et le graphe de $f(x) = x^2$ (cfr. le problème 5), il faut *au moins* utiliser une subdivision du type

$$D_2 = \left(i \cdot \frac{1}{10^2} \right)_{0 \leqslant i \leqslant 10^2}$$

. . . . . .

(Un autre exemple.)

. . . . . .

Une définition de l'intégrale

La notion de raffinement d'une subdivision.

Si D est une subdivision d'un intervalle $[a; b]$, un *raffinement* D' de la subdivision D est n'importe quelle subdivision de l'intervalle $[a; b]$ qui contient *au moins* les mêmes points que ceux de D, ce qu'on note assez naturellement $D \subset D'$.

. . . . . .

(Un exemple de raffinement. L'effet du raffinement d'une subdivision.)

. . . . . .

La notion d'emboîtement de subdivisions.

On définit une *suite emboîtée* $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de subdivisions* de l'intervalle $[a; b]$ en demandant que

- quel que soit $n \in \mathbb{N}$: D_n soit une subdivision de l'intervalle $[a; b]$,
- quel que soit $n \in \mathbb{N}$: $D_n \subset D_{n+1}$.

. . . . . .

(Un exemple d'emboîtement.)

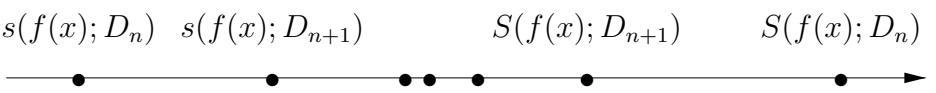
. . . . . .

L'effet d'un emboîtement de subdivisions.

On déduit immédiatement des résultats précédents une *chaîne d'encadrements* :

$$\cdots \leqslant s(f(x); D_n) \leqslant s(f(x); D_{n+1}) \leqslant \cdots \leqslant S(f(x); D_{n+1}) \leqslant S(f(x); D_n) \leqslant \cdots$$

qui détermine une suite d'intervalles fermés emboîtés $[s(f(x);D_n);S(f(x);D_n)]$ sur la droite réelle :



Une définition d'intégrale.

Pourvu que la fonction $f(x)$ soit monotone sur l'intervalle $[a;b]$, on dispose d'une formule de mesure de la précision de l'approximation ou de l'encadrement :

$$0 \leqslant S(f(x);D_n) - s(f(x);D_n) \leqslant |f(b) - f(a)| \cdot \delta_n$$

où δ_n est la maille de la subdivision D_n. Comme cette formule est valable quel que soit l'entier naturel n, on en tire

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} s(f(x);D_n) = \lim_{n\to\infty} S(f(x);D_n)$$

En d'autres termes, et sous les hypothèses retenues, les sommes de Darboux inférieure et supérieure sont d'autant plus proches les unes des autres que la maille des subdivisions qui les définissent est proche de 0, ce qui correspond exactement à ce que la plupart des problèmes déjà rencontrés ont permis d'observer expérimentalement.

> *On considère une fonction $f(x)$ monotone sur un intervalle $[a;b]$.*
> *A une suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subdivisions emboîtées de l'intervalle $[a;b]$ dont les mailles δ_n tendent vers 0 :*
>
> $$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$$
>
> *on associe le nombre réel appelé* intégrale de $f(x)$ de a à b, *noté* $\int_a^b f(x)dx$, *et défini par*
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} s(f(x);D_n) = \lim_{n\to\infty} S(f(x);D_n)$$

En ce sens, l'intégrale d'une fonction $f(x)$ entre a et b est la valeur « exacte » de la grandeur que les sommes de Darboux se contentaient d'encadrer. A ce stade de la construction, cette valeur exacte est le résultat d'un processus d'approximations successives.

Quelques exemples élémentaires de calcul d'une intégrale

Il s'agit de calculer

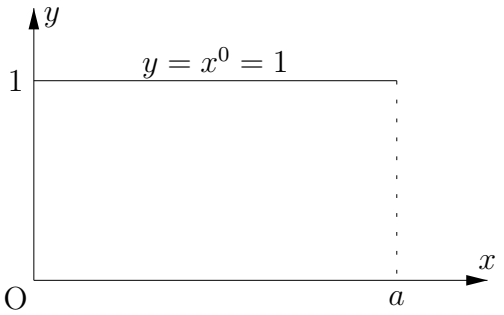
$$\int_0^a x^N dx$$

pour les premières valeurs entières de l'exposant N.

Deux cas triviaux.

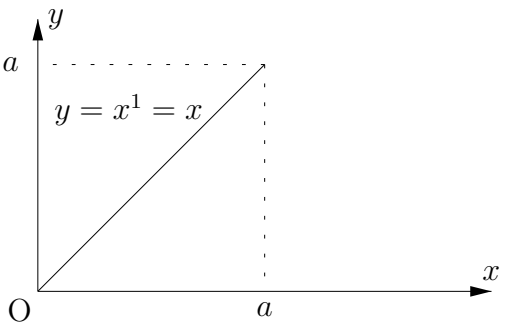
Dès qu'on interprète l'intégrale en termes de mesure d'aire, il est bien clair que

$$\int_0^a 1dx = a \cdot 1 = a$$



et

$$\int_0^a xdx = \frac{1}{2}a \cdot a = \frac{a^2}{2}$$



Si k est un nombre réel (positif), on obtient pareillement

$$\int_0^a kxdx = \frac{1}{2}a \cdot ka = \frac{ka^2}{2}$$

Un calcul plus général.

On considère la suite de subdivisions régulières emboîtées $D_n = \left(i \cdot \frac{a}{10^n}\right)_{0 \leqslant i \leqslant 10^n}$, de mailles $\delta_n = \frac{a}{10^n}$. Il est clair que $\lim\limits_{n \to \infty} \delta_n = 0$. On calcule alors

$$S\left(x^N; D_n\right) = \sum_{i=1}^{10^n} \left(i \cdot \frac{a}{10^n}\right)^N \cdot \frac{a}{10^n} = \left(\frac{a}{10^n}\right)^{N+1} \cdot \sum_{i=1}^{10^n} i^N$$

Mais on ne sait poursuivre le travail que si on dispose d'une formule permettant de calculer la somme $\sum_{i=1}^{p} i^N$ des N^e puissances des p premiers nombres entiers ... Les formules calculant la somme de puissances données des p premiers nombres entiers ont été obtenues de diverses façons dans le courant du XVIIe siècle. Pour les premières puissances, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} i &= \frac{p(p+1)}{2} \\
\sum_{i=1}^{p} i^2 &= \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} \\
\sum_{i=1}^{p} i^3 &= \frac{p^2(p+1)^2}{4} \\
\sum_{i=1}^{p} i^4 &= \frac{p(p+1)(2p+1)(3p^2+3p-1)}{30} \\
\sum_{i=1}^{p} i^5 &= \frac{p^2(p+1)^2(2p^2+2p-1)}{12} \\
etc &\ \ldots
\end{aligned}$$

A titre documentaire, une formule qui calcule une telle somme dans le cas d'une puissance *arbitraire* a été obtenue par J. Bernoulli (1654-1705) ; cette formule générale ne sera pas utilisée dans la suite.

Problème 6 *A l'aide de ce qui précède, calculer* $\int_0^a x^N dx$ *comme* $\lim_{n\to\infty} S(x^N; D_n)$

- *d'abord pour* $N = 1$*, et comparer avec le résultat déjà obtenu plus haut,*
- *ensuite pour* $N = 2$*, 3, 4 et 5.*

Conjecturer *en conséquence une formule générale pour* $\int_0^a x^N dx$*. Faire de même pour* $\int_a^b x^N dx$ *lorsque* $0 < a < b$*.*

12.4.3 Commentaires et remarques

Le temps consacré en classe à l'étude des sections 3 et 4 s'est réparti comme suit :

- CT : 4 séances de 50 minutes,
- LT : 6 séances de 50 minutes,
- YH : 2 séances de 50 minutes.

A ce stade de l'expérience, les enseignants ont commencé à reprendre les classes en main de manière plus directive, pressés qu'ils étaient par le peu de temps disponible encore pour achever les matières de l'année.

Les notions théoriques.

Le rythme de lecture des passages théoriques s'est donc accéléré, l'explication des difficultés étant (presque toujours) prise en charge par l'enseignant.

LT a organisé une *lecture dirigée* des parties théoriques des sections 3 et 4 à partir de la projection de transparents. Il isolait les passages essentiels dans le texte et posait diverses questions de compréhension immédiate. L'objectif était de mettre en valeur ce que pouvait signifier une lecture active et critique d'un texte mathématique.

Des difficultés quant à l'interprétation numérique et graphique des formules sont à nouveau apparues. Par exemple, la notation :

$$a_i = a + i.\frac{b-a}{n}$$

pour i entier compris entre 0 et n, a posé problème. Quant LT a demandé d'expliciter le lien entre la démonstration graphique de la formule :

$$S(f(x); D) - s(f(x); D) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$$

où f est une fonction croissante sur l'intervalle $[a; b]$ et la démonstration algébrique de cette formule, les réponses ont été lentes à venir et peu précises.

Alors que les élèves de YH étaient particulièrement actifs dans les phases de résolution de problèmes, ils ont manifesté un blocage psychologique vis-à-vis de la lecture d'un texte. Ce blocage ne s'est pas dissipé lorsque la lecture a été précédée d'une explication détaillée du contenu des notes dans un respect scrupuleux de leur structure, des notations, ... Cette difficulté majeure de lecture a été très clairement exprimée par un élève : « *Je comprends quand vous expliquez, mais quand je lis, je comprends que dalle !!!* »

Le problème de l'aire sous x^2 et l'effet des raffinements de subdivisions.

Le problème a été presque entièrement résolu sous la direction des enseignants. Il était en effet important d'arriver rapidement à bout de calculs numériques illustrant de manière simple et convaincante l'effet des raffinements de subdivisions.

Ce problème n'a plus été retenu dans les notes distribuées aux élèves de YH, en partie pour gagner du temps, mais surtout parce qu'au vu du succès des problèmes précédents, celui-ci n'avait plus rien d'indispensable.

12.4.4 Extraits des notes fournies aux élèves concernant la section 5 : « Un théorème miraculeux ou naturel ? »

Quelques calculs de limites et leurs conséquences

A la suite du problème 6, il s'agit de calculer $\int_0^a x^N dx$ pour les premières valeurs entières de l'exposant N. On utilise à cet effet la suite de subdivisions régulières emboîtées $D_n = \left(i \cdot \frac{a}{10^n}\right)_{0 \leqslant i \leqslant 10^n}$ de l'intervalle $[0;a]$, de mailles $\delta_n = \frac{a}{10^n}$, pour lesquelles on a bien $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$. On calcule alors

$$S\left(x^N; D_n\right) = \sum_{i=1}^{10^n} \left(i \cdot \frac{a}{10^n}\right)^N \cdot \frac{a}{10^n} = \left(\frac{a}{10^n}\right)^{N+1} \cdot \sum_{i=1}^{10^n} i^N$$

On pose désormais, afin d'alléger les notations :

$$p = p(n) = 10^n$$

d'où $S\left(x^N; D_n\right) = \left(\frac{a}{p}\right)^{N+1} \cdot \sum_{i=1}^{p} i^N$. On a alors :

$$\lim_{n\to\infty} p = \lim_{n\to\infty} p(n) = \lim_{n\to\infty} 10^n = +\infty$$

Le cas $N = 2$.

La formule auxiliaire $\sum_{i=1}^{p} i^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$ permet de calculer

$$\begin{aligned} S\left(x^2; D_n\right) &= \left(\frac{a}{p}\right)^3 \cdot \sum_{i=1}^{p} i^2 \\ &= \left(\frac{a}{p}\right)^3 \cdot \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} \\ &= \frac{a^3}{3} \cdot \frac{p}{p} \cdot \frac{p+1}{p} \cdot \frac{2p+1}{p} \\ &= \frac{a^3}{3} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{2p}\right) \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\int_0^a x^2dx = \lim_{n\to\infty} S\left(x^2; D_n\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{a^3}{3}\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{2p}\right)\\ &= \frac{a^3}{3}\cdot\lim_{p\to\infty}\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{2p}\right)\\ &= \frac{a^3}{3}\cdot 1\cdot 1 = \frac{a^3}{3}\end{aligned}$$

. . . . . .

(Le cas $N = 3$. Le cas $N = 4$. Le cas $N = 5$. Un retour en arrière : le cas $N = 1$.)

. . . . . .

Le calcul de $\int_a^b x^N dx$ pour $0 < a < b$.

On observe d'abord que, puisque $0 < a < b$ et $N \in \mathbb{N}$, la fonction $f(x) = x^N$ est croissante sur l'intervalle $[a; b]$. On utilise la suite de subdivisions régulières emboîtées $D_n = \left(a + i\cdot\frac{b-a}{10^n}\right)_{0\leqslant i\leqslant 10^n}$ de l'intervalle $[a; b]$, de mailles $\delta_n = \frac{b-a}{10^n}$ pour lesquelles on a bien $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n = 0$. On calcule alors

$$S\left(x^N; D_n\right) = \sum_{i=1}^{10^n}\left(a+i\cdot\frac{b-a}{10^n}\right)^N\cdot\frac{b-a}{10^n} = \sum_{i=1}^{p}\left(a+i\cdot\frac{b-a}{p}\right)^N\cdot\frac{b-a}{p}$$

où on a posé, comme auparavant : $p = p(n) = 10^n$, avec donc $\lim\limits_{n\to\infty} p = \lim\limits_{n\to\infty} 10^n = +\infty$.

L'essentiel du travail consiste alors à développer $\left(a+i\cdot\frac{b-a}{p}\right)^N$ suivant les puissances de i. Comme on va le voir déjà dans le cas particulier de $N = 2$, ce développement est un peu long et nécessite *toutes* les formules auxiliaires intermédiaires.

On commence par développer le carré dans

$$\begin{aligned}S\left(x^2; D_n\right) &= \sum_{i=1}^{p}\left(a+i\cdot\frac{b-a}{p}\right)^2\cdot\frac{b-a}{p}\\ &= \sum_{i=1}^{p}\left(a^2+2a\cdot\frac{b-a}{p}\cdot i+\left(\frac{b-a}{p}\right)^2\cdot i^2\right)\cdot\frac{b-a}{p}\end{aligned}$$

On distribue le facteur $\frac{b-a}{p}$ et, après regroupement, on met en évidence les facteurs communs des sommes de mêmes puissances de i :

$$\begin{aligned} S\left(x^2; D_n\right) &= \sum_{i=1}^{p} a^2 \cdot \frac{b-a}{p} + \sum_{i=1}^{p} 2a \left(\frac{b-a}{p}\right)^2 \cdot i + \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{b-a}{p}\right)^3 \cdot i^2 \\ &= a^2 \cdot \frac{b-a}{p} \sum_{i=1}^{p} 1 + 2a \left(\frac{b-a}{p}\right)^2 \sum_{i=1}^{p} i + \left(\frac{b-a}{p}\right)^3 \sum_{i=1}^{p} i^2 \end{aligned}$$

On utilise alors les deux formules auxiliaires $\sum_{i=1}^{p} i = \frac{p(p+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^{p} i^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$, — sans oublier que $\sum_{i=1}^{p} 1 = p$ — pour obtenir :

$$\begin{aligned} & S\left(x^2; D_n\right) \\ &= \frac{a^2(b-a)}{p} \cdot p + 2a \left(\frac{b-a}{p}\right)^2 \cdot \frac{p(p+1)}{2} + \left(\frac{b-a}{p}\right)^3 \cdot \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} \\ &= a^2(b-a) + a(b-a)^2 \cdot \frac{p}{p} \cdot \frac{p+1}{p} + \frac{(b-a)^3}{3} \cdot \frac{p}{p} \cdot \frac{p+1}{p} \cdot \frac{2p+1}{2p} \\ &= a^2(b-a) + a(b-a)^2 \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{p}\right) + \frac{(b-a)^3}{3} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2p}\right) \end{aligned}$$

On achève alors comme dans les calculs précédents :

$$\begin{aligned} & \int_a^b x^2 dx \\ &= \lim_{n \to \infty} S\left(x^2; D_n\right) \\ &= \lim_{n \to \infty} \left\{ a^2(b-a) + a(b-a)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{p}\right) + \frac{(b-a)^3}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2p}\right) \right\} \\ &= \lim_{p \to \infty} \left\{ a^2(b-a) + a(b-a)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{p}\right) + \frac{(b-a)^3}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2p}\right) \right\} \\ &= a^2(b-a) + a(b-a)^2 \cdot 1 + \frac{(b-a)^3}{3} \cdot 1 \cdot 1 \\ &= \frac{3a^2b - 3a^3 + 3ab^2 - 6a^2b + 3a^3 + b^3 - 3b^2a + 3ba^2 - a^3}{3} \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \end{aligned}$$

. . . . . .

(Une formule conjecturale pour $\int_a^b x^N dx$. Une formule conjecturale d'additivité.)

. . . . . .

Un théorème miraculeux

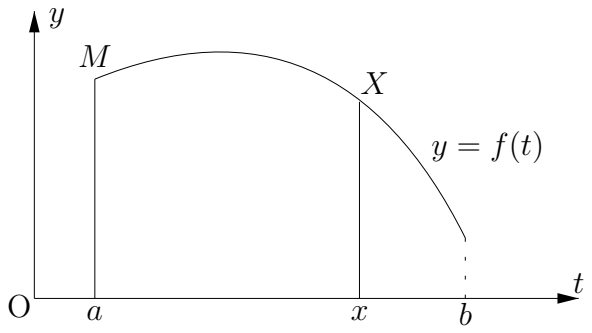
La notion de fonction d'accumulation.

On considère une fonction $f(t)$ d'une variable t définie sur l'intervalle $[a;b]$. On appelle *fonction d'accumulation associée à la fonction $f(t)$ sur l'intervalle* $[a;b]$: la fonction, notée $A(x)$, d'une (autre) variable x, définie sur le *même* intervalle $[a;b]$ par

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Si on interprète l'intégrale en termes de mesure d'aires, la fonction d'accumulation $A(x)$ associée à la fonction $f(t)$ sur l'intervalle $[a;b]$ est la *fonction* de la variable x qui décrit la mesure de l'aire délimitée par

- le graphe de $y = f(t)$,
- l'horizontale $y = 0$,
- la verticale (fixe) $t = a$,
- et la verticale $t = x$, *variable avec l'abscisse* x.



$$A(x) = \int_a^x f(t)dt = Aire(aMXx)$$

Une remarque et quelques exemples.

Si $A(x)$ est une fonction d'accumulation définie sur l'intervalle $[a;b]$, on a *toujours* :

$$A(a) = 0$$

En se limitant à ce qui a été *démontré* jusqu'ici, on peut calculer les fonctions d'accumulation associées à la fonction $f(t) = t^N$, sur l'intervalle $[a;b]$ avec $0 < a < b$, tant que $N = 1$, 2, 3, 4 ou 5. On trouve

$$f(t) = t \qquad : \qquad A(x) = \int_a^x t dt = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$f(t)=t^2 \quad : \quad A(x)=\int_a^x t^2dt=\frac{x^3}{3}-\frac{a^3}{3}$$

$$f(t)=t^3 \quad : \quad A(x)=\int_a^x t^3dt=\frac{x^4}{4}-\frac{a^4}{4}$$

$$f(t)=t^4 \quad : \quad A(x)=\int_a^x t^4dt=\frac{x^5}{5}-\frac{a^5}{5}$$

$$f(t)=t^5 \quad : \quad A(x)=\int_a^x t^5dt=\frac{x^6}{6}-\frac{a^6}{6}$$

Le miracle ...

A partir des résultats déjà obtenus, on peut imaginer qu'un petit miracle ait lieu en ce qui concerne le calcul des intégrales, et cette impression résulte de l'enchaînement de trois observations.

- Si on parvient à déterminer la *fonction* d'accumulation associée à une fonction $f(t)$ sur un intervalle $[a;b]$, alors on pourra — par définition ! — évaluer n'importe quelle intégrale de la fonction $f(t)$ sur n'importe quel intervalle contenu dans l'intervalle $[a;b]$.
- Lorsqu'on veut étudier les variations d'une fonction donnée — ici, il s'agirait d'une fonction d'accumulation — une stratégie relativement efficace consiste à calculer d'abord la *dérivée* de cette fonction.
- Dans les cas où des fonctions d'accumulation ont été explicitement calculées, on obtient

$$\begin{aligned}
f(t)=t \quad &: \quad A(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{2} \quad \longrightarrow \quad A'(x)=\frac{2x}{2}-0=x \\
f(t)=t^2 \quad &: \quad A(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{a^3}{3} \quad \longrightarrow \quad A'(x)=\frac{3x^2}{3}-0=x^2 \\
f(t)=t^3 \quad &: \quad A(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{a^4}{4} \quad \longrightarrow \quad A'(x)=\frac{4x^3}{4}-0=x^3 \\
f(t)=t^4 \quad &: \quad A(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{a^5}{5} \quad \longrightarrow \quad A'(x)=\frac{5x^4}{5}-0=x^4 \\
f(t)=t^5 \quad &: \quad A(x)=\frac{x^6}{6}-\frac{a^6}{6} \quad \longrightarrow \quad A'(x)=\frac{6x^5}{6}-0=x^5
\end{aligned}$$

On déduit de ces observations l'énoncé d'un théorème qu'il s'agirait de démontrer :

> *si $A(x)$ est la fonction d'accumulation associée à une fonction $f(t)$ sur un intervalle $[a;b]$, alors*
>
> $$A'(x)=f(x)$$

Mais un tel théorème aurait des conséquences suffisamment remarquables pour qu'on le qualifie de miraculeux. En effet, la relation $A'(x) = f(x)$ permettrait de relier entre eux deux processus de calculs *a priori* différents, à savoir :

- le processus inverse de la dérivation, qui obéit à des règles de calcul simples et efficaces, mais qui n'a pas d'interprétation ni de signification géométrique, physique, ou autres,
- le processus d'intégration, dont l'étendue des applications géométriques, physiques, économiques ou autres est manifeste, mais qui — en dehors du calcul numérique — ne se laisse pas facilement réduire à des algorithmes de calcul simples.

. . . . . .

(La notion de primitive.)

. . . . . .

La démonstration du miracle

Cette démonstration va s'effectuer en deux parties.

Lemme.

On considère une fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle $[a;b]$, avec $a \neq b$. Si m et M sont deux nombres tels que, quel que soit $x \in [a;b]$:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

alors on a aussi

$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leqslant M$$

. . . . . .

(Démonstration du lemme.)

. . . . . .

Théorème.

Si $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la fonction d'accumulation associée à une fonction $f(t)$ continue sur un intervalle $[a;b]$, alors

$$A'(x) = f(x)$$

Preuve du théorème.

Par définition de dérivée d'une fonction, il s'agit de calculer

$$A'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

On suppose d'abord $h > 0$. D'après la formule d'additivité, on a

$$A(x+h) - A(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

d'où

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Notons alors

- x_0 : un nombre qui donne à la fonction $f(x)$ sa plus petite valeur sur l'intervalle $[x; x+h]$,
- X_0 : un nombre qui donne à la fonction $f(x)$ sa plus grande valeur sur l'intervalle $[x; x+h]$,

On a donc, quel que soit $t \in [x; x+h]$:

$$f(x_0) \leqslant f(t) \leqslant f(X_0)$$

On applique alors le lemme précédent à la fonction $f(t)$ sur l'intervalle $[x; x+h]$:

$$f(x_0) \leqslant \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)dt \leqslant f(X_0)$$

On en déduit un encadrement de $\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)dt$:

$$f(x_0) \leqslant \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \leqslant f(X_0)$$

Dès lors

$$\lim_{h \to 0} f(x_0) \leqslant \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \leqslant \lim_{h \to 0} f(X_0)$$

ou

$$\lim_{h\to 0} f(x_0) \leqslant A'(x) \leqslant \lim_{h\to 0} f(X_0)$$

Or, comme x_0 et $X_0 \in [x; x+h]$, on a $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0) = f(x)$ et $\lim\limits_{h\to 0} f(X_0) = f(x)$ puisque la fonction $f(x)$ est continue sur l'intervalle $[a; b]$. On a ainsi

$$f(x) \leqslant A'(x) \leqslant f(x)$$

c'est-à-dire

$$A'(x) = f(x)$$

On raisonne de manière analogue dans le cas où $h < 0$. Cela achève alors la démonstration du théorème.

Remarque.

La démonstration ci-dessus n'est pas complète au sens où, par exemple, la formule d'additivité n'a pas été démontrée et, plus généralement, l'existence même de la fonction $\int\limits_a^x f(t)dt$ n'a pas été établie sous les hypothèses mentionnées dans le théorème. Elle n'en contient pas moins les grandes idées d'une démonstration mathématique rigoureuse et complète.

Corollaire.

Lorsque $a > 0$, et quel que soit le nombre réel α,

- *si* $\alpha \neq -1$:

$$\int_a^x t^\alpha dt = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

- *si* $\alpha = -1$:

$$\int_a^x \frac{1}{t} dt = \ln x - \ln a = \ln \frac{x}{a}$$

Preuve du corollaire.

En vertu du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, il suffit de vérifier que

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' &= x^\alpha \\ (\ln x - \ln a)' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

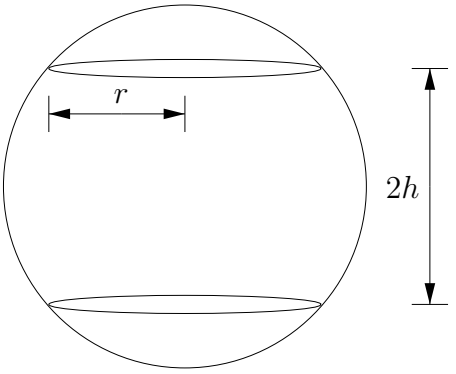
Cela ne présente pas de difficulté nouvelle !

12.4.5 Extraits des notes fournies aux élèves concernant la section 6 : « Réinvestissement »

Avec le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, on dispose d'un outil puissant pour résoudre un très grand nombre de problèmes. On retrouve ici — entre autres — le problème du tonneau sphérique (cfr. problème 4).

Le volume d'un tonneau sphérique

Problème 7 *On considère un tonneau sphérique, c'est-à-dire une sphère coupée par deux plans parallèles équidistants du centre de la sphère. On connaît la hauteur $2h$ du tonneau ainsi que le rayon r de son couvercle.*



On demande de calculer le volume de ce tonneau.

L'aire évanouissante

Problème 8 *On considère la figure curviligne délimitée par l'intervalle $[0;\pi]$ sur l'axe des x, l'intervalle $[0;1]$ sur l'axe des y, la verticale $x = \pi$ et le graphe de $f(x) = \cos x$. On demande de calculer une mesure de l'aire de cette figure.*

La linéarité de l'intégrale

Problème 9 *A l'aide du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, démontrer les deux propriétés suivantes :*

1. *si $f(t)$ et $g(t)$ sont deux fonctions continues définies sur l'intervalle $[a;b]$, alors*

$$\int_a^x (f(t)+g(t))\,dt = \int_a^x f(t)dt + \int_a^x g(t)dt$$

2. *si $f(t)$ est une fonction continue définie sur l'intervalle $[a;b]$ et k un nombre réel, alors*

$$\int_a^x k\cdot f(t)dt = k\cdot \int_a^x f(t)dt$$

Décrire une interprétation géométrique de chacune de ces propriétés.
Quelle(s) relation(s) y a-t-il entre ces deux propriétés et les calculs à réaliser dans les problèmes 7 et 8 ?

Remarque.

Les deux propriétés ci-dessus expriment ce qu'on appelle la *linéarité* de l'intégrale, par rapport aux opérations d'addition et de multiplication par un nombre réel, qui font de l'ensemble des fonctions continues définies sur un intervalle $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ un *espace vectoriel réel* (de dimension infinie).

. . . . . .

(Une question de secondes (accélérations et freinages).)

. . . . . .

12.4.6 Commentaires et remarques

Le temps consacré en classe à l'étude des sections 5 et 6 s'est réparti comme suit :

- CT : 3 séances de 50 minutes,
- LT : 7 séances de 50 minutes,
- YH : 3 séances de 50 minutes.

A ce stade de l'expérience, les enseignants ont continué à mener les classes de manière directive.

Les notions théoriques.

Assez souvent, LT a ajouté son interprétation personnelle des notions à celles des notes, ce qui dans un premier temps a posé quelques problèmes de synthèse aux élèves.

A plusieurs occasions encore, les efforts de concentration des élèves ont été bien insuffisants. Ainsi, lorsque peu après l'étude du théorème fondamental, LT a demandé à ses élèves de lui fournir une primitive ([5]) de $f(x) = \frac{1}{x}$, il a dû littéralement se fâcher pour obtenir une réaction, alors que la réponse explicite était quasi écrite au tableau. Cet effet de déconcentration n'a été que très peu observé chez les élèves de YH, qui sont peut-être influencés dans ce contexte par les exigences de rentabilité immédiate propres aux cours techniques.

YH n'a pas fourni *a priori* le résultat du théorème fondamental mais a entamé un calcul général de la dérivée de la fonction d'accumulation, pour aboutir au résultat miraculeux : si $A(t) = \int_a^t f(x)dx$, alors $A'(t) = f(t)$.

Il a mené ensuite une discussion avec les élèves sur le bien-fondé des notations utilisées dans les notes concernant la démonstration de ce théorème fondamental. Lors de toutes les discussions théoriques, il a justifié systématiquement les écritures littérales au départ d'exemples numériques, ce qui semblait une pratique reconnue, et que les élèves ont manifestement appréciée.

Les problèmes de calcul de $\int_0^a x^N dx$, $\int_a^b x^N dx$, $\int_0^\pi \cos x \; dx$, ...

Pour ces problèmes, la direction du travail a été prise en charge par les enseignants.

([5]) Pour mémoire, le calcul des primitives avait été étudié dès le second trimestre, quelques mois auparavant.

Pour donner une idée du caractère inattendu de certaines difficultés de lecture des élèves : la locution « l'intervalle $[0;1]$ » utilisé dans ce problème pour indiquer un bord vertical d'une surface a freiné la compréhension de la question. Dès que cette difficulté inattendue a été surmontée, les élèves ont souhaité que l'on utilise plutôt « la verticale $x = 0$ » ou « l'axe des y ».

Une élève de LT, peu active auparavant, mais qui avoua (!) avoir travaillé son cours pendant le week-end précédent, participa de manière pertinente aux discussions relatives au calcul de $\int_0^{\pi} \cos x \; dx$. En particulier, dans le cadre de l'extension de l'intégrale aux fonctions négatives, elle traduisit la question en termes de sommes de Darboux et parvint ainsi à la résoudre complètement et sans difficulté.

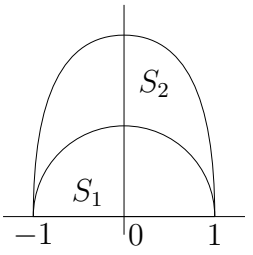
D'autres remarques ...

Le temps étant de plus en plus compté, beaucoup de prolongements des résultats n'ont pas pu être abordés. Deux exemples parmi d'autres permettent de mesurer la perte de sens qui en a résulté.

- Les différentes interprétations géométriques de la linéarité de l'intégrale n'ont pas été rencontrées. Ainsi, l'égalité :

$$\int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}dx = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$$

n'a pas reçu son interprétation géométrique *non* évidente : $S_2 = S_1$, puisque $\int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}dx = S_1 + S_2$ et $2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = 2S_1$



- Pareillement, la formule qui donne le volume du tonneau sphérique :

$$\frac{4}{3}\pi h^3 + 2\pi r^2 h$$

n'a pas été traduite comme somme du volume de la sphère et de celui du cylindre inscrits au tonneau.

12.5. Un compte-rendu de l'expérimentation : la phase de réification

La section 7, consacrée à une synthèse théorique générale (indépendance par rapport à la subdivision, démonstrations diverses,...), a seulement — faute de temps — fait l'objet d'un exposé magistral d'une heure par P. Tilleuil auprès des élèves de CT et LT. Les élèves ont reçu les photocopies des transparents qui servaient de support à cet exposé.

12.6. Des conclusions . . . préliminaires

Comme le compte-rendu précédent permet de s'en rendre compte, l'expérimentation dans les classes a fourni un ensemble assez diversifié d'observations, tant sur le plan disciplinaire que méthodologique. L'interprétation de ces résultats doit permettre d'améliorer la mise au point de la séquence d'enseignement. Mais avant de détailler la nouvelle version de cette séquence, il a semblé intéressant de relever d'abord quelques réactions globales des élèves et des enseignants, ainsi que de préciser quelques unes de nos premières conclusions.

12.6.1 Quelques réactions des élèves

Un débat/bilan animé par l'un d'entre nous a permis aux élèves de LT d'exprimer leurs impressions générales sur l'expérience. Les remarques suivantes ont figuré parmi les plus fréquentes :

- le manque de préparation à ce genre d'activités dans les années antérieures a été fortement souligné,
- des difficultés rencontrées lors du travail numérique sur les problèmes ont été relevées,
- un très grand nombre d'interventions ont été associées à la difficulté de lecture d'un texte scientifique, mais en des termes souvent contradictoires ; par exemple, le texte fourni a été considéré comme trop long et l'on a par ailleurs souhaité qu'il contienne plus d'exemples, de commentaires et de paraphrases,
- la lecture dirigée, à partir de la projection de transparents a été bien appréciée.

12.6.2 Quelques réactions des enseignants

Les enseignants déplorent que les limitations en termes de temps disponible aient eu des effets négatifs sur l'expérience :

- certains aspects caractéristiques de la séquence ont parfois été sacrifiés (le retour explicite sur quelques problèmes significatifs, la reconstruction théorique, ...),
- la récriture dans l'urgence des sections 4 et 5, pour répondre aux difficultés — mal cernées — des élèves n'a plus permis a certains enseignants de faire une lecture critique préalable des nouvelles notes, et les a handicapés dans l'organisation de la suite du cours.

Par ailleurs, à travers leurs réponses aux examens oraux, les élèves semblent avoir maîtrisé — mais *après* le cours — un certain nombre de notions fondamentales (sommes de Darboux, mailles et raffinements d'une subdivision, processus de convergence, ...). Au dire des enseignants, les exercices de fixation réalisés après l'expérience y auraient contribué de manière importante.

12.6.3 Parmi nos premières conclusions . . .

L'observation des élèves en classe a éclairé notre réflexion sur quelques points cruciaux :

- la problématisation, en tant que méthode d'enseignement, est un révélateur pertinent des difficultés de certains élèves quant à l'acquisition ou au développement de compétences nouvelles,
- cette problématisation multiplie aussi les paramètres que l'enseignant doit prendre en compte, et contribue ainsi à complexifier son travail.

La problématisation semble d'autant plus aisée que les élèves ont une « culture scolaire » qui soit en accord avec ce mode d'enseignement. En ce sens, des activités du type *laboratoire de mathématiques* ou de simulation à l'aide de moyens informatiques, permettraient peut-être à des élèves de l'enseignement général d'acquérir une culture qui soit comparable — dans les domaines qui nous importent — à celle des élèves de l'enseignement technique.

Dans ce contexte, il semble assez clair qu'il faut proposer aux enseignants des méthodologies à la fois simples et précises d'accompagnement des élèves, et que ces méthodologies prennent en compte les nécessaires changements dans les rythmes d'apprentissage associés à la problématisation, ainsi que l'équilibre à réaliser entre ces rythmes.

Au niveau des élèves, les obstacles associés aux activités de lecture semblent majeurs et incontournables. Ils posent des questions qui parfois dépassent l'enseignement des mathématiques, mais dont notre travail ne pourra évidemment pas faire l'économie.

La prise en compte détaillée de l'ensemble de ces informations (avec les réponses qu'il convient d'apporter aux questions qu'elles soulèvent) est une préoccupation importante sous-jacente à la suite de ce travail.

12.7. Postérité : une nouvelle version des notes de cours

Le texte qui suit est une version remaniée (et complète) du cours sur l'intégrale. Ce nouveau texte a profité de l'expérience précédente dans deux directions.

D'abord, le ***scénario*** *a été simplifié. Au lieu d'une table des matières assez systématique et lente en 7 sections, nous avons adopté un découpage plus nerveux en 3 sections, recentrées chacune sur une étape fondamentale de l'apprentissage. La progression suivant les phases décrites par A. Sfard s'en retrouve accentuée.*

Ensuite, le ***style*** *des notes a évolué. Nous avons modéré notre ambition de fournir un texte complet et autonome, adaptable en tant que tel aux élèves et aux enseignants. Sur le terrain, cette exigence s'est en effet révélée trop contraignante tant pour la pratique des enseignants que pour la communication avec les élèves, et cela sur de seules questions de formes. Le document est maintenant conçu comme une* ***trace essentielle*** *de la problématisation du cours, qui réunit et structure les questions et les résultats, sans être exhaustif. Le document se présente donc — assez naturellement — sous une forme décrite dans le cadre des outils pédagogiques (cfr. la quatrième partie de ce travail). Cette forme nous semble suffisamment significative pour que nous en reprenions ici les caractéristiques essentielles. On retrouve ainsi dans chaque section quatre types d'activités :*

- *des* ***questions*** *: elles servent d'introduction au thème principal de la section, l'aspect procédural y est souvent prépondérant,*
- *des* ***synthèses*** *: elles développent et mettent en valeur la transition entre le stade procédural et le stade structural dans le thème en question,*
- *des* ***exercices*** *: ils permettent de vérifier que les étapes de compréhension élémentaire du thème sont franchies,*
- *des* ***problèmes*** *: ils sont d'un niveau de difficulté plus significatif, et sous-entendent souvent une bonne maîtrise conceptuelle du thème étudié.*

L'ordre des activités qui semble ainsi induit ne veut pas être contraignant : une synthèse peut très bien être fractionnée en différentes parties proposées au moment opportun, par exemple après un exercice ou un problème approprié. Dans le même ordre d'idées, la liste d'exercices et de problèmes peut être étoffée au gré des intérêts des élèves et du professeur. La forme du document laisse — autant que faire se peut — suffisamment de liberté à l'enseignant dans son projet de construction du cours, tout en lui fournissant un cadre de référence solide pour lui permettre de tenter des expériences constructives.

Nous n'avons pas trouvé de raisons de modifier la méthodologie déjà préconisée auparavant. L'essentiel du projet étant mieux mis en valeur, il devrait en résulter une meilleure gestion du temps et une plus grande liberté d'organisation pour les élèves et surtout pour le professeur.

Section 0. Introduction

Le sujet de ce document est la notion d'**intégrale**.

Comme pour n'importe quel sujet en mathématiques, celui-ci se comprend mieux au départ de situations-problèmes. Ces questions initiales, dès qu'elles sont bien explorées, permettent de développer des intuitions et des images mentales, de découvrir ou d'apprécier des propriétés, et de suggérer, quand le besoin s'en fait sentir, les résultats théoriques essentiels. C'est donc ce mode d'approche qui est privilégié dans la suite.

Le texte est divisé en trois sections.

La première section s'intitule « Une longue somme de petits produits ». Elle est consacrée à la mise en évidence d'un processus d'approximation de certaines grandeurs dans des contextes variés. Ce processus est formalisé par la définition de ce qu'on appelle des **sommes de Darboux**.

La deuxième section a pour titre : « Du contrôle à la prévision ... exacte ». Elle étudie le processus d'approximation mis au point dans la première section, jusqu'à en dégager une définition de l'**intégrale**. Cette définition décrit la valeur exacte de ce que les sommes de Darboux ne permettaient que d'encadrer.

La troisième section s'intitule « Un miracle ... très naturel ». Elle développe un nouveau mode d'évaluation de l'intégrale, souple et rapide, connu sous l'appellation de **calcul des primitives**.

Section 1. Une longue somme de petits produits

Avant d'entamer cette section, chacun devrait être capable :

- de modéliser une caractéristique d'un phénomène à l'aide d'une fonction d'une variable,
- de se servir d'une calculatrice ou d'un logiciel de type *tableur* (EXCEL, ...) pour effectuer des sommes et des produits de nombres.

1.1 Une question initiale : la consommation d'énergie électrique

Les compagnies d'électricité établissent la facture de leurs clients en fonction de l'énergie électrique qu'ils consomment. Cette *énergie* électrique dépend de la *puissance* demandée par les différents appareils électriques et du *temps* pendant lequel cette puissance est demandée. Plus précisément, lorsque la puissance demandée est **constante** sur un intervalle de temps fixé, alors l'énergie consommée pendant cet intervalle de temps est définie par la formule :

$$\text{puissance demandée} \times \text{durée de l'intervalle de temps},$$

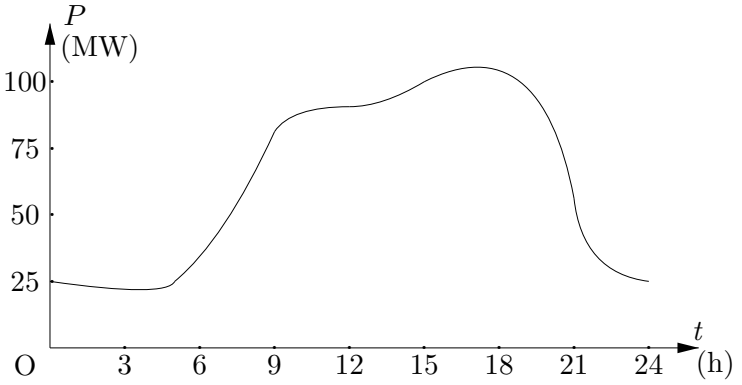
ces grandeurs étant exprimées dans des unités convenables.

Exemple. Si une ampoule électrique d'une puissance de 60 watts reste allumée pendant 5 heures dans une maison, elle consomme une énergie de 300 wattheures, ou de 0,3 kilowattheures (en symbole : 300 Wh ou 0,3 kWh.) Si le kilowattheure est facturé à 4,80 F (hors T.V.A.), un tel éclairage coûte donc 1,44 F.

Mais la demande en puissance électrique varie d'après le moment de la journée. Dans certains cas — par exemple, lorsque peu d'appareils électriques sont concernés — cette demande est relativement constante sur des périodes de temps appropriées, et ne varie d'une période de temps à l'autre que par paliers. Mais lorsqu'on considère la consommation électrique à une plus grande échelle — par exemple à l'échelle d'une ville — la demande totale varie constamment à cause du très grand nombre d'appareils et de consommateurs impliqués, et il n'est plus possible de distinguer des paliers. Une telle demande de puissance électrique peut alors se visualiser à l'aide d'une courbe continue.

Question 1 *La puissance électrique nécessaire à l'ensemble des activités d'une ville de taille moyenne est décrite en fonction du moment de la journée dans le graphique ci-contre.*

($1\text{MW} = 10^6\text{W}$)



On demande :

- *d'abord, de* surestimer *la valeur de l'énergie consommée par cette ville pendant une journée,*
- *ensuite, de* sous-estimer *cette même valeur,*
- *enfin, de raffiner ce processus de telle sorte qu'on puisse en déduire un encadrement raisonnable du coût de l'énergie consommée par cette ville pendant une journée, le kilowattheure étant facturé à 4,80 F, hors T.V.A.*

Remarque. Pour réaliser des calculs suffisamment précis, un agrandissement du graphique ci-dessus (sur papier millimétré) peut être utile. Une expression explicite de la puissance comme fonction du temps rend encore de meilleurs services ; en voici une :

$P(t) = -0,2906165437 \cdot 10^{-6} \cdot t^9 + 0,00003076843301 \cdot t^8 - 0,001342038667 \cdot t^7 + 0,03107383835 \cdot t^6 - 0,4097902563 \cdot t^5 + 3,064475374 \cdot t^4 - 12,23848620 \cdot t^3 + 23,85276352 \cdot t^2 - 18,37307744 \cdot t + 25$.

Mais cette expression est assez *instable* : il vaut mieux ne pas remplacer les coefficients qui y apparaissent par des valeurs approchées ...

1.2 Une synthèse : la notion de somme de Darboux

Comment discrétiser un phénomène continu ?

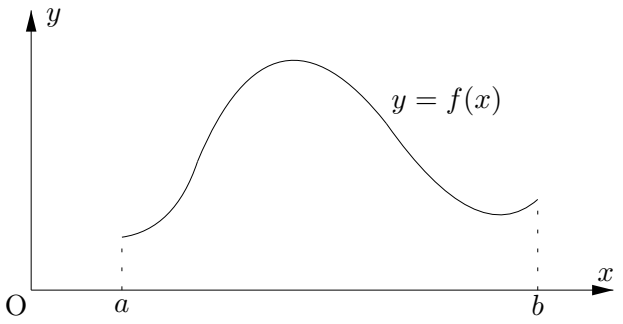
La question précédente demandait de déterminer l'énergie électrique consommée par une ville connaissant la puissance électrique nécessaire à tout moment. Or, on ne dispose que de cette définition : lorsque la puissance demandée est **constante** sur un intervalle de temps fixé, alors l'énergie consommée pendant cet intervalle de temps est **définie** par la formule « puissance demandée × durée de l'intervalle de temps ». Hélas, le seul renseignement dont on dispose ici est celui de la puissance électrique en tant que fonction **non constante** du temps.

L'idée qui permet néanmoins d'apporter une solution au problème comporte deux étapes caractéristiques :

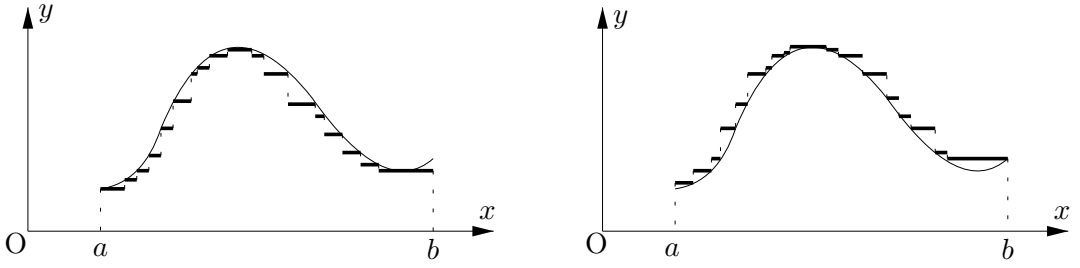
- sur **un** intervalle de temps **suffisamment petit**, il y a moyen de sous-estimer ou de surestimer raisonnablement la puissance électrique par une puissance **constante** ; sur un tel intervalle de temps, le calcul de l'énergie se ramène au calcul d'un **produit élémentaire**,
- on peut **décomposer** toute la journée en un nombre — éventuellement très élevé — de tels intervalles de temps ; l'énergie électrique totale est alors la **somme** des produits élémentaires correspondants.

La décomposition du domaine d'une fonction de telle sorte que l'on puisse assimiler cette fonction à une fonction constante sur chaque sous-intervalle de la décomposition est ce qu'on appelle **un processus de discrétisation « en escaliers »**. Ce processus de discrétisation permet de remplacer la fonction donnée par une fonction constante par morceaux qui en constitue une « bonne approximation ».

Ainsi, la fonction dont le graphe est fourni ci-dessous :



peut être remplacée par une fonction constante par morceaux, ou « en escaliers », qui la sous-estime ou surestime :



Ce processus de discrétisation permet alors d'obtenir une valeur approchée de l'énergie électrique à évaluer en l'encadrant par l'une ou l'autre somme du type $\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot \triangle t_i$, où :

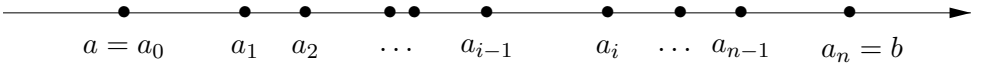
- n est le nombre d'intervalles de temps nécessaires pour découper de manière appropriée les 24 heures d'une journée,
- et, pour chaque valeur de l'indice i, P_i est une valeur de la puissance, choisie pour majorer ou minorer selon le cas la puissance réelle sur l'intervalle de temps $\triangle t_i$.

Comme on va le vérifier à de nombreuses reprises, cette construction d'un encadrement d'un nombre à partir de la discrétisation d'une fonction est un outil très performant : il ramène le calcul de bon nombre de grandeurs à l'évaluation de **(longues) sommes de produits élémentaires**.

La définition de subdivision d'un intervalle

On appelle **subdivision** (en n parties) de l'intervalle $[a;b]$ la donnée d'une suite ordonnée de $n+1$ points :

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{i-1} < a_i < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$$



Les n sous-intervalles $[a;a_1] = [a_0;a_1]$, $[a_1;a_2]$, …, $[a_{i-1};a_i]$, …, $[a_{n-1};a_n] = [a_{n-1};b]$ qui apparaissent ainsi sont appelés les intervalles *sous-jacents* à la subdivision. On définit la **maille** δ d'une subdivision quelconque $D : a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{i-1} < a_i < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ par

$$\delta = \max\{a_i - a_{i-1} : 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

C'est la longueur du plus grand intervalle sous-jacent à la subdivision. Une **subdivision régulière** est une subdivision dont tous les intervalles sous-jacents sont de même longueur ; ainsi une subdivision régulière de l'intervalle $[a;b]$ en n parties est donnée par

$$D := \left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right)_{0 \leqslant i \leqslant n}$$

et sa maille vaut $\delta = \frac{b-a}{n}$.

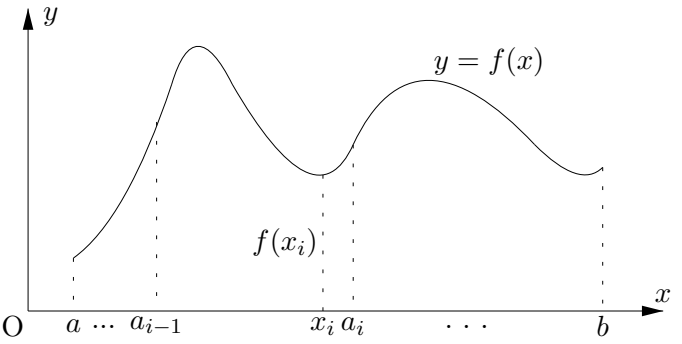
La définition de sommes de Darboux

On considère une fonction $f(x)$ définie sur un intervalle $[a;b]$, et une subdivision $D : a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{i-1} < a_i < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ de cet intervalle.

On appelle **somme de Darboux inférieure** ([6]) pour la fonction $f(x)$ et la subdivision D le nombre $s(f(x);D)$ défini par

$$s(f(x);D) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$$

où, quel que soit $1 \leqslant i \leqslant n$, x_i est un nombre dont l'image $f(x_i)$ est **minimum** parmi les valeurs de la fonction sur le sous-intervalle $[a_{i-1};a_i]$:

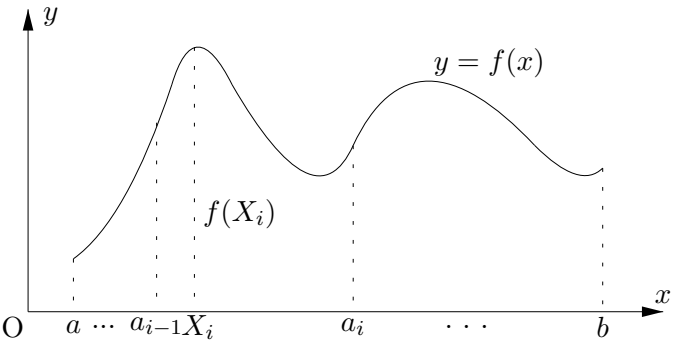


On note souvent $\triangle x_i$ la longueur $a_i - a_{i-1}$ du sous-intervalle $[a_{i-1};a_i]$ dans lequel se trouve le point x_i. Cela permet d'écrire la définition précédente sous la forme $s(f(x);D) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \triangle x_i$.

Pareillement, on appelle **somme de Darboux supérieure** pour la fonction $f(x)$ et la subdivision D le nombre $S(f(x);D)$ défini par

$$S(f(x);D) = \sum_{i=1}^{n} f(X_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$$

où, quel que soit $1 \leqslant i \leqslant n$, X_i est un nombre dont l'image $f(X_i)$ est **maximum** parmi les valeurs de la fonction sur le sous-intervalle $[a_{i-1};a_i]$:



([6]) Suite aux travaux de G. F. B. Riemann (1826-1866) consacrés à la mise au point d'une théorie de l'intégrale, le mathématicien français J.-G. Darboux (1842-1917) proposa de partir de l'idée d'encadrement pour justifier les résultats de Riemann et introduisit à cet effet les sommes qui, depuis, portent son nom.

On note encore $\triangle X_i$ la longueur $a_i - a_{i-1}$ du sous-intervalle $[a_{i-1}; a_i]$ dans lequel se trouve le point X_i. Cela permet d'écrire la définition précédente sous la forme $S(f(x); D) = \sum_{i=1}^{n} f(X_i) \cdot \triangle X_i$. On a évidemment $\triangle x_i = a_i - a_{i-1} = \triangle X_i$.

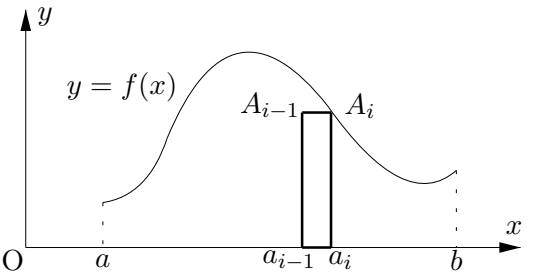
Sommes de Darboux et encadrement

Si le calcul de sommes de Darboux est entrepris pour approcher une grandeur G, alors on déduit évidemment de la construction de ces sommes une **inégalité d'encadrement**

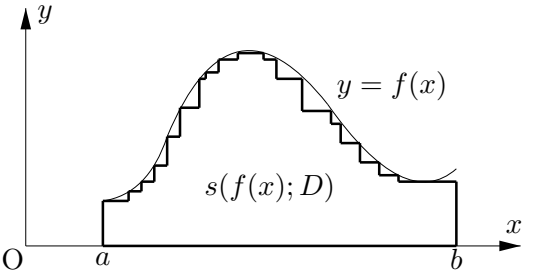
$$\boxed{s(f(x); D) \leqslant G \leqslant S(f(x); D)}$$

Sommes de Darboux et mesure d'aire

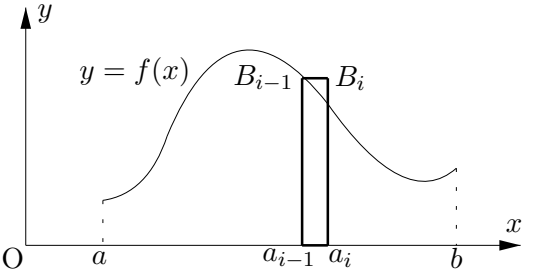
Dans une somme de Darboux inférieure, chaque terme du type $f(x_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$ **représente** la mesure de l'aire du rectangle $a_{i-1}A_{i-1}A_i a_i$ correspondant :



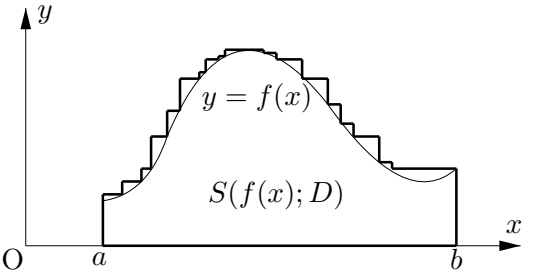
et la somme $s(f(x); D) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$ **s'interprète** alors comme la mesure de l'aire d'une figure polygonale :



Pour une somme de Darboux supérieure, et de manière tout à fait analogue, chaque terme du type $f(X_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$ **représente** la mesure de l'aire du rectangle $a_{i-1}B_{i-1}B_i a_i$ correspondant :



et la somme $S(f(x); D) = \sum_{i=1}^{n} f(X_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$ **s'interprète** encore comme la mesure de l'aire d'une (autre) figure polygonale :



Remarque. Une somme de Darboux **n'est pas** une mesure d'aire, de la même manière que l'énergie n'est pas l'aire d'une surface limitée par une puissance. Mais une somme de Darboux peut toujours **s'interpréter** comme une mesure d'aire. Beaucoup de problèmes dans lesquels il n'est fait aucune référence à une surface peuvent être résolus en termes de sommes de Darboux et acquérir ainsi — *a posteriori* — une interprétation géométrique nouvelle et éclairante.

1.3 Quelques exercices

Dans les exercices suivants, il est vivement conseillé de réaliser les calculs numériques à l'aide d'un tableur (EXCEL, ...) afin de pousser le plus loin possible la précision dans les encadrements.

Dans les exercices 1 et 2, la fonction à utiliser est fournie — ou quasiment fournie — dès l'énoncé tandis que dans l'exercice 3, il faut d'abord créer une fonction associée à la grandeur à déterminer.

Exercice 1 **1)** *On considère le triangle curviligne délimité par l'intervalle* $[0;1]$ *sur l'axe des* x*, la verticale* $x=1$ *et le graphe de* $f(x)=x^N$ *, où* $N=2$ *,* 3*,* 4 *ou* 5 *(au choix). On demande de fournir un encadrement suffisamment précis de l'aire de ce triangle curviligne.*

Comment conjecturer en conséquence la valeur exacte de cette aire pour la valeur de N *choisie ?*

2) *On considère le fuseau délimité par l'intervalle* $[-1;1]$ *sur l'axe des* x *et le graphe de* $f(x)=\sqrt{1-x^2}$*. On demande de de fournir un encadrement suffisamment précis de l'aire de ce fuseau.*

On comparera l'encadrement obtenu avec sa valeur exacte que l'on peut calculer directement.

3) *On considère le triangle curviligne délimité par l'intervalle* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ *sur l'axe des* x*, l'intervalle* $[0;1]$ *sur l'axe des* y *et le graphe de* $f(x)=\cos x$*. On demande de fournir un encadrement suffisamment précis de l'aire de ce triangle curviligne.*

Comment conjecturer en conséquence la valeur exacte de cette aire ?

4) *On considère le trapèze curviligne délimité par l'intervalle* $[0;1]$ *sur l'axe des* x*, les verticales* $x=0$ *et* $x=1$ *et le graphe de* $f(x)=e^x$*. On demande de fournir un encadrement suffisamment précis de l'aire de ce trapèze curviligne.*

Une introduction à l'exercice 2. ([7])Un capital C placé à un taux d'intérêt annuel i procure après t années de placement à intérêts composés un revenu total décrit par la formule : $C\cdot(1+i)^t$. Pour certains types de biens — la valeur financière d'une propriété, par exemple — il est assez naturel de concevoir que l'accroissement de valeur n'a pas lieu tous les ans, ou à des intervalles de temps réguliers, mais bien de manière continue : on parle alors de capitalisation continue. Un capital C placé à un taux d'intérêt annuel i procure après t années de placement à intérêts continus un revenu total décrit par la formule :

([7]) Cet exercice est extrait de : F. W. Luttmann — *Selected applications of mathematics in finance and investment* ; EDC/Project UMAP, unit 381 ; 1979.

$$\lim_{n\to\infty} C \cdot \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt} = C \cdot e^{it}$$

Si la facture d'une fourniture quelconque, à règler dans t années, doit représenter alors un montant $F(t)$, sa valeur actuelle $A(t)$ dans un régime à intérêt continu vérifie donc la relation

$$A(t) \cdot e^{it} = F(t)$$

où i est le taux d'intérêt annuel.

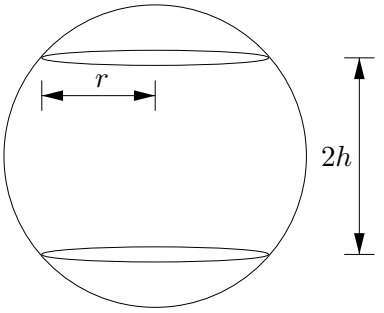
Exercice 2 *Déterminez un encadrement de la rentabilité d'une centrale hydro-électrique (en termes de valeur actuelle sous un taux d'intérêt continu à 6 %) , sachant que le coût de construction est estimé à 2 milliards de francs belges, que sa durée de rentabilité est de 20 ans, et que le revenu* annuel *d'exploitation après t années est donné en francs belges par la formule*

$$F(t) = 40 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{t}$$

Est-il judicieux de commencer la construction d'une telle centrale ?

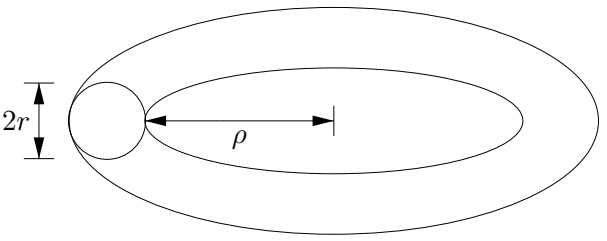
Exercice 3 1) *On considère un tonneau sphérique, c'est-à-dire une sphère coupée par deux plans parallèles équidistants du centre de la sphère.*

On note $2h$ la hauteur du tonneau et r le rayon de son couvercle.
On demande de fournir un encadrement suffisamment précis du volume de ce tonneau, si $2h = 1$ m et $r = 40$ cm.



2)

On note $2r$ le diamètre de la section d'un tore de révolution, et ρ le rayon du cercle de gorge.
On demande de fournir un encadrement suffisamment précis du volume de ce tore lorsque $2r = 5$ cm et $\rho = 45$ cm.



Remarque. Le premier énoncé de l'exercice 3 ci-dessus est prolongé dans la question initiale de la section 2 ci-après.

1.4 Les compétences à atteindre à la fin de cette section

A la fin de cette première section — et dans le cadre d'un problème où une fonction est associée à l'évaluation d'une grandeur — chacun devrait être capable :

- de discrétiser les variations de la fonction sur l'intervalle dans lequel la variable varie, c'est-à-dire de construire une subdivision de cet intervalle appropriée à l'évaluation de la grandeur en question,
- d'en déduire un encadrement de la grandeur en question par des sommes de Darboux,
- d'évaluer ces sommes de Darboux à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel et, le cas échéant, d'améliorer l'encadrement en modifiant la subdivision.

1.5 Quelques problèmes

Les énoncés qui suivent sont des problèmes : leur niveau de difficulté est sensiblement plus élevé que celui des exercices, en particulier au niveau de la création d'une fonction associée à la grandeur à évaluer. Encore une fois, il est vivement conseillé de réaliser les calculs numériques à l'aide d'un tableur (EXCEL, ...) afin de pousser le plus loin possible la précision dans les résultats.

Le problème suivant est connu sous le nom de « problème de l'aiguille de Buffon ».

Problème 1

Dans une chambre, le parquet est formé de longues lattes parallèles, dont les joints sont donc équidistants et séparés d'une distance d. On jette en l'air une aiguille de longueur ℓ inférieure à d, de telle sorte qu'elle tombe sur le parquet.

Lorsque l'angle de position de l'aiguille (par rapport à la direction des joints) est fixé, il est assez facile de déterminer toutes les positions du centre de masse de l'aiguille pour lesquelles celle-ci coupe un joint.

On demande d'évaluer la probabilité p pour que l'aiguille tombe sur un des joints du parquet (indépendamment de son angle de position), si par exemple $d = 10$ cm et $\ell = 4$ cm.

Une introduction au problème 2. Dans l'espace à trois dimensions, la position du centre de masse (ou isobarycentre) G d'un système de n points matériels $\{P_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de masses respectives $\{m_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est décrit par la formule :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OP_1} + m_2\overrightarrow{OP_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{OP_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

où O est un point quelconque.

Problème 2

On demande de fournir un encadrement suffisamment précis de la hauteur du centre de masse d'un cône solide de hauteur h, de demi-angle d'ouverture α et de densité volumique (masse par unité de volume) ρ.

On peut particulariser les données en posant $h = 0{,}4\ m$, $\alpha = 20^o$ et $\rho = 2\ kg/m^3$.

Une remarque. La position du centre de masse de n points matériels s'interprète comme la *moyenne* (pondérée par leurs masses) des positions de ces points matériels : la notion de moyenne en statistique, ou d'espérance mathématique en probabilités, est une traduction — adaptée à ces disciplines — de la notion de centre de masse en physique. De manière analogue, la notion de variance en statistique et en probabilités est une traduction de la notion de moment d'inertie en physique.

Problème 3

1) *On demande de fournir un encadrement suffisamment précis de la longueur de l'arc de courbe d'équation $y = k \cdot \sqrt{1 - x^2}$ d'origine $(-1; 0)$ et d'extrémité $(1; 0)$ suivant des valeurs (au choix) du nombre positif k.*

Si $k = 1$, on comparera l'encadrement obtenu avec la valeur exacte de la longueur demandée, que l'on peut alors calculer directement.

2) *On demande de fournir un encadrement suffisamment précis de la longueur de l'arc de parabole « semi-cubique » $y = x^{\frac{3}{2}}$ d'origine $(0; 0)$ et d'extrémité $(1; 1)$.*

Une remarque. Une des premières solutions du problème de la longueur de l'arc de parabole « semi-cubique » est due à P. de Fermat (1601-1665). Il était particulièrement fier de sa solution, parce qu'il avait réalisé que le calcul en termes de sommes de Darboux ([8]) permettait d'évaluer **de manière générale** la longueur d'un arc de courbe, en dépassant ainsi la seule évaluation des aires et des volumes, auxquelles ces sommes étaient jusque là exclusivement cantonnées.

Une autre remarque. Le premier énoncé du problème 3 est quasiment celui qui fait l'objet de la fiche 2 du chapitre 11.

Section 2. Du contrôle à la prévision . . . exacte

2.1 Une question initiale : une estimation au litre près

Pour mémoire, cette question prolonge le premier énoncé de l'exercice 3 de la section précédente.

Question 2

On considère un tonneau sphérique, c'est-à-dire une sphère coupée par deux plans parallèles équidistants du centre de la sphère. On note $2h$ la hauteur du tonneau et r le rayon de son couvercle.

On demande de calculer le volume de ce tonneau au litre près, *si $2h = 1\ m$ et $r = 40\ cm$.*

([8]) Fermat ne s'exprimait évidemment pas ainsi, mais l'idée était parfaitement analogue.

Remarque. Il est intéressant de ne considérer d'abord que des subdivisions régulières, c'est-à-dire dont la longueur des intervalles sous-jacents est constante. Dans ce cas, la *lisibilité* des feuilles de calcul peut livrer des propriétés intéressantes.

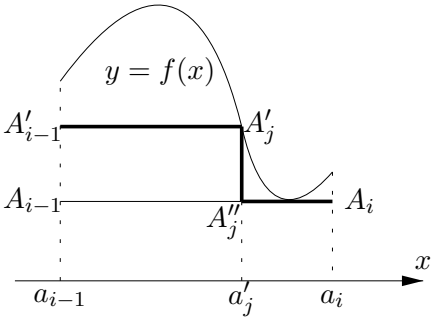
2.2 Une synthèse : pourquoi le contrôle mène-t-il à l'exactitude ?

Comment resserrer l'encadrement ?

Si D est une subdivision d'un intervalle $[a;b]$, un **raffinement** D' de la subdivision D est n'importe quelle subdivision de l'intervalle $[a;b]$ qui contient *au moins* les mêmes points que ceux de D, ce qu'on note assez naturellement

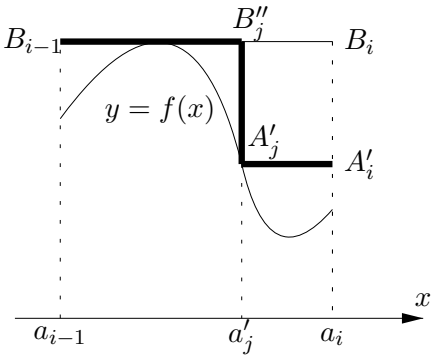
$$D \subset D'$$

Raffiner une subdivision donnée permet de *resserrer l'encadrement* d'une grandeur fourni par des sommes de Darboux. Plus précisément, ajouter *un seul point* à une subdivision *augmente* la somme de Darboux inférieure (ou la laisse inchangée) :



$$\text{Aire}\,(a_{i-1}A_{i-1}A_ia_i) \leqslant \text{Aire}\left(a_{i-1}A'_{i-1}A'_jA''_jA_ia_i\right)$$

et *diminue* la somme de Darboux supérieure (ou la laisse inchangée) :



$$\text{Aire}\,(a_{i-1}B_{i-1}B_ia_i) \geqslant \text{Aire}\left(a_{i-1}B_{i-1}B''_jA'_jA'_ia_i\right)$$

On vérifie facilement que cette propriété est vraie quel que soit le signe de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a;b]$.

En conclusion, on a donc obtenu une *inégalité de resserrement* :

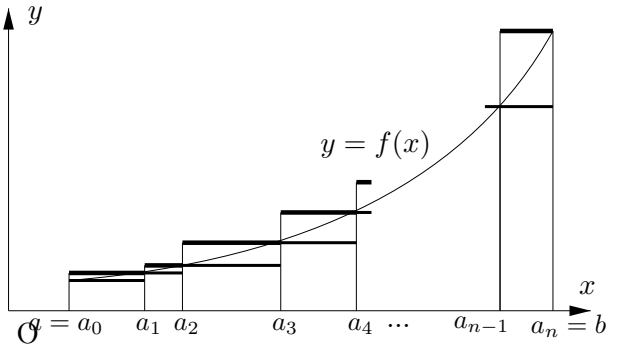
$$D \subset D' \implies s(f(x);D) \leqslant s(f(x);D') \leqslant S(f(x);D') \leqslant S(f(x);D)$$

Une classe de fonctions

On se limitera presqu'exclusivement dans la suite à ne plus considérer que des fonctions définies sur un intervalle $[a;b]$ et **monotones** — c'est-à-dire croissantes ou décroissantes — sur cet intervalle.

Pourquoi ? Parce que les sommes de Darboux sont alors très faciles à calculer ! Plus précisément, si $f(x)$ est une fonction *croissante* sur l'intervalle $[a;b]$, à toute subdivision $D : a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{i-1} < a_i < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ de cet intervalle correspond alors

la somme de Darboux inférieure :
$s(f(x);D) = \sum_{i=1}^{n} f(a_{i-1}) \cdot (a_i - a_{i-1})$
et la somme de Darboux supérieure :
$S(f(x);D) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$



Pareillement, si $f(x)$ est une fonction *décroissante* sur l'intervalle $[a;b]$, à toute subdivision $D : a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{i-1} < a_i < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ de cet intervalle correspond la somme de Darboux inférieure :

$$s(f(x);D) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$$

et la somme de Darboux supérieure :

$$S(f(x);D) = \sum_{i=1}^{n} f(a_{i-1}) \cdot (a_i - a_{i-1})$$

Cette restriction aux fonctions monotones n'a rien de dramatique ! Pour la plupart des fonctions usuelles ([9]), on peut toujours décomposer l'intervalle où on les étudie en sous-intervalles sur lesquels ces fonctions seront soit croissantes, soit décroissantes : les racines de la dérivée première de ces fonctions sont bien utiles à cet effet.

Néanmoins, le choix d'un ensemble de fonctions dont les sommes de Darboux soient exploitables n'est pas innocent ! Une discussion un peu plus approfondie de la signification de ce choix est entamée à la fin de la section 3.

Comment contrôler l'erreur ?

Si $f(x)$ est une fonction *croissante* sur l'intervalle $[a;b]$ muni de la subdivision *régulière* $D = \left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, on établit une formule de mesure d'erreur en explicitant les sommes de Darboux :

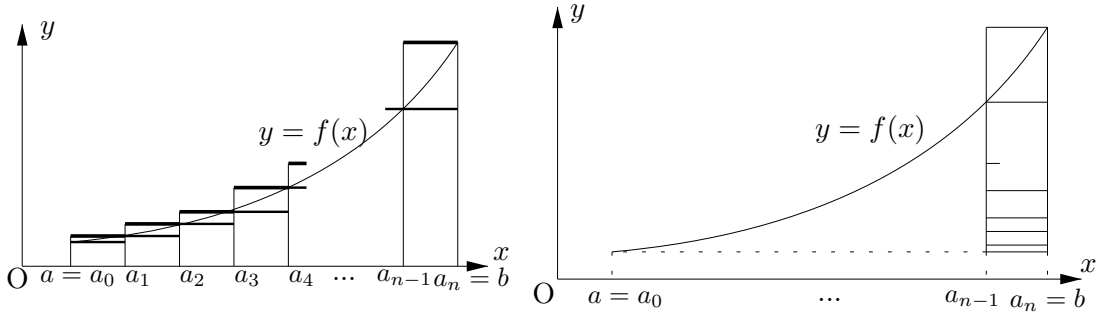
([9]) Et cela couvre toutes les fonctions étudiées dans les questions, exercices et problèmes de ce cours.

$$\begin{aligned} S(f(x);D) - s(f(x);D) &= \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\cdot(a_i - a_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(a_{i-1})\cdot(a_i - a_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(a_i) - f(a_{i-1}))\cdot(a_i - a_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(a_i) - f(a_{i-1}))\cdot\frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} (f(a_i) - f(a_{i-1})) \end{aligned}$$

$$= \frac{b-a}{n}\cdot(f(a_1) - f(a_0) + f(a_2) - f(a_1) + \cdots + f(a_{n-1}) - f(a_{n-2}) + f(a_n) - f(a_{n-1}))$$

$$= \frac{b-a}{n}\cdot(-f(a_0) + f(a_n)) = \frac{b-a}{n}\cdot(f(b) - f(a))$$

On visualise ce raisonnement et son résultat grâce à l'interprétation des sommes de Darboux en termes de mesure d'aires. Il suffit en effet de translater les petits rectangles appropriés au-dessus d'un sous-intervalle quelconque de la subdivision, par exemple $[a_{n-1}; a_n]$:



Un calcul absolument analogue dans le cas d'une fonction *décroissante* sur l'intervalle $[a; b]$ donne comme résultat :

$$S(f(x);D) - s(f(x);D) = \frac{b-a}{n}\cdot(f(a) - f(b))$$

En conclusion, l'erreur lors de l'encadrement d'une grandeur G par les sommes de Darboux $s(f(x);D)$ et $S(f(x);D)$ se calcule grâce à la formule :

$$S(f(x);D) - s(f(x);D) = |f(b) - f(a)|\cdot\delta$$

pourvu que $f(x)$ soit une fonction*monotone* sur l'intervalle $[a; b]$ dont D est une subdivision *régulière* de maille $\delta = \frac{b-a}{n}$.

Une définition de l'intégrale

De manière assez sommaire, l'intégrale est la valeur exacte de la grandeur que les sommes de Darboux se contentent d'encadrer. Plus précisément, lorsqu'on considère :

- une fonction $f(x)$ **monotone** sur un intervalle $[a;b]$,
- la **suite** $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de **subdivisions régulières** de l'intervalle $[a;b]$ définies par

$$D_n = \left(a + i \cdot \frac{b-a}{10^n}\right)_{0\leqslant i\leqslant 10^n}$$

on appelle alors **intégrale de** $f(x)$ **de** a **à** b, le nombre réel noté [10] $\int_a^b f(x)dx$, et défini par :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} s(f(x);D_n) = \lim_{n\to\infty} S(f(x);D_n)$$

Ainsi l'intégrale d'une fonction $f(x)$ entre a et b est bien la valeur « exacte » de la grandeur que les sommes de Darboux se contentaient d'encadrer : **cette valeur exacte est le résultat final d'un processus d'approximations successives**.

Les questions que pose cette définition de l'intégrale

La définition précédente mérite trois commentaires en réponse à trois questions assez naturelles.

Pourquoi introduire cette *suite* de subdivisions régulières ?

Parce qu'elle constitue une *suite emboîtée de subdivisions* de l'intervalle $[a;b]$, ce qui signifie que :

- quel que soit $n \in \mathbb{N}$: D_n est une subdivision de l'intervalle $[a;b]$,
- quel que soit $n \in \mathbb{N}$: $D_n \subset D_{n+1}$.

Comme on l'a montré plus haut, il en résulte, à chaque nouvelle valeur de $n \in \mathbb{N}$, un resserrement de l'encadrement :

$$\cdots \leqslant s(f(x);D_n) \leqslant s(f(x);D_{n+1}) \leqslant \cdots \leqslant S(f(x);D_{n+1}) \leqslant S(f(x);D_n) \leqslant \cdots$$

Tout est donc en place pour qu'une convergence soit imaginable !

---

[10] La notation $\int_a^b f(x)dx$ de l'intégrale s'est définitivement imposée avec J. Fourier (1768-1830), mais des formes diverses préexistaient depuis les inventeurs du calcul intégral : I. Newton (1642-1727) et G. W. Leibniz (1646-1716), pour ne pas citer Fermat, déjà évoqué plus haut, et bien d'autres mathématiciens ...Les extrémités a et b de l'intervalle sur lequel s'effectue l'intégration sont souvent appelés les *bornes d'intégration* de l'intégrale. Plus spécifiquement, le nombre a est appelé la borne gauche ou borne inférieure de l'intégrale, et le nombre b, la borne droite ou borne supérieure de l'intégrale.

Est-on bien sûr que $\lim_{n\to\infty} s(f(x);D_n)$ et $\lim_{n\to\infty} S(f(x);D_n)$ existent ?

Chacune des sommes de Darboux $s(f(x);D_n)$ est un nombre réel, de telle sorte que $(s(f(x);D_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite de nombres réels.*

Les subdivisions $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant emboîtées, cette suite est *croissante* : c'est une traduction de la « partie gauche » des inégalités de resserrement.

Cette suite est aussi *majorée* : la somme de Darboux *supérieure* $S(f(x);D_1)$ fournit un majorant tout à fait acceptable.

Or, c'est une propriété fondamentale des nombres réels : toute suite croissante majorée dans $\mathbb{R}$ y admet une et une seule limite. Toutes les conditions sont donc réunies pour que $\lim_{n\to\infty} s(f(x);D_n)$ existe.

Le raisonnement est analogue dans le cas de la suite $(S(f(x);D_n))_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes de Darboux supérieures, sauf qu'on évoque alors le fait que toute suite décroissante minorée dans $\mathbb{R}$ y admet une et une seule limite.

Dans les deux cas, la convergence est acquise !

Pourquoi les deux limites $\lim_{n\to\infty} s(f(x);D_n)$ et $\lim_{n\to\infty} S(f(x);D_n)$ sont-elles égales ?

C'est une conséquence immédiate de la possibilité de contrôler l'erreur. En effet, puisque les hypothèses faites permettent d'écrire :

$$S\left(f(x);D_n\right) - s\left(f(x);D_n\right) = \frac{b-a}{10^n}\cdot|f(b)-f(a)|$$

on en déduit :

$$\lim_{n\to\infty}\left(S\left(f(x);D_n\right) - s\left(f(x);D_n\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{10^n}\cdot|f(b)-f(a)|\right) = 0$$

Il n'y a donc pas d'ambiguïté dans la convergence !

En fait, tous ces raisonnements ne font que **formaliser** ce que les questions, exercices et problèmes rencontrés jusqu'ici ont permis d'**observer** à de nombreuses reprises.

2.3 Quelques exercices

Les deux exercices suivants prolongent l'exercice 1 : le premier est encore numérique, et nécessite l'usage d'un tableur (EXCEL, ...), le second demande des calculs de limites de suites.

Exercice 4

1) *On demande de calculer* $\int_0^1 x^N dx$ *pour* $N = 2$, 3, 4 *ou* 5 *avec une précision de l'ordre de* 10^{-2}.

En particulier, quelle est la maille de la subdivision à employer, et combien de sommes faudra-t-il effectuer pour obtenir le résultat souhaité ; comment ces résultats évoluent-ils s'il s'agit de calculer $\int_0^2 x^N dx$ *pour* $N = 2$, 3, 4 *ou* 5 *avec le même ordre de précision ?*

2) *On demande de calculer* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ *avec une précision de l'ordre de* 10^{-3}. *Quelle est la maille de la subdivision à employer, et combien de sommes faudra-t-il effectuer pour obtenir le résultat souhaité ?*

3) *On demande de calculer* $\int_0^1 e^x dx$ *avec une précision de l'ordre de* 10^{-3}. *Quelle est la maille de la subdivision à employer, et combien de sommes faudra-t-il effectuer pour obtenir le résultat souhaité ?*

Exercice 5

1) *Calculer* $\int_0^1 x^N dx$ *pour* $N = 0$, 1, 2, 3, 4 *ou* 5.

Pour les mêmes valeurs de N, *généraliser ensuite le mode de calcul à* $\int_0^b x^N dx$ *et* $\int_a^b x^N dx$ *(en supposant que* $0 < a < b$*).*

2) *Calculer* $\int_0^1 e^x dx$.

Généraliser ensuite le mode de calcul à $\int_0^b e^x dx$ *et* $\int_a^b e^x dx$ *(en supposant toujours que* $0 < a < b$*).*

Indications. Pour la première partie de l'exercice précédent, il est utile de disposer d'une formule permettant de calculer la somme des mêmes puissances des N premiers nombres entiers. De telles formules ([11]) ont été obtenues de diverses façons dans le courant du XVIIe siècle. Pour les premières puissances, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} i &= \frac{N(N+1)}{2} \\
\sum_{i=1}^{N} i^2 &= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \\
\sum_{i=1}^{N} i^3 &= \frac{N^2(N+1)^2}{4} \\
\sum_{i=1}^{N} i^4 &= \frac{N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1)}{30}
\end{aligned}$$

([11]) Cfr. aussi l'exemple 6.5.7 du chapitre 6.

$$\sum_{i=1}^{N} i^5 \quad = \quad \frac{N^2(N+1)^2(2N^2+2N-1)}{12}$$

Pour la seconde partie du même exercice, la formule de sommation des N premiers termes d'une suite géométrique rend un service analogue.

2.4 Les compétences à atteindre à la fin de cette section

A la fin de cette deuxième section, chacun devrait être capable (au moins) :

- d'écrire l'intégrale donnant la valeur exacte d'une grandeur encadrée par des sommes de Darboux,
- de déterminer ou d'évaluer (une borne supérieure de) l'erreur commise en encadrant une intégrale par des sommes de Darboux.
- de calculer la valeur exacte d'une intégrale comme limite d'une suite dans des cas raisonnablement simples.

2.5 Quelques problèmes qui s'enchaînent

Dans beaucoup de situations concrètes, les subdivisions que l'on est amené à utiliser ne sont pas régulières (cfr. par exemple les subdivisions qui apparaissent naturellement dans la question 1). Que devient la notion d'intégrale si on souhaite y admettre des subdivisions *non régulières* ?

L'interprétation des sommes de Darboux en termes de mesures d'aires suggère que *quel que soit* le type de subdivisions initialement choisi, le résultat final du processus d'approximations successives sera toujours le même : à savoir la mesure d'une aire convenable sous le graphe d'une fonction. La question de trancher si l'intégrale dépend du type de subdivisions initialement choisi est donc de peu d'intérêt si on n'est pas bien conscient de ce que

- l'intuition numérique d'une éventuelle convergence,
- l'intuition géométrique (ou graphique) d'une éventuelle convergence,

peuvent suggérer des résultats ... complètement faux !

Un exemple d'intuition numérique trompeuse. Si n est un entier naturel, on considère $F(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$ et on demande d'évaluer le nombre $F := \lim_{n\to\infty} F(n)$.

Un tableur fournit bien vite $F(1000) = 7,4854708\ldots$, $F(2000) = 8,1783681\ldots$, etc ce qui laisse imaginer que F est un nombre de taille raisonnable, plus que certainement inférieur à 100, et probablemnt même (par exemple) à 30. Or, on établit facilement en regroupant et en minorant que $F(2^p) > 1 + p \cdot \frac{1}{2}$. Cette inégalité montre que la suite n'est donc pas bornée, mais surtout qu'*aucun* calcul numérique ne permet de s'en rendre compte : pour vérifier numériquement que $F > 30$, à raison d'un million d'opérations à la seconde, il faudrait plus de 8000 années de calcul !

Un exemple d'intuition géométrique trompeuse. On peut approcher — avec une résolution optique de loin supérieure à celle de l'oeil humain — un cercle de rayon 1 par un polygone dont tous les angles sont droits.

Évidemment, un tel polygone possède un très grand nombre de très petits côtés. Néanmoins, quand un tel polygone est visuellement indiscernable du cercle, son périmètre donne une approximation ... assez catastrophique du périmètre du cercle. En effet, *quelle que soit* la finesse de l'approximation géométrique du cercle par ce polygone, son périmètre vaut invariablement (au moins) 8, alors que le périmètre du cercle en question égale $2 \cdot \pi = 6,283185\ldots$. L'erreur relative est d'au moins 25 %.

Par contre, la mesure de l'aire de ce même polygone est une excellente approximation de la mesure de l'aire du cercle !

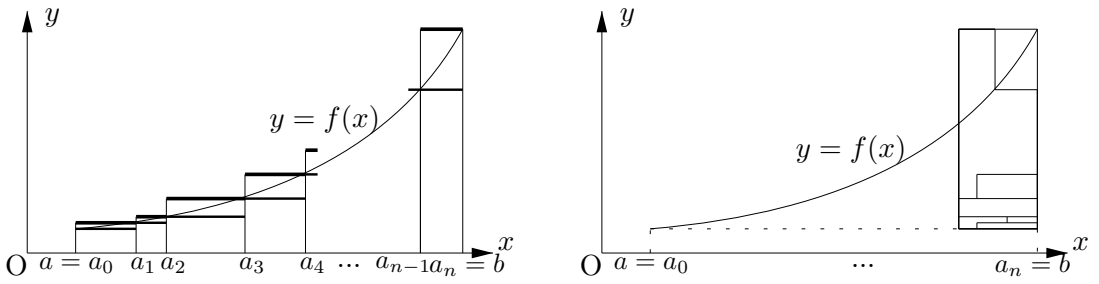
Les énoncés suivants proposent de construire une démonstration relativement simple de ce que « toutes les intégrales sont les mêmes ! »

Problème 4

On considère une fonction $f(x)$ définie et monotone sur un intervalle $[a;b]$. Démontrer que si D est une subdivision quelconque de cet intervalle, de maille δ, alors :

$$S\left(f(x);D\right) - s\left(f(x);D\right) \leqslant |f(b) - f(a)| \cdot \delta$$

Indication. Une traduction formelle de l'illustration suivante permet de régler la question :



Problème 5

On considère toujours une fonction $f(x)$ définie et monotone sur un intervalle $[a;b]$. On considère de plus une suite emboîtée $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subdivisions de cet intervalle telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \delta\left(D_n\right) = 0$$

où $\delta\left(D_n\right)$ est la maille de la subdivision D_n.

Démontrer alors que les deux limites $\lim\limits_{n\to\infty} s(f(x);D_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} S(f(x);D_n)$ existent et sont égales.

Une notation. En conséquence du résultat précédent, on note $\int(f(x);D_n)$ la valeur commune des deux limites $\lim\limits_{n\to\infty} s(f(x);D_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} S(f(x);D_n)$. Ce nombre dépend *a priori* du choix de la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subdivisions qui sert à le définir.

Problème 6

On considère encore une fonction $f(x)$ définie et monotone sur un intervalle $[a;b]$, et — cette fois-ci — deux *suites emboîtées $(D'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(D''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subdivisions de cet intervalle telles que :*

$$\lim_{n\to\infty} \delta\left(D'_n\right) = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \delta\left(D''_n\right) = 0$$

où $\delta\left(D'_n\right)$ et $\delta\left(D''_n\right)$ désignent les mailles des subdivisions correspondantes.

A l'aide de la nouvelle suite emboîtée $(D'_n \cup D''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subdivisions de l'intervalle $[a;b]$, démontrer que :

$$\int \left(f(x); D'_n\right) = \int \left(f(x); D''_n\right)$$

Conclusion. En d'autres termes :

$$\int_a^b f(x)dx = \int \left(f(x); D_n\right)$$

et cela, quel que soit le choix de la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subdivisions emboîtées pour laquelle $\lim_{n\to\infty} \delta\left(D_n\right) = 0$.

Toutes ces intégrales sont donc bien les mêmes !

Section 3. Un miracle ... très naturel

3.1 Une question initiale : comment jauger une citerne ?

La question suivante est une occasion de lectures, d'observations, de traitements, de critiques et d'interprétations de formules.

Question 3

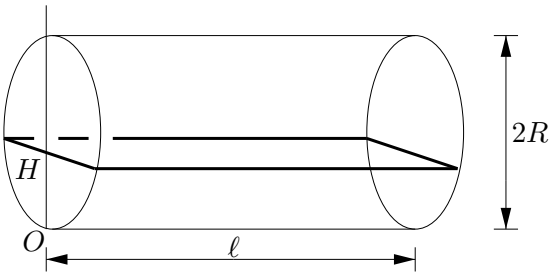
1) *Dans un repère orthonormé, on considère le cercle de rayon R et de centre $(R;0)$ dont l'équation est donc $(x-R)^2 + y^2 = R^2$.*

Si $0 \leqslant h \leqslant 2R$, pour quelle(s) raison(s) (exclusivement) géométrique(s) *la formule suivante est-elle vraie*

$$2\int_0^h \sqrt{2Rx - x^2}dx = \theta R^2 - (R-h)\sqrt{2Rh - h^2}$$

où $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ est l'angle défini par $\cos\theta = \frac{R-h}{R}$?

2) *Une citerne est constituée d'un cylindre d'axe* horizontal *de longueur ℓ dont le diamètre des faces latérales égale $2R$. En tant que fonction de la hauteur $h = OH$, le volume $V(h)$ du liquide contenu dans cette citerne est donné par l'expression :*



$$V(h) = \ell \left\{ R^2 \arccos \frac{R-h}{R} - (R-h)\sqrt{2Rh - h^2} \right\}$$

Dans le but d'étalonner une jauge pour ce type de citerne, on demande d'étudier les variations de cette fonction et d'en déduire le graphe avec une précision suffisante.

3.2 Une synthèse : un nouveau point de vue sur l'intégrale

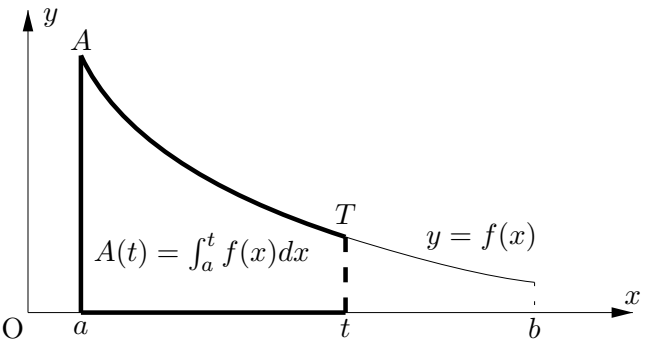
La notion de fonction d'accumulation

Si $f(x)$ est une fonction monotone sur un intervalle $[a; b]$, l'expression

$$A(t) = \int_a^t f(x)dx$$

considérée comme fonction de la borne supérieure d'intégration $t \in [a; b]$, est appelée la **fonction d'accumulation** associée à la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a; b]$.

Lorsqu'on interprète l'intégrale en termes de mesure d'aires, la fonction $A(t)$ décrit donc « l'accumulation d'aire » de la verticale (fixe) $x = a$ jusqu'à la verticale $x = t$, *variable avec l'abscisse t.*



Une observation remarquable

Si $f(x) = x^N$ avec $N = 0$, 1, 2, 3, 4 ou 5, le calcul de la fonction d'accumulation correspondante a été l'objet de l'exercice 5 :

$$A(t) = \int_a^t x^N dx = \frac{t^{N+1}}{N+1} - \frac{a^{N+1}}{N+1}$$

L'étude des variations d'une fonction conduit bien souvent à en calculer la dérivée. Dans le cas présent, on trouve immédiatement :

$$A'(t) = \frac{(N+1)t^N}{N+1} - 0 = t^N$$

Ce genre de coïncidence — retomber sur la fonction originelle en dérivant une fonction d'accumulation — peut être confirmé sur d'autres exemples : $f(x) = e^x$ (cfr. encore l'exercice 5), $f(x) = \sqrt{2Rx - x^2}$ (cfr. la question 3), ...

Tout cela suggère d'évaluer de manière générale l'intégrale de la dérivée d'une fonction.

Un résultat naturel ... ou miraculeux ?

Théorème.

Si $F(x)$ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[a;b]$ et dont la dérivée est monotone sur cet intervalle, alors :

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

Démonstration.

On considère la décomposition régulière D_n de l'intervalle $[a;b]$ définie par $a_i = a + i \cdot \frac{b-a}{10^n}$ avec $0 \leqslant i \leqslant 10^n$. Sur chaque intervalle $[a_{i-1}; a_i]$ de cette subdivision, le théorème de Lagrange ([12]) donne — avec les notations habituelles — la relation :

$$F'(x_i) \leqslant \frac{F(a_i) - F(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}} \leqslant F'(X_i)$$

ou

$$F'(x_i) \cdot (a_i - a_{i-1}) \leqslant F(a_i) - F(a_{i-1}) \leqslant F'(X_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$$

Dès lors

$$\sum_{i=1}^{10^n} F'(x_i) \cdot (a_i - a_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{10^n} (F(a_i) - F(a_{i-1})) \leqslant \sum_{i=1}^{10^n} F'(X_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$$

c'est-à-dire

$$s(F'(x); D_n) \leqslant F(b) - F(a) \leqslant S(F'(x); D_n)$$

Le résultat attendu s'obtient alors en passant à la limite pour $n \to \infty$.

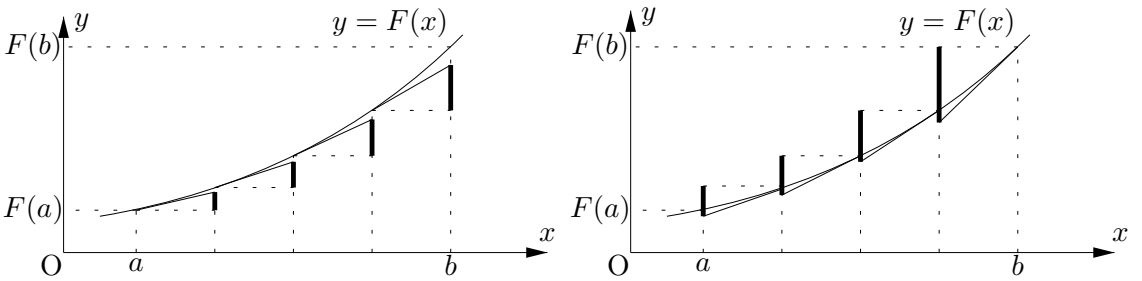
C.Q.F.D.

([12]) Le théorème de J.-L. Lagrange (1736-1813) ou des accroissements finis, étudié en 5ème, s'énonce comme suit. On considère une fonction $\varphi(x)$ continue et dérivable sur un intervalle $[\alpha;\beta]$ (avec $\alpha < \beta$). S'il existe deux nombres m et M tels que, quel que soit $x \in [\alpha;\beta]$: $m \leqslant \varphi'(x) \leqslant M$, alors on a aussi :

$$m\,(\beta - \alpha) \leqslant \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) \leqslant M\,(\beta - \alpha)$$

Son interprétation graphique est classique.

Remarques. L'interprétation graphique de ce résultat — par exemple pour une fonction croissante — ne fait qu'en traduire la démonstration. Il suffit d'observer que les segments verticaux « épais » ci-dessous sont de longueur égale à $F'(x_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$ pour le dessin de gauche, et $F'(X_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$ pour le dessin de droite :



Le théorème précédent, un peu miraculeux en ce qu'il met en évidence l'intérêt de la *dérivée* dans le calcul d'une intégrale, est célébré — à juste titre — comme « **le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral** ».

Mais la démonstration de ce résultat fait voir qu'il n'y a là rien de bien miraculeux ! On y perçoit au contraire une relation naturelle entre somme et différence, entre produit et quotient : la dérivée est en effet un(e) (limite d'un) **quotient** de **différences** et l'intégrale une (limite d'une) **somme** de **produits**.

La notion de primitive

Le théorème fondamental peut aussi s'écrire de manière un peu plus « réaliste » : si $f(x)$ est une fonction monotone sur l'intervalle $[a;b]$ *telle qu'on puisse trouver une fonction* $F(x)$ *vérifiant la relation* $F'(x) = f(x)$ *en tout point de cet intervalle*, alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Afin d'abréger cet énoncé, on introduit la notion de primitive d'une fonction. Si $f(x)$ est une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$, on appelle *primitive* ([13]) de $f(x)$ n'importe quelle fonction $F(x)$ définie et dérivable sur ce même intervalle, et qui vérifie la relation $F'(x) = f(x)$. Une fonction est dite *primitivable* si elle admet une primitive.

La fonction $F(x) = x^2$ est une primitive de la fonction $f(x) = 2x$ puisque $(x^2)' = 2x$, mais la fonction $F(x) = x^2 + 1$ est une *autre* primitive de la fonction $f(x) = 2x$, puisqu'on a aussi $(x^2 + 1)' = 2x$.

La fonction $f(x) = x$ est primitivable, de primitive $F(x) = \frac{x^2}{2}$.

Proposition.

Si une fonction $f(x)$ admet une primitive $F(x)$, alors ***toutes*** *les primitives de $f(x)$ sont de la forme $F(x) + C$, où C est une constante arbitraire.*

([13]) On parle parfois aussi d'*intégrale indéfinie* au lieu de primitive ; elle est alors notée $\int f(x)dx$, sans mention de bornes d'intégration.

Démonstration. Si $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont deux primitives arbitraires de la fonction $f(x)$, on a donc par linéarité de la dérivation, et quel que soit $x \in [a;b]$:

$$(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Or, toute fonction continue et dérivable sur un intervalle $[a;b]$ et dont la dérivée y est identiquement nulle est *nécessairement constante* sur cet intervalle.

C'est une conséquence immédiate du théorème de Lagrange déjà cité. En effet, si $\varphi(x)$ est une telle fonction, dès que $u < v$ ce théorème fournit l'encadrement :

$$0 \leqslant \varphi(v) - \varphi(u) \leqslant 0$$

sur l'intervalle $[u;v] \subset [a;b]$ puisque par hypothèse on peut y prendre $m = M = 0$. Cela établit que, quels que soient u et $v \in [a;b]$, on a toujours $\varphi(u) = \varphi(v)$: la fonction $\varphi(x)$ est donc bien constante sur l'intervalle $[a;b]$.

C.Q.F.D.

Fonction d'accumulation et primitives

Le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral montre que la valeur d'une intégrale peut s'obtenir autrement que comme limite d'une somme de produits : à partir d'une lecture « à l'envers » du calcul des dérivées.

Plus précisément, dès qu'on considère une fonction $f(x)$ monotone sur un intervalle $[a;b]$, si $A(t) = \int_a^t f(x)dx$ est la fonction d'accumulation correspondante et si $F(t)$ est une primitive de $f(t)$, alors le théorème fondamental s'écrit sous la forme :

$$A(t) = \int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a)$$

La fonction d'accumulation est donc la primitive qui s'annule pour $t = a$. Le calcul d'une intégrale se ramène ainsi au calcul de la différence de deux valeurs d'une primitive. C'est là un point de vue tout à fait nouveau quant au calcul d'une intégrale, et dont l'efficacité est remarquable !

Exemple. Si $0 < a < b$, on souhaite calculer $\int_a^b \frac{1}{x}dx$. Or, on sait que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, c'est-à-dire que la fonction $F(x) = \ln x$ est *une* primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$. On en déduit immédiatement, grâce à tout ce qui précède :

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$$

3.3 Quelques exercices

Exercice 6

1) *Calculer* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$. *Comparer avec les résultats de l'exercice 4.*

2) *Calculer* $\int_0^{\pi} \cos x dx$, $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx$ *et* $\int_0^{2\pi} \cos x dx$.

Toutes les conditions d'application du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral sont-elles bien remplies ? Comment résoudre les cas litigieux ?

Exercice 7

1) *Par un raisonnement (exclusivement) géométrique, calculer* $\int_{-t}^{+t} \sqrt{1-x^2} dx$.

Contrôler ensuite *le résultat à l'aide du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, après avoir vérifié si les conditions d'application en sont bien remplies.*

2) *Y a-t-il moyen de transposer la partie* géométrique *du raisonnement précédent au calcul de* $\int_{-t}^{+t} 2\sqrt{1-x^2} dx$ *? Pourquoi ?*

3) *La* définition *d'intégrale permet-elle de déduire la valeur de* $\int_{-t}^{+t} 2\sqrt{1-x^2} dx$ *de celle de* $\int_{-t}^{+t} \sqrt{1-x^2} dx$ *? Détailler.*

Exercice 8

La puissance électrique $P(t)$ (exprimée en MW) nécessaire à l'ensemble des activités d'une ville de taille moyenne est décrite en fonction du moment t de la journée ($t \in [0;24]$ exprimé en heures) par :

$$\begin{aligned} P(t) = & - 0,2906165437 \cdot 10^{-6} \cdot t^9 + 0,00003076843301 \cdot t^8 - 0,001342038667 \cdot t^7 \\ & + 0,03107383835 \cdot t^6 - 0,4097902563 \cdot t^5 + 3,064475374 \cdot t^4 \\ & - 12,23848620 \cdot t^3 + 23,85276352 \cdot t^2 - 18,37307744 \cdot t + 25 \end{aligned}$$

Quel est le coût de l'énergie consommée par cette ville pendant une journée, le kilowatt-heure étant facturé à 4,80 F, hors T.V.A. ?

Comparer avec le résultat obtenu dans la question 1.

Toutes les conditions d'application du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral sont-elles bien remplies ? Formuler une solution théorique de ce problème.

Exercice 9

1) *On considère un tonneau sphérique, c'est-à-dire une sphère coupée par deux plans parallèles équidistants du centre de la sphère. Si $2h$ désigne la hauteur du tonneau et r le rayon de son couvercle, calculer son volume.*

Donner une interprétation géométrique du résultat.

Comparer avec les résultats obtenus dans l'exercice 3 et la question 2, où $2h = 1$ m et $r = 40$ cm.

2) *On note $2r$ le diamètre de la section d'un tore de révolution, et ρ le rayon du cercle de gorge. Calculer le volume de ce tore de révolution.*

Donner une interprétation géométrique du résultat. Comparer avec le résultat obtenu dans l'exercice 3, où $2r = 5$ cm et $\rho = 45$ cm.

3) *Toutes les conditions d'application du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral sont-elles bien à chaque fois remplies ? Comment résoudre les cas litigieux ?*

Les deux exercices suivants sont consacrés aux propriétés de linéarité de l'intégrale : par rapport aux bornes d'intégration (exercice 10), et par rapport aux fonctions à intégrer (exercice 11).

Exercice 10

On considère une fonction $f(x)$ monotone sur l'intervalle $[a; b]$. Si $a < c < b$ et si la fonction $f(x)$ est primitivable, démontrer la formule :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Quelle est l'interprétation géométrique de cette formule ?

Comparer avec les résultats correspondants de l'exercice 5.

Exercice 11

1) *On considère une fonction $f(x)$ monotone sur l'intervalle $[a; b]$. Si k est un nombre réel et si la fonction $f(x)$ est primitivable sur cet intervalle, démontrer que la fonction $k \cdot f(x)$ est aussi monotone et primitivable sur ce même intervalle.*

Établir ensuite la formule :

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Quelle est l'interprétation géométrique de cette formule, en rapport par exemple avec l'exercice 7.

2) *On considère deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ monotones sur l'intervalle $[a; b]$. Montrer d'abord que si ces deux fonctions sont primitivables sur cet intervalle, leur somme est aussi primitivable sur cet intervalle.*

Démontrer alors que, si $f(x)+g(x)$ est de plus monotone sur l'intervalle $[a;b]$, alors :

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Quelle est l'interprétation géométrique de cette formule ?

Une conséquence remarquable du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral est que tout résultat important en termes de calcul de dérivée doit avoir un correspondant en termes de calcul d'intégrale. C'est ce qu'essaient de mettre en évidence les deux exercices suivants.

Exercice 12

1) *On considère deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ dérivables sur l'intervalle $[a;b]$. Démontrer que si les trois fonctions $f'(x)\cdot g(x)$, $f(x)\cdot g'(x)$ et $(f(x)\cdot g(x))'$ sont monotones sur cet intervalle, alors on a la formule d'* « *intégration par parties* » *:*

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx$$

2) *Utiliser le résultat précédent pour calculer* $\int_1^t \ln x dx$.

Exercice 13

1) *On considère une fonction $f(x)$ primitivable sur l'intervalle $[a;b]$, et une fonction $\varphi(t)$ dérivable sur un intervalle I tel que $\varphi(I)=[a;b]$. Montrer qu'alors la fonction $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ est primitivable sur l'intervalle I.*

2) *On considère une fonction $f(x)$ monotone et primitivable sur l'intervalle $[a;b]$, et une fonction $\varphi(t)$* croissante *et dérivable sur un intervalle $[\alpha;\beta]$ avec $\varphi(\alpha)=a$ et $\varphi(\beta)=b$. Démontrer que si la fonction $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ est monotone sur l'intervalle $[\alpha;\beta]$, alors on a la formule de* « *changement de variables* » *:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t)dt$$

Énoncer et démontrer le résultat correspondant dans le cas où la fonction $\varphi(t)$ est décroissante *et dérivable sur un intervalle $[\alpha;\beta]$.*

3) *Utiliser le résultat précédent pour calculer* $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.

Comparer, en l'adaptant, ce résultat avec celui de l'exercice 7.

3.4 Les compétences à atteindre à la fin de cette section

A la fin de cette troisième et dernière section, chacun devrait être capable (au moins) :

- de démontrer le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral,
- de calculer des intégrales de fonctions simples à l'aide du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, en justifiant les différentes étapes du calcul,
- d'identifier et d'utiliser les aspects linéaires du calcul intégral, aussi bien par rapport aux fonctions à intégrer que par rapport aux bornes d'intégration de l'intégrale,
- de calculer des intégrales de fonctions simples à l'aide des méthodes spécifiques du calcul intégral : par parties, ou par changement de variables.

3.5 Quelques problèmes

Le problème suivant prolonge l'étude de « l'aiguille de Buffon »entamée dans le problème 1 de la section 1.

Problème 7

Dans une chambre, le parquet est formé de longues lattes parallèles, dont les joints sont donc équidistants et séparés d'une distance d. On jette en l'air une aiguille de longueur ℓ inférieure à d, de telle sorte qu'elle tombe sur le parquet.

On demande d'évaluer la probabilité p pour que l'aiguille tombe sur un des joints du parquet (indépendamment de son angle de position).

Comment déduire de ce résultat une méthode (probabiliste) d'estimation du nombre π ?

Le problème suivant prolonge le deuxième énoncé du problème 3.

Problème 8 *Quelle est la longueur de l'arc de parabole « semi-cubique » $y = x^{\frac{3}{2}}$ d'origine $(0;0)$ et d'extrémité $(1;1)$.*

Le problème suivant prolonge la remarque intitulée « Un exemple d'intuition numérique trompeuse » dans la section 2. Il fournit un encadrement valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ du nombre $F(n)$ au lieu d'un minorant pour les seules puissances de 2.

Problème 9 *Si n est un entier naturel, on considère $F(n) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$. A l'aide d'intégrale(s) de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, démontrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$:*

$$\frac{1}{n} + \ln n \leqslant F(n) \leqslant 1 + \ln n$$

3.6 Ce n'est qu'un au revoir ...

Il y a primitives et primitives

Toutes les fonctions usuelles ne sont pas *primitivables aussi simplement qu'on pourrait le souhaiter.*

Par exemple, il y a moyen de montrer que les fonctions $f(x) = \sqrt{x}e^x$ ou $f(x) = \sqrt{\frac{1-\ell x^2}{1-x^2}}$, rencontrées respectivement dans l'exercice 2 et dans la première partie du problème 3, n'ont *aucune* primitive qui s'exprime sous forme de « fonctions élémentaires » (c'est-à-dire en termes d'opérations algébriques portant sur des fractions rationnelles, des fonctions trigonométriques, exponentielles, leurs composées ou leurs réciproques).

Néanmoins, comme ces deux fonctions sont définies et monotones sur des intervalles convenables, leur intégrale existe sur ces intervalles, et donc la fonction d'accumulation correspondante existe pareillement ! Et il y a même moyen de montrer que cette fonction d'accumulation est dérivable, et que sa dérivée redonne bien la fonction initiale !

Les « fonctions élémentaires » sont donc loin d'être les seules fonctions réellement utiles, même dans la résolution de problèmes concrets ...

Les défauts de la monotonie

Pourquoi avoir limité l'étude de l'intégrale aux seules fonctions monotones ?

Il y a eu au moins deux raisons à cela :

- sur des sous-intervalles convenables de leur domaine de définition, la plupart des fonctions usuelles se restreignent à des fonctions monotones,
- la construction de l'intégrale pour ces fonctions est rapide et simple, en particulier la formule d'erreur lors de l'encadrement d'une grandeur par des sommes de Darboux — et on sait que c'est un des pivots de la théorie — s'obtient presque sans effort.

Mais à l'usage, le choix se révèle vite pénible à assumer ! Les énoncés des exercices comportent de nombreuses hypothèses qui ne sont pas nécessairement vérifiées par les fonctions à intégrer, et on ne se sort pas toujours d'affaire en décomposant ces fonctions sur des « intervalles de monotonie »... En fait, les fonctions monotones se comportent déjà bien mal vis-à-vis des opérations les plus élémentaires. Ainsi la somme de deux fonctions monotones n'est pas nécessairement une fonction monotone : les deux fonctions $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$ sont monotones sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, mais leur somme $f(x) + g(x) = \sin x + \cos x$ n'est plus monotone sur cet intervalle ([14]).

Il serait donc utile de disposer d'une classe de fonctions qui soit au moins stable pour les opérations élémentaires d'addition, de multiplication par un nombre, éventuellement de composition, etc ..., et qui recouvre la plupart des fonctions dont on a pratiquement et théoriquement besoin.

([14]) Bien sûr, cette somme redevient monotone sur chacun des deux sous-intervalles $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$. Mais tout ne se termine pas toujours aussi bien : on peut construire deux fonctions monotones sur l'intervalle $[0; 1]$ dont la somme présente une *infinité non dénombrable* d'extremums sur cet intervalle. Ce genre de monstres met en évidence que les fonctions monotones ne s'entendent pas très bien avec l'addition !

C'est ce que propose de faire le dernier problème de ce cours. Il offre ainsi l'occasion de relire toute la partie théorique — y compris les exercices 6 à 13, et les problèmes 4 à 6 — en critiquant et approfondissant la construction et les propriétés de l'intégrale qui y sont étudiées. Peut-on rêver d'un meilleur exercice de synthèse ... ?

Le dernier problème.

On considère l'ensemble des fonctions à dérivée bornée sur un intervalle $[a;b]$: une fonction $f(x)$ appartient à cet ensemble si elle est dérivables sur l'intervalle en question et s'il existe une constante (positive) k telle que, quel que soit $x \in [a;b]$, on ait $|f'(x)| \leqslant k$.

1) *Si $f(x)$ est une fonction à dérivée bornée sur l'intervalle $[a;b]$ et D une subdivision quelconque de cet intervalle, montrer que dans tout intervalle sous-jacent à cette subdivision il existe toujours un point dont l'image est minimum (resp. maximum) parmi les valeurs de la fonction sur l'intervalle.*

En déduire que les sommes de Darboux inférieure $s(f(x);D)$ et supérieure $S(f(x);D)$ sont toujours bien définies pour les fonctions à dérivées bornées.

2) *Si $f(x)$ est une fonction à dérivée bornée (de constante k) sur l'intervalle $[a;b]$ et D une subdivision quelconque de maille $\delta(D)$ de cet intervalle, démontrer la formule de calcul d'erreur :*

$$0 \leqslant S(f(x);D) - s(f(x);D) \leqslant k \cdot (b-a) \cdot \delta(D)$$

En déduire une définition de l'intégrale d'une fonction à dérivée bornée sur un intervalle, ainsi que l'indépendance de l'intégrale par rapport au choix d'une suite emboîtée de subdivisions.

3) *Adapter aux fonctions à dérivée bornée sur un intervalle les résultats de linéarité de l'intégrale, ainsi que les formules d'intégration par parties et de changement de variables (cfr. les exercices 10, 11, 12 et 13).*

Des extensions de la notion d'intégrale à des ensembles de plus en plus vastes de fonctions seront — pour tous ceux que cela intéresse — l'objet de cours plus approfondis, dans les années ultérieures. A titre documentaire, voici deux exemples de tels ensembles, dans un ordre de généralité croissante.

- L'ensemble des fonctions lipschitziennes sur un intervalle $[a;b]$: une fonction $f(x)$ appartient à cet ensemble s'il existe une constante (positive) k telle que : $\forall u, v \in [a;b]$: $|f(u) - f(v)| \leqslant k\,|u - v|$.
  La théorie obtenue à l'issue du dernier problème ci-dessus s'étend presque sans changement à cet ensemble de fonctions (strictement) plus large que celui des fonctions à dérivées bornées. Mais la démonstration du bien-fondé de certaines définitions ou hypothèses devient parfois plus technique.
- L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle.
  Intuitivement, c'est un ensemble de fonctions qui doit convenir pour définir l'intégrale. En effet, l'idée de base est qu'une fonction $f(x)$ continue sur un intervalle peut toujours être assimilée au voisinage de n'importe quel point ξ de cet intervalle à une fonction *constante* égale ([15]) à $f(\xi)$. Or, cette idée constitue le fondement d'un processus de discrétisation « en escaliers » pour de telles fonctions.

([15]) Une calculatrice graphique permet de s'en convaincre : il suffit de zoomer sur l'axe des x au

Malheureusement, les démonstrations à produire pour rendre compte du bien-fondé de cette intuition dans la construction de l'intégrale deviennent vite trop nombreuses dans le cadre d'un cours d'initiation.

Section 4. En guise de conclusion

Ce cours n'achève donc en rien un apprentissage de ce qu'est l'intégrale en mathématiques.

La version élémentaire du calcul intégral qui a été proposée ici n'est pas pour autant vaine ! Son objectif était de montrer comment et pourquoi une théorie mathématique se forme lentement et doit toujours évoluer, problèmes après problèmes. Ainsi, en mathématiques, comme dans la plupart des sciences, les hypothèses les plus générales et les théories les plus efficaces ne se découvrent qu'après beaucoup de tâtonnements.

Cela prend du temps, mais ce temps-là n'est jamais perdu : c'est le prix de l'intelligence !

voisinage du point d'abscisse t, **sans changer d'échelle sur l'axe des** y. Au fur et à mesure de l'évolution du processus, la portion de graphe visible se redresse jusqu'à presque devenir horizontale ... C'est une manière très visuelle d'introduire la célèbre définition de la continuité en ε , δ.

Chapitre 13

Un peu d'algèbre linéaire

13.1 Présentation générale 415
13.2 Déroulement des séances de cours 417
13.2.1 Première séance 418
13.2.2 Seconde séance 421
13.2.3 Troisième et dernière séance 423
13.3 Commentaires 426
13.4 Des énoncés supplémentaires 427

13.1. Présentation générale

La séquence réalisée avait pour objectif d'introduire le produit matriciel et de fixer une certaine pratique du calcul matriciel à travers une situation significative et permettant l'itération d'un processus algorithmique. On ne se contente donc pas d'effectuer un ou deux produits matriciels, mais on s'interroge sur l'évolution à long terme d'un « système dynamique linéaire » ([1]). Les élèves avaient déjà auparavant appris à calculer l'image d'un élément de $\mathbb{R}^2$ par [la transformation linéaire associée à] une matrice.

Les leçons ont été données à l'Ecole Decroly à Uccle. Plusieurs situations ont été soumises à M. Francis Michel, titulaire du cours de mathématique, dans une classe de 5e année (6 périodes de mathématique par semaine). L'énoncé retenu ([2]) est reproduit page suivante, tel qu'il fut soumis aux élèves :

Le problème présenté ne s'inscrit pas dans les habitudes des élèves du fait qu'il modélise une situation sinon réelle, tout au moins réaliste. On ne demande cependant pas aux élèves de modéliser eux-mêmes la situation. Le modèle — sous la forme d'un système d'équations linéaires — leur est fourni d'emblée.

Cinq heures de cours ont été consacrées à l'étude de cette situation les 12, 13 et 14 octobre 1998. La classe comporte 18 élèves qui ont avec leur professeur des rapports « détendus ». Ils ne sont surpris en aucune manière par la présence d'un observateur dans la classe et leur comportement ne s'en trouve donc pas modifié. Tous les élèves disposent d'une calculatrice *Hewlett-Packard 48 GX*. Ils sont également habitués au logiciel `Maple` et en particulier, ils en connaissent la syntaxe.

([1]) Ce vocabulaire n'a pas été utilisé en classe.
([2]) D'autres énoncés sont donnés en annexe.

Applications linéaires 3
Exercice

Dans une population d'oiseaux, soit:

x: nombre de jeunes (femelles)
y: nombre de femelles
a: proportion de jeunes qui ne sont pas adultes après un an
b: nombre de jeunes par femelles
c: proportion de jeunes devenant adultes
d: proportion de femelles survivantes

$$x = a\,x + b\,y$$
$$y = c\,x + d\,y$$

Le nombre de mâles est supposé égal au nombre de femelles, on ne l'étudiera pas.

Etudier les cas particuliers suivants; donner chaque fois une interprétation dans les termes du problème posé, rechercher comment les populations de femelles et de jeunes évoluent et si le rapport femelles/jeunes tend à se stabiliser

```
> T:= matrix([[0,2],[1,0]]);
> T:= matrix([[0,2],[1,1]]);
> T:= matrix([[0,2],[.3,.5]]);
> T:= matrix([[3/4,3/16],[1/4,1]]);
```

Dans le cas suivant réduire l'étude à une année sur deux, un point tous les deux ans.

```
 > T:=matrix([[0,2],[.3,.5]]);
```

Les cas suivants sont des généralisations théoriques des cas particuliers déjà étudiés; faire une analyse de chaque cas en essayant de dégager une méthode générale.

```
 > T:= matrix([[0,b],[1,01]);
 > T:= matrix([[0,b],[1,1]]);
 > T:= matrix([[0,b],[c,d]]);
 > T:= matrix([[1-c,3*c/4],[c,1]]);
 > T:= matrix([[1-c,b],[c,1]]);
```

13.2. Déroulement des séances de cours

13.2.1 Première séance

Cette séance s'étale sur deux périodes de 50 minutes, sans interruption, le lundi 12 octobre. FM distribue aux élèves l'énoncé du problème. La seule consigne est de jeter un coup d'œil sur le texte.

Après une rapide lecture, FM écrit au tableau les formules

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

Analyser un énoncé

tout en les expliquant par des exemples numériques. Il les justifie en se référant à ce qui peut se passer dans la réalité. Il remarque aussi que les notations x' et y' restent des x et y dans l'énoncé afin de coller aux habitudes de l'informatique.

Le but de l'exercice est *de voir comment la population va évoluer.*

Les élèves doivent étudier l'évolution de la population d'oiseaux dans les situations correspondant aux matrices *données* sur la feuille, en procédant à des calculs analogues à ceux réalisés précédemment au cours. (Lors d'exercices qui ne modélisaient aucune situation).

Le travail démarre avec la première matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

FM n'a *expressément* pas donné de conditions initiales pour la population. Une élève maligne demande d'emblée *de quel point il faut partir.*

Un élève dit :

Si on a une femelle pour deux jeunes, le rapport $\frac{\text{femelles}}{\text{jeunes}}$ *sera de* $\frac{1}{2}$.

Conjecturer, vérifier

FM lui suggère d'essayer de prouver son idée. L'ambiance est à la discussion entre élèves.

Une élève demande *s'il faut appliquer la matrice à un point particulier ou à un dessin* ([3]), et suggère même d'appliquer la matrice à un dessin d'oiseau (sic) ! FM lui demande ce que signifierait le point de départ choisi.

A partir d'un point de départ arbitraire (x_0, y_0), un élève calcule les valeurs de x et y pour les années suivantes et obtient un graphique en escalier.

Représenter graphiquement

FM trace deux axes au tableau et écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x' = 2y \\ y' = x \end{cases}$$

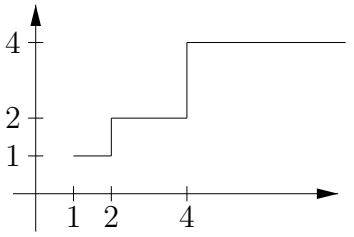
([3]) Comme les élèves l'avaient pratiqué auparavant, avec des dessins de maison, de cochon, ...

en s'assurant que tout le monde est arrivé à ce stade.

Un élève demande combien de points il faut dessiner, et FM répond « *de quoi voir si ça se stabilise* ». Il attire donc l'attention sur la question de stabilisation de la proportion $\frac{\text{femelles}}{\text{jeunes}}$. FM fait également remarquer que x et y ne peuvent être négatifs.

Dans un premier temps, aucun élève ne part d'un point dont une des coordonnées est nulle. Puis, un élève part de $(0, 10)$.

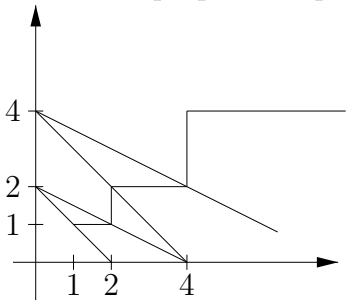
Enfin, FM reporte au tableau ce qu'il voit le plus souvent apparaître dans les cahiers, à savoir :



Se déroule alors une discussion en termes de réalité (retour à la population d'oiseaux) afin de valider les résultats. La conclusion ([4]) en est que, avec la matrice considérée ici, il n'y a aucune mortalité de jeune, et que tous les jeunes deviennent adultes. De plus, toutes les femelles meurent après avoir pondu.

Interpréter, valider

Pour la même matrice, les élèves essaient d'autres points de départ, comme par exemple $(0, 2)$. Le dessin obtenu est *superposé* au précédent, et des points d'intersection apparaissent.



FM demande aux élèves de *comparer les différents graphiques en fonction du point de départ*, dans le but d'en arriver à des points se trouvant sur la droite propre ([5]) par diminution successive de l'amplitude des oscillations.

Comparer

Pour ce faire, il suggère de raffiner le dessin en prenant une plus grande échelle et des points intermédiaires.

Changer d'échelle

([4]) On ne fait là que vérifier ce que la matrice brute laisse supposer !
([5]) Ce vocabulaire n'a pas été utilisé en classe.

Remarquons que les calculatrices ne servent que numériquement, et que leurs possibilités graphiques ou de programmation ne sont pas exploitées. De plus, il apparaîtra par après qu'elles ne fournissent pas vraiment d'aide à la compréhension lorsque les élèves ne sont pas guidés.

FM reformule sa demande :

> *de quel point partir pour que le rapport* $\frac{\textit{femelles}}{\textit{jeunes}}$ *reste constant année après année ?*

Il écrit au tableau l'évolution d'une population comprenant au départ 10 jeunes et 5 femelles, ainsi que la valeur du rapport $\frac{\text{femelles}}{\text{jeunes}}$ durant les cinq premières années :

Jeunes (x)	Femelles (y)	Rapport $\frac{y}{x}$
10	5	$\frac{1}{2}$
10	10	1
20	10	$\frac{1}{2}$
20	20	1
40	20	$\frac{1}{2}$
⋮	⋮	⋮

Un élève essaye le point $(1.5, 1)$ — vite converti en $(15, 10)$ pour cause de non-réalisme — qui donne une succession de rapports plus proches : $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$. Bref, on s'approche de plus en plus d'une droite.

Petit à petit, en partant du point $(14, 10)$, puis du point $(141, 100)$, ..., on s'approche du rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ qui est le rapport cherché.

La méthode de raffinement dégagée par les élèves consiste à relier à chaque nouvelle étape les milieux des segments dessinés sur le graphique à l'étape précédente. De cette manière, on se rapproche d'une droite, et un élève pense au rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$, mais par pure intuition et il ne pourra se justifier.

Rédiger

FM décide d'arrêter les calculs et de commencer à rédiger ce qui a été trouvé. Il prend $\frac{1000}{1414}$ comme approximation de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, et les élèves constatent qu'avec ce rapport, la proportion de jeunes dans la population est stable.

Enfin, FM demande de traiter la seconde matrice sur le même principe, mais le rapport de stabilité est évident à trouver puisqu'il s'agit de 1 (remarquons que des élèves dessinent une droite qui part de $(0, 0)$ et non pas de $(1, 1)$!).

Cet exercice sera laissé en préparation pour le lendemain, avec pour consigne de prendre des échelles très grandes, d'essayer divers points de départ et notamment le point $(10, 100)$ qu'impose FM. Il est permis aux élèves de ne plus faire de dessin vu la taille des échelles nécessaires.

Notons cependant — la séance a été longue — la disparition de la motivation, à savoir la recherche d'un « rapport de stabilité ».

13.2.2 Seconde séance

Cette séance ne s'étale que sur une seule période de 50 minutes. FM entame le cours en demandant de déterminer la pente de la direction de stabilité pour la matrice

Exploiter un acquis

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Les élèves entament le calcul et la réponse, obtenue sans grand délai, est écrite au tableau par Jérôme :

$$\frac{y}{x} \approx 0,532$$

FM enchaîne alors sur la question qui va tenir les élèves en haleine pendant presque toute la suite du cours :

> *Si on observe le phénomène, non pas tous les ans mais bien tous les* ***deux*** *ans, quelle est la matrice qui décrit la transformation correspondante ?*

Il s'ensuit une période de tâtonnements et de bricolages : l'un propose de multiplier tous les coefficients de la matrice par 2 pour obtenir donc

Chercher par essais et erreurs

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0,6 & 1 \end{pmatrix}$$

un autre suggère d'élever tous les coefficients au carré et risque

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0,09 & 0,25 \end{pmatrix}$$

La situation devient peu à peu chaotique. FM reprend donc la parole, et reformule la question, en l'illustrant par son interprétation graphique. Dans un premier temps, cela n'a pas d'effets notables. Pour une bonne moitié d'élèves, l'intervention de FM n'a fait que relancer une espèce de jeu de hasard. Mais pour d'autres, une idée nouvelle commence à faire son chemin : il doit y avoir un algorithme qui, au départ de la matrice originelle, permet de calculer la matrice demandée. Certains testent les matrices déjà proposées (cfr. ci-dessus), et observent qu'elles ne conviennent manifestement pas.

Le cours touche à sa fin, et FM propose le problème — toujours sans solution — comme préparation (travail à domicile) pour le lendemain. À ce moment, un élève signale qu'en introduisant la matrice dans sa calculatrice, et en « poussant sur la touche d'élévation au carré », il obtient une nouvelle matrice qui semble la bonne. Mais il est incapable de fournir la moindre signification à ce qu'il considère comme un « coup de veine » ! FM relance alors le sujet de la préparation pour le lendemain, en proposant que chacun essaie de comprendre ce que la machine a bien pu réaliser comme opération pour que « ça marche » ? Il suggère en particulier de s'interroger à partir des équations de la transformation sous-jacente ...

Utiliser une calculatrice

13.2.3 Troisième et dernière séance

Cette séance s'étale à nouveau sur deux périodes de 50 minutes le mercredi 14 octobre. FM entame la séance en rappelant les conclusions obtenues la veille : pour la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$, la calculatrice a fourni comme carré $\begin{pmatrix} 0,6 & 1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$. Quelle méthode utilise-t-elle ? Plusieurs élèves ont réfléchi à la question, mais contrairement à la suggestion de FM n'ont pas cherché à exploiter les équations de la transformation. Ils ont néanmoins des choses à dire.

Un élève pose l'opération :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$$

et propose un calcul « colonne × ligne » :

Conjecturer

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0,3 \end{pmatrix} \times (0 \quad 0,2) = 0 \times 0 + 2 \times 0,3 = 0,6$$

Il montre que ce calcul permet de trouver l'élément situé dans le coin supérieur gauche de la matrice résultat et qu'un même procédé permet de trouver les quatre éléments de celle-ci. Il ajoute « *c'est un truc, on aurait aussi pu faire ligne × colonne.* » Cette remarque en amène une autre de la part d'une autre élève : « *cela rappelle l'image d'un vecteur* ».

Exploiter une analogie

Un autre élève a demandé au logiciel `Maple` de calculer formellement le carré de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Il a obtenu la réponse

Utiliser un ordinateur

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

ce qui le satisfait amplement puisque cette formule permet de confirmer les calculs numériques qui viennent d'être présentés.

Mais FM veut aller plus loin : il ne suffit pas de trouver la formule donnant le carré d'une matrice, il faut aussi la justifier. Il écrit au tableau

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

et demande le calcul de $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$, ce qui est réalisé après quelques hésitations :

Justifier par calcul

$$\begin{cases} x'' = a(ax + by) + b(cx + dy) \\ y'' = c(ax + by) + d(cx + dy) \end{cases} \quad \text{car} \quad \begin{cases} x'' = ax' + by' \\ y'' = cx' + dy' \end{cases}$$

FM revient alors au problème de l'évolution de la population d'oiseaux et demande de trouver *de façon théorique* la droite de stabilité de la proportion $\frac{\text{femelles}}{\text{jeunes}}$. Il s'agit donc de déterminer quelle doit être cette proportion au départ pour qu'elle reste constante lors de chaque itération. FM rappelle que pour la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, le rapport trouvé *expérimentalement* était proche de $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

La classe s'engage alors dans une période d'activité un peu confuse au cours de laquelle beaucoup d'élèves restent inactifs. La plupart de ceux qui sont dans ce cas n'ont en fait pas compris ce qui leur est demandé.

Cette incompréhension peut résulter de — ou être renforcée par — plusieurs facteurs, par exemple :

Coordination de cadres

- la situation est traitée simultanément dans deux cadres différents. D'une part on utilise un vocabulaire géométrique (trouver une droite stable), d'autre part un vocabulaire arithmético-algébrique (trouver un point de départ tel que la proportion soit conservée). Clairement certains élèves éprouvent des difficultés à passer d'un cadre à l'autre.
- dans le cas particulier auquel on se réfère, le « rapport de stabilité » est irrationnel : $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Les dessins réalisés l'ont été en utilisant une valeur approchée : 0,714 ou 0,7. Les différents points calculés et représentés sur une figure ne sont pas parfaitement alignés, alors qu'on recherche une droite !

Pour faire avancer les choses, FM reprend alors le contrôle de la situation et réexplique qu'il s'agit de trouver x et y tels que

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} \text{ sachant que } \begin{cases} x' = 2y \\ y' = x \end{cases}$$

Il transforme ensuite cet énoncé en

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases}$$

en montrant que c'est là une autre façon d'exprimer que les points $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sont alignés avec l'origine et que λ est le facteur par lequel la population va être multipliée.

Résoudre et discuter

Il s'agit donc à présent de résoudre et discuter le système ci-dessus.

Bien que l'énoncé ait ainsi été éclairci, un temps non négligeable s'écoule ([6]) avant que quelques élèves écrivent le système sous la forme

$$\begin{cases} 2y = \lambda x \\ x' = \lambda y \end{cases}$$

puis éliminent la variable x, arrivant à $2y = \lambda^2 y$, d'où $\lambda^2 = 2$. Les valeurs de x, y (ainsi que x' et y') étant positives (ce sont des nombres d'oiseaux), la racine carrée négative est éliminée sans problème. Mais il s'agit encore de trouver $\frac{y}{x}$, c'est même l'objectif énoncé clairement, ce que certains avaient peut-être perdu de vue. On arrive finalement à $\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, non sans devoir réexpliquer pourquoi $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Valider les résultats

Le problème de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ étant ainsi épuisé, FM demande aux élèves d'effectuer le même travail pour la matrice $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Une partie de la classe va jusqu'à écrire et résoudre l'équation aux valeurs propres. Une autre partie semble quelque peu fatiguée.

([6]) Il est apparu ultérieurement que les élèves n'avaient pas rencontré en 4e année de discussions de systèmes paramétriques.

13.3. Commentaires

Analysant cette séquence d'enseignement, il convient d'abord de se demander quelle a été — sur les plans didactique et mathématique — l'activité des élèves, et constater qu'elle a été fort variée. C'est souvent le cas lors d'une activité de résolution de problème, même si, comme c'était le cas ici, les élèves n'ont pas eu à modéliser la situation, et si leur activité a été contrôlée d'assez près par l'enseignant.

La classe est passée par des phases de recherche, de découverte et de mise au point. Elle a eu à effectuer des travaux techniques (résoudre une équation du second degré, résoudre et discuter un système d'équations, multiplier une matrice 2×2 par une colonne, ...). Une partie de son activité relevait de l'heuristique (simuler l'évolution d'une situation sur calculatrice programmable ou sur ordinateur, découvrir à l'aide d'un logiciel la formule donnant le carré d'une matrice 2×2, reformuler un problème dans un cadre différent du cadre d'origine, ...). Une autre partie encore consistait en des justifications raisonnées (justifier la formule fournie par l'ordinateur, retrouver par un raisonnement les valeurs trouvées expérimentalement, ...).

Au cours de ces activités, ce sont des compétences de natures diverses qui ont été sollicitées. Le caractère global de la situation étudiée rend malaisé d'en dresser une liste qui ne saurait de toutes façons être que qualitative. Il serait en effet totalement impossible de préciser la part réservée à chaque type d'activité par les élèves puisque cette part peut avoir été très différente d'un élève à l'autre.

Sur le plan mathématique, les élèves ont rencontré des notions nouvelles : produit matriciel dans le cas du carré d'une matrice, droite invariante par une transformation linéaire, vecteur propre et valeur propre, suites de nombres et suites de vecteurs, convergence d'une suite. Ces notions n'ont été que rencontrées, et manipulées le plus souvent à un niveau essentiellement procédural. Le passage au stade structural nécessitera des activités supplémentaires après lesquelles on pourra considérer que les notions sont à peu près fixées. Ce n'est qu'à ce moment qu'on peut espérer qu'elles deviennent réellement opérationnelles.

13.4. Des énoncés supplémentaires

PROBLÈME 13.4.1 *Une entreprise fabrique des biens de consommation qui peuvent être soit immédiatement vendus, soit stockés en prévision des ventes ultérieures. La gestion de cette fabrication dans le cas d'un produit donné s'élabore suivant le modèle (simplifié) suivant.*

- *La quantité à vendre du produit pendant l'année à venir est estimée à partir de l'indice marginal de consommation de ce produit, c'est-à-dire le rapport — supposé constant, et noté β — entre la quantité vendue pendant une année et la quantité produite durant l'année précédente.*
- *Une partie de la fabrication de l'année à venir est orientée vers la vente au cours de cette année. L'autre partie est consacrée à la reconstitution du stock, et est supposée égale à la différence — positive ou négative — entre la quantité qui sera vendue durant l'année à venir et la quantité vendue durant l'année précédente. (Ce principe essaie de prendre en compte l'effet des fluctuations de la demande dans la gestion du stock et donc de la production globale.)*

Dans un tel modèle, comment évoluent le stock et la quantité vendue du produit en fonction du temps ? En particulier, comment évolue le rapport

$$\frac{\textit{quantité stockée du produit}}{\textit{quantité vendue du produit}}$$

lorsqu'on estime que $\beta = 0,5$? Ces résultats dépendent-ils de la valeur particulière attribuée à β (avec $0 < \beta < 1$) ?

PROBLÈME 13.4.2 *Un modèle élémentaire de transmission de l'information se décrit de la manière suivante. Un message est transmis en le codant à l'aide de deux types de signaux, notés S_1 et S_2. On suppose quele signal S_1 nécessite exactement le temps t_1, et que le signal S_2 nécessite exactement le temps t_2 pour être transmis.*

On demande de calculer le nombre N_t de messages qu'il est possible d'envoyer en fonction de la durée t de ces messages, si par exemple $t_1 = 1$ et $t_2 = 2$.

PROBLÈME 13.4.3 *On étudie l'évolution du taux de pollution dans deux bassins — notés « bassin 1 » et « bassin 2 » dans la figure ci-dessous — de volumes respectifs V_1 et V_2.*

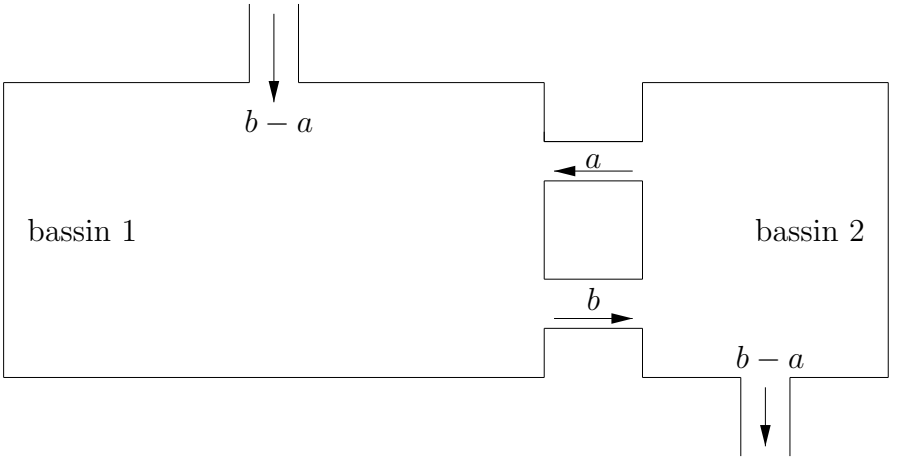
Au moment de l'ouverture des vannes de communication

- *le bassin 1 contient un mélange homogène d'eau et d'un certain polluant, celui-ci sous une concentration c,*
- *le bassin 2 ne contient que de l'eau pure.*

En régime de fonctionnement,

- *la vanne du bassin 2 vers le bassin 1 a un débit de a ℓ/s, la vanne du bassin 1 vers le bassin 2 a un débit de b ℓ/s, et on sait que $b > a$,*
- *une vanne d'alimentation déverse de l'eau pure dans le bassin 1 sous un débit de $(b-a)$ ℓ/s,*
- *une vanne d'évacuation élimine le trop-plein du bassin 2 sous un débit de $(b-a)$ ℓ/s.*

On demande de décrire l'évolution de la concentration de polluant dans chacun des bassins en fonction du temps. On fait l'hypothèse simplificatrice que le polluant a une densité proche de celle de l'eau, et qu'à tout instant les mélanges d'eau pure et de polluant sont homogènes.



Problème 13.4.4 *On considère une question d'un sondage dont les seules réponses sont « oui » ou « non ». On dit qu'une personne interrogée est dans l'« état 1 » si elle répond « oui » et qu'elle est dans l'« état 2 » si elle répond « non » à la question.*

Il peut se révéler intéressant d'effectuer plusieurs fois le même sondage sur les mêmes personnes. Mais une personne interrogée peut changer d'avis entre deux sondages. On admettra dans la suite que de tels changements d'avis sont aléatoires : par exemple, dans le cas d'une politique de lutte contre le chômage, c'est le cas si, entre les deux sondages, aucune décision politique significative en matière d'emploi n'intervient.

On suppose donc que les changements d'avis sont décrits par le tableau de probabilités suivant :

Passage de l'état ...	*...à l'état ...*	*...avec la probabilité*
1	*1*	$1-\alpha$
1	*2*	α
2	*1*	β
2	*2*	$1-\beta$

où $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ *et* $0 \leqslant \beta \leqslant 1$.

Si lors du premier sondage, la répartition « oui/non » était 50/50, comment évolue-t-elle lorsqu'on estime que $\alpha = 0,2$ *et* $\beta = 0,3$ *?*

PROBLÈME 13.4.5 *Dans l'étude épidémiologique d'une maladie infectieuse telle que la rougeole, on partage la population concernée en trois groupes :*

- *les sensibles : ils n'ont pas encore contracté la maladie, et ne sont pas immunisés,*
- *les malades : ils sont malades et surtout contagieux,*
- *les immunisés : ils ont déjà été malades et sont donc immunisés.*

La durée moyenne de la maladie est de 14 jours. On fait de plus les hypothèses suivantes :

- *la variation journalière du nombre de personnes immunisées ne dépend que du nombre de personnes malades le jour précédent,*
- *la variation journalière du nombre de personnes sensibles ne dépend que du nombre de personnes malades et du nombre de personnes sensibles le jour précédent,*
- *la population totale est stable.*

On demande de fournir un modèle de l'évolution de la maladie en fonction du temps pour chacun des trois groupes définis plus haut.

Références

[23], [25], [79], [46].

Chapitre 14

Initiation aux probabilités

14.1 Compte-rendu de l'expérience 432
14.1.1 Expérience 1 433
14.1.2 Expérience 2 435
14.1.3 Expérience 3 436
14.1.4 Le problème bien ciblé 437
14.1.5 En selle ! 439
14.1.6 Une première synthèse 442
14.1.7 Wilgame 443
14.1.8 Le problème de la bonne tranche 446
14.1.9 Un problème au format familial 448
14.1.10 Retour dans la forêt 449
14.1.11 Petit appétit, la mouche fait son nid 450
14.1.12 Epilogue 452
14.2 La séquence de cours 453

Le texte suivant relate l'expérimentation dans des classes de cinquième année de l'enseignement général (6 heures de mathématique par semaine) d'un cours d'introduction aux probabilités. Nous tenons à remercier ici Messieurs Pierre Lepourcq et Paul Dechamps (respectivement désignés par LP et DP dans la suite) de nous avoir ouvert les portes de leur classe.

La séquence ayant servi de support au cours est reproduite en fin de chapitre. Elle a été distribuée aux élèves de LP sous forme de photocopies. Chez DP, les élèves ont dû prendre note. Le compte-rendu ne mentionne que les remarques et observations dignes d'intérêt. Les intitulés qui y figurent renvoient le lecteur aux sections homonymes de la séquence.

14.1. Compte-rendu de l'expérience

14.1.1 Expérience 1

14.1.1.1 Temps consacré

- DP : 1 séance
- LP : 1 séance

14.1.1.2 Remarques et observations

- Les élèves prétendent qu'il y a une chance sur deux d'avoir pile *parce qu'il y a deux possibilités*. Après que le professeur ait donné des contre-exemples (roue coloriée, ...), les élèves se rendent compte de leur erreur. Ils voient que sur 1000 lancers, on n'aura pas exactement 500 fois « pile » et 500 fois « face », mais qu'on va s'en rapprocher.

  Les élèves parviennent à établir la formule :

  $$\text{pourcentage de succès} = \frac{\text{nombre de succès}}{\text{nombre d'expériences}} \cdot 100$$

  Quelques-uns ont, à ce niveau, encore un peu de mal à comprendre la notion de fréquence. Plus précisément, ils pensent que la fréquence doit se calculer par paquets de 5 lancers indépendamment des lancers successifs.

  Cependant, un élève dit :

  > *Ce ne sont pas 5 lancers en plus qui changeraient de manière significative le pourcentage trouvé.*

  tandis qu'un autre fait remarquer que les fréquences obtenues se rapprochent de 50%.
- L'idée que tout le monde devrait obtenir le même intervalle après 50 expériences est fortement ancrée, mais tout le monde comprend vite que ce n'est pas le cas.

  Il est clair dans tous les esprits qu'au fur et à mesure de l'avancement de l'expérience, cet intervalle se reserre autour de la fréquence finale en partant, au début de l'expérience, de $[0, 100]$.

  La morphologie du diagramme permet de vite se rendre compte de la raison pour laquelle les intervalles successifs obtenus sont emboîtés et de plus en plus petits.

Intériorisation et condensation

- En ce qui concerne la figure 14.2 (voir la séquence reproduite en fin de chapitre), certains élèves graduent leur intervalle de 0 à $0,8$ en invoquant qu'aucune des fréquences calculées n'est hors de cette fourchette. D'autres graduent de 0 à 1 en justifiant qu'une fréquence est, par définition, toujours comprise entre ces deux valeurs extrêmes. Les premiers en sont toujours à l'intériorisation du problème (première phase de Sfard), tandis que les seconds ont atteint la phase de condensation.

  Un élève pense même à construire la parallèle à l'axe des abscisses d'ordonnée $0,5$ pour bien mettre en évidence les oscillations de la fréquence autour de $0,5$.

- Pour exprimer la probabilité de succès en fonction de la fréquence, les élèves suggèrent de faire tendre le nombre d'expériences vers l'infini :

$$\mathbb{P}(\text{succès}) = \lim_{n \to +\infty} (\text{fréquence de succès après } n \text{ expériences})$$

14.1.2 Expérience 2

14.1.2.1 Temps consacré

- DP : 1 séance
- LP : $\frac{3}{4}$ séance

14.1.2.2 Remarques et observations

Avant l'expérience, la plupart des élèves pensent que les probabilités de succès et d'échec valent toutes deux $\frac{1}{2}$. Les autres élèves pensent qu'il n'en n'est rien mais sans pouvoir expliquer pourquoi et sans quantifier les probabilités.

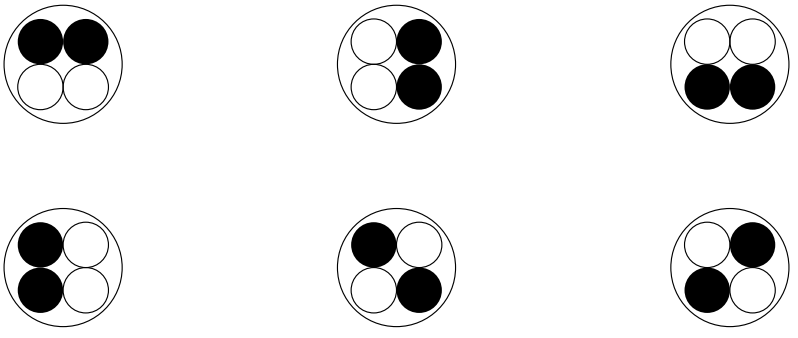
Conjecturer

Une fois les petits cylindres distribués, les élèves reportent leurs résultats sur le diagramme succès-échec. Un élève dit : *on gagne plus souvent qu'on ne perd, et pourtant il n'y a que deux possibilités !*

Un autre élève (qui pensait au début que $\mathbb{P}(\text{succès}) = \mathbb{P}(\text{échec}) = \frac{1}{2}$) n'admet pas ces valeurs et pense qu'on finirait par obtenir environ 50% si on répétait l'expérience suffisamment longtemps.

Les élèves s'interrogent et voient que les résultats tournent autour de 70% de succès. Le professeur fait remarquer qu'avec les pièces, on connaissait la probabilité à l'avance. Ici, était-il possible de prévoir le résultat ?

Un volontaire se présente au tableau et dessine les 6 configurations suivantes :



Il conclut que 4 configurations sur les 6 sont gagnantes, et que la réponse correcte est donc de 66%.

14.1.3 Expérience 3

14.1.3.1 Temps consacré

- DP : $\frac{1}{2}$ séance
- LP : $\frac{1}{2}$ séance
  Les élèves de LP ont eu à préparer l'exercice à domicile.

14.1.3.2 Remarques et observations

Dans le cas du « pile ou face », on pouvait prévoir grâce à la symétrie de la pièce, tandis que dans le cas du cylindre, la prédiction était possible en représentant tous les cas.

Pour le lancer de la punaise, les élèves comprennent que seule l'expérience permet de connaître la probabilité (prédiction impossible, ou en tous cas très difficile).

14.1.4 Le problème bien ciblé

14.1.4.1 Temps consacré

- DP : $\frac{1}{2}$ séance
- LP : $\frac{2}{3}$ séance

14.1.4.2 Remarques et observations

Les probabilités pour les 5 premières roues sont trouvées sans problème. LP demande en plus des questions posées la probabilité de tomber entre deux zones. Un élève répond :

C'est possible, mais peu probable !

Puis vient la question de la roue partagée en trois zones. Notons qu'ici, les élèves de DP ont eu à résoudre le problème avec trois secteurs de même amplitude.

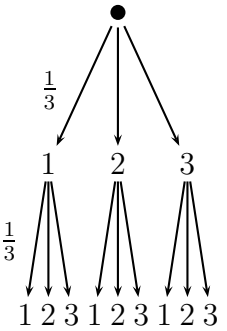
A la deuxième question, les élèves transforment naturellement le « ou » en « + ». LP ajoute que le « ou » correspond à ne pas avoir fait de séparation entre les deux zones. Le calcul de la probabilité de la troisième zone voit naître deux stratégies :

- complémentarité avec les deux autres zones (la somme doit faire $\frac{12}{12}$)
- même méthode que pour les deux autres zones (et on calcule alors $\frac{150}{360}$)

Les élèves comprennent immédiatement que les deuxième et troisième questions sont équivalentes.

La notion d'arbre n'est naturelle pour personne et doit être introduite « artificiellement » par les professeurs :

- Chez DP, on cherche $\mathbb{P}(1\ 1)$, et le professeur fait un dessin avec ses élèves :

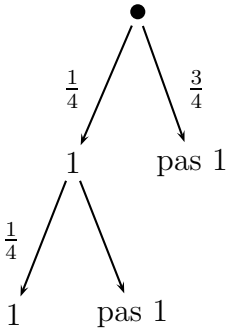


La feuille représente « le tiers du tiers », à savoir $\frac{1}{9}$. DP tire alors des élèves la multiplication des probabilités le long d'un chemin. Les élèves modélisent eux-mêmes la question 7 de la façon suivante :

$$\mathbb{P}(1\ 2 \text{ ou } 2\ 1) = \mathbb{P}(1\ 2) + \mathbb{P}(2\ 1) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

DP remarque que l'on aurait pu se contenter de dessiner les chemins utilisés.

- Les élèves de LP proposent des réponses éclectiques à la question 5. A cette occasion, LP fait une digression pour introduire la loi du produit. Dans un premier temps, il envisage deux lancers successifs d'une pièce tout d'abord truquée, puis non truquée. Il s'aide d'arbres et fait notamment construire :



14.1.5 En selle !

14.1.5.1 Temps consacré

- DP : 1, 25 séance
- LP : 2 séances

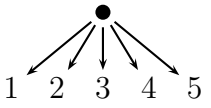
14.1.5.2 Remarques et observations

Ce problème s'est avéré plus délicat que nous ne l'avions prévu. En observant les réactions des élèves de DP, nous avons été amenés à affiner notre séquence. Les modifications portent sur la manière de passer d'un arbre complet à un arbre concis.

Conséquemment, les élèves de LP ont eu l'occasion de se livrer plus tôt à ce genre d'exercice (voir l'arbre du *problème bien ciblé*).

Chez DP

Très peu d'élèves dessinent un arbre. Cependant, certains commencent à écrire toutes les combinaisons possibles de 5 chevaux, mais abandonnent et passent vite à un arbre complet. Peu à peu, les élèves se mettent tous à dessiner ceci :



sans bien en comprendre le sens (notamment celui de la racine).

Ils poursuivent le dessin de l'arbre complet et trouvent assez rapidement les probabilités suivantes :

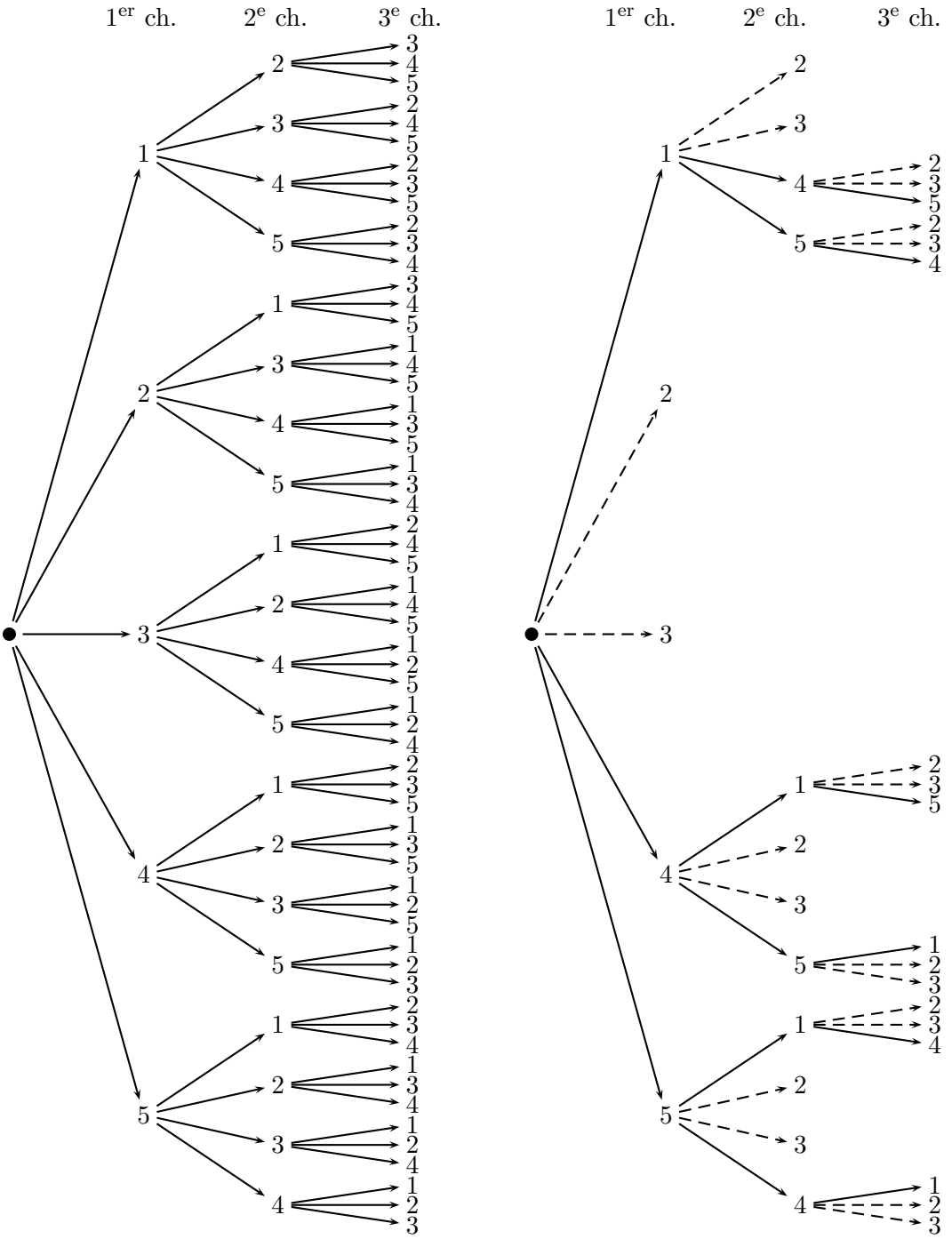
- $\frac{1}{5}$ pour que le cheval n°1 arrive en premier lieu,
- $\frac{1}{4}$ pour que le cheval n°2 arrive en deuxième lieu dans le cas où le n°1 est arrivé premier,
- $\frac{1}{3}$ pour que le cheval n°3 arrive en troisième lieu dans le cas où le n°1 est arrivé premier et où le n°2 est arrivé deuxième.

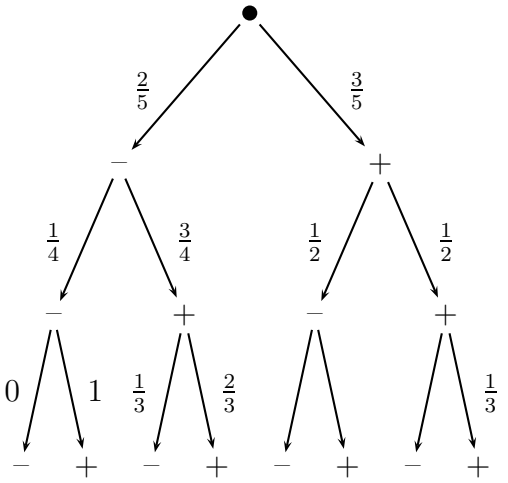
Ils remarquent après hésitations que $\mathbb{P}(1,2,3) = \mathbb{P}(2,4,1) = \cdots = \frac{1}{60}$.

En ce qui concerne le tiercé dans le désordre, DP précise que seule la partie utile de l'arbre mérite d'être employée. Un élève trouve assez vite $\frac{1}{10}$ mais sans arbre, en écrivant toutes les combinaisons possibles de 1, 2 et 3.

$$\mathbb{P}(123, 132, \cdots, 321) = \mathbb{P}(123) + \mathbb{P}(132) + \cdots + \mathbb{P}(321) = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$$

On en revient alors aux arbres. Les configurations suivantes sont données par DP :





Une fois l'arbre dessiné, les élèves ont bien du mal a calculer les probabilités sur chacune des branches !

DP fait remarquer que seule la probabilité du chemin de droite nous intéresse.

$$\mathbb{P}(\text{123 dans le désordre}) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

Cette partie du cours laisse des élèves perplexes.

Chez LP

Un seul élève tente de dessiner un arbre concis ! Tous les autres travaillent tous sur des arbres complets (beaucoup commettent la faute de garder les cinq chevaux à chaque étage).

Remarquons que pour calculer la probabilité du tiercé 3-2-5 dans l'ordre, un élève cherchait cette séquence dans les feuilles de son arbre (les feuilles sont regroupées en triplets, et il espérait trouver la séquence dans l'ordre parmi ces triplets).

Les élèves progressent dans la résolution du problème, mais ils se dégagent difficilement de l'arbre complet. Beaucoup d'élèves n'aiment pas la méthode concise, et certains la comprennent péniblement :

Si on fait une petite erreur, tout tombe à l'eau.

Une élève se demande comment on peut s'en sortir avec plus de chevaux.

14.1.6 Une première synthèse

14.1.6.1 Temps consacré

- DP : 1, 5 séance
- LP : $\frac{3}{4}$ séance

14.1.6.2 Remarques et observations

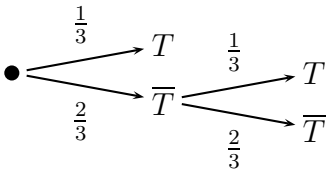
Le problème des multiples de 3

Il est à remarquer que les élèves n'ont pas encore le réflexe de construire des arbres concis.

Ils ont également éprouvé des difficultés à comprendre que l'événement contraire de TT n'est pas $\overline{T}\ \overline{T}$.

Un élève de LP est surpris que la somme des probabilités des événements représentés par des feuilles soit égale à 1.

LP donne le complément d'informations et dessine l'arbre suivant :



Il explique qu'ici aussi, la somme des probabilités des feuilles vaut 1.

14.1.7 Wilgame

14.1.7.1 Temps consacré

- DP : $\frac{1}{2}$ séance
- LP : $1,5$ séance

14.1.7.2 Remarques et observations

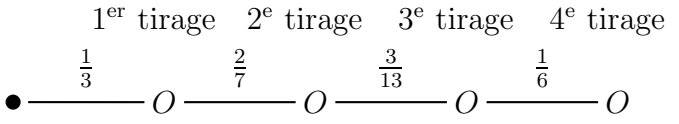
La partie la plus intéressante de la résolution de ce problème est la première question. Nous ne nous intéresserons qu'à celle-là. La manière de l'aborder ayant été fondamentalement différente dans les deux classes, nous avons jugé bon d'en faire deux récits distincts.

Chez DP

Un arbre concis est construit et les conventions suivantes sont prises :

- l'événement « la boule tirée fait partie des cases cochées » est noté O,
- l'événement « la boule tirée ne fait pas partie des cases cochées » est noté N.

Les élèves travaillent d'eux-mêmes. Pour le rang 1, l'arbre suivant apparaît très vite :



Cependant, la probabilité de $\frac{1}{3}$ sur la première branche n'est pas claire pour tout le monde.

$$\mathbb{P}(\text{rang } 1) = \mathbb{P}(O\ O\ O\ O) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{273} = \frac{11}{3003}$$

Par analogie avec le rang 1, les élèves croient tous que seul *un* chemin est gagnant au rang 2. Ils se rendent compte, après réflexion, que quatre chemins sont intéressants.

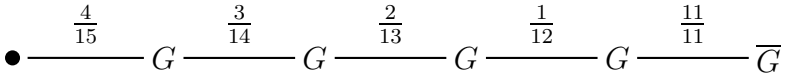
Les autres probabilités sont calculées sur le même modèle.

Après ce problème, DP a soumis ses élèves à une interrogation que nous analysons au chapitre 19.

Chez LP

Probabilité de gagner au rang 1

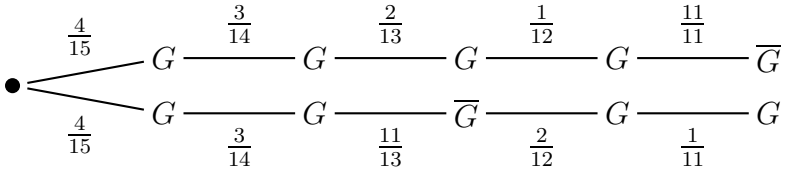
Les élèves aidés de LP construisent l'arbre suivant dans lequel G et $\overline{G}$ désignent respectivement des numéros gagnant et non gagnant. Le $\overline{G}$ est admis après discussion — la plupart des élèves avaient considéré que le numéro subsidiaire était gagnant. Le calcul des probabilités s'effectue sans peine.



La probabilité de l'événement représenté vaut $\frac{11}{15015}$. Une discussion s'engage alors pour comprendre pourquoi cette probabilité n'est pas égale à la valeur [(1)] du « joueur invétéré ». Les élèves arrivent rapidement à la conclusion que le numéro non gagnant n'a pas nécessairement été coché en dernier lieu et qu'il y a cinq cas possibles.

Remarquons que les élèves qui avaient considéré le numéro subsidiaire comme gagnant avaient trouvé une probabilité égale à $\frac{11}{3003}$ en ne considérant qu'un seul des cinq cas possibles et n'avaient pas raisonné plus loin.

L'arbre est complété de la manière suivante :



LP fait remarquer que les deux événements représentés ont la même probabilité de se produire (seul l'ordre des facteurs du numérateur change) et la réponse vient sans peine, sans construire l'arbre complet :

$$\Pr(\text{gagner au rang 1}) = 5 \times \frac{11}{15015} = \frac{11}{3003}$$

Probabilité de gagner au rang 2

Des élèves sont envoyés au tableau.

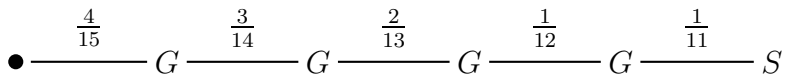
LP insiste sur le « au moins » et propose d'envisager deux cas :

(a) 4 numéros gagnants plus le subsidiaire,

(b) 3 numéros gagnants, le subsidiaire et un perdant.

Cas (a)

Après quelques hésitations, un élève construit l'arbre que voici :



Il en déduit aisément la probabilité de l'événement associé au cas (a) :

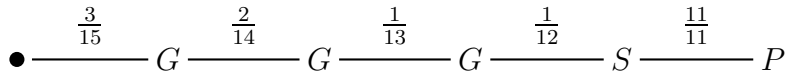
$$5 \times \frac{1}{15015} = \frac{1}{3003}$$

Un autre élève est envoyé au tableau pour la suite.

(1) Les valeurs fournies dans l'énoncé permettent ici de construire un raisonnement cohérent.

Cas (b)

L'arbre erroné suivant est d'abord construit :



L'élève justifie son $\frac{3}{15}$ par le fait qu'on a besoin de trois numéros gagnants, il rectifie vite son erreur en remplaçant les fractions $\frac{3}{15}$, $\frac{2}{14}$ et $\frac{1}{13}$ par $\frac{4}{15}$, $\frac{3}{14}$ et $\frac{2}{13}$ et en déduit la probabilité de l'événement représenté : $\frac{2}{3003}$.
Les élèves concluent que, vu la valeur donnée dans l'énoncé, l'événement associé au cas (b) doit être composé de 20 événements élémentaires ayant la même probabilité de se produire que celui représenté ci-dessus.

Mais pourquoi 20 ? LP fait alors dénombrer toutes les permutations de G G G S P, ce qui mène à la solution.

Les autres probabilités sont calculées sans peine en raisonnant comme précédemment.

14.1.8 Le problème de la bonne tranche

14.1.8.1 Temps consacré

- DP : 2 séances
- LP : 2 séances

14.1.8.2 Remarques et observations

Pour répondre à la première question, les élèves de DP ne disposaient pas de l'arbre distribué aux élèves de LP (voir figure 14.3), certains ont dessiné un arbre semblable à celui que nous suggérions pour répondre à la deuxième question (et dont ils ne disposaient pas non plus), d'autres ont encore calculé la probabilité en fonction du nombre de feuilles.

DP et LP ont tous deux donné la deuxième question sous deux formes :

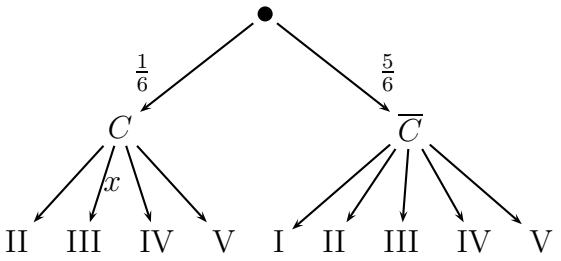
- *Quelle est la probabilité pour qu'un chômeur pris au hasard fasse partie de la classe III ?*
- *Quelle est la probabilité pour qu'une personne fasse partie de la classe III sachant que c'est un chômeur ?*

La seconde formulation a l'avantage d'utiliser l'expression « sachant que ».

Pour calculer la probabilité qu'une personne prise au hasard soit un chômeur, les élèves comprennent vite qu'il suffit d'additionner les probabilités du type $\mathbb{P}(*, C)$. On trouve $\mathbb{P}(C) = 0,16666\ldots$.

Ecrire ce nombre sous forme de fraction fut pénible. De même que le calcul de $\mathbb{P}(\overline{C})$, LP a dû rappeler une fois encore que la somme des deux valait 1.

L'arbre suivant est construit au tableau :



Péniblement, les élèves de DP trouvent et résolvent l'équation $\frac{1}{6} \cdot x = 0,6$. Ils ne parviennent pas sans aide à écrire la loi des probabilités conditionnelles. Paradoxalement, ceci n'a pas posé de problème chez LP.

Soulignons que nous avons ici affaire à un passage du procédural au structural .

Du procédural au structural

DP introduit ensuite la notion d'indépendance en comparant $\mathbb{P}(III|C)$ et $\mathbb{P}(III)$, puis $\mathbb{P}(V|C)$ et $\mathbb{P}(V)$ (les événements III et C sont dépendants, V et C ne le sont pas). Il donne d'emblée la loi du produit. Sa démonstration laisse perplexe la plupart des élèves qui n'avaient pas encore bien cerné la notion d'indépendance.

14.1.9 Un problème au format familial

14.1.9.1 Temps consacré

- DP : $\frac{1}{2}$ séance
- LP : $\frac{1}{2}$ séance

14.1.9.2 Remarques et observations

DP dément l'affirmation de l'un de ses élèves :

> *avoir un garçon sachant que le premier enfant n'est pas une fille, ça revient au même que d'avoir deux garçons.*

Les deux premières questions se résolvent sans problème, la troisième cause plus de soucis aux élèves de DP. Ils l'abordent en appliquant la formule des probabilités conditionnelles, sans remarquer que les événements sont indépendants.

À cette occasion, précisons que nous avons observé chez les élèves une difficulté à comprendre que $\mathbb{P}(FG \text{ ou } FF) = \mathbb{P}(F)$.

LP introduit ici la notion d'événements indépendants. Lorsqu'il demande aux élèves des exemples d'événements *dépendants*, un long silence s'installe !

14.1.10 Retour dans la forêt

14.1.10.1 Temps consacré

- DP : $\frac{1}{2}$ séance
- LP : $\frac{1}{2}$ séance

14.1.10.2 Remarques et observations

Ce problème n'a pas engendré d'ennui particulier.

14.1.11 Petit appétit, la mouche fait son nid

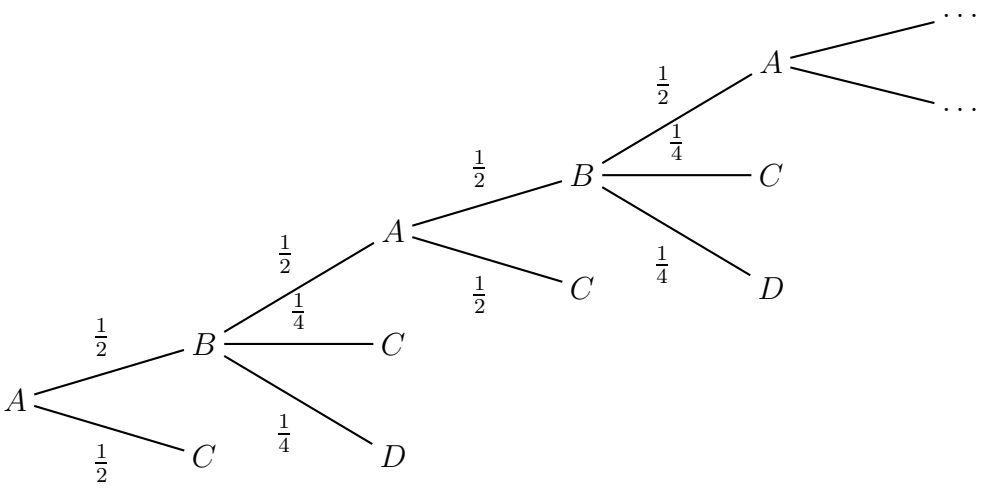
14.1.11.1 Temps consacré

- DP : quelques minutes
- LP : $\frac{1}{2}$ séance

14.1.11.2 Remarques et observations

DP, faute de temps, résout le problème lui-même au tableau. Les élèves n'interviennent pas.

LP dessine l'arbre suivant d'après des suggestions d'élèves :



La classe, aidée de son professeur, entreprend le calcul de la probabilité que la mouche se fasse manger en C sachant qu'elle est partie de A.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{mourir en } C \text{ si départ de } A)\\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \cdots\\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \cdots\\
&= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^3 + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

Changement de registre

Les élèves ont été assez actifs durant ce long calcul, soutenus en cela par LP qui les a notamment guidés en faisant remarquer que la régularité dans l'arbre devait se traduire par une régularité dans les calculs.

Après ces calculs, LP a demandé si on aurait pu trouver une probabilité égale à $\frac{7}{6}$, certains élèves n'ont pas trouvé cela étrange. Ce n'est qu'après réflexion que quelqu'un s'est souvenu qu'une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1 !!!

Ce dernier comportement nous semble symptomatique d'une difficulté à terminer l'étape de condensation.

Pour calculer la deuxième probabilité, tous les élèves ont repris des calculs similaires à ceux qui précèdent, personne n'a pensé à se servir du résultat ci-dessus.

C'est sur remarque insistante de LP, qu'une élève a finalement déterminé que cette probabilité vaut

$$\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = \frac{2}{3}.$$

14.1.12 Epilogue

Faute de temps, la partie intitulée « Annexe » n'a pu être vue en classe.

Notons enfin que DP a effectué avec sa classe, à la suite de notre séquence, quelques exercices supplémentaires, plus systématiques, pendant deux ou trois heures de cours.

LP a soumis ses élèves à la même interrogation que DP précédemment. Nous l'analysons au chapitre 19.

14.2. La séquence de cours

0. Introduction

La probabilité d'obtenir « pile » (ou « face ») lorsqu'on joue avec une pièce non truquée est égale à $\frac{1}{2}$. Mais d'où vient ce $\frac{1}{2}$? Cette probabilité vaut-elle encore $\frac{1}{2}$ si on joue avec une pièce truquée ? Si non, comment peut-on la déterminer ?

Au départ d'expériences simples, nous allons tenter de répondre à ces différentes questions puis, au travers de problèmes, nous établirons peu à peu les bases du calcul des probabilités.

1. Mise en train

1.1 Expérience 1

Travaillez par petits groupes !

Au jeu de « pile ou face », décidons d'appeler SUCCÈS *l'apparition de « pile » et* ÉCHEC *l'apparition de « face ». Jouez cinquante fois à « pile ou face » avec une pièce non truquée, en répondant progressivement aux questions suivantes.*
Pour compléter le diagramme ci-après, vous partez du point marqué « début », vous renforcez un trait vers la droite en cas de succès et un trait vers la gauche en cas d'échec.

- Au fur et à mesure du déroulement de l'expérience, complétez le diagramme, et répondez aux questions suivantes :
  1. Quel est le pourcentage de succès après
     - 5 lancers ?
     - 10 lancers ?
     - 15 lancers ?
     - 20 lancers ?

     Ce pourcentage vous est donné par :

$$\frac{\text{nombre de succès}}{\text{nombre d'expériences}} \cdot 100$$

     Si on omet de multiplier par 100, on obtient un nombre appelé FRÉQUENCE (il ne figure pas dans le diagramme). Complétez le tableau suivant :

n	5	10	15	20
Fréquence				

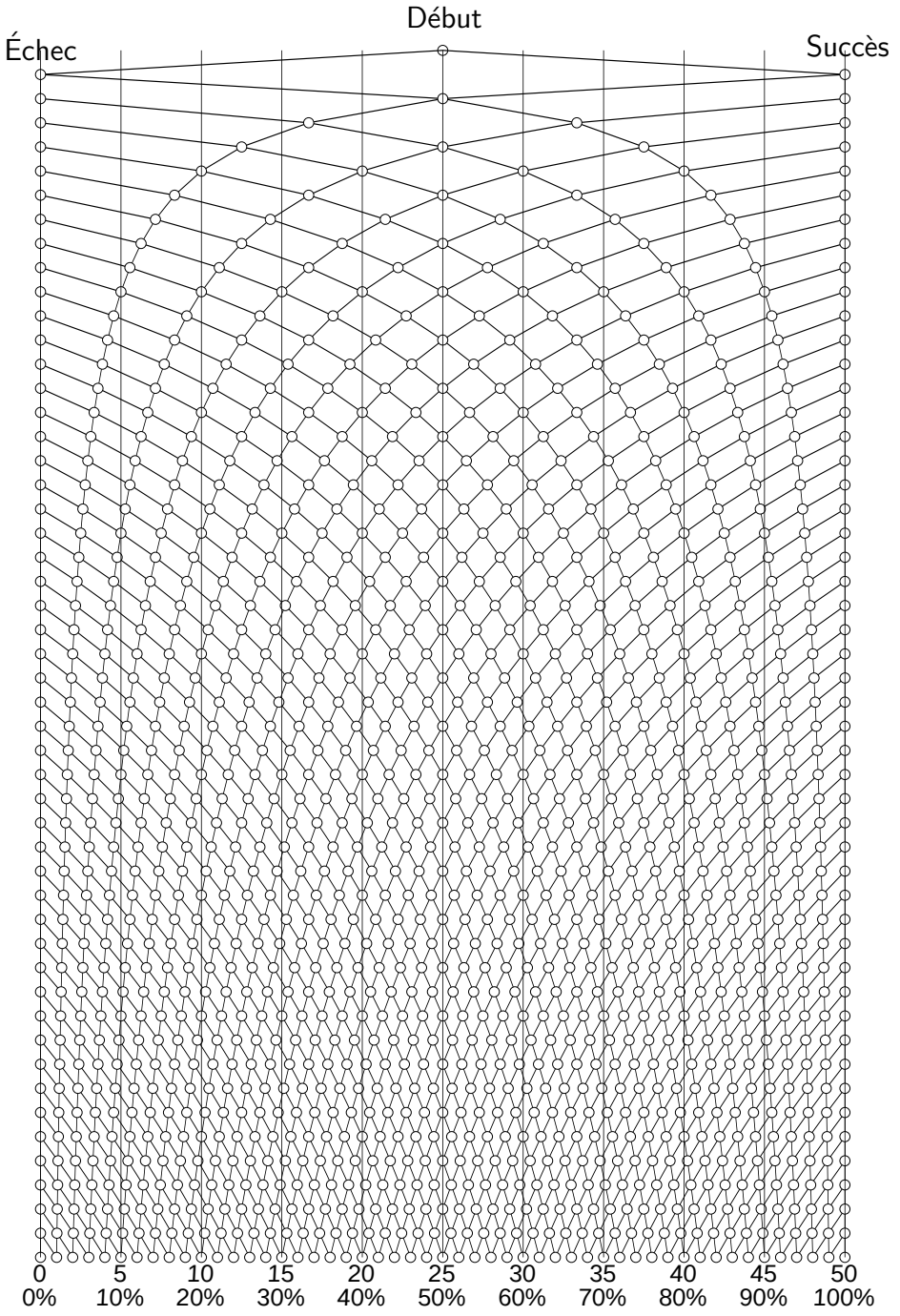


Diagramme extrait de [75]

Figure 14.1

2. Après 20 lancers, peut-on déterminer l'intervalle le plus petit possible comprenant la fréquence de succès après 50 lancers ? Si oui, quel est-il ? (le diagramme échec-succès vous sera utile pour répondre à cette question)

3. Répondez aux questions 1 et 2 après
   - **30 lancers** pourcentage : fréquence : intervalle :
   - **40 lancers** pourcentage : fréquence : intervalle :
   - **49 lancers** pourcentage : fréquence : intervalle :
4. Comment évolue l'intervalle déterminé à la question 2 lorsque le nombre de lancers augmente ?

5. Effectuez le dernier lancer, et vérifiez l'appartenance de la fréquence finale aux intervalles trouvés.

- Complétez la grille figurant au tableau et recopiez tous les résultats ci-dessous.

Groupe d'élèves n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de succès										
Nombre d'échecs										

- Considérons maintenant l'ensemble des résultats de la classe comme étant ceux d'une expérience unique ayant consisté en cinq cents lancers d'une pièce dans l'ordre où ils figurent au tableau. Calculez les fréquences de succès pour les 50 premiers lancers, pour les 100 premiers, ..., pour les 500 lancers.

n	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
Fréquence de succès après n lancers										

- Reportez vos résultats sur le graphique suivant après avoir gradué les axes de manière adéquate.

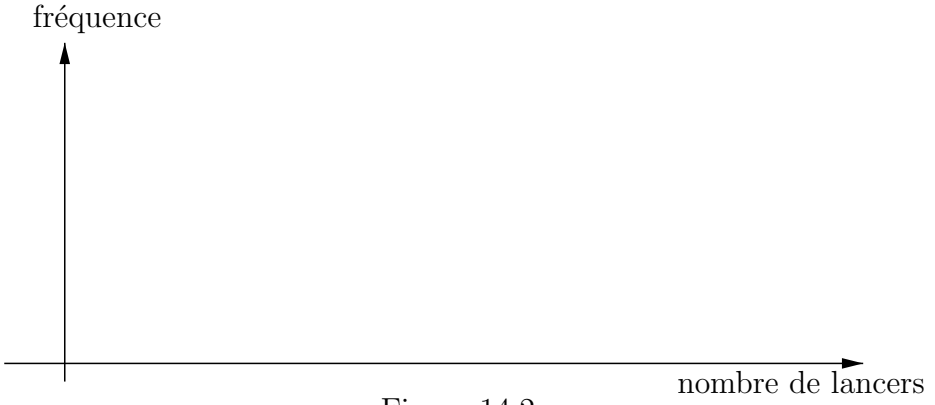


Figure 14.2

- Comment se comporte la suite des fréquences obtenues ?

  Ce résultat est-il surprenant ? Était-il prévisible ?

Définir une notion

- Déduisez une première définition de la *probabilité d'obtenir « pile » lors du jet d'une pièce truquée ou non.*

1.2 Expérience 2

Cette expérience nécessite un matériel particulier, demandez-le à votre professeur.

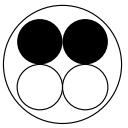
Deux billes noires et deux billes blanches sont enfermées dans un tube cylindrique transparent dont le diamètre est tel que les quatre billes se placent nécessairement aux sommets d'un carré lorsqu'on dépose le tube verticalement sur une table. Dans ces conditions, deux TYPES de configuration sont possibles pour les quatre billes :

- *on appelle SUCCÈS le cas où les deux billes noires se touchent,*
- *on appelle ÉCHEC le cas où les deux billes noires sont diamétralement opposées.*

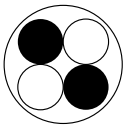
Répondez aux questions suivantes.

Exemples
La configuration 1 ci-dessous est un succès, l'autre est un échec.

1



2



Conjecturer

- Lorsque l'on secoue le tube, que vaut selon vous la probabilité d'un succès ?
  Et celle d'un échec ?
  Pour infirmer ou confirmer votre intuition, secouez le tube 50 fois et dénombrez les succès et les échecs. Si vous en éprouvez le besoin, remplissez un diagramme succès–échec.
- Complétez la grille figurant au tableau et reportez-la ci-dessous.

Groupe n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de succès										
Nombre d'échecs										

- Considérons maintenant l'ensemble des résultats de la classe comme étant ceux d'une expérience unique ayant consisté en cinq cents jeux dans l'ordre où ils figurent au tableau. Calculez les fréquences de succès pour les 50 premiers jeux, pour les 100 premiers, ..., pour les 500 jeux.

n	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
Fréquence de succès après n lancers										

- Comment se comporte la suite des fréquences obtenues ? Comparez ce résultat à votre première intuition.

Conjecturer

Lorsque nous cherchons à déterminer une probabilité, deux points de vue peuvent être adoptés.
Dans certains cas, il est possible de *calculer* — et donc de prévoir — la probabilité sans passer par le relevé expérimental des fréquences.
Il est raisonnable — voire indispensable — dans d'autres cas d'adopter comme probabilité la fréquence observée après la réalisation d'un grand nombre d'expériences.

- Dans le cas présent, il était possible de calculer la probabilité d'un échec et d'un succès. Tentez de bâtir un raisonnement pour y arriver.
- Que vaut la somme des probabilités d'un succès et d'un échec ?

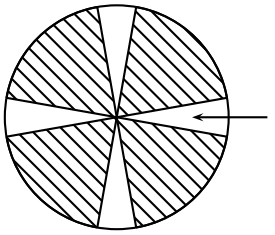
1.3 Expérience 3

Si on lançait une punaise 50 fois, comment pourrait-on calculer la probabilité qu'elle tombe « pointe en l'air » ?

2. Véritable entrée en matière

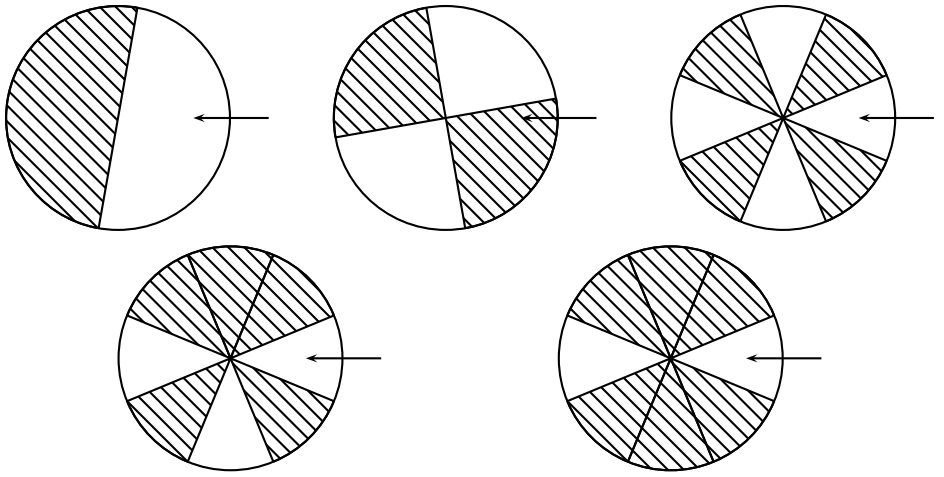
2.1 Un problème bien ciblé !

Problème 2.1

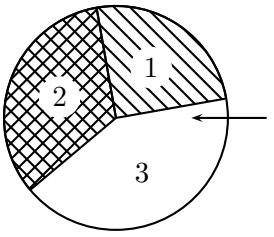


À la foire, l'un des jeux proposés est de faire tourner une roue semblable à ce modèle autour de son centre, et de regarder quelle zone est désignée par le curseur fixe.
Répondez aux questions ci-dessous.

- Quelle est la probabilité que le curseur désigne une zone sombre pour chacune des roues suivantes ?



- Jouons maintenant avec la roue suivante :



L'amplitude de l'angle définissant la zone :
- n° 1 est de 90°,
- n° 2 est de 120°,
- n° 3 est de 150°.

Quelle est la probabilité que le curseur :

1. indique la zone 1 ? la zone 2 ? la zone 3 ?
2. indique l'une des zones 1 *ou* 2 ?
   Peut-on déduire cette probabilité de celles qui ont été calculées ci-avant ?
3. n'indique *pas* la zone 3 ?
4. indique l'une des zones 1, 2 ou 3 ?

Modélisation

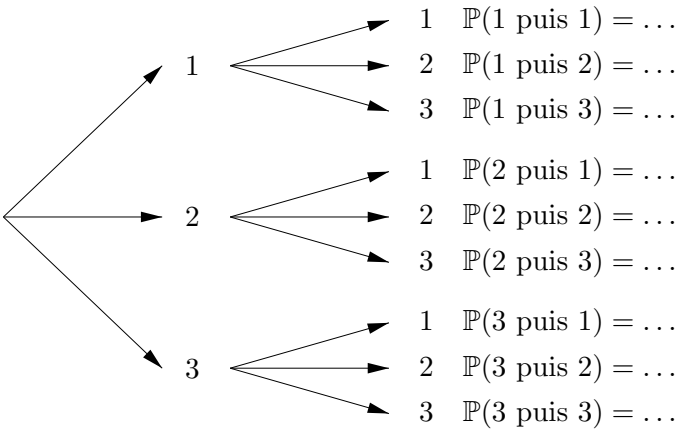
Pour répondre aux questions suivantes, nous vous suggérons d'utiliser des arbres. Le modèle présenté ci-dessous est complet, certaines parties sont inutiles. Pour chaque question, essayez de construire un arbre le plus concis possible.

- Jouons maintenant deux fois de suite avec la dernière roue. Quelle est la probabilité :

1. que le curseur indique deux fois de suite la zone 1 ?

2. que le curseur indique d'abord la zone 1, puis la zone 2 ?

3. que le curseur indique la zone 1 et la zone 2, dans un ordre quelconque, lors des deux jeux successifs ?



2.2 En selle pour le problème du tiercé !

Problème 2.2 *On fait courir 5 chevaux et tous les classements à l'arrivée ont la même probabilité de se produire.*

- *Quelle est la probabilité d'obtenir le tiercé dans l'ordre ?*
- *Et si l'ordre n'a pas d'importance ?*
- *Dans le cas où l'ordre n'a pas d'importance, quelle est la probabilité d'avoir choisi un cheval faisant partie du tiercé et deux perdants ?*

Ici aussi, nous vous suggérons d'utiliser des arbres les plus concis possibles.

2.3 Synthèse

Un peu de vocabulaire

Expérience aléatoire et événement élémentaire

Une expérience est dite aléatoire si elle peut avoir plusieurs issues appelées *événements élémentaires*.

Exemple : le jet d'un dé dont on examine la face supérieure. Les événements élémentaires sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Événements composés

Un événement composé est constitué d'événement(s) élémentaire(s).

Exemple : lors du jet d'un dé, l'événement A « obtenir un résultat pair » s'écrit $A = \{2, 4, 6\}$ et est constitué des événements élémentaires 2, 4 et 6.

Événement contraire

L'événement contraire d'un événement A est celui qui se réalise quand A ne se réalise pas et qui ne se réalise pas quand A se réalise. On le notera $\overline{A}$.

Exemple : lors du jet d'un dé, l'événement contraire de A « obtenir un résultat pair » est l'événement $\overline{A}$ « ne pas obtenir un résultat pair ». $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$.

Autre exemple : ci-dessus, dans le problème « bien ciblé », nous avons déjà rencontré des événements contraires. À la question 3, l'événement « ne pas indiquer la zone 3 » est contraire à l'événement « indiquer la zone 3 ».

Fréquence

La fréquence d'un événement est le rapport

$$\frac{\text{nombre d'apparitions de l'événement}}{\text{nombre de réalisations de l'expérience}}$$

Probabilité

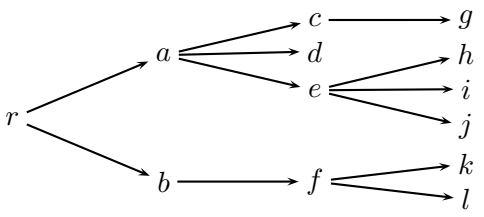
La probabilité d'un événement est la limite de sa fréquence lorsque le nombre d'expérimentations tend vers l'infini.

Remarquons que certaines probabilités peuvent se calculer sans passer par la fréquence.

Oui, nous pouvons lire les arbres !

Dans les activités proposées ci-dessus, nous avons utilisé des arbres. Apprenons à mieux les comprendre.

Dans l'arbre qui suit, r est appelé la RACINE, d, g, h i, j, k et l sont appelés les FEUILLES. D'une manière générale, toutes les lettres désignent des NŒUDS.



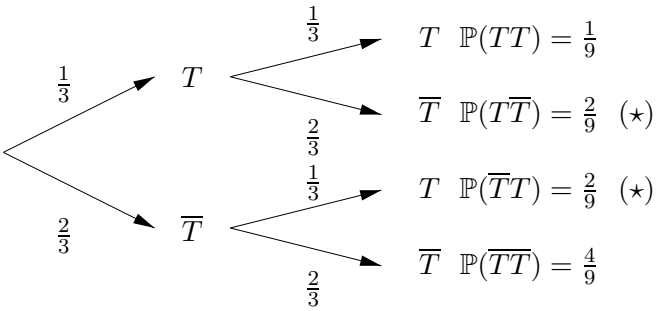
Lorsqu'un arbre modélise une expérience aléatoire, chaque nœud représente un événement élémentaire ou composé.

Tout événement n'est cependant pas représenté par un nœud !

Ainsi, le nœud e représente l'événement composé de h, de i et de j. Le nœud a représente l'événement composé de d, h, i et j.

L'événement composé de g, j et k n'est, quant à lui, représenté par aucun nœud.

Penchons-nous à présent sur le problème de deux lancers successifs d'un dé dont on observe la face supérieure. Les événements élémentaires sont ici TT, $T\overline{T}$, $\overline{T}T$ et $\overline{TT}$ où T représente « être un multiple de 3 » (et $\overline{T}$ son événement contraire).



On remarque que *la somme de toutes les probabilités figurant sur les feuilles vaut 1 (⋆⋆)*. Pour calculer la probabilité d'un événement représenté par une feuille, on a multiplié les probabilités se trouvant sur les branches du chemin liant la feuille à la racine.

Notons A l'événement TT. Son contraire est l'événement composé de toutes les autres feuilles de l'arbre.

La probabilité de cet événement est (en tenant compte de $(\star\star)$) $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = \frac{8}{9}$. On peut aussi la calculer en additionnant les probabilités des événements $T\overline{T}$, $\overline{T}T$ et $\overline{T}\overline{T}$.

Dégager une loi

À présent, calculons la probabilité d'obtenir exactement un résultat multiple de trois sur les deux lancers. Appelons B cet événement, il est constitué des feuilles marquées $(\star)$.

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(T\overline{T}) + \mathbb{P}(\overline{T}T) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

Quelques règles

- Une probabilité appartient toujours à l'intervalle $[0, 1]$ (ceci découle de la propriété similaire pour la fréquence qui, elle, est triviale).
- La probabilité d'un événement composé d'une expérience aléatoire est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.
- En particulier, la somme des probabilités de tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire vaut 1.
- La probabilité de l'événement contraire de A est $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$. C'est une conséquence des règles précédentes.
- Dans un arbre, la probabilité d'un événement représenté par un nœud est égale au produit des probabilités apparaissant sur les branches successives du chemin qui le relie à la racine. La probabilité de l'événement représenté par cette dernière vaut 1.

2.4 Le problème du Wilgame

Problème 2.3 *Au pays de Mathland, le jeu du Wilgame se pratique à l'aide de grilles constituées de 15 cases numérotées de 1 à 15, dont cinq doivent être cochées.*
Lors d'un tirage, 4 numéros dits « gagnants » et un numéro dit « subsidiaire » sont extraits d'une urne. Vous êtes gagnant au rang :

- *1 si vous avez coché les 4 numéros gagnants,*
- *2 si vous avez coché au moins 3 des 4 numéros gagnants et le subsidiaire,*
- *3 si vous avez coché exactement 3 des 4 numéros gagnants sans le subsidiaire.*

Vous êtes perdant dans tous les autres cas.
Un joueur invétéré prétend que la probabilité de gagner vaut $\frac{11}{3003}$ au rang 1, $\frac{41}{3003}$ au rang 2, $\frac{180}{3003}$ au rang 3 et que celle de perdre vaut $\frac{2772}{3003}$.

- Vérifiez que les affirmations du joueur invétéré sont correctes.
- Pourquoi la somme des probabilités est-elle plus grande que 1 ?
- Comment pourrait-on modifier les règles pour que cette somme soit égale à 1 ?
- Adaptez les probabilités calculées par le joueur invétéré pour les rendre conformes aux nouvelles règles.

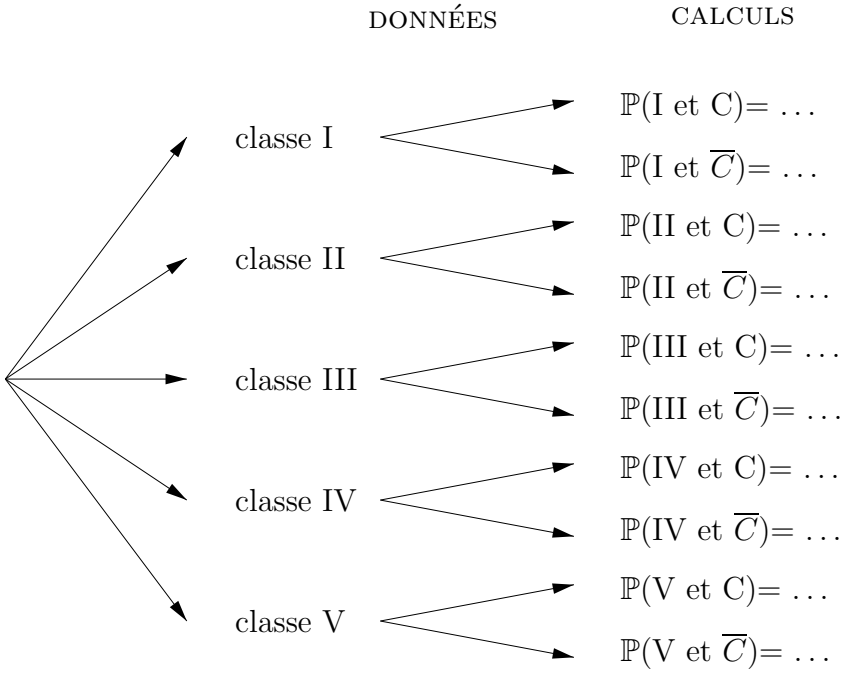


Figure 14.3

3. La grosse pièce

3.1 Le problème de la bonne tranche

Problème 3.1 *Le tableau ci-dessous résume la situation du chômage en Mathland :*

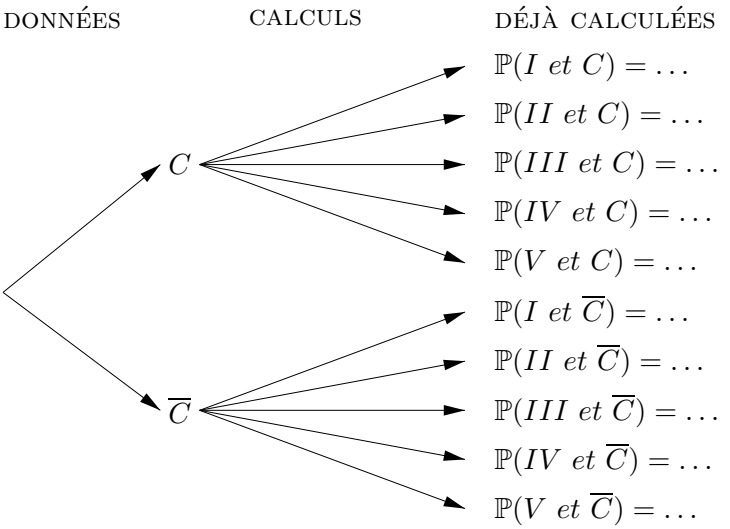
Classe	*Tranche d'âge*	*Répartition*	*Proportion de chômeurs*
I	*0–15 ans*	*34%*	*0*
II	*15–25 ans*	*25%*	1/5
III	*25–35 ans*	*15%*	2/5
IV	*35–45 ans*	*10%*	3/10
V	*>45 ans*	*16%*	1/6

On demande la probabilité

1. *pour qu'un habitant pris au hasard soit un chômeur faisant partie de la classe III,*
2. *pour qu'un chômeur pris au hasard fasse partie de la classe III.*

Pour répondre à la première question, complétez l'arbre qui suit (où C représente un chômeur et $\overline{C}$ représente un non chômeur) :

Pour répondre à la deuxième question, complétez un deuxième arbre :



Calculons la probabilité qu'un chômeur pris au hasard fasse partie de la classe II. Vous ferez de même pour répondre à la question 2.

Nous savons que $\mathbb{P}(II \text{ et } C) = 0,05$. Or, la probabilité d'être chômeur ($\frac{1}{6}$) doit être multipliée par la probabilité x qu'un chômeur appartienne à la classe II, afin de trouver la probabilité $(0,05)$ qu'un habitant soit un chômeur appartenant à la classe II.

Ainsi $x = \frac{0,05}{1/6} = 0,3$. Par conséquent :

Dégager une loi

$$\mathbb{P}(II \text{ sachant que } C) = \frac{\mathbb{P}(II \text{ et } C)}{\mathbb{P}(C)}$$

3.2 Le retour de la synthèse

Pour une expérience aléatoire donnée on note $\mathbb{P}(A|B)$ la probabilité qu'un événement A se réalise sachant qu'un événement B s'est réalisé.

Ce qui précède nous permet d'écrire :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \text{ et } B)}{\mathbb{P}(B)} \text{ ou encore : } \mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)$$

L'avantage de la dernière formulation est d'être valide même lorsque $\mathbb{P}(B) = 0$

3.3 Un problème au format familial

PROBLÈME 3.2 *On estime que la probabilité d'avoir un garçon est $\frac{515}{1000}$, d'où celle d'avoir une fille est $\frac{485}{1000}$.*
Que pouvez-vous dire, pour les familles de deux enfants, de la probabilité d'avoir :

- *deux garçons ?*
- *un garçon et une fille ?*
- *un garçon sachant que le premier enfant est une fille ?*
- *un garçon sachant que le premier enfant n'est pas une fille ?*

3.4 L'ultime synthèse

Vocabulaire et règle

Événements indépendants

Deux événements sont indépendants lorsque la réalisation de l'un n'influence pas la réalisation de l'autre.

Dans le problème précédent, l'événement A : « le deuxième enfant est un garçon » est indépendant de l'événement B : « le premier enfant est une fille », ce qui se traduit de deux manières équivalentes ([2]) :

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \text{ et } \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|\overline{B})$$

Loi du produit

Si deux événements A et B sont indépendants, on déduit de la formule des probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

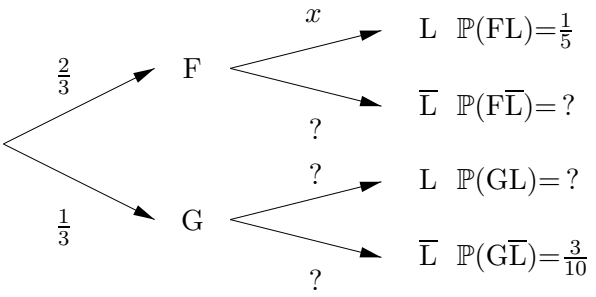
d'où découle la loi du produit, que nous avons déjà eu l'occasion d'utiliser à maintes reprises dans nos arbres :

Si les événements A et B sont indépendants, alors $\mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

Retour dans la forêt

Complétons notre manuel de lecture des arbres. Considérons une classe mixte constituée de deux fois plus de filles que de garçons, et contenant 20% de filles à lunettes ainsi que 30% de garçons sans lunettes.

On choisit une fille au hasard, et on demande de calculer la probabilité qu'elle porte des lunettes.



La probabilité recherchée est :

$$x = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{10}$$

([2]) La démonstration de cette équivalence se trouve en annexe

Questions subsidiaires :

- complétez l'arbre,
- calculez la probabilité qu'un élève choisi au hasard porte des lunettes,
- calculez la probabilité qu'un élève portant des lunettes soit une fille.

Flashback sur le problème de la bonne tranche

Dans le « problème de la bonne tranche », les événements « appartenir à la classe V » et « être chômeur » étaient indépendants.

En effet, $\mathbb{P}(V|C) = \mathbb{P}(V) = 0,16$. De manière équivalente, $\mathbb{P}(V|C) = \mathbb{P}(V|\overline{C}) = 0,16$.

Par contre, être chômeur n'était pas indépendant de la tranche d'âge, car pour ce faire, il aurait fallu :

$$\mathbb{P}(C|I) = \mathbb{P}(C|II) = \mathbb{P}(C|III) = \cdots$$

3.5 Petit appétit, la mouche fait son nid

intégration de compétences multiples

PROBLÈME 3.3 *Une mouche parcourt les arêtes d'un tétraèdre $ABCD$. En chaque sommet, elle choisit de se diriger vers l'un des trois autres sommets en respectant les probabilités de transition données dans le tableau suivant (la première colonne indique les sommets de départ) :*

	A	B	C	D
A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
B	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
C	0	0	1	0
D	0	0	0	1

La mouche commence son périple en A ou en B. Aux sommets C et D se cachent de grosses araignées qui avalent la mouche si elle passe à leur portée.
Quelle est la probabilité que ce soit l'araignée du sommet C qui gobe la mouche :

- *si celle-ci part de A ?*
- *si celle-ci part de B ?*

4. Annexe

Nous proposons ici une illustration puis une preuve de l'équivalence :

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|\overline{B}) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$$

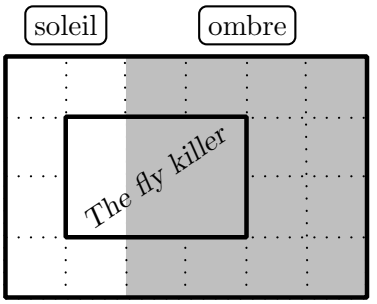
Cette équivalence n'est vraie que dans le cas où $\mathbb{P}(B) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{B}) \neq 0$.

L'illustration

La figure ci-après représente une table, la partie de droite (ombrée sur la figure) est à l'ombre tandis que la partie de gauche est exposée aux rayons du soleil. Au centre de cette table, on a placé un papier tue-mouches (*The fly killer*).
Une mouche, tellement minuscule que nous l'assimilerons à un point, épuisée par un long vol, décide d'aller s'y reposer. Inconsciente du danger qui la menace et peu soucieuse de son bronzage, on suppose qu'elle a la même probabilité de se poser en n'importe quel endroit de la table.

Appelons :

- A l'événement « la mouche se pose sur le papier tue-mouches »,
- B l'événement « la mouche se pose au soleil »,
- $\overline{B}$ l'événement « la mouche se pose à l'ombre ».



$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{aire du papier tue-mouches}}{\text{aire de la table}} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\text{aire du morceau de papier tue-mouches exposé au soleil}}{\text{aire du morceau de table exposé au soleil}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

On constate que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$, les événements A et B sont donc *indépendants*. En effet, la fraction de table recouverte de papier tue-mouches est identique que l'on considère l'entièreté de la table ou uniquement la partie de table exposée au soleil ($\frac{1}{4}$).

Cette fraction reste donc la même si l'on considère la partie de table à l'ombre.

Ce qui nous permet de dire que $\mathbb{P}(A|\overline{B}) = \frac{1}{4}$.

Ainsi donc :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) \Longrightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|\overline{B})$$

Par un raisonnement analogue, on pourrait voir que

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|\overline{B}) \Longrightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$$

et donc que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|\overline{B})$$

... dans le cas de l'exemple que nous traitons.

La preuve

formalisation

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|\overline{B}) &\iff \frac{\mathbb{P}(A \text{ et } B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \text{ et } \overline{B})}{\mathbb{P}(\overline{B})} \\
&\iff \frac{\mathbb{P}(A \text{ et } B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \text{ et } \overline{B})}{1 - \mathbb{P}(B)} \\
&\iff \mathbb{P}(A \text{ et } B) \cdot (1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A \text{ et } \overline{B}) \cdot \mathbb{P}(B) \\
&\iff \mathbb{P}(A \text{ et } B) - \mathbb{P}(A \text{ et } B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \text{ et } \overline{B}) \cdot \mathbb{P}(B) \\
&\iff \mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(A \text{ et } B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \text{ et } \overline{B}) \cdot \mathbb{P}(B) \\
&\iff \mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(B) \cdot \big(\mathbb{P}(A \text{ et } B) + \mathbb{P}(A \text{ et } \overline{B})\big) \\
&\iff \mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A) \\
&\iff \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A) \\
&\iff \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)
\end{aligned}
$$

Références

[106], [75], [154], [95], [97], [92], [104], [140], [148].

Quatrième partie

Outils pédagogiques

Chapitre 15

Problématisation et formation continue

15.1 Introduction 471
15.2 Pourquoi envisager une formation à la problématisation ? 472
15.3 Quelques caractéristiques des modules de formation 473
15.4 Un exemple détaillé 474
15.5 Parmi les premières réactions 477

15.1. Introduction

Dans le cadre de notre recherche, un certain nombre d'expériences ont été réalisées :

- l'observation d'élèves, pris isolément, en situation de résolution de problème (cfr. dans le chapitre 11 les problèmes du quart de rond, de l'eau et du vin, ...) ; l'objectif était d'isoler les phases essentielles traversées par l'élève lors d'une telle résolution,
- la présentation dans une classe de séquences d'enseignement sur un thème donné (cfr. les chapitres 12, 13 et 14, ...) ; l'objectif était de mettre au point quelques exemples-types de construction de cours au départ de situations-problèmes,
- l'évaluation d'un test portant sur la résolution d'un problème (cfr. dans la suite les chapitres 17, 18, ...) ; l'objectif était de relever et comparer quelques caractéristiques simples présentes dans les copies d'élèves à l'occasion d'une telle activité,
- la réalisation d'un travail de fin d'études par un élève sous forme d'un document multimédia (cfr. le chapitre 20) ; l'objectif était d'étudier une solution alternative aux problèmes de rédaction des raisonnements mathématiques.

Ces expériences portent donc essentiellement sur les comportements des **élèves** dans diverses situations bien spécifiées de résolution de problèmes.

Mais si l'élève est au centre du processus d'apprentissage, il n'en est pas pour autant le seul acteur ! Il nous semble en effet important de ne pas négliger ici les problèmes que rencontrent les enseignants, dans leur pratique quotidienne, avec l'intégration des activités de résolution de problèmes dans leur cours, ce que nous avons appelé ailleurs (cfr. le chapitre 11) la **problématisation du cours de mathématiques**.

15.2. Pourquoi envisager une formation à la problématisation ?

La préparation des séquences d'enseignement consacrées à l'intégrale (chapitre 12), à la multiplication des matrices (chapitre 13) et aux probabilités (chapitre 14) a été une première occasion de confronter et d'adapter nos idées aux pratiques d'enseignement d'un petit groupe de professeurs. Les difficultés relevées à cette occasion nous ont incités à reprendre sous une autre forme, plus ouverte, cette question de la formation des enseignants à la problématisation de leur cours. Cette question était d'autant plus présente que la rencontre et le dialogue avec les enseignants sur le terrain permettaient de vérifier que beaucoup d'entre eux étaient mal préparés à la problématisation d'un cours de mathématiques. Une des raisons — parmi d'autres — de cet état de choses est que la construction inductive des savoirs, tout particulièrement en mathématiques, est rarement pratiquée dans l'enseignement supérieur.

Si la formation initiale est donc peu orientée vers un enseignement par situations-problèmes, c'est par la formation continue qu'il faut espérer faire évoluer la pratique des enseignants.

Comme dans le cas des séquences d'enseignement, nous avons donc essayé de mettre au point des **modules-types** de formation continue, qui intègrent les résultats essentiels de notre recherche, et les proposent sous une forme ouverte à la pratique et à la critique des enseignants. Ces documents doivent à notre sens être considérés comme des **outils pédagogiques** au sens donné à cette expression par le décret relatif aux missions de l'école, [1](article 28).

15.3. Quelques caractéristiques des modules de formation

Les modules proposés se rapportent à une **partie significative** du cours. Les matières y sont réparties en **sections** dans lesquelles on retrouve en général quatre types d'activités :

- des **questions** : elles servent d'introduction au thème principal de la section, l'aspect procédural y est souvent prépondérant,
- des **synthèses** : elles développent et mettent en valeur la transition entre le stade procédural et le stade structural dans le thème en question,
- des **exercices** : ils permettent de vérifier que les étapes de compréhension élémentaire du thème sont franchies,
- des **problèmes** : ils sont d'un niveau de difficulté plus significatif, et sous-entendent souvent une bonne maîtrise conceptuelle du thème étudié.

L'ordre des activités qui semble ainsi induit ne veut pas être contraignant : une synthèse peut très bien être fractionnée en différentes parties, qui sont chacune proposée au moment opportun, par exemple après un exercice ou un problème approprié. Dans le même ordre d'idées, la collection d'exercices et de problèmes n'a évidemment rien d'exhaustif, et des références sont explicitement fournies pour étoffer la liste proposée dans le cours de la formation.

La forme du document et la présentation qui en est faite dans le courant de la formation, essaient de laisser — autant que faire se peut — suffisamment de liberté à l'enseignant dans son projet de construction du cours, tout en lui fournissant un cadre de référence solide pour lui permettre de tenter des expériences constructives.

L'animation des séances de formation est organisée autour de la hiérarchie des compétences mises en jeu dans la problématisation d'un cours, et sur les trois points de vue caractéristiques — mathématique, didactique et psychologique — qui en relèvent (cfr. les chapitres 6, 7 et 8).

15.4. Un exemple détaillé

Diverses expériences d'animation de formations continues pendant cette année scolaire 1998-1999 ont fourni l'occasion d'expérimenter ce type de module auprès des enseignants.

Plus précisément, un module de formation, intitulé « Géométrie écrite et algèbre visuelle », et concernant le nouveau programme d'algèbre et géométrie en cinquième transition (6 et 4 périodes/semaine) a été élaboré au départ des résultats d'une recherche antérieure (L'algèbre linéaire au troisième degré du secondaire, [111], [112]).

La formation a comporté deux parties, la première a été consacrée à l'appropriation du vocabulaire et des résultats de base du calcul vectoriel : opérations fondamentales, équations des objets linéaires de l'espace, produit scalaire ; la seconde partie s'est intéressée à la représentation matricielle et aux transformations du plan et de l'espace.

Une journée de formation a été consacrée à chacune de ces parties. La première partie a été présentée

- dans le cadre des formations ICAFOC : le 15 octobre 1998 à Libramont et le 22 octobre 1998 à Mons,
- dans le cadre des séminaires du Centre de Didactique des Sciences de l'Université de Mons-Hainaut : le 2 décembre 1998 à Mons.

La seconde partie a été présentée

- dans le cadre des formations ICAFOC : le 4 mars 1999 à Libramont et le 11 mars 1999 à Mons,
- dans le cadre des séminaires du Centre de Didactique des Sciences de l'Université de Mons-Hainaut : le 24 février 1999 à Mons.

Chacune de ces séances a été suivie — en moyenne — par trente à quarante enseignants.

On trouvera dans le chapitre suivant la reproduction intégrale ([1]) des notes distribuées à cette occasion. A titre indicatif, en voici le sommaire.

([1]) Mais nous n'avons pas jugé utile de reproduire aussi les recueils de dessins et d'illustrations qui accompagnaient ces notes, et suggéraient les solutions de beaucoup d'exercices et problèmes.

1. Les deux opérations fondamentales. Il s'agit de la découverte et de la mise au point des règles de base du calcul vectoriel dans l'espace.

2. Les droites et les plans. Ce chapitre signale quelques raccourcis vers les équations de plans et droites, sans négliger pour autant l'approche classique. Une **annexe** est consacrée à la preuve de ce que les axiomes de la géométrie synthétique, dégagés dans le cours de quatrième, sont équivalents à ceux du calcul vectoriel.

3. Une question d'équilibre. On propose une approche critique de la notion de centre de masse en physique (ou barycentre, en mathématique), et on en étudie quelques propriétés peu banales.

4. Des angles au produit scalaire. On aborde le produit scalaire entre autres au départ d'une question de variation d'une fonction d'angle dans un tétraèdre.

5. Le produit scalaire ... dans tous ses états. Il s'agit de détailler quelques applications, à la fois fondamentales et naturelles, du produit scalaire en géométrie.

6. Un peu de programmation linéaire. Quelques problèmes issus des sciences économiques sont modélisés géométriquement, et laissent se profiler à l'horizon la méthode du simplexe.

7. Les statistiques et le calcul des distances minimales. On explicite les relations entre un problème très classique de plus courte distance entre un point et un plan, et la célèbre méthode des moindres carrés utilisées pour déterminer une droite de régression linéaire en statistique.

8. La représentation matricielle. L'étude détaillée d'un problème écologique (l'évolution d'une population d'oiseaux ; cfr. aussi le chapitre 13) permet d'introduire la représentation matricielle des transformations linéaires du plan, et de mettre en évidence la remarquable efficacité de ce type de modélisation.

9. Le début d'un herbier. Cette section étudie quelques transformations linéaires du plan et de l'espace (symétries, réflexions, projections, translations, homothéties, rotations, ...) ainsi que leur composition et décomposition, tant du point de vue géométrique qu'algébrique.

10. La marche-arrière. Il s'agit d'explorer la construction de la transformation inverse d'une transformation linéaire ainsi que son interprétation en termes de matrices ou de systèmes d'équations linéaires. Quelques applications économiques sont discutées (modèle de Leontief, ...).

11. Un retour aux sources. Un certain nombres de questions étaient restées posées à la fin de la section 8. Elles sont reprises et résolues ici sous forme géométrique, à l'aide du logiciel TRANSAFF du C.D.S. (cfr. les références dans les notes). Un problème d'ethnologie achève de montrer la versatilité de la modélisation matricielle.

Bibliographie

L'ensemble du module renferme 14 questions, 26 exercices et 21 problèmes, soit un total de 61 énoncés.

15.5. Parmi les premières réactions ...

Pendant chacune des présentations du module, quelques réactions convergentes ont été relevées auprès des enseignants présents ([2])

- Un intérêt marqué pour certaines situations-problèmes intéressantes et riches : la problématique des barycentres (questions 5, 6, 7, problème 6), la variation de fonctions angulaires dans un tétraèdre régulier (question 11), les perpendiculaires communes aux arètes non coplanaires d'un octaèdre régulier (problème 7), l'interprétation spatiale de la programmation linéaire (problèmes 10 et 11), l'évolution d'une population d'oiseaux (problème 13, exercices 12, 13 et 14, première partie de la section 11), le miroir tournant et la composée de réflexions (question 12), les rotations du cube et les matrices élémentaires (question 13), les problèmes économiques (analyse input-output, ...) (question 14, exercice 26, problèmes 19 et 20), les lois de mariage chez les indiens Natchez et l'interprétation correspondante de la matrice inverse (problème 21), etc.
- Une certaine surprise quant à la manière par laquelle une démarche inductive et critique décloisonne les matières, bouleverse leur ordre (soi-disant) naturel : une construction immédiate de l'équation cartésienne d'un plan (question 3), la construction du produit scalaire à partir de la forme généralisée du théorème de Pythagore (synthèse de la section 4) et la construction dans le même esprit de mesures d'aire et de volume (problème 9), la démonstration vectorielle du critère de perpendicularité (cfr. section 5), la démonstration du théorème des trois perpendiculaires (exercice 9), l'interprétation complètement géométrique de la régression linéaire sur trois points (cfr. la synthèse de la section 7), la lecture de la multiplication matricielle (cfr. la synthèse de la section 8), la démonstration vectorielle des formules de Cramer (cfr. la synthèse de la section 10), l'intérêt des seules solutions positives dans les systèmes d'équations linéaires issus de problèmes économiques (problèmes 19 et 20), la recherche expérimentale et la visualisation de droites propres à l'aide du logiciel TRANSAFF (section 11), etc.

([2]) La numérotation des sections, questions, exercices et problèmes dans le compte-rendu de ces réactions est celle des notes distribuées aux enseignants.

- Une sensibilité aux exercices de « drill intelligent », c'est-à-dire à des exercices de fixation, à première vue assez répétitifs, mais qui par leur contextualisation ([3]) sont la source de questions nouvelles, enrichissantes, de plus en plus conceptuelles : les coordonnées des sommets des premiers polyèdres réguliers (exercices 1 et 2, problème 1), les plans remarquables associés à ces polyèdres (exercices 5 et 7, problème 3), les perpendiculaires communes aux arètes non coplanaires d'un octaèdre régulier (problème 7), la plupart des exercices de représentation matricielle de transformations linéaires du plan ou de l'espace (exercices 16 à 25), etc.

D'autres réactions ne pourront se manifester qu'après que des enseignants intéressés auront expérimenté dans leurs classes certaines parties du module.

Il reste enfin à signaler que le problème 7 a fait l'objet de deux expériences — dans des contextes différents — de mise au point d'une grille d'évaluation. Ces expériences sont relatées dans le chapitre 18.

Références

[1], [111], [112].

([3]) Par exemple : le fait qu'ils concernent des figures ayant de nombreuses symétries.

Chapitre 16

Un module de formation : Géométrie Ecrite et Algèbre Visuelle

16.1 Les deux opérations fondamentales . . . 483
16.1.1 Les coordonnées d'un point . . . 484
16.1.2 Quelques exercices et problèmes . . . 485
16.1.3 Les premières questions . . . 486
16.1.4 Une synthèse . . . 487
16.1.5 Quelques exercices et problèmes . . . 490
16.2 Les droites et les plans . . . 491
16.2.1 Les premières questions . . . 492
16.2.2 Une synthèse . . . 494
16.2.3 Quelques exercices et problèmes . . . 497
16.2.4 Annexe . . . 499
16.3 Une question d'équilibre . . . 501
16.3.1 Les premières questions . . . 502
16.3.2 Une synthèse . . . 504
16.3.3 Quelques exercices et problèmes . . . 506
16.4 Des angles au produit scalaire . . . 507
16.4.1 Une première question . . . 508
16.4.2 Une synthèse . . . 509
16.4.3 Quelques exercices et problèmes . . . 512
16.5 Le produit scalaire ... dans tous ses états . . . 513

16.5.1 Le critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan 514
16.5.2 Quelques exercices et problèmes 516
16.6 Un peu de programmation linéaire 518
16.7 Les statistiques et le calcul des distances minimales 519
16.7.1 Un problème classique 520
16.7.2 Un peu plus qu'une synthèse 521
16.7.3 Le cas d'un nuage de points 526
16.8 La représentation matricielle 527
16.8.1 L'évolution d'une population d'oiseaux 528
16.8.2 Une synthèse 536
16.9 Le début d'un herbier 538
16.9.1 Le miroir tournant 539
16.9.2 Quelques exercices . . . tout plats 542
16.9.3 La conquête de l'espace 544
16.9.4 Ces exercices sont-ils vraiment neufs ? 547
16.9.5 Quelques problèmes 548
16.9.6 Une synthèse 549
16.10 La marche-arrière 551
16.10.1 Une combine économique 552
16.10.2 Une synthèse 554
16.10.3 Un exercice et deux problèmes . . . économiques 557
16.11 Un retour aux sources 563
16.11.1 Retour au problème des oiseaux 564
16.11.2 Les lois de mariage chez les indiens Natchez 568

Introduction du module

> « *L'algèbre est de la géométrie écrite, et la géométrie est de l'algèbre visuelle.* »
>
> Sophie Germain (1776-1831)

> « *Je ne suis pas encore content de l'Algèbre, en ce qu'elle ne donne ny les plus courtes voyes, ni les plus belles constructions de Géométrie. C'est pourquoy lorsqu'il s'agit de cela, je croy qu'il nous faut encore une autre analyse proprement géométrique ou linéaire, qui nous exprime directement situm, comme l'Algèbre exprime magnitudinem. Et je croy d'en avoir le moyen, et qu'on pourroit représenter des figures . . . en caractères, comme l'algèbre représente les nombres ou grandeurs.* »
>
> G. W. Leibniz, dans une lettre à C. Huygens, datée du 8 septembre 1679.

Ce qui caractérise le thème « Géométrie/Algèbre » du nouveau programme de 5e, c'est la **diversité des matières** et donc des **points de vue** : géométrie synthétique, analytique et vectorielle, géométrie des transformations, représentation matricielle, . . .

Le (long) module qui suit propose à l'attention des enseignants des pistes de travail (aperçus théoriques, exercices et problèmes, références bibliographiques, . . .) qui permettent d'unifier ces points de vue si divers. Grosso modo, il concerne l'ensemble des matières du thème « Géométrie/Algèbre » du cours à 6 ou 4 périodes/semaine.

Au cœur de ce projet, il y a la volonté de construire une **géométrie effective**, c'est-à-dire de rendre les objets géométriques élémentaires (point, droite, plan, longueur, angle, aire, volume, . . .) **accessibles au calcul**, suivant le souhait de Leibniz.

On fait ici le choix de partir de la représentation d'un point par le triplet de ses coordonnées. Cela permet de faire référence à ce qui a été acquis dès le premier degré en termes de géométrie dans un quadrillage. On ne se limitera évidemment pas à ce seul aspect, comme la suite le fera voir.

Mais il ne suffit pas de rendre effectifs ces *objets* élémentaires du plan ou de l'espace pour savoir résoudre toutes les questions de géométrie. Il reste à intégrer les *relations* entre ces objets, ou plus précisément les transformations du plan ou de l'espace qui respectent certaines propriétés de ces objets. C'est ce que réalise la **représentation matricielle** ([1]). Et dans un tel projet, la représentation matricielle occupe une place privilégiée pour au moins deux raisons :

([1]) Le terme « représentation matricielle » a été préféré à la terminologie plus courante de « calcul

- elle est en effet une source inépuisable de **relations** profondes entre algèbre et géométrie, entre figures et calculs,
- mais elle est aussi — et peut-être surtout — une clé de la **modélisation linéaire** d'un grand nombre de **phénomènes complexes**, ce qui explique son importance dans les programmes d'études supérieures à dominante scientifique.

Pour l'élève, une première étude suffisamment ouverte et variée de cette méthode de modélisation offre ainsi l'occasion de développer quelques compétences caractéristiques de l'activité mathématique au carrefour de la géométrie, de l'algèbre et même de l'analyse.

Mais il n'est heureusement pas nécessaire d'attendre que la représentation matricielle soit disponible pour résoudre des problèmes concrets : comme on va s'en rendre compte dès le début du module, des situations variées révèlent vite l'efficacité d'une géométrie effective.

*

* *

Ce module est inspiré entre autres des résultats obtenus dans le cadre d'un contrat de recherche portant sur la géométrie de l'algèbre linéaire à la fin du secondaire, réalisé à l'Université de Mons-Hainaut pendant l'année académique 1996-97 ([2]).

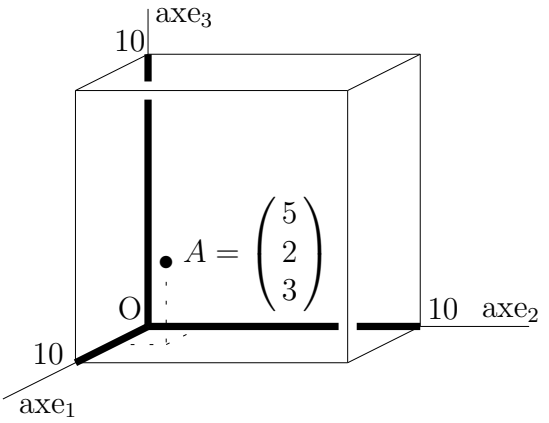
matriciel », afin de souligner qu'une matrice est un outil de **traduction**, de **changement** de cadre (algèbre/géométrie) et de registre (symbolique/graphique), et par là de **modélisation**. En ce sens, la représentation matricielle est au cœur de ce couple géométrie écrite/algèbre visuelle, dont le nom actuel est : l'algèbre linéaire.

([2]) Les résultats détaillés de ce travail sont en cours de publication ... Cfr. la bibliographie en fin de ce module.

16.1. Les deux opérations fondamentales

16.1.1 Les coordonnées d'un point

Les énoncés des questions 4, 5, 6 et 7 et de l'exercice 16 ci-après font référence à une figure élémentaire appelée « cube standard » :



Les coordonnées d'un point dans le système d'axes orthonormés correspondants sont souvent notées en colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

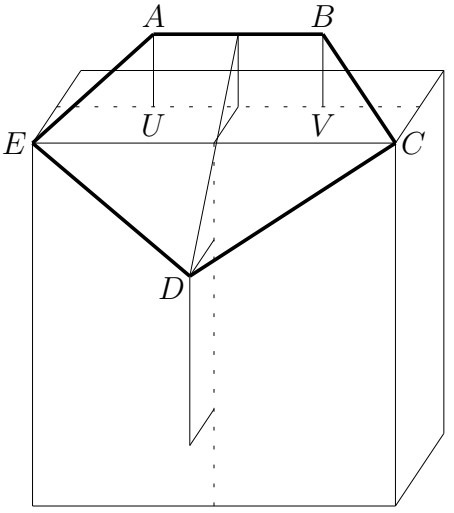
16.1.2 Quelques exercices et problèmes

Exercice 14 *Déterminer les coordonnées de 4 points pour qu'ils soient les sommets d'un tétraèdre régulier.*

Exercice 15 *Déterminer les coordonnées de 6 points pour qu'ils soient les sommets d'un octaèdre régulier.*

Problème 10 *Déterminer les coordonnées de 20 points pour qu'ils soient les sommets d'un dodécaèdre régulier.*

Indications. *Utiliser la méthode des « languettes d'Euclide » : on élève au milieu de chaque face d'un cube une languette rectangulaire $UVBA$ — dont les dimensions sont à déterminer — de telle sorte que le pentagone $ABCDE$ soit régulier . . .*

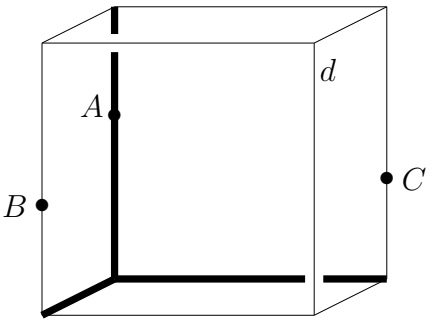


16.1.3 Les premières questions

Question 4 *Dans le cube standard ci-dessous, déterminer les coordonnées du point d'intersection X du plan ABC avec l'arête verticale d. On donne*

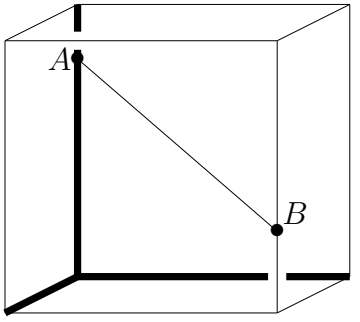
$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Question 5 *Dans le cube standard ci-dessous, déterminer les coordonnées du point X situé au $\frac{3}{4}$ du segment AB. On donne*

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$



16.1.4 Une synthèse

On généralise à l'espace ce qui a déjà été étudié dans le cours de géométrie (plane) de quatrième.

16.1.4.1 Définitions et propriétés des opérations sur les points de l'espace

On identifie un point de l'espace à un triplet de nombres : ses coordonnées par rapport à un système d'axes orthonormés d'origine O.

L'addition des coordonnées de deux points définit l'addition de ces points :

$$\text{si } A := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ et } B := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ alors } A+B := \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$$

La multiplication des coordonnées d'un point par un nombre réel définit la multiplication de ce point par ce nombre :

$$\text{si } A := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ alors } kA := \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$$

Les deux opérations ainsi définies sur l'ensemble des points de l'espace vérifient les propriétés suivantes :

- l'associativité de l'addition,
- l'existence d'un neutre : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ associé aux coordonnées de l'origine O,
- l'existence pour tout point $A := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ du point opposé $-A := \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$,
- la commutativité de l'addition,
- l'associativité de la multiplication par un réel,
- la distributivité de la multiplication par un réel sur l'addition,
- la distributivité de l'addition sur la multiplication par un réel,
- l'égalité de la multiplication par 1 avec l'identité.

16.1.4.2 Définitions et propriétés des opérations sur les translations de l'espace

Si A et B sont deux points de l'espace, il existe une et une seule translation τ qui amène A sur B ; on écrit souvent $\overrightarrow{AB}$ au lieu de τ .

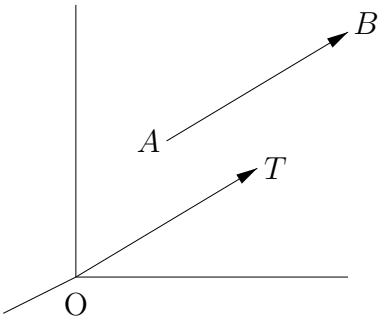
Dès qu'un système d'axes d'origine O est fixé, une translation — s'appliquant à tous les points de l'espace — est entièrement déterminée par son effet sur le point O. On a

$$\begin{cases} \tau(O) = T \\ \tau(A) = B \end{cases} \iff B - A = T - O = T$$

On écrit alors

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OT}$$

On dit encore que les couples (A, B) et (O, T) sont équipollents.



Lorsqu'on associe ainsi un point à une translation, on observe

- que la composée de deux translations correspond à la somme des deux points représentatifs,
- que le produit d'une translation par un nombre correspond au produit du point représentatif par ce nombre.

En particulier, la relation de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

correspond alors à l'identité

$$(B - A) + (C - B) = C - A$$

Les deux opérations ainsi définies sur l'ensemble des translations de l'espace jouissent des mêmes propriétés que celles des opérations définies sur l'ensemble des points de l'espace.

Remarque.

Le calcul géométrique en termes de points ou en termes de translation constitue les deux facettes d'une même réalité. Mais le calcul en termes de points dépend du choix préalable d'un système d'axes alors que le calcul en termes de translations en est indépendant.

Suivant le contexte, l'un de ces points de vue présentera un avantage sur l'autre ...

16.1.4.3 La notion de vecteur

Les définitions et règles de calcul dégagées pour l'ensemble des points ou des translations de l'espace s'appliquent aussi à d'autres objets mathématiques.

On appelle **vecteur** n'importe quel objet mathématique porteur d'un calcul linéaire, c'est-à-dire d'une addition et d'une multiplication par un réel, ces opérations respectant les propriétés décrites plus haut, et on donne le nom d'espace vectoriel à tout ensemble structuré de cette manière.

On appelle **combinaison linéaire** d'un ensemble fini $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de vecteurs n'importe quelle expression du type

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$$

où les coefficients a_i sont des nombres réels.

Dans l'espace usuel, quel que soit le point X et dès que A, B, C et D sont 4 points non coplanaires, le vecteur $\overrightarrow{AX}$ s'écrit d'une et d'une seule manière comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Les nombres k, ℓ et m tels que

$$\overrightarrow{AX} = k\overrightarrow{AB} + \ell\overrightarrow{AC} + m\overrightarrow{AD}$$

s'appellent les **composantes** du vecteur $\overrightarrow{AX}$ dans le **repère** ([3]) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$

Cfr. aussi l'annexe à la fin de la section suivante.

([3]) Ou la **base** ...

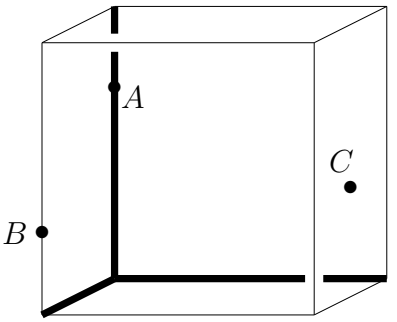
16.1.5 Quelques exercices et problèmes

Exercice 16

Dans le cube standard ci-dessous, déterminer les coordonnées des points d'intersection des arêtes du cube avec le plan ABC. On donne

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Exercice 17 *On considère deux parallélogrammes quelconques $ABCD$ et $EFGH$ dans l'espace. Caractériser la figure formée par les milieux des segments AE, BF, CG et DH.*

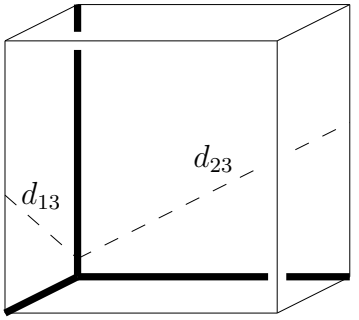
Problème 11 *On considère un tétraèdre quelconque $ABCD$. On note I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[DA]$, $[BD]$ et $[AC]$. Démontrer que les segments $[IJ]$, $[KL]$ et $[MN]$ sont concourants en leur milieu O. Ecrire $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OK}$.*

16.2. Les droites et les plans

16.2.1 Les premières questions

Question 6 *On considère un plan dont on connaît les traces d_{13} et d_{23} sur les plans de coordonnées verticaux du cube standard :*

$$\begin{array}{lcl} d_{13} & : & x_3 = 0.3x_1 + 1 \\ d_{23} & : & x_3 = 0.5x_2 + 1 \end{array}$$



Calculer la troisième coordonnée (la hauteur) d'un point quelconque de ce plan en fonction de ses deux autres coordonnées.

Question 7 *Par rapport au cube standard ci-dessous, la direction des rayons solaires est celle de la droite ST, où*

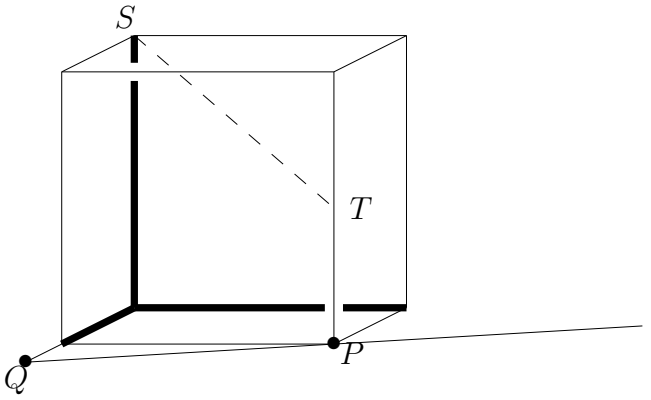
$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Déterminer les coordonnées de ***tous*** *les points de l'espace dont l'ombre est*

- *un point donné, par exemple le point P,*
- *une droite donnée, par exemple la droite PQ.*

On donne

$$P = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$


S
T
P
Q

16.2.2 Une synthèse

16.2.2.1 La description effective d'une droite

Quel que soit le système d'axes choisis (en particulier son origine), une **équation vectorielle** d'une droite d déterminée par deux points P et Q s'écrit :

$$X \in d \iff \text{il existe un et un seul nombre } k \text{ tel que } X = P + k(Q - P)$$

ou

$$X \in d \iff \text{il existe un et un seul nombre } k \text{ tel que } \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{PQ}$$

ou encore

$$X \in d \iff \text{il existe un et un seul nombre } k \text{ tel que } \overrightarrow{PX} = k\overrightarrow{PQ}$$

Le nombre réel k est appelé l'abscisse du point X dans le repère (P, Q) — ou la composante du vecteur $\overrightarrow{PX}$ dans le repère $\overrightarrow{PQ}$ — de la droite en question. On appelle aussi $\overrightarrow{PQ}$ le vecteur directeur de cette droite.

En fixant un système de coordonnées, on déduit d'une équation vectorielle des **équations paramétriques** de la droite considérée. Si $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$, en posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, on obtient

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + k(q_1 - p_1) \\ x_2 = p_2 + k(q_2 - p_2) \\ x_3 = p_3 + k(q_3 - p_3) \end{cases}$$

En éliminant k dans ces équations, on obtient des **équations cartésiennes** de la droite :

$$\frac{x_1 - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{x_2 - p_2}{q_2 - p_2} = \frac{x_3 - p_3}{q_3 - p_3}$$

pourvu évidemment qu'aucun des dénominateurs ne soit nul ! Ces équations s'écrivent plus généralement sous la forme

$$\begin{cases} (q_2 - p_2)(x_1 - p_1) = (q_1 - p_1)(x_2 - p_2) \\ (q_3 - p_3)(x_1 - p_1) = (q_1 - p_1)(x_3 - p_3) \end{cases}$$

16.2.2.2 La description effective d'un plan

Pareillement, une **équation vectorielle** d'un plan π déterminé par trois points (non alignés) P, Q et R s'écrit :

$$X \in \pi \iff \text{il existe deux, et seulement deux, nombres } k \text{ et } \ell \text{ tels que } X = P + k(Q-P) + \ell(R-P)$$

ou

$$X \in \pi \iff \text{il existe deux, et seulement deux, nombres } k \text{ et } \ell \text{ tels que } \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{PQ} + \ell\overrightarrow{PR}$$

ou encore

$$X \in \pi \iff \text{il existe deux, et seulement deux, nombres } k \text{ et } \ell \text{ tels que } \overrightarrow{PX} = k\overrightarrow{PQ} + \ell\overrightarrow{PR}$$

Les nombres k et ℓ sont appelés l'abscisse et l'ordonnée ou, plus simplement, les coordonnées ([4]) du point X dans le repère (P, Q, R) — ou les composantes du vecteur $\overrightarrow{PX}$ dans le repère $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$ — du plan en question. On appelle aussi $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ les vecteurs directeurs de ce plan.

En fixant un système de coordonnées, on déduit d'une équation vectorielle des **équations paramétriques** du plan considéré. Si $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$, en posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, on obtient ainsi

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + k(q_1 - p_1) + \ell(r_1 - p_1) \\ x_2 = p_2 + k(q_2 - p_2) + \ell(r_2 - p_2) \\ x_3 = p_3 + k(q_3 - p_3) + \ell(r_3 - p_3) \end{cases}$$

En éliminant k et ℓ dans ces équations paramétriques, on obtient une **équation cartésienne** du plan, dont la forme générale s'écrit :

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

où a, b, c et d sont des nombres appropriés.

([4]) Le contexte permet de faire la distinction entre les deux occurrences du mot « coordonnées » dans cette situation. On pourrait qualifier les nombres k et ℓ de *coordonnées locales* du point X dans le plan considéré.

Remarque.

Il peut être intéressant de faire observer qu'à partir des équations paramétriques du plan

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + ku_1 + \ell v_1 \\ x_2 = p_2 + ku_2 + \ell v_2 \\ x_3 = p_3 + ku_3 + \ell v_3 \end{cases}$$

dont $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ sont les deux vecteurs directeurs, une équation cartésienne de ce plan s'écrit sous la forme remarquable :

$$(u_2v_3 - u_3v_2)(x_1 - p_1) + (u_3v_1 - u_1v_3)(x_2 - p_2) + (u_1v_2 - u_2v_1)(x_3 - p_3) = 0$$

Cfr. à ce sujet l'exercice 23 et le problème 18 plus loin.

16.2.3 Quelques exercices et problèmes

Exercice 18 *Déterminer les équations des plans diagonaux et des droites diagonales (principales) du cube standard.*

Exercice 19 *Déterminer les équations du plan PQR et de ses intersections avec les 6 faces (éventuellement prolongées) du cube standard, si*

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Pour une figure, cfr. l'exercice 16.

Comment le seul examen des équations de ces droites et de ce plan permet-il de savoir que ces droites sont bien situées dans le plan donné ?

Exercice 20 *Ecrire les équations des arêtes, et des faces, d'un tétraèdre régulier, puis d'un octaèdre régulier. On se reportera aux résultats des exercices 14, 15.*

Problème 12 *Ecrire les équations des arêtes, resp. des faces, d'un dodécaèdre régulier. On se reportera très utilement (!) aux résultats du problème 10.*

Problème 13 *Ecrire l'équation d'une droite passant par l'origine et formant un angle de 45° avec la verticale.*

Quelle est la forme générale de n'importe quelle droite passant par l'origine et formant un angle de 45° avec la verticale ?

Quel est le lieu géométrique décrit par cet ensemble de droites ? Ecrire une relation vérifiée par les coordonnées de tous les points de ce lieu.

Traiter les mêmes questions dans le cas d'un angle de 30° , resp. 60° avec la verticale.

Problème 14 *La confidentialité des communications téléphoniques est une composante importante des libertés individuelles [5]. Mais les écoutes téléphoniques peuvent se révéler nécessaires, par exemple pour la répression d'activités criminelles.*

Le système suivant se fonde sur la nécessité de la coopération de trois services (supposés compétents) pour obtenir un code d'accès à de telles écoutes.

[5] Ce problème est inspiré de : T. Beth — La confidentialité des communications ; Pour La Science 220 (février 1996), 52-57.

Ce code d'accès (secret) est composé de trois nombres entiers dans un ordre donné. Ces trois nombres sont considérés comme les coordonnées d'un point dans l'espace.

Ce code peut alors être ouvert au départ de deux renseignements :

- *d'abord, une « droite publique », connue de tous, et contenant* a priori *le point secret en question (même « publique », cette droite reste sûre !)*
- *ensuite, chacun des trois services responsables de l'accès à l'écoute reçoit une clé partielle sous la forme des coordonnées de seulement deux points d'un plan ; les trois clés partielles ne sont compatibles que si elles déterminent un seul et même plan et dans ce cas l'intersection de ce plan avec la droite publique fournit alors le code d'accès recherché.*

On considère les données suivantes :

- *la droite « publique », définie par les deux points*

$$P = \begin{pmatrix} 111026 \\ 30910 \\ 951105 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 929980 \\ 1729898 \\ 830551 \end{pmatrix}$$

- *la clé partielle du premier service responsable de l'accès à l'écoute, définie par les deux points*

$$\begin{pmatrix} 530215 \\ 110626 \\ 820323 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 260915 \\ 60506 \\ 230521 \end{pmatrix}$$

- *la clé partielle du deuxième service responsable de l'accès à l'écoute, définie par les deux points*

$$\begin{pmatrix} 530215 \\ 110626 \\ 820323 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1029967 \\ 3289978 \\ 2281947 \end{pmatrix}$$

- *la clé partielle du troisième service responsable de l'accès à l'écoute, définie par les deux points*

$$\begin{pmatrix} 1279843 \\ 4879654 \\ 3012759 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 260915 \\ 60506 \\ 230521 \end{pmatrix}$$

Ces données permettent-elles d'accéder à un code d'accès (secret) ? Et si oui, quel est-il ?

16.2.4 Annexe

Les axiomes de la géométrie synthétique permettent de caractériser les droites et les plans de l'espace.

Les équations vectorielles de la droite et du plan sont en effet des formes effectives des axiomes :

- par deux points de l'espace passe une et une seule droite (axiome de droite),
- par trois points non alignés de l'espace passe un et un seul plan, et toute droite passant par deux points d'un plan est entièrement incluse à ce plan (axiome de plan),

Les deux axiomes « de dimension » :

- il existe quatre points non coplanaires,
- deux plans qui ont un point commun ont une droite commune passant par ce point,

peuvent alors être traduits dans ce qu'on appellera ultérieurement la définition ou la caractérisation d'une **base** d'un espace vectoriel (de dimension trois).

La traduction du premier axiome de dimension

On montre d'abord que l'axiome « il existe quatre points non coplanaires » se traduit de la manière suivante :

si A, B, C et D sont quatre points non coplanaires, alors :

$$k\overrightarrow{AB} + \ell\overrightarrow{AC} + m\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0} \iff k = \ell = m = 0$$

L'implication « $\Leftarrow$ » est triviale.

Quant à « $\Rightarrow$ », on raisonne par l'absurde : si un des coefficients k, ℓ ou m est $\neq 0$ — le coefficient k par exemple — alors on a

$$\overrightarrow{AB} = -\frac{l}{k}\overrightarrow{AC} - \frac{m}{k}\overrightarrow{AD}$$

Mais alors le point B est dans le plan ACD : contradiction !

Cette propriété vectorielle s'énonce sous la forme : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont **linéairement indépendants** (ou libres).

La traduction du deuxième axiome de dimension

On montre ensuite que l'axiome « deux plans qui ont un point commun ont une droite commune passant par ce point » se traduit de la manière suivante :

si A, B, C et D sont quatre points non coplanaires et si X est un point quelconque, alors il existe trois — et seulement trois — nombres k, ℓ et m tels que :

$$\overrightarrow{AX} = k\overrightarrow{AB} + \ell\overrightarrow{AC} + m\overrightarrow{AD}$$

Pour le montrer, on considère les plans ([6]) ABC et ADX. Le point A étant commun aux deux plans, ils ont une droite commune, donc un vecteur commun, noté $\overrightarrow{AU}$. Il existe alors des nombres α, β, γ et δ tels que $\overrightarrow{AU} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} = \gamma\overrightarrow{AD} + \delta\overrightarrow{AX}$

d'où

$$\delta\overrightarrow{AX} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} - \gamma\overrightarrow{AD}$$

Or, $\delta \neq 0$ puisque les points A, B, C et D sont non coplanaires. On achève alors en posant $k = \frac{\alpha}{\delta}$, $\ell = \frac{\beta}{\delta}$ et $m = -\frac{\gamma}{\delta}$.

Cette propriété vectorielle s'énonce sous la forme : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment une **partie génératrice** des vecteurs de l'espace.

Les deux propriétés vectorielles de l'espace ainsi déduites des axiomes de dimension se résument dans l'expression : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment une **base** de l'espace vectoriel « usuel », qui est ainsi — et heureusement ! — de dimension 3.

([6]) Si le point X est aligné avec les points A et D, ces trois points ne déterminent pas un plan, mais le résultat annoncé est alors immédiat. On suppose donc dans la suite que les points A, D et X ne sont pas alignés.

16.3. Une question d'équilibre

16.3.1 Les premières questions

En physique, on appelle **centre d'inertie** d'un solide le point unique de ce solide qui est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme lorsque le solide se déplace sans frottement sur un plan horizontal — ou suivant un état de mouvement équivalent — quelles que soient les conditions initiales de ce mouvement.

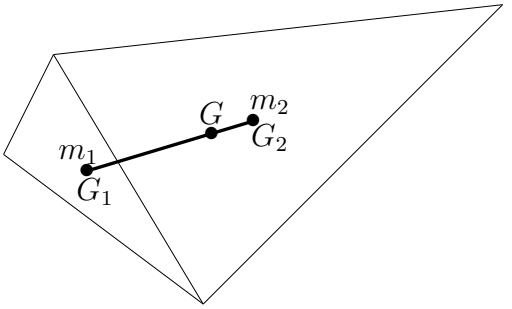
On calcule la position du centre d'inertie d'une plaque polygonale homogène à partir des deux principes suivants.

- Le **principe des centres élémentaires** : le centre d'inertie d'une plaque triangulaire homogène est le point d'intersection des médianes de ce triangle.
- Le **principe de juxtaposition** : le centre d'inertie d'une plaque homogène définie par juxtaposition de deux plaques de masses m_1 et m_2 et de centres d'inertie G_1 et G_2 est le point d'équilibre G du levier correspondant, caractérisé par la relation

$$\frac{|GG_1|}{|GG_2|} = \frac{m_2}{m_1}$$

ou

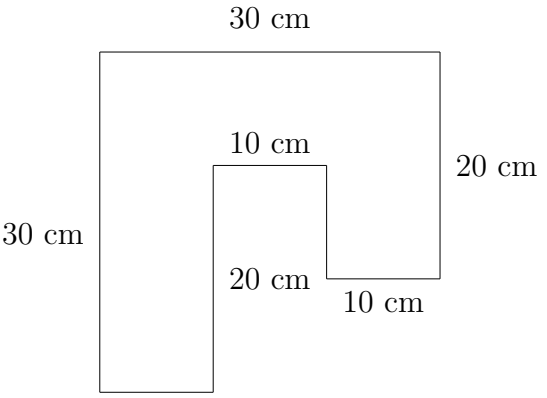
$$m_1\overrightarrow{GG_1} + m_2\overrightarrow{GG_2} = \overrightarrow{0}$$



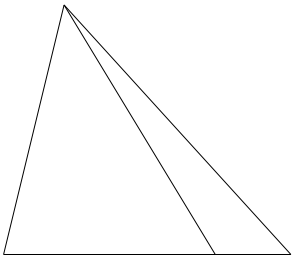
et affecté de la masse $m_1 + m_2$.

Question 8 *Démontrer à partir des deux principes précédents que le centre d'inertie d'une plaque rectangulaire homogène est le centre du rectangle.*

Question 9 *Calculer à partir des deux principes précédents la position du centre d'inertie de la plaque homogène représentée ci-contre, sachant que la masse y est proportionnelle à la mesure de l'aire.*



Question 10 *Les deux principes sont-ils cohérents ? Par exemple, le centre d'inertie de deux plaques triangulaires homogènes juxtaposées pour n'en plus former qu'une seule (toujours triangulaire) est-il bien le même suivant qu'on le calcule à partir du principe des centres élémentaires ou à partir du principe de juxtaposition ?*



16.3.2 Une synthèse

Cette synthèse étend les résultats obtenus ci-dessus aux corps solides homogènes et donc à l'espace !

16.3.2.1 La définition du barycentre

A un ensemble de couples $\{(A_i; m_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ formés chacun

- d'un point A_i de l'espace,
- et d'un nombre réel m_i qualifié de masse de ce point,

on associe — pourvu que $m := \sum_{i=1}^{n} m_i \neq 0$ — un (nouveau) point G défini par la condition vectorielle :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$$

Ce point G s'appelle le **barycentre** (7) des n points « massifs » $\{(A_i; m_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Ce point G est bien défini : il n'y en a qu'un seul qui vérifie cette relation ! Pour le voir, on suppose qu'il existe un autre point, noté G', tel que $\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{G'A_i} = \overrightarrow{0}$. On a alors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{0} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{G'A_i} - \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{GA_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overrightarrow{G'A_i} - \overrightarrow{GA_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{G'G} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right) \overrightarrow{G'G} \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{G'G} = \overrightarrow{0}$ puisque $\sum_{i=1}^{n} m_i \neq 0$, d'où $G = G'$.

(7) Lorsque les « masses » ou coefficients m_i sont tous égaux entre eux, on parle parfois d'isobarycentre. L'isobarycentre de trois points (non alignés), qui est le point d'intersection des médianes du triangle associé, a probablement été rencontré dans le cours de quatrième, ou même avant. Cfr. aussi le principe des centres élémentaires ci-dessus.

16.3.2.2 La construction du barycentre

Le barycentre de n points massifs est facilement construit par récurrence.

- Dans le cas de deux points massifs, le théorème de Thalès fait tout le travail !
- Le calcul du barycentre G de n points massifs $\{(A_i; m_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ peut toujours se réduire à celui de 2 points massifs. En effet, si on note A' le barycentre des $n-1$ premiers points massifs $\{(A_i; m_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{0} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{GA_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} m_i \overrightarrow{GA_i} + m_n \overrightarrow{GA_n} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} m_i \left(\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A_i} \right) + m_n \overrightarrow{GA_n} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-1} m_i \right) \overrightarrow{GA'} + \sum_{i=1}^{n-1} m_i \overrightarrow{A'A_i} + m_n \overrightarrow{GA_n} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-1} m_i \right) \overrightarrow{GA'} + m_n \overrightarrow{GA_n}
\end{aligned}$$

  puisque par définition de A' : $\sum_{i=1}^{n-1} m_i \overrightarrow{A'A_i} = \overrightarrow{0}$.
  Or, l'égalité $\left(\sum_{i=1}^{n-1} m_i\right) \overrightarrow{GA'} + m_n \overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$ ainsi obtenue signifie bien que G est le barycentre des **deux** points massifs $\left(A', \sum_{i=1}^{n-1} m_i \right)$ et (A_n, m_n).
  Ce résultat peut s'interpréter comme une traduction vectorielle du principe de juxtaposition.
- On construit ainsi par récurrence le barycentre d'un nombre quelconque de points massifs, en observant que l'ordre dans lequel on regroupe ces points n'a aucune influence sur le résultat final, grâce au résultat d'unicité obtenu plus haut !

16.3.3 Quelques exercices et problèmes

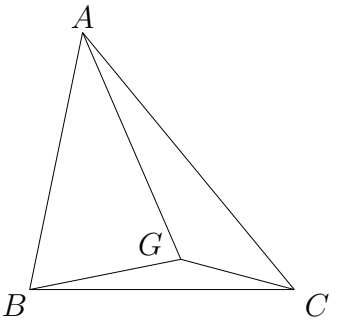
Question 11 *Démontrer que dans l'espace, le barycentre de trois points massifs (A,h), (B,k) et (C,ℓ) non alignés est toujours (et heureusement !) situé dans le plan ABC.*

Question 12 *Déterminer l'isobarycentre de quatre points non coplanaires.*

Question 13 *Un système d'axes étant fixé, calculer les coordonnées du barycentre G d'un système de n points massifs $\{(A_i;m_i)\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ en fonction des coordonnées des points A_i.*

Problème 15

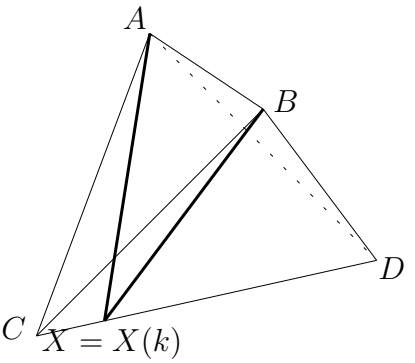
Démontrer que si G est le barycentre de trois points massifs (A,h), (B,k) et (C,ℓ) non alignés, alors la mesure des aires des triangles AGB, BGC, CGA est proportionnelle aux nombres ℓ, h et k.
N. B. : *il y a un énoncé correspondant — en termes de mesure de volumes — dans le cas de quatre points massifs non coplanaires.*



16.4. Des angles au produit scalaire

16.4.1 Une première question

Question 14 *Si $ABCD$ est un tétraèdre régulier, on demande d'étudier les variations des angles $\widehat{AXB}$ et $\widehat{CXB}$ en fonction de l'abscisse k du point $X = X(k)$ sur la droite passant par les points C et D.*
De plus, caractériser géométriquement la position des droites d_{XA} et d_{XB} qui déterminent la — ou les — valeur(s) extrémale(s) de l'angle $A\widehat{X}B$.

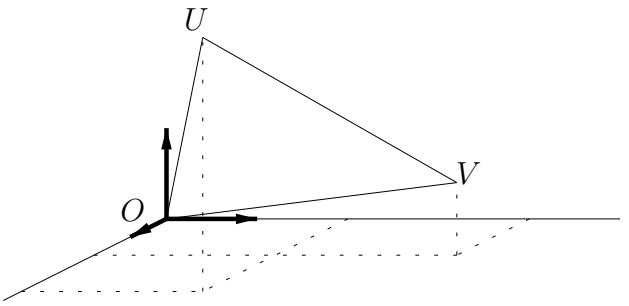


16.4.2 Une synthèse

Cette synthèse concerne le produit scalaire dans l'espace : le cas du plan en est un cas particulier dont l'étude préalable n'est pas indispensable !

16.4.2.1 La définition du produit scalaire

On travaille dans un système de coordonnées orthonormé d'origine O.



Si $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ sont deux points dans l'espace, la traduction de la forme généralisée du théorème de Pythagore (ou formule du cosinus) pour le triangle OUV

$$|UV|^2 = |OU|^2 + |OV|^2 - 2 \cdot |OU| \cdot |OV| \cdot \cos U\widehat{O}V$$

fournit presque immédiatement :

$$(v_1-u_1)^2+(v_2-u_2)^2+(v_3-u_3)^2 = u_1^2+u_2^2+u_3^2+v_1^2+v_2^2+v_3^2-2\cdot|OU|\cdot|OV|\cdot\cos U\widehat{O}V$$

Dès lors, en développant le membre de gauche :

$$v_1^2 - 2v_1u_1 + u_1^2 + v_2^2 - 2v_2u_2 + u_2^2 + v_3^2 - 2v_3u_3 + u_3^2 =$$

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2 \cdot |OU| \cdot |OV| \cdot \cos U\widehat{O}V$$

et en simplifiant :

$$-2v_1u_1 - 2v_2u_2 - 2v_3u_3 = -2 \cdot |OU| \cdot |OV| \cdot \cos U\widehat{O}V$$

On obtient ainsi la définition/formule fondamentale du produit scalaire :

$$\overrightarrow{OU} \bullet \overrightarrow{OV} \text{ ou } U \bullet V \ =: \ |OU| \cdot |OV| \cdot \cos U\widehat{O}V = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

On observe que l'avant-dernier membre de cette relation est **indépendant** du choix d'un système de coordonnées — pourvu qu'il reste orthonormé d'origine O — alors que le dernier membre en dépend, et agréablement. Cette seule égalité

$$|OU| \cdot |OV| \cdot \cos U\widehat{O}V = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

est la source de la grande majorité des propriétés et des applications du produit scalaire.

Un raisonnement analogue à celui effectué ci-dessus permet d'obtenir le résultat correspondant pour des vecteurs d'origine un point $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ quelconque :

$$|AU| \cdot |AV| \cdot \cos U\widehat{A}V = (u_1 - a_1)(v_1 - a_1) + (u_2 - a_2)(v_2 - a_2) + (u_3 - a_3)(v_3 - a_3)$$

ce qui légitime donc qu'on note

$$\overrightarrow{AU} \bullet \overrightarrow{AV} = |AU| \cdot |AV| \cdot \cos U\widehat{A}V = \sum_{i=1}^{3} (u_i - a_i)(v_i - a_i)$$

16.4.2.2 Les propriétés élémentaires du produit scalaire

Puisqu'on dispose dès le début de la relation fondamentale, les énoncés et les démonstrations de ces propriétés élémentaires peuvent être repoussés jusqu'au moment où on estimera leur apparition indispensable. Dans tous les cas, à partir de la relation fondamentale, ces démonstrations sont de simples exercices de calcul !

Pour mémoire, ces propriétés sont

- le produit scalaire est symétrique :

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}$$

- le produit scalaire est bilinéaire :

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w}$$

$$\overrightarrow{u} \bullet (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w}$$

$$(k\overrightarrow{u}) \bullet \overrightarrow{v} = k(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \bullet (k\overrightarrow{v})$$

- le produit scalaire est (défini) positif : $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u} \geqslant 0$ et

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u} = 0 \iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

- le produit scalaire détecte l'orthogonalité : si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, alors

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0 \iff \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$$

On note souvent $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u}$, et on appelle le nombre (positif) $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u}}$ la longueur ou norme du vecteur $\overrightarrow{u}$.

16.4.3 Quelques exercices et problèmes

Exercice 21 *On appelle angle déterminé par deux plans sécants, le plus petit angle formé par deux droites distinctes*

- *sécantes sur la droite commune aux deux plans,*
- *et perpendiculaires à celle-ci dans un des deux plans.*

Quel(s) angle(s) forment entre eux les plans diagonaux d'un cube ?

Problème 16 *Déterminer la perpendiculaire commune — si elle existe — à deux arêtes gauches (c'est-à-dire non coplanaires) d'un octaèdre régulier.*

On trouvera encore d'autres énoncés d'exercices et de problèmes concernant le produit scalaire dans les sections suivantes ...

16.5. Le produit scalaire ... dans tous ses états

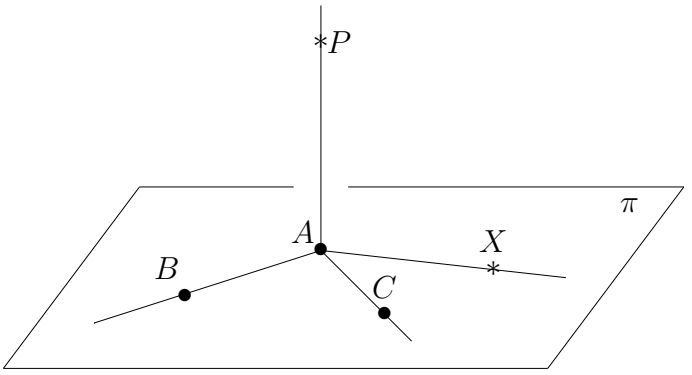
Cette section est consacrée à quelques applications géométriques du produit scalaire. Comme toutes les notions précédemment étudiées s'y rencontrent aussi, c'est l'occasion d'une belle synthèse.

16.5.1 Le critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan

On dit qu'une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est perpendiculaire à toutes les droites passant par son pied dans ce plan. Cette définition ne garantit pas l'existence de telles droites. En vue de réduire cette difficulté, un résultat important est le critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan, qui s'énonce classiquement comme suit :

> *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan est qu'elle soit perpendiculaire à deux droites passant par son pied dans ce plan.*

La condition nécessaire est triviale, et la condition suffisante est une simple **traduction géométrique** de la linéarité du produit scalaire.



On considère pour cela un plan π déterminé par les trois points non-alignés A, B et C, et la droite d_{AP} passant par A et perpendiculaire aux droites d_{AB} et d_{AC}. On a donc

$$\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{AB} = 0 \text{ et } \overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$$

Or, quel que soit le point X dans le plan π, il existe deux nombres réels k et ℓ tels que

$$\overrightarrow{AX} = k\overrightarrow{AB} + \ell\overrightarrow{AC}$$

Dès lors, pour savoir si la droite d_{AP} est perpendiculaire à une droite quelconque d_{AX} passant par les points A et X dans le plan π, il suffit de calculer

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AP} \bullet \left(k\overrightarrow{AB} + \ell\overrightarrow{AC}\right) \\ &= k\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{AB} + \ell\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{AC} \\ &= k \cdot 0 + \ell \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

La cause est entendue !

Par ailleurs, pourvu que $P \notin \pi$, si une droite d_{AY} est perpendiculaire à la droite d_{AP}, alors elle est incluse dans le plan π. En effet, il existe des nombres r, s et t tels que

$$\overrightarrow{AY} = r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{AP}$$

Au départ de l'hypothèse, on calcule

$$\begin{aligned}0 = \overrightarrow{AY} \bullet \overrightarrow{AP} &= \left(r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{AP}\right) \bullet \overrightarrow{AP} \\ &= r\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AP} + s\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AP} + t\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{AP} \\ &= t\left\|\overrightarrow{AP}\right\|^2\end{aligned}$$

Comme $P \notin \pi$: $\left\|\overrightarrow{AP}\right\|^2 \neq 0$, d'où $t = 0$.

16.5.2 Quelques exercices et problèmes

Exercice 22 *Démontrer que, si d'un point on mène deux droites, l'une perpendiculaire à un plan, l'autre perpendiculaire à une droite de ce plan, le plan des deux perpendiculaires est perpendiculaire à la droite du plan.*

Ce résultat est connu sous le nom de « théorème des trois perpendiculaires ».

Exercice 23 *On considère un plan π déterminé par une équation cartésienne*

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

Démontrer que toute droite dont le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *est un vecteur directeur, est perpendiculaire au plan π.*

Si $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ *sont deux vecteurs directeurs du plan π, on a déjà signalé* ([8]) *qu'une équation cartésienne de ce plan s'écrit sous la forme remarquable :*

$$(u_2v_3 - u_3v_2)(x_1 - p_1) + (u_3v_1 - u_1v_3)(x_2 - p_2) + (u_1v_2 - u_2v_1)(x_3 - p_3) = 0$$

où $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in \pi$.

Quelle signification peut-on alors donner au vecteur $\begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$ *?*

Exercice 24 *On appelle vecteur normal à un plan tout vecteur orthogonal à ce plan et de longueur (ou norme) égale à 1.*

Démontrer que si π_1 et π_2 sont deux plans sécants formant entre eux un angle θ $(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2})$, et dont $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont des vecteurs normaux respectifs, alors

$$|\overrightarrow{n_1} \bullet \overrightarrow{n_2}| = \cos\theta$$

([8]) Cfr. la synthèse de la section 2.

A l'aide des résultats de l'exercice 23 ci-dessus, vérifier alors les résultats de l'exercice 21.

Problème 17 *Donner un exemple de tétraèdre dont les quatre hauteurs ne sont pas concourantes.*

Enoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante pour que les quatre hauteurs d'un tétraèdre (quelconque) soient concourantes.

Problème 18 *On travaille dans un système de coordonnées orthonormé d'origine* O. *Si* $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ *et* $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ *sont deux points dans l'espace, calculer la mesure de l'aire du parallélogramme* $OUTV$ *où* $T = U + V$.

En utilisant les résultats de l'exercice 23, calculer alors la mesure du volume du prisme de base $OUTV$ *et d'arête* OP , *où* $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ *est extérieur au plan de la base.*

Démontrer que si G *est le barycentre de quatre points massifs* (A, h), (B, k), (C, ℓ) *et* (D, m) *non coplanaires, alors la mesure des volumes des tétraèdres* $ABDG$, $ACDG$, $ABCG$ *et* $BCDG$ *est proportionnelle aux nombres* ℓ, k, m *et* h. *Cfr. aussi le problème 15.*

16.6. Un peu de programmation linéaire

La programmation linéaire étudie certains problèmes d'optimisation par des méthodes mélangeant algèbre et géométrie. On se limite ici à fournir deux énoncés simples ([9]), c'est-à-dire qui se ramènent à des problèmes de géométrie dans l'espace usuel. Mais il est bon de savoir que ces méthodes sont vraiment utiles et performantes : elles s'adaptent particulièrement bien aux situations réalistes (en économie par exemple), qui nécessitent (beaucoup) plus de trois variables. C'est là une des raisons d'être — parmi d'autres — des espaces vectoriels de dimension supérieure à 3.

Problème 19 *Une machine-outil peut fabriquer deux types de pièces, A et B. Elle met 2 minutes pour fabriquer une pièce de type A et 1 minute pour fabriquer une pièce de type B.*

L'usure, et donc le remplacement, des parties mobiles de la machine, interdit de fabriquer plus de 24 pièces de types A par heure et plus de 36 pièces de type B par heure. Par ailleurs, le refroidissement de la machine lui interdit de fabriquer plus de 45 pièces (en tout) par heure. Enfin, le profit réalisé sur une pièce de type A est de 100 F, sur une pièce de type B de 200 F.

On demande de déterminer la production horaire permettant de réaliser le profit maximal.

Problème 20 *Une société fabrique de la poudre à lessiver. Elle désire commercialiser son produit dans une région pour laquelle une étude de marché a montré que l'impact d'une annonce publicitaire était décrit par le tableau suivant :*

médium	*audience (en millions)*	*audience féminine (en millions)*	*coût par annonce (en unités monétaires)*
télévision	*10*	*7*	*500*
radio	*1*	*0,6*	*60*
presse écrite	*2*	*0,8*	*65*

Le directeur commercial cherche à déterminer le budget de publicité qui lui permette d'atteindre le public qu'il s'est fixé : il voudrait toucher au moins 20 millions de personnes, dont au moins 14 millions de femmes. Comment peut-il rendre minimum le coût de sa campagne publicitaire compte tenu des contraintes qu'il s'impose ?

([9]) Ils sont tirés d'un ouvrage de la série *Fractales* et d'un livre de J. Bair, R. Hinnion et D. Justens ; cfr. la bibliographie pour les références détaillées.

16.7. Les statistiques et le calcul des distances minimales

16.7.1 Un problème classique

Le problème suivant consiste encore à minimiser géométriquement une grandeur.

Problème 21 *Dans l'espace rapporté à un système d'axes orthonormé d'origine O, on considère le plan π contenant l'origine et passant par les points $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.*

Quelle est la plus courte distance qui sépare le point $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ du plan π ?

Généraliser au cas où $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ est quelconque.

16.7.2 Un peu plus qu'une synthèse . . .

Au départ du problème précédent, le produit scalaire permet d'étudier géométriquement la méthode des moindres carrés utilisée pour l'ajustement linéaire en statistique !

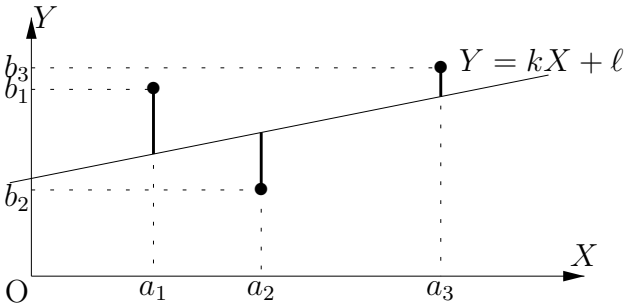
16.7.2.1 L'ajustement sur trois points

On travaille dans un système de coordonnées orthonormé du plan. On considère trois points — de préférence non-alignés — de coordonnées $\{(a_i; b_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ dans ce plan.

Il s'agit de déterminer une droite d'équation $Y = kX + \ell$ de telle sorte que la distance quadratique

$$\triangle(k, \ell) := \sum_{i=1}^{3} (ka_i + \ell - b_i)^2$$

soit minimale.



16.7.2.2 La traduction géométrique

L'idée est — au départ du théorème de Pythagore — d'identifier l'expression $\triangle(k, \ell) = \sum_{i=1}^{3} (ka_i + \ell - b_i)^2$ au carré d'une véritable distance entre deux objets géométriques (à définir !) dans l'espace usuel à 3 dimensions.

Or, et en effet, si on note

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} ka_1 + \ell \\ ka_2 + \ell \\ ka_3 + \ell \end{pmatrix}$$

en considèrant k et ℓ comme des paramètres, on a bien

$$\triangle(k, \ell) = (\text{distance}(B, P))^2$$

Mais les coordonnées du point P s'expriment **linéairement** en fonction de k et ℓ : le point P décrit donc un plan, qu'on note π. Ce plan contient l'origine des coordonnées et les points $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de telle sorte que son équation est bien

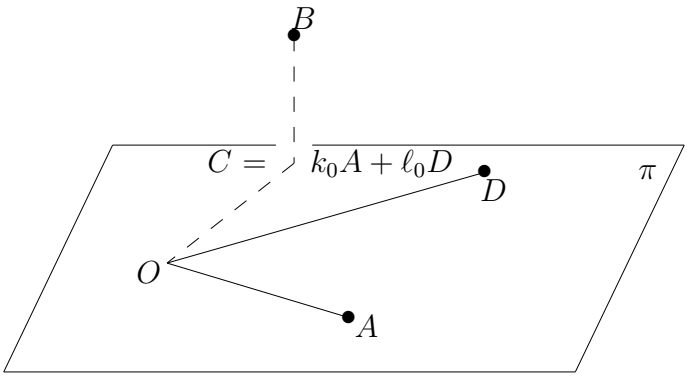
$$P = O + k \cdot A + \ell \cdot D = \begin{pmatrix} ka_1 + \ell \\ ka_2 + \ell \\ ka_3 + \ell \end{pmatrix}$$

En d'autres termes encore : le point P admet les coordonnées (k, ℓ) dans le repère (O, A, D) du plan π.

Si on note alors (k_0, ℓ_0) les valeurs qui rendent la distance $\triangle(k, \ell)$ minimale, on a

$$\triangle(k_0, \ell_0) \text{ est minimal} \Longleftrightarrow \triangle(k_0, \ell_0) = (\text{distance}(B, \pi))^2$$

Le calcul de k_0 et ℓ_0 se ramène ainsi à une question de plus courte distance du point B au plan π : k_0 et ℓ_0 sont les coordonnées dans le repère (O, A, D) du point de percée C de la perpendiculaire au plan π issue du point B.



Ce raisonnement permet en particulier de se convaincre — sans aucun calcul — de l'existence et de l'unicité de la solution du problème !

16.7.2.3 Le traitement géométrique et algébrique

Même si la justification de la méthode des moindres carrés n'est pas au programme, le problème géométrique qu'on vient d'y associer est, quant à lui, dans le domaine des exercices que le programme suggère d'étudier : cfr. toujours le problème 21.

Voici le résumé de sa solution, parce que cette solution met en valeur quelques très belles interprétations géométriques des notions de base de la statistique.

Par construction, le segment BC est perpendiculaire au plan π. Cela équivaut aux deux relations

$$\begin{cases} (C - B) \bullet A = 0 \\ (C - B) \bullet D = 0 \end{cases}$$

Comme $k_0 A + \ell_0 D = C$, on en déduit le système de deux équations du premier degré dont les deux inconnues sont k_0 et ℓ_0 :

$$\begin{cases} (k_0 A + \ell_0 D) \bullet A - B \bullet A = 0 \\ (k_0 A + \ell_0 D) \bullet D - B \bullet D = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} k_0 \cdot \|A\|^2 + \ell_0 \cdot (A \bullet D) = A \bullet B \\ k_0 \cdot (A \bullet D) + \ell_0 \cdot \|D\|^2 = B \bullet D \end{cases}$$

et dont la solution règle définitivement le problème !

On vérifie que ce système admet une et une seule solution dès que les coordonnées des points A et D ne sont pas proportionnelles, ce qui est toujours le cas dans la situation qui nous occupe.

16.7.2.4 Une interprétation géométrique de notions statistiques

On note

$$\overline{a} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \qquad \text{et} \qquad \overline{b} = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}$$

$$\sigma_a^2 = \frac{(a_1 - \overline{a})^2 + (a_2 - \overline{a})^2 + (a_3 - \overline{a})^2}{3}$$

$$\sigma_b^2 = \frac{(b_1 - \overline{b})^2 + (b_2 - \overline{b})^2 + (b_3 - \overline{b})^2}{3}$$

$$\sigma_{ab} = \frac{(a_1 - \overline{a})(b_1 - \overline{b}) + (a_2 - \overline{a})(b_2 - \overline{b}) + (a_3 - \overline{a})(b_3 - \overline{b})}{3}$$

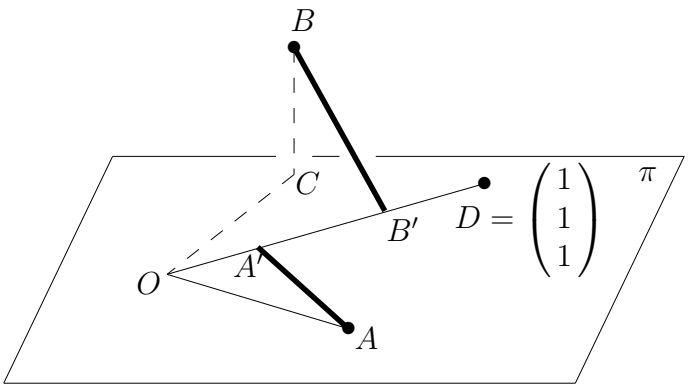
les **moyennes**, les **variances**, et la **covariance**, des abscisses et des ordonnées des points donnés.

On a d'abord, et immédiatement

$$A \bullet D = a_1 + a_2 + a_3 = 3\overline{a}$$
$$B \bullet D = b_1 + b_2 + b_3 = 3\overline{b}$$

Si A' est la projection orthogonale du point A, et B' la projection orthogonale du point B, sur la droite OD, on obtient facilement

$$A' = \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{a} \\ \overline{a} \end{pmatrix} \qquad B' = \begin{pmatrix} \overline{b} \\ \overline{b} \\ \overline{b} \end{pmatrix}$$



On en déduit le carré de la longueur du segment $A'A$:

$$\|A - A'\|^2 = (a_1 - \overline{a})^2 + (a_2 - \overline{a})^2 + (a_3 - \overline{a})^2 = 3\sigma_a^2$$

et le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OAA' fournit alors la relation :

$$\|A\|^2 = \|A - A'\|^2 + \|A'\|^2 = 3\sigma_a^2 + 3\overline{a}^2 = 3(\sigma_a^2 + \overline{a}^2)$$

Enfin, comme on a quasiment par définition

$$(A - A') \bullet (B - B') = 3\sigma_{ab}$$

on en déduit, grâce aux propriétés usuelles du produit scalaire :

$$A \bullet B - A' \bullet B - A \bullet B' + A' \bullet B' = 3\sigma_{ab}$$
$$A \bullet B - \overline{a}D \bullet B - A \bullet \overline{b}D + 3\overline{a}\overline{b} = 3\sigma_{ab}$$
$$A \bullet B - \overline{a} \cdot 3\overline{b} - \overline{b} \cdot 3\overline{a} + 3\overline{a}\overline{b} = 3\sigma_{ab}$$

d'où, finalement

$$A \bullet B = 3(\sigma_{ab} + \overline{a}\overline{b})$$

16.7.2.5 La droite des moindres carrés flirte avec un barycentre

Avec ces traductions, la solution du système obtenu plus haut s'écrit, tous calculs faits :

$$k_0 = \frac{\sigma_{ab}}{\sigma_a^2}$$

$$\ell_0 = \overline{b} - \overline{a} \cdot \frac{\sigma_{ab}}{\sigma_a^2}$$

On vérifie en particulier que la droite des moindres carrés, dont l'équation est donc

$$Y = \frac{\sigma_{ab}}{\sigma_a^2} \cdot X + \overline{b} - \overline{a} \cdot \frac{\sigma_{ab}}{\sigma_a^2} = \frac{\sigma_{ab}}{\sigma_a^2} (X - \overline{a}) + \overline{b}$$

passe par le point du plan de coordonnées $\left(\overline{a}; \overline{b}\right)$. Ce point est le **barycentre** du triangle dont les sommets sont les points $\{(a_i; b_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant 3}$.

Remarque.

Dans l'interprétation géométrique signalée ci-dessus, le **coefficient de corrélation** des abscisses et des ordonnées des points considérés

$$c_{ab} = \frac{\sigma_{ab}}{\sigma_a \cdot \sigma_b}$$

est égal au cosinus de l'angle déterminé par les segments $B'B$ et $A'A$.

16.7.3 Le cas d'un nuage de points

La généralisation du raisonnement géométrique précédent à un nuage $\{(a_i; b_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de points, avec $n > 3$ ne présente aucune difficulté dès qu'on est convaincu de l'intérêt d'une géométrie à plus de 3 dimensions ...

16.8. La représentation matricielle

Cette section est consacrée à l'étude d'un problème d'écologie qui permet d'introduire la représentation matricielle dans un contexte concret, significatif et inattendu.

On se limite ici à mettre ce problème en équations, à le résoudre — mais sans vraiment le « tuer » — et à relever quelques nouvelles questions, paradoxales, qui découlent de cette résolution.

Les éclaircissements définitifs à ce sujet seront l'objet de la dernière section de ces notes, après que la représentation matricielle aura été suffisamment mise en situation.

16.8.1 L'évolution d'une population d'oiseaux

Problème 22 *Dans une population donnée d'oiseaux, on étudie comment le nombre de femelles évolue au fil des ans. Sur chaque cycle d'observation d'une année, on distingue les femelles adultes ou matures (c'est-à-dire en état de se reproduire), et les femelles immatures.*

Certaines des femelles immatures meurent durant l'année en cours. Seule une proportion p_0 d'entre elles survit et devient adulte au printemps de l'année suivante. Plus tard en saison, chaque femelle adulte donne naissance en moyenne à 2 oiseaux femelles (nécessairement immatures).

Mais tout au long de l'année, des femelles adultes meurent aussi, et la proportion d'adultes qui survivent, d'une année à l'autre, est égale à p_1.

On demande de décrire l'évolution du nombre de femelles (adultes) de cette population, ainsi que l'évolution du rapport

$$\frac{\textit{nombre de femelles adultes}}{\textit{nombre de femelles immatures}}$$

en fonction du nombre d'années écoulées depuis le début de l'observation, si on comptait au départ

- *1000 adultes femelles et aucune immature,*
- *1000 adultes femelles et 200 immatures,*
- *1000 adultes femelles et 400 immatures,*
- *etc ...,*

et sachant qu'on estime que $p_0 = 0,3$ et $p_1 = 0,5$.

On demande aussi de représenter graphiquement tous les résultats, année après année, en situant sur l'axe des abscisses le nombre de femelles immatures, et sur l'axe des ordonnées le nombre de femelles adultes.

16.8.1.1 Une évolution mise en équations

On note :

- i_n : le nombre de femelles immatures durant l'année n,
- a_n : le nombre de femelles adultes durant l'année n.

Comme chaque femelle adulte donne naissance à 2 oiseaux femelles (immatures), et que c'est là la seule manière dont peuvent apparaître de jeunes oiseaux, on a la relation :

$$i_{n+1} = 2 \cdot a_n$$

Par contre, le nombre d'oiseaux adultes observés durant l'année $n+1$ s'obtient en additionnant :

- le nombre d'oiseaux immatures l'année précédente et arrivés à l'âge adulte pendant l'année $n+1$: à savoir $p_0 \cdot i_n$,
- le nombre d'oiseaux adultes l'année précédente et qui ont survécu durant l'année $n+1$: à savoir $p_1 \cdot a_n$.

On en déduit la relation :

$$a_{n+1} = p_0 \cdot i_n + p_1 \cdot a_n$$

Comme on sait que $p_0 = 0,3$ et $p_1 = 0,5$, l'évolution de la population d'oiseaux est donc décrite par les deux relations

$$\begin{cases} i_{n+1} = 2 \cdot a_n \\ a_{n+1} = 0,3 \cdot i_n + 0,5 \cdot a_n \end{cases}$$

On peut entamer les calculs de proche en proche. On part de :

$$\begin{aligned} i_1 &= 2 \cdot a_0 \\ a_1 &= 0,3 \cdot i_0 + 0,5 \cdot a_0 \end{aligned}$$

ensuite :

$$\begin{aligned} i_2 &= 2 \cdot a_1 \\ &= 2\,(0,3 \cdot i_0 + 0,5 \cdot a_0) \\ &= 2 \cdot 0,3 \cdot i_0 + 2 \cdot 0,5 \cdot a_0 \\ &= 0,6 \cdot i_0 + a_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= 0,3 \cdot i_1 + 0,5 \cdot a_1 \\ &= 0,3 \cdot 2 \cdot a_0 + 0,5\,(0,3 \cdot i_0 + 0,5 \cdot a_0) \\ &= 0,5 \cdot 0,3 \cdot i_0 + (0,3 \cdot 2 + 0,5 \cdot 0,5) \cdot a_0 \\ &= 0,15 \cdot i_0 + 0,85 \cdot a_0 \end{aligned}$$

Etc.

Mais ce genre de calcul devient vite fastidieux, sans qu'on en découvre pour autant le ressort ...

Or, il y a moyen — en faisant un petit détour par la géométrie — de se tirer d'affaire beaucoup beaucoup beaucoup beaucoup ... beaucoup mieux !

16.8.1.2 Le modèle d'évolution de la population d'oiseaux est linéaire

Il y a une **interprétation géométrique remarquable** de deux relations précédentes.

Dans un repère orthonormé, on porte en abscisse le nombre de femelles immatures et en ordonnée le nombre de femelles adultes.

Dans ce plan des oiseaux, les relations

$$\begin{cases} i_{n+1} = 2 \cdot a_n \\ a_{n+1} = 0,3 \cdot i_n + 0,5 \cdot a_n \end{cases}$$

font correspondre au point de coordonnées $\begin{pmatrix} i_n \\ a_n \end{pmatrix}$ le point de coordonnées $\begin{pmatrix} i_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$.

On note R cette correspondance ou **transformation** du plan :

$$R\begin{pmatrix} i_n \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

Par rapport à ce qu'on connait du calcul sur les (coordonnées de) points du plan, cette transformation jouit d'une propriété remarquable : elle est **linéaire**.

Plus précisément :

- si à une population donnée $\begin{pmatrix} i_n \\ a_n \end{pmatrix}$ s'ajoute ([10]) une autre population $\begin{pmatrix} i'_n \\ a'_n \end{pmatrix}$, on vérifie immédiatement que la transformation R **respecte** cette addition au sens où :

$$R\left(\begin{pmatrix} i_n \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i'_n \\ a'_n \end{pmatrix}\right) = R\begin{pmatrix} i_n \\ a_n \end{pmatrix} + R\begin{pmatrix} i'_n \\ a'_n \end{pmatrix}$$

- de même, si une population d'oiseaux est doublée, triplée ou plus généralement multipliée par un nombre réel k, on vérifie immédiatement que la transformation R **respecte** cette multiplication au sens où :

$$R\left(k \cdot \begin{pmatrix} i_n \\ a_n \end{pmatrix}\right) = k \cdot R\begin{pmatrix} i_n \\ a_n \end{pmatrix}$$

([10]) Par suite d'une migration, de l'introduction d'une population-témoin, etc.

Tout ceci explique que les relations

$$\begin{cases} i_{n+1} = 2 \cdot a_n \\ a_{n+1} = 0,3 \cdot i_n + 0,5 \cdot a_n \end{cases}$$

sont aussi connues sous l'appellation de « relations **linéaires** de récurrence » ou « relations de récurrence **linéaire** ».

Il faut remarquer que **toute** l'évolution de la population d'oiseaux suit ainsi un modèle linéaire, puisque la **composée** de transformations linéaires est évidemment une transformation linéaire.

16.8.1.3 La représentation matricielle

L'interprétation géométrique du modèle permet d'**organiser** les calculs de population d'oiseaux pour des valeurs de plus en plus grandes de l'indice n (qui représente les années qui passent ...).

Les raisons d'être d'une telle organisation se découvrent en 4 étapes.

- On écrit les relations de récurrence linéaire sous la forme

  $$\begin{cases} i_{n+1} = \quad 0 \cdot i_n + \ 2 \cdot a_n \\ a_{n+1} = 0,3 \cdot i_n + 0,5 \cdot a_n \end{cases}$$

  et on se concentre en particulier sur la « **matrice** des coefficients » de ces relations :

  $$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$$

- On observe alors que l'effet de ces relations sur les deux « populations élémentaires » $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ se lit immédiatement en termes de **colonnes** de la matrice des coefficients :

  $$R\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

- On observe ensuite que l'effet de ces relations sur une population quelconque $\begin{pmatrix} i_n \\ a_n \end{pmatrix}$ s'obtient en termes de « produits scalaires formels » des « vecteurs-lignes » de la matrice des coefficients avec le « vecteur-colonne » $\begin{pmatrix} i_n \\ a_n \end{pmatrix}$:

$0 \cdot i_n$		i_n
	$+$	
	$2 \cdot a_n$	a_n
0	2	$\searrow$

$$\boxed{i_{n+1} = 0 \cdot i_n + 2 \cdot a_n}$$

$0,3 \cdot i_n$		i_n
	$+$	
	$0,5 \cdot a_n$	a_n
$0,3$	$0,5$	$\searrow$

$$\boxed{a_{n+1} = 0,3 \cdot i_n + 0,5 \cdot a_n}$$

- On observe enfin — et c'est le plus important ! — que l'effet d'une **composition** de ces relations sur une population quelconque $\begin{pmatrix} i_n \\ a_n \end{pmatrix}$ s'obtient encore en termes de « produits scalaires formels » des « vecteurs-lignes » par les « vecteurs-colonnes » de la matrice des coefficients.

  C'est une conséquence de ce qui précède ! En effet, grâce à la linéarité de la transformation R, on peut calculer l'effet de $R \circ R$ ou R^2 sur $\begin{pmatrix} i_n \\ a_n \end{pmatrix}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} R \circ R \begin{pmatrix} i_n \\ a_n \end{pmatrix} &= R \circ R \left(i_n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= i_n \cdot R \left(R \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + a_n \cdot R \left(R \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$= i_n \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0,3 \end{pmatrix} \right\} + a_n \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 0,5 \end{pmatrix} \right\}$$

Comme on sait — en vertu de l'observation précédente — que i_n doit être le coefficient de la première colonne et a_n le coefficient de la deuxième colonne de la matrice associée à $R \circ R$, on en déduit que cette matrice s'obtient en effectuant les « produits scalaires formels » des « vecteurs-lignes » par les « vecteurs-colonnes » de la matrice des coefficients :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0,3 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0,5 \\ 0,3 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0,3 & 0,3 \cdot 2 + 0,5 \cdot 0,5 \end{pmatrix}$$

Ce genre de raisonnement peut suffire pour introduire la représentation et le produit matriciel, puisqu'il permet d'observer qu'il s'agit essentiellement — pour des raisons géométriques — d'effectuer certains calculs du type « produits scalaires formels » sur les lignes ou les colonnes de la « matrice »

$$R := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$$

associée au problème.

16.8.1.4 Deux remarques

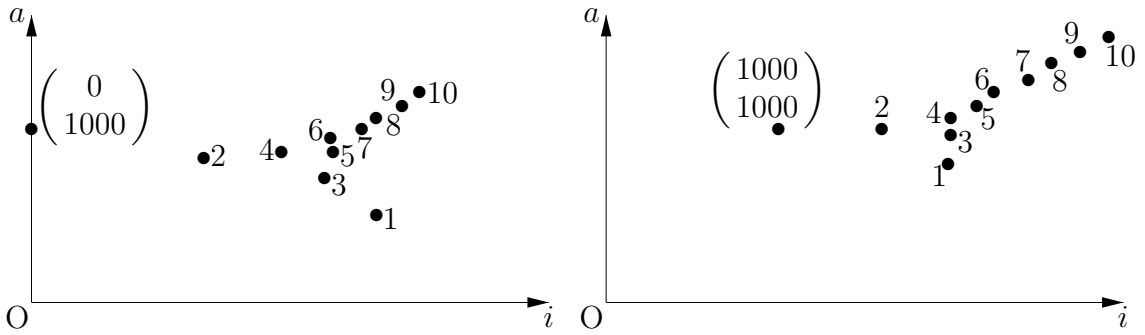
Dans toute la suite, le repère étant fixé, on **identifiera** la matrice à la transformation qu'elle décrit (et réciproquement). On dira donc indistinctement : la transformation R ou la matrice R.

A ce stade du travail, la calculatrice (graphique) permet déjà de ne pas perdre trop de temps dans des calculs répétitifs, et d'aller au cœur de ce qui importe : la **signification** des calculs.

16.8.1.5 Des calculs et des représentations graphiques

Dès que ce nouveau mode de calcul et l'usage correspondant de la calculatrice (graphique) sont adoptés, on obtient les résultats repris dans le tableau et les graphiques ci-dessous.

R^n	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 200 \\ 1000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 400 \\ 1000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 800 \\ 1000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2000 \\ 500 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2000 \\ 560 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2000 \\ 620 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2000 \\ 740 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2000 \\ 800 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0,6 & 1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1000 \\ 850 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1120 \\ 880 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1240 \\ 910 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1480 \\ 970 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1600 \\ 1000 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0,3 & 1,7 \\ 0,26 & 0,73 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1700 \\ 725 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1760 \\ 776 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1820 \\ 827 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1940 \\ 929 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2000 \\ 980 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0,51 & 1,45 \\ 0,22 & 0,87 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1450 \\ 873 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1552 \\ 916 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1654 \\ 960 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1858 \\ 1047 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1960 \\ 1090 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0,44 & 1,75 \\ 0,26 & 0,87 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1745 \\ 871 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1832 \\ 924 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1920 \\ 976 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2094 \\ 1081 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2180 \\ 1133 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0,52 & 1,74 \\ 0,26 & 0,96 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1743 \\ 959 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1848 \\ 1011 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1952 \\ 1064 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2162 \\ 1168 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2266 \\ 1221 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0,52 & 1,92 \\ 0,29 & 1,00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1918 \\ 1002 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2022 \\ 1060 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2128 \\ 1117 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2336 \\ 1233 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2442 \\ 1290 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0,58 & 2,00 \\ 0,30 & 1,08 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2005 \\ 1076 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2120 \\ 1137 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2234 \\ 1197 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2466 \\ 1317 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2580 \\ 1377 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0,60 & 2,15 \\ 0,32 & 1,14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2153 \\ 1140 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2274 \\ 1204 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2394 \\ 1269 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2634 \\ 1398 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2754 \\ 1463 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0,65 & 2,28 \\ 0,34 & 1,22 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2279 \\ 1216 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2408 \\ 1284 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2538 \\ 1353 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2796 \\ 1489 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2926 \\ 1558 \end{pmatrix}$
a_{10}/i_{10}	0,53357	0,53322	0,53310	0,53255	0,53247



16.8.1.6 Une solution ... paradoxale

A l'issue de tout ce travail, on observe que, malgré la grande **variabilité** des conditions initiales

$$\begin{pmatrix} i_0 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 200 \\ 1000 \end{pmatrix}, \ldots$$

le rapport $\frac{a_{10}}{i_{10}}$ est **remarquablement stable** et semble tendre vers $0,53\ldots$.

16.8.1.7 Quelques exercices supplémentaires

Exercice 25 *La stabilité observée ne résulterait-elle pas de ce que, pour toutes les valeurs initiales choisies, on a $a_0 = 1000$?*

Avant de tirer trop vite des conclusions, il convient donc de reproduire les calculs précédents pour des valeurs de $a_0 \neq 1000$.

Qu'en conclure ?

Exercice 26 *Calculer R^n pour $n > 10$ et en déduire une (des) valeur(s) possible(s) de $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{i_n}$.*

Exercice 27 *Reprendre les calculs précédents avec $p_0 = 0,2$ et $p_1 = 0,6$. Qu'observe-t-on cette fois ?*

16.8.1.8 Deux remarques et un prolongement

- Le problème illustre que la complexité apparente, au départ d'une situation, n'est souvent que le résultat de la combinaison linéaire d'effets divers simples.

- Le problème est un peu trop simple, et par là peu réaliste : les calculs montrent en effet que la population globale augmente sans arrêt !
  En réalité, les populations d'oiseaux ont tendance à s'auto-réguler : les pourcentages de naissances et de morts varient avec la taille de la population. Par ailleurs, les conditions climatiques d'une année peuvent avoir des effets significatifs sur ces pourcentages, etc.

- La solution du problème n'est pas non plus satisfaisante pour des raisons cette fois-ci strictement mathématiques : la **stabilité** du résultat final — **indépendamment des conditions initiales choisies** — est surprenante, sinon paradoxale !

  Comment expliquer cette imperturbable stabilité ?

  A ce stade de l'étude du problème, les **raisons n'**en sont **pas** apparentes ...

16.8.2 Une synthèse

Il s'agit tout au plus de fixer le vocabulaire et la signification d'une opération.

16.8.2.1 La notion de matrice

Une matrice 2×2 est un tableau

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2}$$

de 4 nombres. On note a_{ij} le terme situé à la i^{e} ligne et à la j^{e} colonne.

On considère pareillement des matrices 2×1, c'est-à-dire comportant 2 lignes et 1 colonne (on parle alors souvent de matrice-, ou vecteur-colonne), et des matrices 1×2, c'est-à-dire comportant 1 ligne et 2 colonnes (on parle alors souvent de matrice-, ou vecteur-ligne).

16.8.2.2 Les matrices et les transformations du plan

A toute matrice 2×2 est associée une transformation linéaire du plan rapporté à un repère fixé :

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \longmapsto \quad A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} \cdot v_1 + a_{12} \cdot v_2 \\ a_{21} \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 \end{pmatrix}$$

La première colonne de la matrice A est l'image du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ par la transformation linéaire correspondante. La deuxième colonne de cette matrice est l'image du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par la transformation linéaire correspondante.

Toute transformation linéaire du plan est entièrement déterminée par son effet sur deux vecteurs non colinéaires (ou linéairement indépendants) de ce plan.

A toute transformation linéaire du plan rapporté à un repère fixé est associée une matrice 2×2 dont la première colonne est l'image du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ par la transformation linéaire en question, et la deuxième colonne est l'image du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par cette transformation linéaire.

16.8.2.3 La composition des transformations linéaires et le produit matriciel

Par rapport à un repère fixé du plan, la composée de deux transformations linéaires associées à des matrices 2×2 A et B est une transformation linéaire dont la matrice — notée $A \circ B$ — est appelée le produit matriciel des matrices A et B.

Si $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ sont deux matrices 2×2, alors le produit matriciel $A \circ B$ se calcule en faisant les produits scalaires formels des vecteurs-lignes qui constituent A par les vecteurs-colonnes qui constituent B :

$$A \circ B := \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

On a des définitions analogues pour les produits de matrices d'autres types, pourvu que ces produits soient possibles en termes des produits scalaires formels sous-jacents.

16.9. Le début d'un herbier . . .

16.9.1 Le miroir tournant

Dans le plan, les symétries centrales et axiales (en particulier les réflexions), les rotations, les isométries, les similitudes, ... sont rencontrées dès le premier degré de l'enseignement secondaire, dans un quadrillage par exemple.

Quelques transformations de l'espace ont déjà été abordées, mais pas nécessairement dans le cours de mathématiques : la réflexion dans un miroir est étudiée au cours de physique.

L'étude de phénomènes tels que les palais de glaces, les kaléidoscopes, les billards, ... sont des sources de problèmes à partir desquels on peut dégager les principales propriétés des réflexions et des **composées** de réflexions dans l'espace.

Dans ce contexte, la question suivante est toute simple, et déjà bien intéressante.

Question 15 *Donner une définition*

- *de réflexion dans un plan de l'espace,*
- *de rotation dans l'espace.*

Lorsqu'un miroir tourne autour d'un axe situé dans son plan, comment se déplace en conséquence l'image d'un objet ?

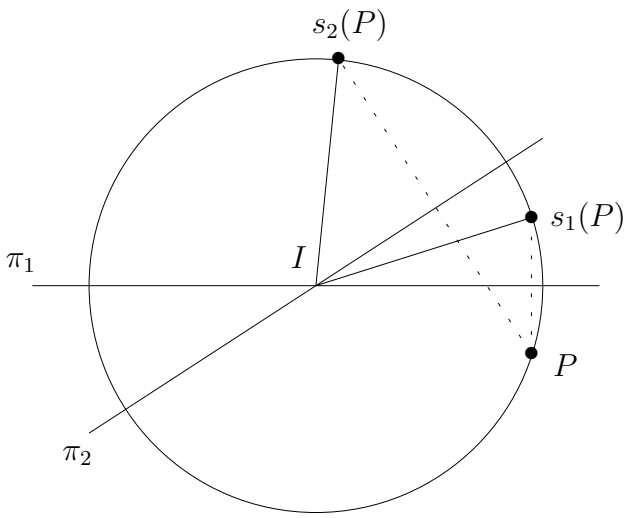
16.9.1.1 Une solution classique (résumée)

On note :

- π_1 : le plan du miroir avant rotation,
- π_2 : le plan du miroir après rotation,
- i : l'axe de rotation,
- $s_1(P)$: l'image de l'objet P dans le miroir π_1 ,
- $s_2(P)$: l'image de l'objet P dans le miroir π_2 .

Par définition de réflexion :

- les trois points P, $s_1(P)$ et $s_2(P)$ sont situés dans un même plan perpendiculaire à l'axe de rotation,
- si on note I le point d'intersection de ce plan avec l'axe de rotation, les trois points précités appartiennent à une même circonférence située dans ce plan et de centre le point I (une réflexion est une isométrie).



Quelques calculs d'angles (inscrits, au centre, ...) fournissent alors :

$$\begin{aligned} 2 \cdot \text{angle}(s_1(P), P, s_2(P)) &= \text{angle}\,(s_1(P), I, s_2(P)) \\ \text{angle}\,(s_1(P), I, s_2(P)) &= \text{angle}(\pi_1, \pi_2) \end{aligned}$$

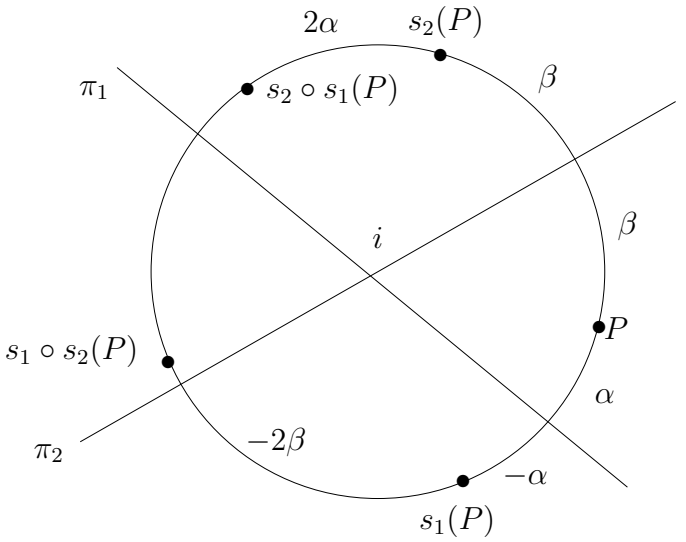
Ainsi, lorsqu'un miroir tourne, l'image d'un objet tourne deux fois plus vite !

16.9.1.2 Une solution plus ...« réfléchie »

On peut résoudre la question précédente en raisonnant à partir de **la composée de deux réflexions dans des plans sécants**.

A cet effet, on considère d'abord :

- deux plans π_1 et π_2 qui se coupent suivant une droite i,
- les réflexions s_1 et s_2 dans les plans π_1 et π_2,
- un point P situé sur un plan comprenant i et formant des angles α et β avec les plans π_1 et π_2.



Alors, l'angle déterminé par P et l'image de P par la composée $s_2 \circ s_1$:

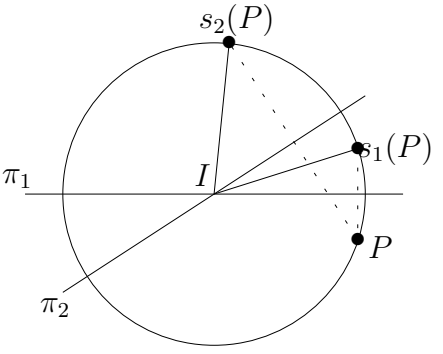
$$\text{angle}\,(P, i, s_2 \circ s_1(P)) = 2\alpha + 2\beta = 2\theta$$
$$\text{angle}\,(P, i, s_1 \circ s_2(P)) = -2\alpha - 2\beta = -2\theta$$

est **indépendant de la position initiale** du point P, c'est-à-dire des angles α et β.

La composée de deux réflexions dans des plans sécants, formant entre eux un angle θ, est donc une **rotation** d'angle 2θ ou -2θ suivant l'**ordre** dans lequel on considère les réflexions.

Dans le cas du problème du miroir tournant, ce résultat devient :

$$\begin{aligned} & \text{angle}\,(s_1(P), i, s_2(P)) \\ = \; & -\text{angle}\left(s_1^2(P), i, s_1 \circ s_2(P)\right) \\ = \; & -\text{angle}\,(P, i, s_1 \circ s_2(P)) \\ = \; & 2 \cdot \text{angle}(\pi_1, \pi_2) \end{aligned}$$



16.9.1.3 Une réciproque

Exercice 28 *Démontrer qu'une rotation d'amplitude α et d'axe i est la composée de deux réflexions dans des plans π_1 et π_2 ... qu'il s'agit de caractériser. En déduire qu'une rotation est une isométrie de l'espace.*

16.9.2 Quelques exercices . . . tout plats

Dans tous les énoncés qui suivent, le plan est rapporté à un repère orthonormé dont l'origine est notée O. L'objectif de ces exercices est de constituer un « herbier » de transformations linéaires parmi les plus simples, accompagnées de leur représentation matricielle.

Exercice 29 *La symétrie centrale de centre l'origine O est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?*

Une symétrie centrale de centre un point P quelconque est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?

Exercice 30 *Si k est un nombre réel, l'homothétie de rapport k et de centre O est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?*

Plus généralement, l'homothétie de rapport k et de centre un point P quelconque du plan est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?

Exercice 31 *La réflexion à travers la première bissectrice est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?*

Plus généralement, une réflexion à travers une droite d'équation $y = ax + b$ est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?

Exercice 32 *La projection orthogonale sur la première bissectrice ($y = x$) est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?*

Plus généralement, une projection orthogonale sur une droite d'équation $y = ax + b$ est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?

Exercice 33 *La projection (oblique) sur la première bissectrice parallèlement à la droite $y = kx$ — où k est un nombre réel différent de 1 — est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?*

Plus généralement, une projection sur une droite d'équation $y = ax+b$ parallèlement à la droite $y = kx$ — où k est un nombre réel différent de a — est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?

Exercice 34 *Une translation de vecteur $v := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?*

Exercice 35 *Une rotation de centre O et d'amplitude $\frac{\pi}{6}$ est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?*

Plus généralement, une rotation de centre un point P quelconque du plan et d'amplitude α est-elle une transformation linéaire ? Si oui, quelle est sa matrice ?

Exercice 36 *Pour chacune des transformations T considérées dans les exercices précédents, comment caractériser leurs itérés $T^{\,2} := T \circ T$, $T^{\,3} := T \circ T \circ T$, ... ?*

Quelle est la traduction matricielle de ces résultats ?

Exercice 37 *Déterminer toutes les transformations linéaires qui laissent (globalement) invariant un triangle équilatéral dont O est le barycentre.*

Montrer que deux de ces transformations permettent de les engendrer toutes.

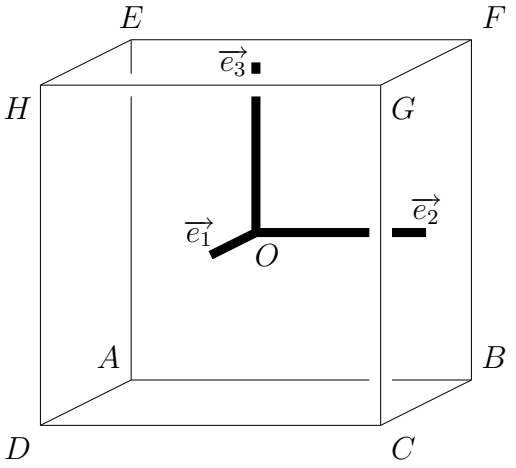
16.9.3 La conquête de l'espace

Il s'agit maintenant d'étendre la représentation matricielle à l'espace.

Cette généralisation ne présente aucune difficulté particulière, et peut donc être laissée comme exercice (intelligent) à l'élève. La question suivante permet d'entamer cette transition.

Question 16 *Déterminer les plans de symétrie d'un cube, les droites d'intersection de ces plans (pris deux à deux) ainsi que le(s) point(s) commun(s) à tous ces plans.*

Dans la suite de cette question, on considère un cube dont la longueur des arètes égale 2. On fixe un repère orthonormé (direct) d'origine le centre O du cube, et dont les vecteurs de base sont perpendiculaires aux faces du cube.

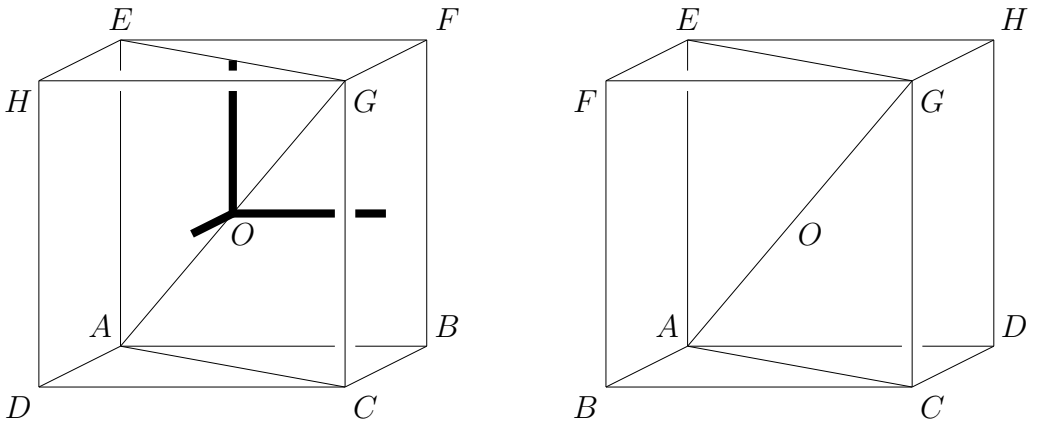


Ecrire les matrices des réflexions dans quelques uns de ces plans de symétrie.

Ecrire les matrices des composées de ces réflexions, en particulier lorsque ces composées sont des rotations. Identifier l'axe et l'amplitude de ces rotations.

Un exemple de solution.

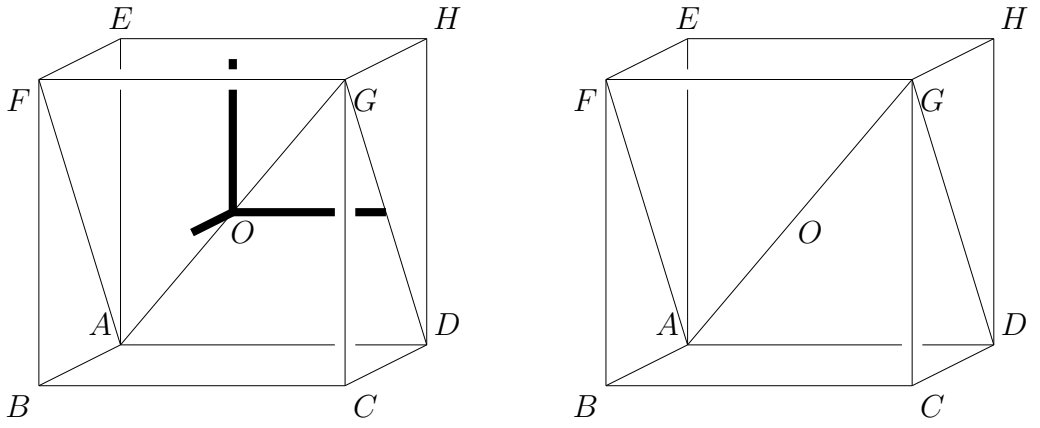
La réflexion s_{ACGE} dans le plan $ACGE$:



est représentée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

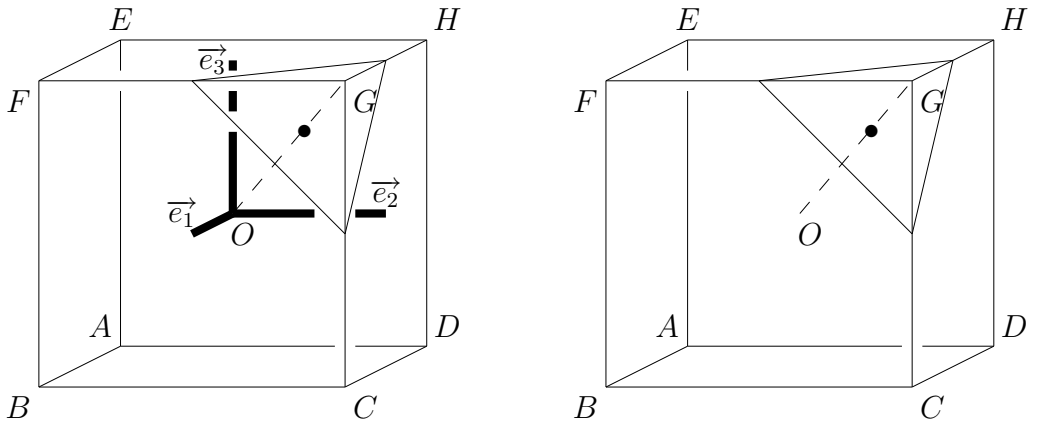
La réflexion s_{ADGF} dans le plan $ADGF$:



est représentée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La composée $s_{ADGF} \circ s_{ACGE}$ de ces deux réflexions est une rotation d'axe AOG et d'amplitude $\frac{2\pi}{3}$:



elle est représentée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etc.

16.9.4 Ces exercices sont-ils vraiment neufs ?

Dès que la représentation matricielle des transformations de l'espace est disponible, on peut reprendre — en les transposant quand c'est nécessaire — les exercices qui ont créé l'« herbier » des transformations du plan et de leur représentation. On se limite ici aux plus faciles ...

Dans tous ces énoncés, l'espace est rapporté à un repère orthonormé dont l'origine est notée O.

Exercice 38 *Quelle est la matrice qui représente :*

- *la symétrie centrale de centre O ?*
- *l'homothétie de rapport k (où k est un nombre réel) et de centre O ?*
- *la réflexion à travers le plan d'équation $x_3 = ax_1 + bx_2$?*
- *la projection orthogonale sur le plan d'équation $x_3 = ax_1 + bx_2$?*
- *la projection orthogonale sur la droite des multiples du vecteur $v := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$?*
- *la projection (oblique) sur le plan d'équation $x_3 = ax_1 + bx_2$ parallèlement au vecteur $v := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$?*
- *une rotation d'amplitude α dont l'axe est un des axes de coordonnées ?*
- *la composée de deux rotations (d'axes différents) dans l'énoncé précédent ?*

16.9.5 Quelques problèmes

Problème 23 *Déterminer le lieu géométrique des points de l'espace équidistants de deux droites d et d' non coplanaires et orthogonales.*

La détermination des plans de symétrie du lieu est éclairante.

Problème 24 *Montrer que la composée de deux rotations d'axes et d'amplitudes quelconques est encore une rotation de l'espace.*

En particulier, caractériser l'axe et l'amplitude de cette rotation composée en termes de l'axe et de l'amplitude des rotations initiales.

Problème 25 *Le cuboctaèdre (d'Archimède) est un solide dont les sommets sont les milieux des arêtes d'un cube C.*

Montrer que les centres de gravité des huit faces triangulaires du cuboctaèdre sont les images des sommets du cube C par une homothétie dont on donnera le centre et le rapport.

Quel est le solide S formé par les huit centres de gravité ?

Quel est le rapport des mesures des volumes de S et C ?

Problème 26 *La mesure du volume d'une pyramide (à base triangulaire, pour fixer les idées) est égale au tiers de la mesure du volume du prisme de même base et de même hauteur.*

Démontrer cette formule « aussi géométriquement que possible ».

Problème 27 *Dans une caisse dont l'intérieur est un cube d'arête 20 cm, on a placé une grosse boule B de diamètre 20 cm, et 8 petites billes touchant B et 3 faces de la caisse.*

Quel est le diamètre des petites billes ?

16.9.6 Une synthèse

16.9.6.1 La représentation matricielle

Les définitions et constructions associées à la représentation matricielle des transformations linéaires de l'espace — à partir de ce qui a déjà été fait pour la représentation matricielle des transformations linéaires du plan — n'appellent aucun commentaire particulier.

Mais c'est cette facilité de généralisation qui fait toute la force de ce qu'on appelle l'algèbre linéaire.

16.9.6.2 Les règles de calcul

On note $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 3×3 à coefficients réels.

Munie des opérations d'addition termes à termes et de multiplication de chaque terme par un même nombre réel, l'ensemble $M_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension 9. Une base est formée des 9 matrices deux à deux distinctes formées chacune de 8 termes nuls et d'un seul terme égal à 1.

On peut interpréter ces opérations et leurs propriétés en termes de l'ensemble des transformations linéaires de l'espace ...

Le produit matriciel correspond à la composition des transformations linéaires. Il est distributif par rapport à l'addition des matrices, et à la multiplication des matrices par un nombre réel.

Par **définition** de ce produit, en notant $\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a, quel que soit la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$:

$$A \circ \mathbf{1} = \mathbf{1} \circ A = A$$

16.9.6.3 Les étrangetés du produit matriciel

Le produit matriciel n'est pas commutatif.

Avec les notations de la solution de la question 16, on peut par exemple observer que

$$s_{ADGF} \circ s_{ACGE} \neq s_{ACGE} \circ s_{ADGF}$$

Les deux rotations possèdent en effet le même axe, mais leurs amplitudes sont opposées. La matrice associée à la rotation de droite est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Il y a beaucoup de diviseurs de 0 dans $M_3(\mathbb{R})$**.**

En effet, **toute** projection orthogonale $p_{a,b}$ sur un plan quelconque (passant par l'origine) $x_3 = ax_1 + bx_2$ vérifie la relation :

$$p_{a,b}^2 := p_{a,b} \circ p_{a,b} = p_{a,b}$$

Donc

$$p_{a,b}^2 - p_{a,b} = p_{a,b} \circ (p_{a,b} - \mathbf{1}) = \mathbf{0}$$

où $\mathbf{0} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Néanmoins

$$p_{a,b} \neq \mathbf{0} \qquad \text{et} \qquad p_{a,b} \neq \mathbf{1}$$

Ces transformations ont été rencontrées dans l'exercice 38.

Il y a beaucoup de racines carrées de 1 dans $M_3(\mathbb{R})$**.**

En effet, **toute** réflexion $s_{a,b}$ dans un plan quelconque (passant par l'origine) $x_3 = ax_1 + bx_2$ vérifie la relation :

$$s_{a,b}^2 := s_{a,b} \circ s_{a,b} = \mathbf{1}$$

Ces transformations ont aussi été rencontrées dans l'exercice 38.

16.10. La marche-arrière

On a déjà rencontré des transformations — donc des matrices — dont la réciproque — ou l'inverse — sont faciles à décrire : les réflexions, les homothéties, les rotations, . . .Cfr. les exercices 29, 31, 30, 35, 37 et 38.

Pour d'autres transformations — les projections par exemple — la réciproque ou l'inverse est manifestement impossible à construire. Cfr. les exercices 32, 33 et 38.

On se propose de régler ce problème définitivement par le biais de l'étude des systèmes d'équations linéaires.

16.10.1 Une combine économique

Question 17 *Trois ouvriers — un charpentier, un électricien et un plombier — deviennent chacun propriétaires d'une maison, et s'organisent pour partager entre eux les travaux de réparations qu'il faut y faire.*

Ils conviennent de consacrer chacun 10 jours à ces travaux, en suivant le schéma ci-dessous :

	Travail réalisé par		
	le charpentier	*l'électricien*	*le plombier*
Nombre de jours de travail dans la maison du charpentier	*2*	*1*	*6*
Nombre de jours de travail dans la maison de l'électricien	*4*	*5*	*1*
Nombre de jours de travail dans la maison du plombier	*4*	*4*	*3*

Mais il leur faut déclarer le salaire perçu pour ce travail, y compris pour celui que chacun d'entre eux va réaliser dans sa propre maison. Les trois compères se mettent d'accord pour que, les travaux achevés, aucun d'entre eux n'ait cependant rien à débourser, c'est-à-dire que chacun reçoive exactement le salaire correspondant à ce qu'il doit payer aux autres (lui-même compris).

Comment doivent-ils s'y prendre ? En particulier, quel salaire journalier chaque ouvrier doit-il déclarer ?

16.10.1.1 Solution résumée

On note :

- c : le salaire journalier, en unité monétaire (abrégé en « *um* »), déclaré par le charpentier,
- e : le salaire journalier, en *um*, déclaré par l'électricien,
- p : le salaire journalier, en *um*, déclaré par le plombier.

Pour les travaux réalisés dans sa maison, le charpentier doit payer à ses collègues

$$2c + 1e + 6p$$

Or le charpentier a travaillé au total 10 jours dans les trois maisons, ce qui lui a rapporté une somme égale à $10c$.

Le charpentier n'aura rien à débourser dès que ces deux sommes s'équilibreront, ce qui s'écrit :

$$2c + e + 6p = 10c$$

En raisonnant pareillement dans le cas de l'électricien et du plombier, on trouve respectivement les équations

$$\begin{aligned} 4c + 5e + p &= 10e \\ 4c + 4e + 3p &= 10p \end{aligned}$$

Les équations ainsi obtenues forment un système de trois équations du premier degré à trois inconnues :

$$\begin{cases} -8c + e + 6p = 0 \\ 4c - 5e + p = 0 \\ 4c + 4e - 7p = 0 \end{cases}$$

Ces équations **ne** sont **pas** indépendantes (par exemple, la troisième équation est la somme des deux premières). La solution du système réduit :

$$\begin{cases} -8c + e = -6p \\ 4c - 5e = -p \end{cases}$$

s'obtient sans grande difficulté :

$$\begin{cases} c = \frac{31}{36}p \\ e = \frac{8}{9}p \end{cases}$$

Cette solution permet de déterminer le salaire journalier que le charpentier et l'électricien devront déclarer, dès qu'ils seront d'accord sur celui du plombier.

16.10.2 Une synthèse

Pour fixer les idées, l'interprétation géométrique ([11]) de tout ce qui suit se fait dans l'espace rapporté à un repère orthonormé (direct) d'origine notée O, et cela même si de telles hypothèses ne sont pas toujours essentielles.

16.10.2.1 L'interprétation matricielle d'un système d'équations 3×3

Un système de 3 équations du premier degré à 3 inconnues

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3 \end{cases}$$

s'écrit matriciellement

$$A \cdot x = b$$

où $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Ici, la question géométrique sous-jacente est : la transformation linéaire A admet-elle une transformation réciproque — qu'on note A^{-1} — et qui est donc caractérisée par la relation :

$$A \circ A^{-1} = \mathbf{1}$$

Cela **équivaut** — en termes de système d'équations — à obtenir une formule de résolution qui soit **linéaire** en b_1, b_2 et b_3. Un peu de perspicacité dans la conduite des calculs permet déjà de s'en convaincre !

16.10.2.2 L'interprétation vectorielle d'un système d'équations 3×3

On peut aussi traduire le problème en langage vectoriel.

([11]) L'interprétation de la résolution d'un système de 3 équations du premier degré à 3 inconnues en termes d'intersections de plans, de droites, ... est suffisamment connue pour qu'on n'y revienne pas ici.

On considère les vecteurs-colonnes $A_1 := \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $A_2 := \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$ et $A_3 := \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$, ce qui permet d'écrire le système sous la forme :

$$x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + x_3 \cdot A_3 = b$$

Cette relation exprime que le vecteur-colonne b doit s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs-colonnes A_1, A_2 et A_3 .

Dès que ces 3 vecteurs-colonnes sont **non coplanaires** ou **linéairement indépendants**, on sait que la solution existe et est unique (cfr. l'annexe de la première partie, pp. 44-45).

16.10.2.3 Le calcul des aires et des volumes

D'autre part, on a aussi obtenu dans la première partie les résultats de géométrie écrite/algèbre visuelle suivants (cfr. le problème 9 et l'exercice 10 des pp. 33-34).

Si $U := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $V := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $W := \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ sont 3 points de l'espace, alors :

- le vecteur

  $$\begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ -(u_1v_3 - u_3v_1) \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

  noté $U \times V$, est perpendiculaire au plan déterminé par les points O, U et V (pourvu — évidemment — qu'il ne soit pas identiquement nul) ;

- la norme de ce vecteur $U \times V$ est la mesure de l'aire du parallélogramme $OUTV$, où $T := U + V$;

- la mesure du volume **orienté** du prisme d'arêtes OU, OV et OW est égale au produit scalaire du vecteur $U \times V$ par le vecteur W, on note $\det(U, V, W)$ ce produit scalaire et on a donc la formule :

$$\det(U, V, W) := (u_2v_3 - u_3v_2) \cdot w_1 - (u_1v_3 - u_3v_1) \cdot w_2 + (u_1v_2 - u_2v_1) \cdot w_3$$

En conséquence, on appelle déterminant d'une matrice $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ le volume orienté déterminé par ses vecteurs-colonnes :

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det(A_1, A_2, A_3)$$

$$= (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \cdot a_{13} - (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) \cdot a_{23} + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \cdot a_{33}$$

On retrouve alors les propriétés (classiques) d'antisymétrie et de (multi)linéarité du déterminant.

On peut aussi vérifier la formule remarquable :

$$\det(A \circ B) = \det A \cdot \det B$$

16.10.2.4 La formule de Cramer et l'existence de l'inverse d'une matrice

On en revient alors au système d'équations originel, écrit sous forme vectorielle :

$$x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + x_3 \cdot A_3 = b$$

En calculant le volume orienté du prisme déterminé par ce(s) vecteur(s) et les vecteurs-colonnes A_2 et A_3, on obtient :

$$\det(x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + x_3 \cdot A_3, A_2, A_3) = \det(b, A_2, A_3)$$

d'où, par antisymétrie :

$$\det(x_1 \cdot A_1, A_2, A_3) = \det(b, A_2, A_3)$$

et par linéarité :

$$x_1 \cdot \det(A_1, A_2, A_3) = \det(b, A_2, A_3)$$

c'est-à-dire $x_1 \cdot \det A = \det(b, A_2, A_3)$. C'est la (première) formule de Cramer.

Etc.

On en déduit l'expression bien connue de l'inverse d'une matrice 3×3 en termes des cofacteurs et du déterminant.

Quant au **calcul** du déterminant, la méthode du pivot est plus économique que la méthode de Cramer, bien que les calculatrices (graphiques) mettent tout le monde d'accord ! Mais on notera que si la méthode du pivot travaille en termes de dépendance linéaire des lignes, la méthode de Cramer utilise quant à elle la dépendance linéaire des colonnes.

16.10.3 Un exercice et deux problèmes . . . économiques

La solution de la question 17 n'est pas entièrement satisfaisante : il se fait que

$$\begin{cases} c = \frac{31}{36}p \\ e = \frac{8}{9}p \end{cases}$$

implique que $p \geqslant 0 \implies c \geqslant 0$ et $e \geqslant 0$. Mais rien n'explique *a priori* pourquoi le système obtenu admet **toujours** une solution positive.

Or, les équations obtenues lors de la résolution peuvent aussi s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{2}{10}c + \frac{1}{10}e + \frac{6}{10}p = c \\ \frac{4}{10}c + \frac{5}{10}e + \frac{1}{10}p = e \\ \frac{4}{10}c + \frac{4}{10}e + \frac{3}{10}p = p \end{cases}$$

ou encore, sous forme matricielle :

$$C \cdot x = x$$

avec $C := \begin{pmatrix} \frac{2}{10} & \frac{1}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{4}{10} & \frac{5}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{4}{10} & \frac{4}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$ et $x := \begin{pmatrix} c \\ e \\ p \end{pmatrix}$.

Ces considérations introduisent le problème suivant.

Problème 28 *On considère une matrice 3×3 C dont tous les termes sont positifs (ce qu'on note $C \geqslant 0$), et dont la somme des termes dans chaque colonne égale 1 ; quelle(s) condition(s) supplémentaire(s) faut-il imposer à la matrice C pour que l'équation*

$$C \cdot x = x$$

admette au moins une solution dont toutes les composantes sont positives (ce qu'on note — pareillement — $x \geqslant 0$) ?

16.10.3.1 Solution résumée

Le système d'équations $(C - \mathbf{1}) \cdot x = 0$ est linéaire homogène. Par hypothèse, la somme des termes dans chaque colonne de la matrice $(C - \mathbf{1})$ égale 0 : ce système admet donc des solutions non identiquement nulles. Il y a alors deux cas possibles.

Supposons d'abord que le système soit de rang 1, c'est-à-dire que **toute** l'information soit concentrée dans **une** équation ([12]), par exemple la première :

$$c_{12} \cdot x_2 + c_{13} \cdot x_3 = (1 - c_{11}) \cdot x_1$$

A tout choix arbitraire de x_2 et x_3 positifs correspond alors une valeur positive de x_1 puisque, par hypothèse : $c_{12} \geqslant 0$, $c_{13} \geqslant 0$ et $1 - c_{11} \geqslant 0$ (car $c_{11} + c_{21} + c_{31} = 1$, $c_{21} \geqslant 0$ et $c_{31} \geqslant 0$). Mais il existe autant de valeurs de x_1, x_2 et x_3 dont les signes **ne** sont **pas** simultanément positifs : géométriquement, cela correspond à ce qu'un plan passant par l'origine ne peut pas être parallèle aux **trois** plans de coordonnées !

Supposons maintenant que le système soit de rang 2, c'est-à-dire que **toute** l'information soit concentrée dans **deux** équations **linéairement indépendantes**, par exemple :

$$\begin{cases} (c_{11} - 1) \cdot x_1 + c_{12} \cdot x_2 = -c_{13} \cdot x_3 \\ c_{21} \cdot x_1 + (c_{22} - 1) \cdot x_2 = -c_{23} \cdot x_3 \end{cases}$$

dont on peut donc supposer que le déterminant $\Delta := (c_{11} - 1)(c_{22} - 1) - c_{21}c_{12}$ est $\neq 0$. Les formules de Cramer fournissent les équations paramétriques de la droite d'intersection des deux plans correspondants :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} c_{12} & c_{13} \\ c_{22} - 1 & c_{23} \end{vmatrix}}{\Delta} \cdot x_3 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \cdot x_3 \\ \\ x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} c_{13} & c_{11} - 1 \\ c_{23} & c_{21} \end{vmatrix}}{\Delta} \cdot x_3 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \cdot x_3 \end{cases}$$

Les hypothèses faites sur la matrice C permettent de vérifier que **tous** les déterminants qui interviennent dans ces formules sont **positifs**. Par exemple, dans le cas de Δ, cela résulte de ce que $0 \leqslant c_{12} \leqslant 1 - c_{22}$ et $0 \leqslant c_{21} \leqslant 1 - c_{11}$, d'où $0 \leqslant c_{12}c_{21} \leqslant (1 - c_{22})(1 - c_{11}) = (c_{11} - 1)(c_{22} - 1)$.

En conséquence, il n'y a aucune condition supplémentaire à imposer à la matrice C.

L'exercice suivant reprend, en le généralisant un peu, le schéma déjà présent dans la question 17.

Exercice 39 *Un complexe industriel se développe autour de trois activités principales : une centrale électrique au fuel, une raffinerie et une ligne de chemin de fer.*

Pour produire 1 um (:= unité monétaire) d'électricité, la centrale utilise :

([12]) Concrètement, ce cas est le plus facilement détecté.

- *0,60 um de fuel provenant de la raffinerie,*
- *0,05 um de transport par le chemin de fer,*
- *0,05 um de sa propre production.*

Pour produire 1 um de fuel, la raffinerie utilise :

- *0,25 um d'électricité,*
- *0,10 um de transport par le chemin de fer.*

La ligne de chemin de fer, pour réaliser un service de transport valant 1 um, utilise :

- *0,55 um d'électricité,*
- *0,20 um de fuel.*

Ce complexe industriel doit livrer à l'extérieur du fuel pour une valeur de 600 000 um et de l'électricité pour une valeur de 250 000 um. Combien devra-t-il produire (en um) d'électricité, de fuel et de service de transport pour réaliser cette commande ?

16.10.3.2 Solution résumée

On note :

- e : la production d'électricité (évaluée en um) nécessaire pour réaliser la commande,
- f : la production de fuel (évaluée en um) nécessaire pour réaliser la commande,
- t : le service de transport (évalué en um) nécessaire pour réaliser la commande.

La valeur de la production d'électricité nécessaire e se décompose en deux parties :

- une partie destinée à honorer la commande, dont la valeur égale donc 250 000 um,
- une partie destinée à la production d'électricité à l'usage interne du complexe, et qui vaut

$$0,05e + 0,25f + 0,55t$$

On en déduit une première équation :

$$0,05e + 0,25f + 0,55t + 250000 = e$$

Pareillement, pour la valeur de la production de fuel f, on obtient l'équation :

$$0,60e + 0,2t + 600000 = f$$

De la même manière, la valeur du service de transport nécessaire à réaliser la commande est décrite par l'équation

$$0,05e + 0,1f = t$$

Après simplification, on obtient un système de trois équations du premier degré à trois inconnues :

$$\begin{cases} 0,95e - 0,25f - 0,55t = 250000 \\ -0,60e + f - 0,2t = 600000 \\ 0,05e + 0,1f - t = 0 \end{cases}$$

Une calculatrice (graphique) en fournit immédiatement la solution :

$$\begin{cases} e = 596100,2786 \ (um) \\ f = 983286,9081 \ (um) \\ t = 128133,7047 \ (um) \end{cases}$$

Mais encore une fois, la solution de ce problème-ci n'est pas entièrement satisfaisante. La solution obtenue est manifestement positive sans que rien n'explique *a priori* **pourquoi** un système de ce genre admet nécessairement une solution positive : y aurait-il par exemple des commandes qui ne soient pas réalisables ?

Or, on peut écrire le système d'équations obtenu lors de la résolution du problème sous la forme matricielle :

$$x - C \cdot x = d$$

ou encore $(\mathbf{1} - C) \cdot x = d$ où $\mathbf{1}$ est la matrice unité, et avec les données du problème original

$$C := \begin{pmatrix} 0,05 & 0,25 & 0,55 \\ 0,60 & 0 & 0,2 \\ 0,05 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \text{ (c'est la « matrice de consommation »),}$$

$$d := \begin{pmatrix} 250000 \\ 600000 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (c'est le « vecteur de demande »),}$$

$$x := \begin{pmatrix} e \\ f \\ t \end{pmatrix} \text{ (c'est le « vecteur de production ([13]) »).}$$

([13]) Cette terminologie provient des sciences économiques, où le type de problème en question est connu comme « le modèle de production ouvert de Leontief ». W. W. Leontief (1906-) est un économiste américain d'origine russe. Son tableau d'échanges inter-industriels (entrées-sorties) lui valut le prix Nobel de sciences économiques en 1973. Leontief a défini les entrées comme étant

Considérons plus généralement une matrice de consommation $C := (c_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$ positive et un vecteur de demande positif $d := \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$, et cherchons à quelle(s) condition(s) le système

$$(\mathbf{1} - C) \cdot x = d$$

admet comme solution un vecteur de production positif ?

Il est clair que, si la matrice $\mathbf{1} - C$ est inversible, le vecteur de production recherché x est donné par :

$$x = (\mathbf{1} - C)^{-1} \cdot d$$

La question est de savoir à quelle(s) condition(s) ce vecteur de production est positif ?

Problème 29 *Démontrer le résultat suivant : il existe un vecteur de production x qui soit positif, et tel que $x > C \cdot x$* ***si et seulement si*** *la matrice $\mathbf{1} - C$ est inversible et son inverse est une matrice positive.*

En déduire l'agréable corollaire suivant : si la matrice de consommation C est telle que la somme de chacune de ses lignes est moindre que 1, alors la matrice $\mathbf{1} - C$ est inversible et son inverse est une matrice positive

Un résumé de la solution du problème 29

Il s'agit de démontrer :

$$\exists\, x \geqslant 0 \text{ avec } x > C \cdot x \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1 - C \text{ est inversible} \\ (1 - C)^{-1} \geqslant 0 \end{cases}$$

L'implication « $\Longleftarrow$ » est presque immédiate.

On **choisit** $x := (\mathbf{1} - C)^{-1} \cdot d$. Comme $x - C \cdot x = d \geqslant 0$, il reste à montrer que $x = C \cdot x$ est impossible.
Or, $x = C \cdot x \implies (\mathbf{1} - C) \cdot x = 0$. Mais la relation $(\mathbf{1} - C) \cdot x = 0$ signifie que les colonnes de la matrice $\mathbf{1} - C$ ne sont pas linéairement indépendantes, d'où $\det(\mathbf{1} - C) = 0$, et cela contredit que la matrice $\mathbf{1} - C$ soit inversible !

L'implication « $\Longrightarrow$ » est moins évidente.

---

les biens et services que chaque secteur de l'économie acquiert auprès des autres secteurs, et les sorties comme étant les produits vendus par une branche aux autres. Cette technique permet ainsi de représenter graphiquement les échanges de biens entre les différentes industries, et permet également aux experts d'analyser, de planifier et de prédire les mutations économiques. Référence : *Encyclopédie Encarta 99.*

On peut d'abord se permettre de supposer que $x > 0$. En effet, si au contraire il existe un indice i pour lequel $x_i = 0$, alors l'hypothèse $x > C \cdot x$ implique que la i^{e} ligne de la matrice $C \cdot x$ est **strictement** négative, ce qui est impossible puisque pour toutes les valeurs des indices : $c_{ij} \geqslant 0$ et $x_j \geqslant 0$.
On considère alors la droite passant par les points de coordonnées $-C \cdot x$ et $x - C \cdot x$: c'est l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées s'écrivent

$$-C \cdot x + k\,(x - C \cdot x - (-C \cdot x)) = -C \cdot x + kx$$

Ainsi, pour $k = 0$, la droite passe par un point dont **toutes** les coordonnées sont **négatives**, tandis que pour $k = 1$, la droite passe par un point dont **toutes** les coordonnées sont **strictement positives**. Si on note λ la plus petite valeur de k telle que le point $-C \cdot x + kx$ ait encore toutes ses coordonnées positives, on a donc $0 \leqslant \lambda < 1$ et $C \cdot x \leqslant \lambda x$. On en déduit $\lim_{n\to\infty} C^n \cdot x = 0$. Cela permet de poser

$$(\mathbf{1} - C)^{-1} = \mathbf{1} + C + C^2 + C^3 + \ldots$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque. La convergence du membre de droite dans $(\mathbf{1} - C)^{-1} = \mathbf{1} + C + C^2 + C^3 + \ldots$ résulte de

$$(\mathbf{1} + C + C^2 + C^3 + \ldots) \cdot x \leqslant (1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \ldots)x = \frac{1}{1-\lambda}x$$

Quant au corollaire, il s'obtient en posant $x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, etc.

16.11. Un retour aux sources

16.11.1 Retour au problème des oiseaux

16.11.1.1 Etude expérimentale de la matrice R

Le logiciel TRANSAFF ([14]) permet d'entreprendre une étude dynamique de la matrice $R := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$ associée à la récurrence linéaire étudiée.

16.11.1.2 Des directions caractéristiques qui sont leur propre image

Une droite passant par l'origine est déterminée comme ensemble des multiples du point ou du vecteur $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Elle est invariante sous l'action de la matrice R si et seulement si il existe un nombre k tel que :

$$R \cdot x = k \cdot x$$

ce qui s'explicite sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} 2x_2 = kx_1 \\ 0,3x_1 + 0,5x_2 = kx_2 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} -kx_1 + 2x_2 = 0 \\ 0,3x_1 + (0,5 - k)\, x_2 = 0 \end{cases}$$

qu'on appelle « système caractéristique » de la matrice R.

Il ne faut pas que ce système soit de rang 2, parce que sinon la seule solution possible serait identiquement nulle, ce qui ne permet pas de déterminer une droite.

Le système est de rang 1 si et seulement si son déterminant est nul, ce qui fournit la condition :

([14]) TRANSAFF est un logiciel du C.D.S. d'un emploi extraordinairement simple et visuellement très instructif concernant la géométrie des transformations linéaires du plan.

$$-k(0,5-k)-2\cdot 0,3=k^2-0,5\cdot k-0,6=0$$

Les deux racines de cette équation du second degré sont :

$$\begin{aligned} k' &= \frac{0,5+\sqrt{2,65}}{2}=1,06394103\ldots \\ k'' &= \frac{0,5-\sqrt{2,65}}{2}=-0,5639410298\ldots \end{aligned}$$

On peut en déduire, pour chaque valeur de k obtenue, la direction « propre » recherchée. Son coefficient angulaire est facile à calculer , grâce à la forme simple de la première équation du système caractéristique :

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{k}{2}$$

On retrouve ainsi les deux directions observées grâce à TRANSAFF :

$$\begin{aligned} \frac{0,5+\sqrt{2,65}}{4} &= 0,5319705149\ldots \\ \frac{0,5-\sqrt{2,65}}{4} &= -0,2819705149\ldots \end{aligned}$$

Le premier de ces coefficients avait déjà été obtenu lors de la résolution du problème initial.

16.11.1.3 Le miracle de la linéarité

Ce miracle, c'est que l'on puisse **comprendre toute la transformation** associée à la matrice R, — c'est-à-dire son effet sur n'importe quel point du plan (des oiseaux) — **à partir de son seul effet sur deux directions** propres.

Notons :

- u : un vecteur directeur de la droite « propre » associée à $k'=1,06\ldots$,
- v : un vecteur directeur de la droite « propre » associée à $k''=-0,5\ldots$.

Comme TRANSAFF le fait voir, l'itération de la transformation R envoie le vecteur u à l'infini (en restant dans la propre direction de u).

En effet, comme $R\cdot u=k'\cdot u$, on en tire

$$R^2\cdot u=R\,(R\cdot u)=R\,(k'\cdot u)=k'\cdot R\cdot u=k'\cdot k'\cdot u=k'^2\cdot u$$

et, plus généralement

$$R^n \cdot u = k'^n \cdot u$$

Or, comme $k' > 1$, on a $\lim_{n\to\infty} k'^n = \infty$, d'où la conclusion.

Pareillement, et toujours comme TRANSAFF le fait voir, l'itération de la transformation R envoie le vecteur v à l'origine (en restant dans la propre direction de v).

En effet, comme $R \cdot v = k'' \cdot v$, on en tire

$$R^2 \cdot v = R\,(R \cdot v) = R\,(k'' \cdot v) = k'' \cdot R \cdot v = k' \cdot k'' \cdot v = k''^2 \cdot v$$

et, plus généralement

$$R^n \cdot v = k''^n \cdot v$$

Or, comme $|k''| < 1$, on a $\lim_{n\to\infty} k''^n = 0$, d'où la conclusion.

Ce que TRANSAFF montre enfin, c'est que, quelles que soient les données initiales $d := \begin{pmatrix} i_0 \\ a_0 \end{pmatrix}$ d'une itération, son image dans le plan des oiseaux finira par « se coucher » sur la droite de coefficient angulaire 0,53..., parce que la racine k' l'« emporte à l'infini » !

Plus précisément, le vecteur d est une combinaison linéaire des vecteurs u et v, c'est-à-dire qu'il existe deux nombres d_1 et d_2 tels que :

$$d = d_1 \cdot u + d_2 \cdot v$$

On calcule alors l'effet de la transformation R sur le vecteur choisi :

$$\begin{aligned} R \cdot d &= R \cdot (d_1 \cdot u + d_2 \cdot v) \\ &= d_1 \cdot R \cdot u + d_2 \cdot R \cdot v \\ &= d_1 \cdot k' \cdot u + d_2 \cdot k'' \cdot v \end{aligned}$$

En itérant, on trouve :

$$\begin{aligned} R^2 \cdot d &= R \cdot (d_1 \cdot k' \cdot u + d_2 \cdot k'' \cdot v) \\ &= d_1 \cdot k' \cdot R \cdot u + d_2 \cdot k'' \cdot R \cdot v \\ &= d_1 \cdot k' \cdot k' \cdot u + d_2 \cdot k'' \cdot k'' \cdot v \\ &= d_1 \cdot k'^2 \cdot u + d_2 \cdot k''^2 \cdot v \end{aligned}$$

Et, plus généralement :

$$R^n \cdot d = d_1 \cdot k'^n \cdot u + d_2 \cdot k''^n \cdot v$$

Comme $\lim_{n\to\infty} k'^n = \infty$ et $\lim_{n\to\infty} k''^n = 0$, la conclusion s'ensuit.

Ce calcul montre aussi que le signe négatif de k'' — dont la valeur absolue est < 1 — se traduit dans l'oscillation des images autour de la droite propre « dominante » (une asymptote d'hyperbole ...)

16.11.2 Les lois de mariage chez les indiens Natchez

Dans des domaines inattendus, la représentation matricielle se révèle pertinente.

Problème 30 *La tribu des indiens Natchez comporte quatre clans ou classes d'individus : les Soleils, les Nobles, les Honorables et les Malodorants (sic !) Les règles de mariage et de descendance propres à cette tribu sont résumées dans le tableau ci-dessous, où « H » signifie homme, « F » signifie femme, « E » signifie enfant et « x » signifie que le mariage de ce type est interdit.*

	H. Soleil	*H. Noble*	*H. Honorable*	*H. Malodorant*
F. Soleil	*x*	*x*	*x*	*E. Soleil*
F. Noble	*x*	*x*	*x*	*E. Noble*
F. Honorable	*x*	*x*	*x*	*E. Honorable*
F. Malodorant(e)	*E. Noble*	*E. Honorable*	*E. Malodorant*	*E. Malodorant*

La question est de savoir si la répartition des classes d'individus reste (approximativement) stable dans cette tribu ?

Afin de simplifier un peu la situation, on fait les hypothèses additionnelles suivantes :

- *à chaque génération, chaque clan comporte un nombre égal de femmes et d'hommes,*
- *chaque individu ne se marie qu'une et une seule fois, et le mariage est obligatoire (!),*
- *chaque couple donne naissance à exactement un fils et une fille,*
- *la population totale est stable, c'est-à-dire : les naissances compensent les décès.*

16.11.2.1 Solution (résumée)

On note :

- S_n : le nombre d'hommes du clan du Soleil à la génération n,
- N_n : le nombre d'hommes du clan des Nobles à la génération n,
- H_n : le nombre d'hommes du clan des Honorables à la génération n,
- M_n : le nombre d'hommes du clan des Malodorants à la génération n.

Il est utile de disposer d'une liste de tous les types de mariages possibles, avec le clan des enfants qui en naissent (on a noté en gras les représentants mâles) :

$$\overbrace{\mathbf{M}/\mathrm{S}}^{\mathbf{S}-\mathrm{S}} \quad \overbrace{\mathbf{M}/\mathrm{N}}^{\mathbf{N}-\mathrm{N}} \quad \overbrace{\mathbf{M}/\mathrm{H}}^{\mathbf{H}-\mathrm{H}} \quad \overbrace{\mathbf{M}/\mathrm{M}}^{\mathbf{M}-\mathrm{M}} \quad \overbrace{\mathbf{S}/\mathrm{M}}^{\mathbf{N}-\mathrm{N}} \quad \overbrace{\mathbf{N}/\mathrm{M}}^{\mathbf{H}-\mathrm{H}} \quad \overbrace{\mathbf{H}/\mathrm{M}}^{\mathbf{M}-\mathrm{M}}$$

On observe d'abord que le nombres d'hommes du clan des Soleils est constant de générations en générations, donc :

$$S_{n+1} = S_n$$

Comment déterminer le nombre d'hommes du clan des Nobles à la génération $n+1$?

Ils proviennent de couples du type $\mathbf{M}/\mathrm{N}$ ou $\mathbf{S}/\mathrm{M}$, mais le **nombre** de tels couples égale la somme du nombre d'**hommes** du clan des Nobles et du nombre d'hommes du clan des Soleils à la génération n, d'où la relation :

$$N_{n+1} = N_n + S_n$$

Pareillement les hommes du clan des Honorables à la génération $n+1$ proviennent de couples du type $\mathbf{M}/\mathrm{H}$ ou $\mathbf{N}/\mathrm{M}$, et le **nombre** de tels couples égale la somme du nombre d'hommes du clan des Nobles et du nombre d'**hommes** du clan des Honorables à la génération n, d'où la relation :

$$H_{n+1} = N_n + H_n$$

Un raisonnement analogue pour déterminer le nombre d'hommes du clan des Malodorants à la génération $n+1$ est malaisé. Mais comme la population totale est supposée stable, on a la relation :

$$S_{n+1} + N_{n+1} + H_{n+1} + M_{n+1} = S_n + N_n + H_n + M_n$$

d'où on tire :

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= S_n + N_n + H_n + M_n - S_{n+1} - N_{n+1} - H_{n+1} \\ &= S_n + N_n + H_n + M_n - S_n - (S_n + N_n) - (N_n + H_n) \\ &= -S_n - N_n + M_n \end{aligned}$$

On en déduit les relations de récurrence linéaire :

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n \\ N_{n+1} = S_n + N_n \\ H_{n+1} = N_n + H_n \\ S_{n+1} = -S_n - N_n + M_n \end{cases}$$

auxquelles est associée la matrice 4×4 :

$$L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une calculatrice graphique donne immédiatement

$$L^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ -6 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 \\ -10 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 1 & 0 \\ -15 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & 6 & 1 & 0 \\ -21 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etc.

On déduit de ces résultats :

$$L^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 & 0 \\ 1+2+\ldots-(n-1) & n & 1 & 0 \\ -(1+2+\ldots+n) & -n & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2} & n & 1 & 0 \\ -\frac{n(n+1)}{2} & -n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice permet de décrire la répartition des hommes de chaque clan en fonction de la répartition initiale :

$$\begin{cases} S_n = S_0 \\ N_n = n \cdot S_0 + N_0 \\ H_n = \frac{n(n-1)}{2} \cdot S_0 + n \cdot N_0 + H_0 \\ M_n = M_0 - \frac{n(n+1)}{2} \cdot S_0 - n \cdot N_0 \end{cases}$$

On en déduit que le système de mariage ([15]) adopté dans la tribu des indiens Natchez devait mener à l'extinction du clan des Malodorants, et donc de la tribu. En effet, il existe un nombre (entier) n tel que

$$M_n = M_0 - \frac{n(n+1)}{2} \cdot S_0 - n \cdot N_0 \leqslant 0$$

([15]) ... Du moins sous la forme présentée ici ...

puisque cette condition revient à déterminer n de telle sorte que

$$M_0 \leqslant n\left(N_0 + \frac{n+1}{2} \cdot S_0\right)$$

ce qui est évidemment toujours possible.

Comme tous les mariages autorisés doivent comporter un homme ou une femme du clan des Malodorants, dès que ceux-ci ont disparu les mariages deviennent impossibles et la tribu elle-même est alors menacée d'extinction.

16.11.2.2 Une remarque et un prolongement

On peut observer que $L = \mathbf{1} + T$, où $\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice unité 4×4 et $T := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme on vérifie facilement que $T^3 = \mathbf{O}$, on en tire

$$L^n = \mathbf{1} + n \cdot T + \frac{n(n-1)}{2} \cdot T^2$$

Etc.

D'autre part, si on connait la répartition des clans dans la tribu à une époque (une génération) quelconque, on peut remonter dans le temps et calculer la répartition de ces clans dans le passé, en inversant suffisamment de fois la matrice L.

Le mot de la fin ...

Le mathématicien suisse Beno Eckmann a su expliquer comment une apparente abstraction peut faciliter l'accès à la réalité. Il semble difficile de trouver mieux pour achever ce module consacré à l'algèbre linéaire : cette forme réaliste, effective de la géométrie.

Vous me permettrez donc de voir dans les mathématiques non seulement un instrument très utile pour les sciences et la technique, non seulement le langage qui nous permet de mettre en relations les phénomènes, de formuler des lois et d'en tirer les conséquences, mais beaucoup plus : J'y vois l'expression de notre façon de penser. *Et si le mathématicien, comme un géographe qui ne se contente pas de connaître la géographie de son village natal, semble s'éloigner de plus en plus des schémas ordinaires et ose aller d'une abstraction et généralisation à l'autre, il ne s'éloigne pas plus pour cela du réel ; au contraire, il crée de nouvelles possibilités de penser, et de voir et comprendre notre monde.*

B. Eckmann — L'idée de dimension ; Revue de Théologie et Philosophie, 127 (1943), 3-17.

Bibliographie ([16])

Collection Dimathème, Livres de Première et de Terminale, (Géométrie-Algèbre), Editions Didier, Paris, 1991-1992.

Collection Fractale. Mathématiques, Livre de Première S. et E., (Géométrie), Bordas, Paris, 1991.

Collection Terracher. Mathématiques, Livres de Première et de Terminale (Géométrie), Hachette, Paris, 1991.

SBPMef, *Matrices et produit scalaire*, Dossier d'exploration didactique n° 5, 1997.

H. Anton, C. Rorres — *Applications of Linear Algebra*, John Wiley and Sons, New York, 1977.

J. Bair, R. Hinnion, D. Justens — *Applications économiques au service de la mathématique*, SBPMef, 1989.

G. Dethier — *Les isométries de l'espace, Traité suivi d'exercices résolus*, Brochure 316/71, Ministère de l'Education Nationale, Organisation des Etudes, 1987, 160 pages.

S. Goldberg — *Introduction to Difference Equations. With Illustrative Examples from Economics, Psychology and Sociology*, Dover Publications, New York, 1986.

G. E. Martin — *Transformation Geometry. An Introduction to Symmetry*. Springer Verlag, New York, Heidelberg, ..., 1982.

G. Noël — *Groupes d'isométries des polyèdres*. Notes rédigées par N. Lambelin, Université de Mons-Hainaut (octobre 1981), 53 pages.

G. Noël, F. Pourbaix, P. Tilleuil — *L'algèbre linéaire au troisième degré du secondaire*, Rapport final d'un contrat de recherche financé par le Ministère de la Communauté Française à l'université de Mons-Hainaut (1996-1997), 266 pages. — Un résumé de ce rapport a été publié dans *Le point sur la recherche en éducation*, 4, (1997), 11–27, et reproduit dans *Mathématique et Pédagogie*, 116, (1998), 5–24.

Y. Sortais, R. Sortais — *Géométrie de l'espace et du plan. Synthèse de cours. Exercices résolus*, Hermann, Paris, 1993.

([16]) Il s'agit de la bibliographie propre à ce module et qui, en tant que telle, faisait partie des notes remises aux enseignants. Une bonne part de ces références est consultable à la bibliothèque du CDS/UMH, du CREM, ...

Cinquième partie

L'évaluation

Chapitre 17

Généralités

17.1 Un vieux problème ... jamais résolu 577
17.2 Que veut-on évaluer ? 578
17.2.1 Evaluer des comportements 579
17.2.2 Un problème de stabilité 581
17.3 Que veut-on faire des résultats de l'évaluation ? 584
17.3.1 L'évaluation formative 585
17.3.2 L'évaluation certificative 586
17.4 Comment évaluer ? 588
17.4.1 Choisir des questions 589
17.4.2 Noter les prestations des élèves 590
17.5 Le problème de l'évaluation des résolutions de problèmes 593
17.6 Résumé des chapitres suivants 595

17.1. Un vieux problème . . . jamais résolu

La littérature consacrée à l'évaluation remplirait des bibliothèques. Il serait cependant hasardeux d'affirmer qu'il y ait aujourd'hui accord sur les principes et surtout sur les méthodes de l'évaluation, même si d'importants efforts de clarification ont incontestablement été fournis par de nombreux auteurs depuis 20 ou 30 ans. Invités — souvent de façon prématurée — à modifier leurs pratiques en appliquant des réformes insuffisamment expérimentées, les enseignants ont pour l'essentiel conservé leurs habitudes derrière la façade d'une présentation modernisée des « bulletins ».

Faute de la compétence nécessaire et d'une connaissance approfondie de la littérature, il ne nous est pas possible ici de dresser l'état de la question. Nous nous contenterons — sans prétendre à aucune originalité — de formuler un certain nombre d'observations naïves, liées — autant que possible — au nouveau (?) point de vue « *apprentissage de compétences* ». Bien entendu, nous nous centrerons sur le cas des mathématiques, ce qui n'empêche que certaines de nos remarques pourraient s'appliquer à d'autres disciplines.

Dans tout acte d'évaluation, plusieurs questions — non indépendantes entre elles — doivent être abordées.

- Que veut-on évaluer ?
- Que veut-on faire des résultats de l'évaluation ?
- Comment évaluer ?

Il peut paraître étonnant que nous considérions la question « Comment évaluer ? » en dernier lieu, à la suite de « Que veut-on faire des résultats de l'évaluation ? ». C'est que la façon d'évaluer dépend précisément de ce que l'on veut faire des résultats : on n'évalue pas de la même manière dans le cas d'une évaluation formative que dans le cas d'une évaluation certificative.

17.2. Que veut-on évaluer ?

Dans un enseignement qui se fixe comme objectif l'apprentissage de compétences par les élèves, il semble assez naturel que l'évaluation porte sur l'acquisition de ces compétences. Il est donc important de souligner en premier lieu que

> Ce ne sont pas les élèves que l'on évalue,
> mais l'efficacité des compétences qu'ils ont acquises.

Évaluer les élèves serait porter un jugement, ou tout au moins une appréciation, sur des individus en tant que tels, des individus qui peuvent encore évoluer fortement. Mais alors, qu'évaluons-nous ?

17.2.1 Evaluer des comportements

On ne voit pas comment il serait possible d'évaluer l'acquisition d'une compétence par un élève sans demander à celui-ci d'avoir certains comportements observables en réponse à certaines questions.

On ne peut évaluer que des comportements observables.

Ce principe *behaviouriste* ne doit pas nous amener à accorder une place exclusive à l'apprentissage de comportements. Dès lors qu'une compétence est *l'aptitude à mettre en œuvre un ensemble organisé de savoirs, de savoir-faire et d'attitudes permettant d'accomplir un certain nombre de tâches*, et qu'un concept rassemble des savoirs et des procédures, nous pouvons considérer qu'une compétence est basée sur la mise en œuvre d'un ou plusieurs concepts.

Plusieurs remarques s'imposent :

1. Comme un animal, un enfant peut être dressé à reproduire certains comportements de façon plus ou moins efficace. L'observation de l'utilisation correcte de procédures ne permet donc pas de conclure automatiquement à l'acquisition des concepts sous-jacents.
2. Pour permettre à l'élève d'avoir des comportements efficaces, un concept ne doit que rarement avoir atteint une forme « définitive » (pour autant qu'une telle chose soit possible). Certains modèles mentaux intermédiaires suffisent pour résoudre un certain nombre de problèmes.

   EXEMPLE 17.2.1 *Il n'est pas nécessaire d'avoir exclu le nombre 1 de la liste des nombres premiers pour effectuer les décompositions en facteurs premiers utiles dans le calcul des fractions.*

3. Si un concept apparaît insuffisamment formé pour que l'élève puisse faire face aux problèmes qui lui sont soumis, l'évaluation doit s'efforcer de déterminer quel stade a été atteint. En particulier, quel modèle mental l'élève s'est-il forgé ? Les comportements observés, les procédures utilisées, doivent permettre de répondre à cette question.

4. Un concept peut être mis en œuvre à travers des procédures différentes mais équivalentes en ce qu'elles fournissent les mêmes résultats à partir des mêmes données. On connaît par exemple plusieurs méthodes de multiplication écrite. L'évaluation doit donc être organisée de manière à permettre à l'élève d'appliquer éventuellement une procédure que l'examinateur n'a pas prévue.

Toute évaluation porte sur des comportements et présente de ce fait un caractère temporaire, c'est une « photographie instantanée » comme on disait autrefois. Mais cette photographie n'est-elle pas parfois floue ? Il est bien connu qu'un élève peut en fonction du contexte avoir des réactions différentes à une même sollicitation.

17.2.2 Un problème de stabilité

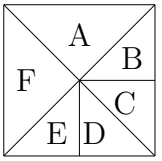
Différentes études de didactique expérimentale des mathématiques (voir notamment [90], [121]) ont mis en évidence, entre autres, les phénomènes suivants :

- Il suffit parfois de permuter deux questions d'un questionnaire pour que les taux de réussite à l'une (au moins) de ces deux questions soient fortement modifiés.
- De façon analogue, si un enseignant juge une question difficile, il sait très bien qu'en la faisant précéder d'une question préparatoire il est souvent possible d'aiguiller l'élève vers la solution, alors même que cette question préparatoire n'est pas nécessairement en rapport direct avec la question principale.
- Une question portant sur un sujet mal maîtrisé par un élève peut induire chez celui-ci une régression l'amenant à commettre une erreur que l'on aurait pu croire disparue.
- Si en répondant à un questionnaire, un élève arrive lors de la résolution d'une question à un résultat en contradiction avec celui obtenu à une question précédente, ou avec un fait mathématique connu, un « retour en arrière » est parfois observé qui amène à la correction d'une erreur qui — sinon — aurait subsisté.

Pour illustrer certains des comportements qui viennent d'être décrits, contentons-nous de relater une expérience datant de 1980 (voir [105]) :

EXEMPLE 17.2.2 *Lors d'une étude sur l'intuition en probabilité, une question de calcul avait été posée à un échantillon d'environ 180 élèves de 6e année de l'enseignement secondaire général. La question admettait les deux variantes indiquées ci-dessous, chaque élève n'ayant à répondre qu'à l'une d'entre elles.*

- *Variante A : Je lance sans viser un pion trois fois de suite sur ce carré :*



Quelle est la probabilité de faire apparaître la suite ABF ?

- *Variante B : La situation est la même, mais le pion est lancé 6 fois et on demande la probabilité de la suite ABCDEF.*

Les taux de réussite à ces deux variantes ne sont pas très différents : 39% pour la variante A, 34 % pour la variante B. Les deux variantes semblent en effet — à première vue — du même niveau de difficulté : si la seconde nécessite le calcul d'un produit de 6 facteurs alors que la première n'en fait intervenir que 3, on peut penser qu'il n'y a là, pour des élèves de dernière année du secondaire, rien qui justifie une différence de réussite significative. Tout au plus doit-on s'attendre à rencontrer un plus grand nombre de mauvaises réponses dues à des erreurs de calcul. C'est apparemment ce qui se passe.

Une étude plus fine des réponses, portant sur les comportement erronés qui sont apparus, met cependant en évidence des phénomènes intéressants. On peut ainsi se demander si les élèves ont appliqué une règle d'addition ou une règle de multiplication. Dans la variante A, les élèves ayant appliqué une règle d'addition sont repérables à la réponse fournie : $\frac{5}{8}$. Cette réponse est le fait de 32% des élèves.

Mais dans la variante B, ce pourcentage n'est que de 8%. Nous expliquons cela par le fait que le comportement d'addition fournit cette fois 1 comme résultat, et que les élèves connaissaient le fait que 1 est la probabilité de l'événement certain. La plupart des élèves qui ont réalisé une addition ont alors abandonné cette méthode et se sont tournés vers autre chose.

Certains ont réalisé une multiplication : le taux d'apparition de ce comportement (y compris les bonnes réponses) passe de 47% pour la variante A à 56% pour la variante B. Mais surtout, beaucoup ont opté pour une équiprobabilité en répondant $\frac{1}{2}$. Ce comportement est le fait seulement de 6% dans la variante A, mais de 34% dans la variante B.

Dans cet exemple, nous voyons intervenir le phénomène de retour en arrière après la constatation d'une contradiction avec un fait connu et celui de régression par réapparition d'une erreur plus grossière.

Il faut aussi tenir compte de ce que le stress de l'examen ou même des circonstances éventuellement totalement étrangères au cours de mathématique ou à l'école, sont susceptibles de modifier profondément le comportement d'un élève.

Nous résumerions volontiers ces constatations en disant que

> le comportement d'un élève apparaît souvent comme une fonction discontinue d'un certain nombre de paramètres qui ne nous sont pas tous connus et *a fortiori* que nous ne contrôlons pas tous. (A moins qu'il ne s'agisse de « chaos déterministe », ce qui revient à peu près au même.)

Nous constatons donc que

nous devons évaluer la stabilité des comportements.

Bien entendu, nous devons d'abord nous demander quel degré de stabilité nous exigeons pour déterminer si une compétence est acquise. L'exemple classique du pilote d'avion de ligne nous fait prendre conscience de ce que la stabilité d'un comportement doit dans certains cas être absolue : pour recevoir son brevet, le candidat-pilote ne peut se contenter de réussir 95% de ses décollages et de ses atterrissages !

Des trois phases distinguées par A. Sfard lors de la formation d'un concept (et des compétences qui lui sont associées), c'est au cours de la phase de réification que la stabilité peut être atteinte. Par contre, au cours des phases précédentes, des images mentales différentes se succèdent, s'affinent, le concept est en formation, les comportements sont instables.

Pour vérifier l'acquisition d'une compétence, c'est-à-dire la stabilité des comportements associés, nous devons

- soit répéter l'évaluation en faisant varier le contexte,
- soit vérifier autrement que le stade de réification a été atteint, donc que le ou les nouveaux concepts sont effectivement devenus des objets auxquels de nouvelles procédures peuvent s'appliquer.

La seconde possibilité suppose que les différentes phases (caractérisées notamment par des comportements d'erreur spécifiques) qui marquent l'apprentissage de chaque nouveau concept mathématique soient bien connues, ce qui est loin d'être toujours le cas.

Par ailleurs, si pour être pleinement conceptualisée une notion nouvelle nécessite que de nouvelles procédures — d'un niveau plus élaboré — lui soient appliquées, amorçant ainsi le début d'un autre processus de conceptualisation, l'idée même de *compétence* TERMINALE devient sujette à caution. De façon plus précise, l'enseignement devrait être poussé au-delà des compétences déclarées terminales par les textes officiels sans quoi leur *certification* ne pourrait être que douteuse. C'est parfois — faut-il le dire ? — ce que montrent les résultats obtenus par les étudiants lorsqu'ils abordent l'enseignement supérieur. Mais cette remarque nous amène au paragraphe suivant.

17.3. Que veut-on faire des résultats de l'évaluation ?

La distinction entre *évaluation formative* et *évaluation certificative* est bien connue. Nous ne la rappellerons donc pas en détails ici. Dans ce qui précède, nous n'avons pas distingué les deux aspects de l'évaluation. Ils sont au surplus parfois difficiles à distinguer.

Lorsque nous demandons qu'à travers les comportements erronés d'un élève on détecte quelle phase de conceptualisation il a atteinte sur un sujet donné, nous faisons incontestablement de l'évaluation formative puisque nous devrions pouvoir en déduire un traitement de remédiation approprié. Mais si on parvient à surmonter d'évidentes difficultés matérielles, pourquoi un diplôme ne pourrait-il pas rassembler de telles informations en ce que nous appellerions le « profil cognitif » d'un individu ? A l'employeur de décider alors si ce profil lui convient. Il s'agirait bien dans ce cas d'une évaluation certificative. A l'heure actuelle, ce profil cognitif se réduit à une note ([1]), un pourcentage. Quel usage un employeur peut-il faire de ce renseignement imprécis ?

([1]) Dans ce travail, nous utiliserons indifféremment les expressions *note, notation* utilisées en France et les expressions *cote, cotation* utilisées dans le même sens en Belgique.

17.3.1 L'évaluation formative

Elle a toujours été pratiquée, consciemment ou non, formellement ou non. En fait chaque fois qu'un enseignant détecte chez un élève l'apparition d'un comportement erroné et prend les mesures adéquates pour le rectifier, il pose un acte d'évaluation formative. Il n'est pas nécessaire pour cela que l'évaluation ait été quantifiée, c'est-à-dire que l'élève ait fait l'objet d'une note numérique.

La pratique de la note lors d'une évaluation formative, en dramatisant la situation, en culpabilisant éventuellement l'élève, aurait plutôt l'effet inverse de celui qui est recherché. Le but est en effet d'abord *d'exploiter l'erreur d'un élève en vue de le faire progresser dans un processus de conceptualisation*. Par exemple, on peut être amené à lui montrer qu'il s'est formé une image mentale qui lui permet certes de résoudre de façon correcte un certain nombre de problèmes, mais qui s'avère insuffisante et l'amène à des erreurs dans le cas d'autres situations problématiques.

EXEMPLE 17.3.1 *Déterminer les asymptotes éventuelles de la fonction* $x \mapsto |x|$.

La plupart des élèves de 6e répondront à cette question que la fonction donnée n'admet pas d'asymptote. Leur image mentale d'asymptote est celle de « droite ayant en commun avec une courbe un et un seul point situé à l'infini ». Quelques-uns — peut-être plus accrochés à des procédures — rechercheront des asymptotes obliques en calculant $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|}{x}$ et trouveront les deux droites $y = x$ et $y = -x$. Un résultat analogue peut être obtenu pour la fonction $\frac{\sin x}{x}$.

La mise en évidence de cette contradiction et la discussion qui en résulte permettent de dépasser l'image mentale primitive de « droite tangente à l'infini » et de la remplacer par celle de « meilleure approximation de la courbe par une droite ». Quelle droite pourrait le mieux approcher une droite sinon cette droite elle-même ?

C'est en fait un concept d'approximation qui commence ainsi à se former.

L'évaluation formative n'a de signification que durant un apprentissage. Elle doit être vécue par l'élève comme une aide qui lui est fournie.

17.3.2 L'évaluation certificative

Elle a deux aspects :

1. du point de vue de la société, elle a pour but de *sélectionner* les individus en déterminant *quelle place active* ils sont capables *de prendre dans la vie économique, sociale et culturelle*.
2. du point de vue de l'élève, elle entraîne une *valorisation* ou une *dévalorisation*.

Ces deux aspects soulèvent des problèmes délicats, de nature socio-politiques qui dépassent largement le point de vue technique que nous adoptons ici. Nous nous contenterons de remarquer que les documents relatifs aux *socles de compétences* et aux *compétences terminales* fixent les contenus sur lesquels peut porter la certification, sans préciser de quelle façon celle-ci s'effectue.

Plusieurs questions se posent :

1. Faut-il évaluer les compétences dites *transversales*. Dans [30], J. Beckers estime *inopportun et même dangereux de prévoir une évaluation de ces compétences pour elles-mêmes, en dehors de tout contenu.* En fait, à l'heure actuelle, personne ne voit clairement comment on pourrait procéder à une telle évaluation.
2. Quel est le seuil de réussite à atteindre afin d'obtenir la certification ? En d'autres termes, faut-il que les socles ou les compétences terminales soient atteints à 100%, 95%, 50% ou tout autre pourcentage qui serait fixé pour toutes les écoles ?

   Si les socles et les compétences terminales sont des contenus *minimaux*, dont la fixation est destinée à assurer l'homogénéité de la formation des élèves, il serait logique d'exiger qu'ils soient réussis à 100%. Dans ce cas il n'y aurait plus que deux catégories d'élèves : ceux qui échouent et ceux qui réussissent.

   On peut se demander si la certification fournirait alors les informations suffisantes permettant aux élèves de choisir valablement une orientation d'études dans l'enseignement supérieur. À moins que l'on considère que les examens puissent comporter deux parties : une serait limitée aux contenus minimaux et assurerait la certification. L'autre pourrait déborder des contenus minimaux et permettrait aux élèves de donner le meilleur d'eux-mêmes dans les branches de leur choix.

   Si les socles et les compétences terminales ne sont pas des contenus *minimaux*, on ne distingue plus clairement quelle est leur raison d'être.

3. Comment évaluer des compétences globales telles que la résolution de problèmes ? Nous reviendrons sur cette question dans la suite, mais d'ores et déjà nous pouvons remarquer qu'une compétence globale N'EST PAS la somme des compétences particulières qu'elle met en œuvre. Pour réussir une épreuve destinée à évaluer une compétence globale, un élève doit non seulement maîtriser les compétences particulières, mais il doit aussi être capable de déterminer celles qui doivent intervenir et de les coordonner. La forme traditionnelle d'examen se prête mal à des tâches de cette nature.

17.4. Comment évaluer ?

Ici aussi, nous distinguerons l'évaluation formative et l'évaluation certificative. Pour la première, *tous les moyens sont permis*. Selon la formule de J. Beckers ([30]), ils ne relèvent que de la responsabilité de l'enseignant.

Encore peut-on attirer l'attention sur quelques points. Nous avons déjà remarqué que la note chiffrée est inopportune dans ce cas. Ce qui est plus important est que l'enseignant connaisse bien les types d'erreurs que ses élèves sont susceptibles de commettre, de façon à les repérer et les exploiter rapidement. Parmi les outils pédagogiques à mettre à la disposition des enseignants devraient figurer des compte-rendus des travaux des chercheurs qui étudient les processus d'apprentissage et ont obtenu dans le cas de l'enseignement des mathématiques des résultats non négligeables depuis une vingtaine d'années.

L'enseignant doit aussi bien connaître quels sont les objectifs qu'il veut atteindre et qui ne sont pas nécessairement ceux des socles ou des compétences terminales, parfois trop imprécis.

Quant à la technique d'évaluation certificative, nous pourrions la résumer comme suit :

1. Etablir une liste de questions représentatives des contenus à évaluer et des niveaux visés.
2. Soumettre ces questions aux élèves, oralement ou par écrit, en classe ou à domicile.
3. Noter les prestations des élèves.

Mais tout cela ne va pas sans de grosses difficultés.

17.4.1 Choisir des questions

Comment s'assurer que les questions choisies sont adéquates ? Il est prévu d'établir des banques d'exercices standardisés pouvant servir de référence. Il sera nécessaire que ces exercices standardisés soient étalonnés sur une population d'élèves suffisamment importante. Mais même si les enseignants ont à leur disposition une telle banque d'exercices, les problèmes ne sont pas nécessairement résolus.

En rédigeant un exercice sur un modèle figurant dans la banque, on peut facilement sans y prendre garde apporter une modification même légère dont les conséquences sont importantes. Par ailleurs, un ensemble d'exercices standardisés ne constitue pas un test standardisé. Comme nous l'avons déjà signalé, les interactions entre les exercices d'un même questionnaire peuvent modifier fondamentalement les comportements des élèves. N'oublions pas que ceux-ci *apparaissent souvent comme des fonctions discontinues des paramètres de la situation, notamment du contexte.*

Pas plus que les examens traditionnels, les exercices standardisés ne testeront pas les élèves, ni leurs compétences mais uniquement des comportements ponctuels. Le problème de la stabilité de ces comportements demeure.

17.4.2 Noter les prestations des élèves

17.4.2.1 Des notes numériques ?

La notation traditionnelle repose sur l'attribution d'une note numérique (sur 10, 20 ou 100, peu importe).

Dans [77], Georges Glaeser fait un procès convaincant de cette pratique à laquelle il reproche six défauts majeurs.

1. Il n'y a aucune raison pour que les performances d'un élève lors d'un test puissent être représentées valablement par une note numérique, c'est-à-dire dans un espace de dimension 1. En dehors de cas marginaux, ce sont des notes de nature vectorielle qu'il faudrait utiliser pour rendre compte des différentes facettes des comportements d'un élève.
2. Les notes sont trop précises. On sait depuis les premières études de docimologie que des correcteurs différents peuvent attribuer à une même copie des notes non seulement différentes, mais même dont les écarts sont plusieurs fois supérieurs à l'intervalle qui sépare deux notes consécutives sur l'échelle utilisée.
3. Les notes ne devraient pas constituer un ensemble totalement ordonné. Tout simplement parce que ce n'est pas le cas non plus des élèves.
4. Les calculs effectués sur des notes n'ont aucune signification. Ajouter la note obtenue en histoire à celle obtenue en mathématique est aussi absurde que d'ajouter des pommes et des poires. Il en est de même au sein des mathématiques : il n'y a de sens à additionner les notes attribuées à deux questions que si celles-ci testent la même capacité. Si par contre, elles testent des aptitudes non corrélées, l'addition (ou la moyenne) n'a aucun sens.
5. L'échelle numérique n'est pas nécessairement linéaire : il peut y avoir un écart plus grand entre deux performances notées 7/10 et 8/10 qu'entre deux performances notées 5/10 et 6/10.
6. La barre de sélection est placée arbitrairement. Faut-il faire échouer les élèves ayant moins de 4/10 ? de 5/10 ? de 6/10 ?

Une des meilleures preuves du caractère arbitraire de l'échelle numérique est constituée par les manipulations auxquelles se livrent parfois des enseignants pour avoir parmi leurs élèves un peu d'échecs (sinon on dira qu'ils jettent les points à la tête des élèves), mais pas trop (sinon, on dira que ce sont des vaches).

Non seulement on peut dire que la notation numérique est inadaptée, mais aussi qu'il s'est instauré un « culte » de la courbe de Gauss.

D'après J.-C. Parisot (voir [48]), le modèle gaussien de distribution des notes ne peut être considéré comme une référence d'exactitude lors d'une évaluation certificative que lorsque l'examen a été préalablement testé et petit à petit mis au point sur de grandes populations, et qu'un protocole de correction est fourni.

Bref, seule une épreuve de type *baccalauréat* peut accepter une distribution gaussienne des résultats. Toute autre épreuve, plus ponctuelle et à moindre échelle, n'admet que rarement une telle distribution. En effet, pourquoi devrait-on obtenir une distribution représentative d'un comportement aléatoire à l'issue d'une séquence d'enseignement ou justement tout a été fait pour contrer le hasard ?

17.4.2.2 Et sinon quoi ?

Il convient évidemment de se demander ce qui pourrait remplacer la notation traditionnelle. Tant qu'il s'agit d'évaluer l'acquisition de compétences particulières précises, facilement observables et d'ampleur limitée, la liste de celles qui sont atteintes par un élève peut être établie. On aboutit ainsi à une situation dans laquelle la note d'un élève n'est pas une grandeur scalaire mais une grandeur vectorielle.

Mais on sait bien qu'il n'est pas possible d'en rester là. Des activités de nature plus globale doivent être soumises aux élèves et évaluées faute de quoi l'enseignement des mathématiques risque de perdre toute signification.

Il convient alors de parler de l'analyse de données, qui sous diverses formes permet parfois dans le domaine de l'évaluation le contrôle des erreurs (d'évaluation) et l'instauration d'une échelle de mesure.

Il n'est pas possible ici de faire une liste commentée des diverses méthodes employées, ni de donner une théorie générale. Nous utiliserons des méthodes de ce type aux chapitres 19 et 21. Mais dès à présent, il nous semble important de soulever, plusieurs inconvénients de ces méthodes :

- pour atteindre une certaine objectivité, et éviter le plus possible d'obtenir des résultats ne correspondant à rien, il est nécessaire d'employer conjointement plusieurs types d'analyse ;
- ces analyses, même si elles peuvent se contenter de porter sur une faible population, ne permettent des conclusions *généralisables* que lorsque la population testée est vaste ;
- la maîtrise de ces méthodes d'analyse et le temps qu'elles exigent suppose que des professeurs se spécialisent dans ce domaine et s'écartent de leur tâche purement pédagogique (ainsi que de la résolution de problèmes !), ce qui peut mener à une dichotomie du corps enseignant (avec les difficultés de coordination que l'on peut imaginer).

Comme on le constate, aucune des méthodes envisagées jusqu'ici ne garantit une évaluation objective. Peut-être faut-il se demander si la recherche d'une telle objectivité n'est pas une illusion !

Il convient en tous cas de remarquer que tout acte d'évaluation consiste à comparer les comportements d'un élève à des comportements modèles, qui sont le plus souvent ceux qu'aurait l'examinateur s'il était placé dans la situation de l'élève. Il n'est pas nécessaire d'en dire plus pour établir la difficulté d'élaborer une méthode d'évaluation objective. Même des questions standardisées ne résoudraient pas le problème. A moins qu'elles soient accompagnées d'une grille de correction qui imposerait à tous les correcteurs la subjectivité de l'auteur de la grille. L'objectivité n'est-elle qu'une subjectivité imposée ?

17.5. Le problème de l'évaluation des résolutions de problèmes

Dans la pratique des classes, peu de temps est réservé à la résolution de problèmes. On peut trouver à cela des raisons diverses, notamment :

- Les enseignants ne sont guère formés à ce type d'activité et encore moins à leur évaluation.
- Une activité de résolution de problèmes *isolée dans le temps* est peu porteuse d'informations, tant pour les élèves que pour les professeurs : les élèves peu habitués à résoudre des problèmes éprouvent des difficultés à troquer une attitude passive basée sur l'attente de ce qui va arriver pour une attitude active de recherche. Ces difficultés masquent les avantages qui pourraient résulter de l'activité proposée. L'évaluation de l'activité est alors sans intérêt.
  On pourrait comparer la résolution de problèmes à un sport : l'entraînement, le progrès, la reconnaissance ne prennent leur sens que dans la durée.
- L'école n'est pas isolée dans la société. Les mutations de celles-ci ont des répercussions sur les activités et attitudes des élèves et des enseignants. Il en résulte une instabilité qui handicape d'autant plus le travail des enseignants.

Ces raisons ne doivent pas empêcher la réflexion et l'action. Nous pouvons formuler quelques hypothèses de travail et en tirer des conséquences

1. La résolution de problèmes nécessite des méthodes diverses auxquelles les élèves doivent être initiés. Évaluer la résolution de problèmes nécessite que cette initiation soit conçue comme un véritable enseignement. Ainsi, malgré les difficultés,

   il faut construire un enseignement de la résolution de problèmes

2. L'élève a le droit de se tromper, de ne pas arriver au bout du problème. Même dans ce cas, l'activité de recherche est profitable.

   L'évaluation doit porter sur la démarche de recherche telle qu'elle a été décrite dans les chapitres 6 à 8, ainsi que sur la démonstration, en tant qu'apprentissage de la méthode critique, plus que sur l'obtention de la solution du problème posé.

3. Tout apprentissage est relatif. Un problème n'a que rarement une seule bonne solution. L'activité de résolution de problèmes, les stratégies utilisées, l'utilisation des ressources, la communication, ont aussi un aspect relatif et non absolu.

   L'évaluation doit tenir compte du côté relatif de l'activité.

4. Le droit pour l'élève à se tromper, le côté relatif de l'activité de résolution, ne permettent pas d'utiliser des résolutions de problèmes dans le cadre d'une évaluation exclusivement certificative.

   L'évaluation de la résolution d'un problème est d'abord formative. Moyennant une réforme de la méthode de notation, elle pourrait être également certificative.

   C'est donc une compétence à développer plutôt qu'une compétence à atteindre.

5. Enfin, si on veut agir sur la vie quotidienne des classes, il importe que

   toute procédure d'évaluation de la résolution d'un problème soit fondamentale et simple.

17.6. Résumé des chapitres suivants

Dans les chapitres suivants, nous présenterons plusieurs expériences d'évaluation réalisées soit dans des classes de l'enseignement secondaire, soit à l'université.

Vu la place que nous accordons à la résolution de problèmes et à la problématisation d'un cours de mathématique, il n'était que normal que nous nous attachions à dégager des pistes en vue de faciliter l'évaluation des élèves placés dans de telles situations. Cette réflexion est rapportée aux chapitres 18 et 19.

Au chapitre 20, on envisage le cas d'élèves confrontés à un autre type d'activités : la réalisation d'un dossier-projet. Dans ce cas, l'élève doit faire preuve non seulement de ses qualités scientifiques, mais aussi de capacités de rédaction et de communication qui figurent également parmi les compétences terminales importantes.

Enfin, au chapitre 21, nous présentons une évaluation basée sur un questionnaire plus étendu que ceux qui ont été traités aux chapitres 18 et 19. Il s'agit là d'un examen universitaire ayant des spécificités propres mais qui a l'avantage de mettre en évidence un comportement peut-être moins fréquent dans l'enseignement secondaire : la non-réponse à une question. Dans quelle condition peut-on mettre l'absence de réponse sur le même pied qu'une erreur ?

Ces tentatives d'évaluation sont menées selon des méthodes différentes : aux chapitres 18 et 20, seules des analyses approfondies des copies des élèves sont pratiquées alors qu'aux chapitres 19 et 21, des méthodes d'analyse statistique sont mises en œuvre.

Cependant, ces méthodes ont des caractéristiques communes. La plus visible est la quantité de travail importante qu'elles fournissent à l'enseignant. Il ne nous appartient pas de tirer argument de ce fait dans un sens ou dans l'autre mais les décideurs ne pourront le négliger. Plus importante — du point de vue qui nous préoccupe, celui de l'évaluation des élèves — est la place que les différentes méthodes accordent à la détermination des *comportements* qu'ont eu les élèves durant l'évaluation. Par comportement, nous entendons les démarches, méthodes, algorithmes, ..., qu'ils ont (ou n'ont pas) mis en œuvre en vue d'atteindre l'objectif qui leur était fixé.

La détermination des comportements des élèves est le point crucial tant de l'évaluation formative que de l'évaluation certificative.

A travers l'étude des comportements des élèves apparaît aussi la possibilité, et même la nécessité, d'évaluer le questionnaire soumis aux élèves lui-même. La question principale est de savoir si ce questionnaire est en harmonie avec l'enseignement qui a été dispensé : si chacun s'accorde à dire qu'on ne peut évaluer que ce qui a été enseigné, il n'est peut-être pas rare que des questions d'examen ne se situent pas au même niveau que l'enseignement. Nous en verrons un exemple au chapitre 21.

Une autre caractéristique commune aux évaluations faites (ou esquissées) est le fait qu'elles conduisent à une notation vectorielle. Comme il a été dit précédemment, ce n'est que logique puisque les comportements qui sont évalués peuvent n'être aucunement corrélés. Toutefois, au chapitre 20, nous utilisons une méthode *d'aide à la décision* en vue de construire une note *numérique* qui GLOBALISE la note vectorielle obtenue. Les décisions à prendre ne s'accommodent guère du vectoriel...

Les méthodes statistiques utilisées aux chapitres 19 et 21 sont lourdes et nécessitent des logiciels spécialisés et surtout de bonnes connaissances statistiques pour qui veut les appliquer en comprenant ce qu'il fait. Leur manque de transparence en rend les conclusions difficiles à expliquer (aux parents par exemple). Leur avantage est de diminuer dans une certaine mesure la subjectivité de l'évaluation.

Cette subjectivité ne saurait disparaître entièrement : ce sera toujours à l'enseignant de déterminer quels comportements il décide de recenser chez ses élèves. Mais cette sélection étant effectuée, il lui « suffira » de noter la présence ou l'absence de ces comportements chez chaque élève : une évaluation binaire en 0 ou 1. Les logiciels statistiques prennent alors le relais pour calculer des notes (vectorielles ou scalaires) plus nuancées. Les résultats semblent intéressants mais mériteraient d'être confirmés et affinés par de nouvelles études.

Pour clore ce chapitre, répétons ce que nous avons dit dans l'introduction : les recherches sur l'évaluation doivent se poursuivre.

Références

[90], [121], [105], [30], [77], [48].

Chapitre 18

L'évaluation de la résolution de problèmes

18.1 Trois hypothèses de travail 599
18.2 Un schéma d'évaluation 601
18.3 Ce schéma s'adapte-t-il à des situations concrètes ? Trois expériences . 603
18.3.1 Un problème de géométrie analytique dans un octaèdre 604
18.3.2 Un problème de projection orthogonale en géométrie synthétique 619
18.3.3 Un problème concernant la fonction exponentielle en analyse . . 633
18.3.4 Quelques conclusions (provisoires) 646
18.4 Peut-on envisager une certification de la résolution de problèmes ? . . 647
18.5 Il reste du pain sur la planche 649

Ce chapitre est consacré à la question : **quel est le mode d'évaluation adapté aux activités de résolution de problèmes proposées aux élèves ?**

La question est vaste et complexe parce que, comme cela a été souligné dès le chapitre 4, la résolution de problèmes est une *compétence globale*, multiforme, et donc difficile à cerner et à évaluer.

Nous nous limiterons ici à dégager ce qui semble une solution possible, en l'illustrant de quelques expériences qui ont aidé à définir et mettre au point cette solution.

18.1. Trois hypothèses de travail

Un mode d'enseignement a déjà été décrit, dans lequel la résolution de problèmes est une compétence terminale : c'est ce que nous avons appelé la *problématisation du cours de mathématiques*. Le principe de base de ce mode d'enseignement est que l'organisation *globale* du cours devrait être un reflet des activités *locales* que sont les résolutions de problèmes. Ce principe résulte de ce que ces deux types d'organisation se renvoient l'une à l'autre à travers une même *évolution du stade procédural au stade structural* (cfr. le chapitre 10 pour plus de détails).

Or, un mode d'enseignement — quel qu'il soit — n'est complètement défini qu'avec le type d'évaluation qu'on y pratique. Une des exigences auxquelles cette évaluation doit répondre est celle de la *cohérence* avec les caractéristiques de l'enseignement en question.

Une analyse des contraintes qui s'imposent de ce fait au type d'évaluation à définir aboutit à formuler trois hypothèses de travail.

1. **L'évaluation doit être intégrée dans l'enseignement.**
   Cela signifie d'abord qu'on ne peut évaluer que ce qui a été enseigné. Dès lors, évaluer la résolution de problèmes postule l'existence d'un véritable enseignement de la *méthode expérimentale* en mathématiques. C'est évidemment à cela que la problématisation du cours veut contribuer !
   Mais l'évaluation elle-même peut devenir une occasion, sinon une source d'enseignement. Il suffit par exemple qu'un test portant sur une résolution de problème soit suivi — aussi systématiquement que possible — de la construction, ou de la remise et de la discussion d'un corrigé
   - qui mette en évidence des méthodes diverses et discute de leur efficacité,
   - qui serve de *référence* pour la présentation et les types de justifications attendus.
2. **L'évaluation a une dimension relative importante.**
   En effet, un problème n'a que rarement une seule bonne solution et possède encore moins une seule bonne voie à suivre pour aboutir à une solution. L'activité de résolution de problèmes, les stratégies utilisées, l'utilisation des ressources, la communication des résultats ont donc un aspect relatif que l'évaluation doit intégrer.

En prolongeant l'exemple du corrigé, il s'agira alors de mettre au point un *corrigé relatif*, construit au départ des résultats obtenus par les élèves, qui en explore les prolongements jusqu'à tuer (si possible) le problème et qui, sinon, analyse les raisons de l'échec d'une méthode et la compare avec une autre, plus efficace. Ce corrigé a donc une valeur d'institutionnalisation — au moins partielle — d'une solution du problème ([1]).

3. **L'évaluation doit prendre en compte les démarches de recherche.**
   L'élève a le droit de se tromper, de ne pas arriver au bout du problème, sans que son activité de recherche soit pour autant ignorée. L'évaluation doit donc aussi s'exercer sur les démarches de recherche, et non pas exclusivement sur la solution.
   Mais il faut pour cela disposer d'une *grille de lecture* de cette démarche, qui soit raisonnablement simple et souple.
   De par la multiplicité des points de vue à prendre en compte, cette grille de lecture peut déboucher sur une *cotation vectorielle* de la résolution de problèmes.

([1]) Le même problème donné dans des classes différentes (c'est-à-dire où l'enseignement d'une même matière a été fait de manière différente) donnerait lieu à un corrigé relatif différent.

18.2. Un schéma d'évaluation

Les hypothèses de travail précédentes suggèrent de construire un schéma d'évaluation en deux parties :

- un corrigé relatif, c'est-à-dire rédigé au départ des réponses relevées dans les copies des élèves,
- une grille de lecture ou d'interprétation entre les copies et ce corrigé.

Le principe du corrigé relatif a déjà été décrit. Mais deux remarques restent néanmoins à faire.

D'abord, si ce type de corrigé se construit au départ des solutions ou des éléments de solutions apportés par les élèves, cela n'empêche évidemment pas que le problème ait été exploré et résolu auparavant par l'enseignant, afin de juger de son opportunité dans l'organisation générale du cours.

Ensuite, si le problème n'a été traité que de manière très incomplète et par une minorité d'élèves, il est bien sûr difficile de construire un corrigé relatif à partir de ces seuls éléments. Mais cet échec signifie alors évidemment que, soit le problème était trop difficile, soit l'enseignement n'a pas atteint ses objectifs, soit — hélas ! — les élèves n'ont pas voulu produire l'effort qu'on attendait d'eux. Dans tous les cas, l'évaluation voit alors son objet se déplacer ...
Quel est celui de la grille de lecture ?

L'idée sous-jacente à la construction d'une telle grille est que les phases relevées dans la modélisation d'une résolution de problèmes (cfr. le chapitre 8) permettent de repérer la majorité des compétences mises en jeu dans l'activité. La grille de lecture propose en conséquence d'apprécier la « profondeur » que l'élève a atteint dans chacune des trois phases caractéristiques d'intériorisation, de condensation et de réification.

Plus concrètement, la profondeur atteinte dans la phase d'intériorisation pourrait par exemple se mesurer à partir de la quantité d'*unités de sens* directement extraites ou évoquées à partir de l'énoncé et de son contexte immédiat. Ces unités de sens seraient, par exemple :

- des données, des données transposées (les coordonnées d'un point, ...),
- des types d'éléments formels immédiatement présents (formules, règles de calculs, modes de traitement de données numériques, théorèmes ou critères cités, ...),

- des types de représentations associées à l'énoncé (dessins, graphiques, ...).

La profondeur atteinte dans la phase de condensation pourrait de la même manière s'évaluer par la *richesse combinatoire* de ces unités de sens, par le relevé d'îlots déductifs, ou de changements de cadres ou de registres, par l'apparition ou la construction d'éléments nouveaux, de conjectures, ...

Enfin, la profondeur atteinte dans la phase de réification ([2]) serait définie au départ de la *qualité scientifique* de la production de l'élève, et plus précisément :

- de la richesse, de la versatilité dans l'interprétation des notions et des résultats qui y sont utilisés,
- de la précision algébrique, graphique, numérique, logique, ... de cette production,
- des vérifications qu'elle comporte, et plus généralement du sens critique qui s'y manifeste.

Cette grille de lecture permettrait d'attribuer une *cotation vectorielle* comportant trois composantes à la production à évaluer. Bien entendu, les trois nombres ainsi obtenus auraient les caractères d'une appréciation, dans laquelle le qualitatif et le quantitatif sont profondément associés.

Arrivé là, rien n'interdit d'imaginer une grille plus fine, qui discrimine mieux les compétences, et les niveaux atteints dans leur maîtrise. On en trouvera un exemple étudié en détail dans le chapitre 19 ci-après. On observera qu'il s'agit dans ce cas d'une interrogation réalisée sur un sujet très ciblé (l'usage des arbres en probabilités) pendant une séquence d'enseignement mise au point par nos soins. Une analyse de ce genre est très souvent une source majeure d'informations. Mais l'intérêt manifeste de ces approches de plus en plus précises se heurte à la question d'une utilisation systématique de tels outils d'évaluation dans les classes. En particulier, une grille trop précise devient vite d'un maniement exigent dans le cadre d'un problème de plus grande envergure et perd ainsi de son efficacité, le temps de correction et d'analyse devenant par exemple prohibitif.

([2]) Il est important de ne pas négliger cette phase de réification sous prétexte qu'elle n'est que rarement atteinte et peut-être hors de portée de la majorité des élèves ! Beaucoup d'éléments concourent à son installation, et il faut essayer de suivre leur évolution.

18.3. Ce schéma s'adapte-t-il à des situations concrètes ? Trois expériences

Cette section propose quelques illustrations du mode de fonctionnement du schéma d'évaluation que nous venons de décrire. Ces illustrations sont issues de trois expériences qui ont d'ailleurs contribué à mettre au point ce schéma. Le point de départ en a été à chaque fois un test (réalisé dans une classe de 5e ou de 6e transition) portant sur une matière à l'enseignement de laquelle notre équipe de recherche n'avait pas été associée.

Il est intéressant de remarquer que les *sujets* de ces tests — et donc les compétences qui peuvent s'y révéler — sont assez différenciés, allant par exemple d'un problème « fermé » de géométrie analytique à un problème « ouvert » d'analyse. Nous espérons que cette variété met en valeur une certaine flexibilité de notre grille de lecture.

18.3.1 Un problème de géométrie analytique dans un octaèdre

18.3.1.1 Le contexte du test

Le test a eu lieu le mercredi 5 mai 1999 au matin pendant 50 minutes de cours, dans une classe de sixième transition du Collège Sainte Marie à Mouscron comportant 19 élèves d'option à 6 périodes/semaine en mathématiques, avec Mme Chantal Terryn comme titulaire du cours.

Le test était de type tout à fait classique, avait été annoncé 15 jours à l'avance et voulait vérifier les acquis de base des élèves en géométrie analytique de l'espace. Les élèves ne disposaient donc pas de leurs notes de cours pendant la durée du test.

18.3.1.2 L'énoncé du problème

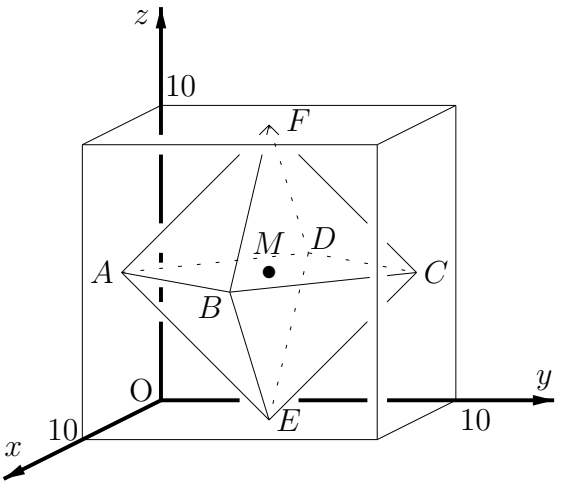
Soit $Oxyz$ un repère orthonormé de l'espace ; on considère le cube dont 4 sommets sont l'origine O et les points $(10; 0; 0)$, $(0; 10; 0)$, $(0; 0; 10)$.

On note M le centre du cube.

On considère enfin l'octaèdre $ABCDEF$ inscrit à ce cube : il est obtenu en joignant les centres des faces du cube.

Choisissez une face de l'octaèdre (et indiquez laquelle sur votre feuille).

1. *Quelle est une équation cartésienne du plan qui contient cette face ?*
2. *Déterminez une équation vectorielle — ou des équations paramétriques, ou des équations cartésiennes — de la perpendiculaire issue de M à ce plan. Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de cette perpendiculaire avec le plan ? Quelle est la distance du point M à ce plan ?*
3. *Déterminez les points de percée de cette perpendiculaire dans les faces du cube.*
4. *Aurait-on pu prévoir les résultats sans faire aucun calcul ? Détaillez vos arguments.*



18.3.1.3 Un corrigé relatif

Nous avons choisi ([3]) d'étudier le plan de la face ABF, noté aussi π_{ABF} .

La phase d'intériorisation pour la question 1

On détermine facilement les coordonnées des points utiles :

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Il faut savoir aussi que l'équation cartésienne d'un plan est une expression du type $ax + by + cz = d$, où les coefficients a, b, c et d sont des nombres (connus) et caractéristiques (à un facteur près) du plan, tandis que x, y et z sont les trois coordonnées d'un point quelconque de ce plan.

La phase de condensation pour la question 1

Il y a au moins deux procédés pour déterminer l'équation cartésienne du plan π_{ABF} :

- écrire une équation vectorielle ou des équations paramétriques de ce plan, et en déduire une équation cartésienne par élimination des paramètres,
- exprimer que les coordonnées des points A, B et F vérifient l'équation cartésienne écrite sous la forme canonique $ax+by+cz = d$ et en déduire les coefficients a, b, c et d à une constante (multiplicative) près.

([3]) Suivant en cela la majorité des élèves (11 sur 19) ...

Si on suit la première méthode, une équation vectorielle du plan π_{ABF} s'écrit :

$$\overrightarrow{AX} = k \cdot \overrightarrow{AB} + \ell \cdot \overrightarrow{AF}$$

On en déduit des équations paramétriques :

$$\begin{cases} x - 5 = k \cdot 5 + \ell \cdot 0 \\ y - 0 = k \cdot 5 + \ell \cdot 5 \\ z - 5 = k \cdot 0 + \ell \cdot 5 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 5k + 5 \\ y = 5k + 5\ell \\ z = 5\ell + 5 \end{cases}$$

D'où l'équation cartésienne $y = x - 5 + z - 5$, ou, plus simplement :

$$x - y + z = 10$$

Si — suivant l'autre méthode — on souhaite calculer les coefficients a, b, c et d de la forme canonique $ax + by + cz = d$ à l'aide des coordonnées des points A, B et F, on obtient le système :

$$\begin{cases} a \cdot 5 + b \cdot 0 + c \cdot 5 = d \\ a \cdot 10 + b \cdot 5 + c \cdot 5 = d \\ a \cdot 5 + b \cdot 5 + c \cdot 10 = d \end{cases}$$

On en tire presque immédiatement $b = -a$ et $c = a$. Si on soustrait membre à membre la troisième équation de la somme des deux premières, on obtient aussi $d = 10a$. L'équation s'écrit donc $ax - ay + az = 10a$. Comme l'ensemble de points π_{ABF} n'est pas tout l'espace : $a \neq 0$, et l'équation cherchée peut donc s'écrire :

$$x - y + z = 10$$

La phase de réification pour la question 1

Dans un premier temps, il suffit par exemple de vérifier que les coordonnées des points A, B et F vérifient bien l'équation $x - y + z = 10$, ce qui ne présente aucune difficulté !

Des raisonnements plus substantiels, et dont les résultats sont éclairants, constituent des réponses à la question 4.

La phase d'intériorisation pour la question 2

On détermine facilement les coordonnées du centre du cube :

$$M = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Les réponses à fournir à la question 2 demandent aussi que les notions et procédures suivantes soient disponibles :

- une droite peut se décrire à l'aide d'une équation vectorielle, d'équations paramétriques ou cartésiennes ; par exemple, l'équation vectorielle d'une droite passant par les points M et N est une expression du type $\overrightarrow{MX} = k \cdot \overrightarrow{MN}$, où X est un point quelconque de cette droite ; le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est un vecteur directeur de cette droite,
- si $ax + by + cz = d$ est une équation cartésienne d'un plan, alors le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à ce plan,
- déterminer les coordonnées du point d'intersection d'une droite et d'un plan équivaut à résoudre le système formé — par exemple — par les équations cartésiennes de cette droite et de ce plan,
- la distance entre deux points de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ se calcule grâce à la formule $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

La phase de condensation pour la question 2

Notons p_M la perpendiculaire issue du point M au plan π_{ABF}.

L'observation fondamentale est qu'un vecteur directeur de la droite p_M peut être le vecteur des coefficients d'une équation cartésienne du plan π_{ABF}. Des équations paramétriques de la droite p_M s'écrivent alors immédiatement :

$$\begin{cases} x - 5 = k \cdot 1 \\ y - 5 = k \cdot (-1) \\ z - 5 = k \cdot 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = k + 5 \\ y = -k + 5 \\ z = k + 5 \end{cases}$$

Des équations cartésiennes correspondantes sont $x - 5 = 5 - y = z - 5$ ou

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ y + z = 10 \end{cases}$$

Les coordonnées du point commun G à la droite p_M et au plan π_{ABF} s'obtiennent en résolvant le système :

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ y + z = 10 \\ x - y + z = 10 \end{cases}$$

On obtient très facilement :

$$G = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ \\ \frac{10}{3} \\ \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}$$

Enfin, la distance du point M au plan π_{ABF} est exactement la distance du point M au point G, c'est-à-dire :

$$\sqrt{\left(\frac{20}{3} - 5\right)^2 + \left(\frac{10}{3} - 5\right)^2 + \left(\frac{20}{3} - 5\right)^2} = \sqrt{3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{5}{3}\sqrt{3}$$

La phase de réification pour la question 2

La plupart des arguments convaincants à ce stade-ci résulteront des réponses aux questions 3 et 4. On peut bien sûr vérifier que les coordonnées du point G vérifient l'équation cartésienne $x - y + z = 10$ du plan π_{ABF}, ...

La phase d'intériorisation pour la question 3

Les réponses à fournir à la question 3 demandent encore que les résultats suivants soient disponibles :

- la caractérisation, sous une forme ou l'autre, des faces du cube, par exemple la face située dans le plan Oxz est décrite par l'équation cartésienne $y = 0$, ...
- les coordonnées du point d'intersection d'une droite et d'un plan sont les solutions du système formé — par exemple — par les équations cartésiennes de cette droite et de ce plan.

La phase de condensation pour la question 3

Si on souhaite déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite p_M avec la face située dans le plan de coordonnées Oxz, il suffit donc de poser $y = 0$ dans les équations (paramétriques ou cartésiennes) de cette droite : on obtient instantanément le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$.

De manière analogue — et un peu aveuglément — :

- les coordonnées du point d'intersection de la droite p_M avec la face située dans le plan de coordonnées Oyz s'obtiennent en posant $x = 0$ dans les équations (paramétriques ou cartésiennes) de cette droite : on obtient instantanément le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- les coordonnées du point d'intersection de la droite p_M avec la face située dans le plan de coordonnées Oxy s'obtiennent en posant $z = 0$ dans les équations (paramétriques ou cartésiennes) de cette droite : on obtient instantanément — et encore une fois — le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Etc. (si besoin ...)

La phase de réification pour la question 3

Elle est toute entière l'objet de la question 4.

La phase d'intériorisation pour la question 4

Comme pour tous les énoncés de ce genre — et c'est ce qui en fait la difficulté — la question consiste ... à formuler la question !

Quatre observations.

Puisqu'il s'agit de prévoir les résultats, on va donc d'abord essayer de relever ce qu'ils ont de remarquable. Sans être nécessairement exhaustif, on peut relever les particularités suivantes :

- **Observation 1 :** l'équation cartésienne $x - y + z = 10$ du plan π_{ABF} est particulièrement simple : les coefficients en sont des 1 ou des -1, et le terme indépendant est 10, qui est justement la longueur de l'arète du cube,
- **Observation 2 :** les équations cartésiennes $\frac{x-5}{1} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-5}{1}$ de la droite p_M sont pareillement simples et presque symétriques,
- **Observation 3 :** les coordonnées du point G, écrites sous forme de fractions irréductibles, ont le même dénominateur 3 et des numérateurs qui sont des multiples de 10,
- **Observation 4 :** la droite p_M n'a que *deux* points d'intersection distincts avec l'ensemble de toutes les faces du cube.

La quatrième question peut alors être posée sous la forme plus précise : y a-t-il un fait géométrique qui expliquerait l'ensemble de ces particularités ?

La phase de condensation pour la question 4

L'observation 4 est la plus marquante ! Elle signifie que la perpendiculaire p_M à la face ABF issue du point M est une des diagonales principales du cube. Mais est-ce là le « fait géométrique » recherché, qui permettrait d'expliquer aussi les trois autres observations relevées plus haut ?

Si la droite p_M est une diagonale principale du cube, alors l'observation 2 devient toute naturelle !

Notons $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y' = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ les deux extrémités de cette diagonale principale. Le vecteur

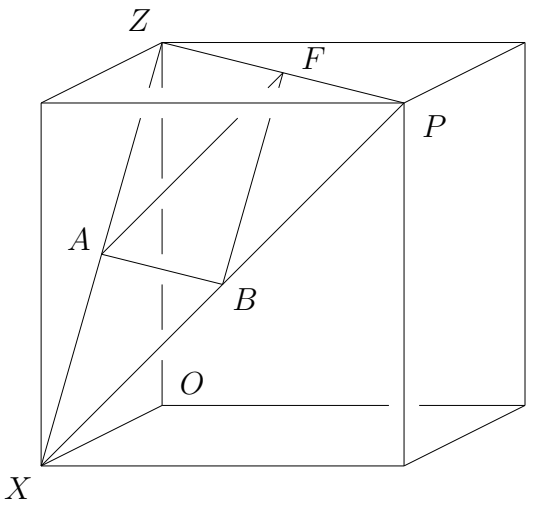
$$\overrightarrow{YY'} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est un vecteur directeur de cette diagonale. Dès lors, le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur de cette diagonale, ainsi donc que de la droite p_M. Mais cela achève de rendre compte de l'observation 2 !

Si la droite p_M est une diagonale principale du cube, alors l'observation 1 devient (presque) naturelle !

En effet, comme les coefficients de l'équation cartésienne du plan π_{ABF} doivent être les composantes d'un vecteur directeur de la droite p_M, l'observation 1 est pareillement rencontrée, sauf en ce qui concerne la signification du terme indépendant.

Mais cette signification résulte immédiatement de l'équation cartésienne du plan π_{ABF} . En effet, cette équation s'écrit aussi $z = 10 - x + y$. Or, le point $F = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ appartient évidemment à ce plan et sa troisième coordonnée est bien la longueur de l'arête du cube. Mais comme le point F se trouve aussi à la verticale du point de coordonnées $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, l'équation $z = 10 - x + y$ montre que sa troisième coordonnée est donnée par $z = 10 - 5 + 5 = 10$: le 10 de l'équation est bien le 10 de la troisième coordonnée du point F, c'est-à-dire la longueur de l'arête du cube ! On peut obtenir la même conclusion de manière plus géométrique. On montre en effet facilement que le plan π_{ABF} coupe les faces du cube suivant le triangle PZX.



Or, dans le plan de coordonnées Oxz, la droite d_{XZ} a manifestement pour équation $z = 10 - x$. Et ce 10 est bien la hauteur du point Z, c'est-à-dire la longueur de l'arête du cube, or $z = 10 - x$ est aussi l'équation de la « trace » du plan d'équation $x - y + z = 10$ sur le plan de coordonnées Oxz décrit par la condition $y = 0$.

En translatant suivant le vecteur $\overrightarrow{PZ}$ la droite d_{PX}, on décrit pareillement la « trace » du plan π_{ABF} sur le plan de coordonnées Oyz : on trouve $z = y+10$, ce qui confirme encore l'équation cartésienne $x - y + z = 10$ du plan π_{ABF}.

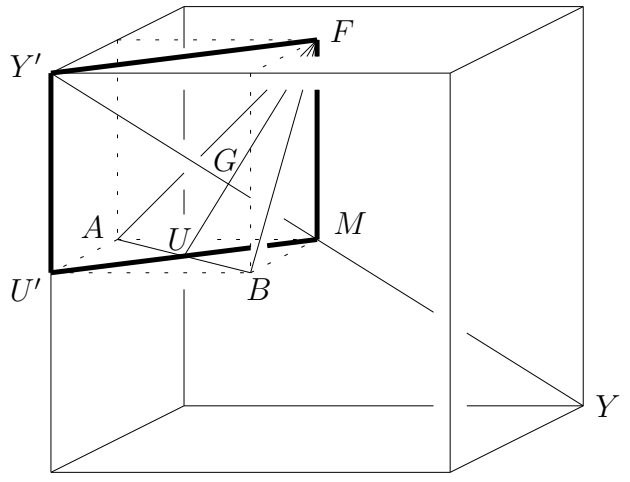
Tout n'est pas encore clair ...

Car l'observation 3 ne semble pas résulter de manière immédiate de ce que la droite p_M soit une des diagonales principales du cube ...

La phase de réification pour la question 4

La démonstration d'un résultat-clé.

Il s'agit de prouver que la diagonale principale $d_{YY'}$ est perpendiculaire au plan π_{ABF} de la face de l'octaèdre.



On considère le plan diagonal $\pi_{Y'U'MF}$, et on commence par démontrer qu'il est perpendiculaire au plan π_{ABF}.
Or, les diagonales du carré $AU'BM$ étant perpendiculaires, la droite d_{AB} est perpendiculaire à la droite $d_{U'M}$. Cette même droite d_{AB} est orthogonale à la droite $d_{Y'U'}$, puisque la droite $d_{Y'U'}$ est perpendiculaire au plan $\pi_{AU'BM}$ qui contient la droite d_{AB}.

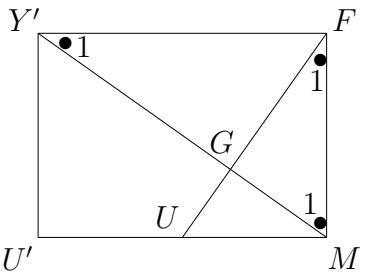
Le critère de perpendicularité droite/plan entraîne alors que la droite d_{AB} est perpendiculaire au plan diagonal $\pi_{Y'U'MF}$. Et ceci implique enfin, par définition de plans perpendiculaires, que le plan diagonal $\pi_{Y'U'MF}$ est perpendiculaire au plan π_{ABF}.

Il reste alors à démontrer que la droite d_{UF} est perpendiculaire à la droite $d_{Y'M}$ pour en déduire que la droite $d_{YY'}$ ou $d_{MY'}$ est perpendiculaire au plan π_{ABF} .

> En effet, on a déjà montré que la droite d_{AB} est perpendiculaire au plan diagonal $\pi_{Y'U'MF}$, ce qui implique que la droite d_{AB} est aussi orthogonale à la droite $d_{Y'M}$, et le critère de perpendicularité droite/plan permet alors d'en tirer — comme souhaité — que la droite $d_{Y'M}$ est perpendiculaire au plan π_{ABF}.

Pour établir que les droites d_{UF} et $d_{Y'M}$ sont perpendiculaires, on ne doit heureusement plus travailler que dans le plan diagonal $\pi_{Y'U'MF}$! Dans le *rectangle* $Y'U'MF$, notons U le point milieu du segment $U'M$.

Les triangles *rectangles* FUM et $FY'M$ sont semblables puisque $\frac{|FM|}{|UM|} = \frac{|FY'|}{|FM|}$, c'est-à-dire $\frac{5}{\frac{5\sqrt{2}}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{5}$ (ce qui résulte de $|FM| = 5$ et $|FY'| = 5\sqrt{2}$). On en déduit que les angles F_1 et Y'_1 sont égaux.
Partant du triangle $Y'FM$, on calcule alors : $\widehat{M_1} = 1\text{dr.} - \widehat{Y'_1} = 1\text{dr.} - \widehat{F_1}$, d'où on tire que $\widehat{G} = 1\text{dr.}$



On peut aussi utiliser la trigonométrie du triangle rectangle : le raisonnement reste le même [(4)] !

Une bonne surprise concernant l'observation 3.

En travaillant dans le même plan diagonal $\pi_{Y'U'MF}$, on établit aussi — et indépendamment de ce qui précède — que $|UG| = \frac{1}{3}|UF|$.

En effet, les triangles UGM et $Y'FG$ sont homothétiques, donc semblables. Dès lors, $\frac{|UG|}{|GF|} = \frac{|UM|}{|Y'F|} = \frac{1}{2}$. La relation annoncée s'ensuit immédiatement.

Cette « surprise » permet de tirer au clair l'observation 3 : le point G étant situé au $\frac{2}{3}$ de la médiane du triangle équilatéral ABF est donc le barycentre de ce triangle. Ce résultat permet de retrouver immédiatement les coordonnées du point G.

En guise de conclusion . . .

Ce qui permet de comprendre et de relier entre elles les quatre observations initiales, c'est la géométrie particulière du rectangle $Y'U'MF$.

Les calculs n'y sont pas légion, mais le détail des raisonnements n'est pas anodin . . . On n'a rien pour rien !

(4) Cfr. à ce sujet une remarque dans un commentaire de copie plus loin.

18.3.1.4 La grille de lecture : son contenu particularisé au problème, et quelques exemples

Une grille de lecture.

Le corrigé relatif suggère de construire une grille de lecture qui s'attache à relever, d'après les différentes questions, les éléments suivants.

Pour la question 1,

- pour la phase d'intériorisation :
  - les coordonnées des points utiles,
  - l'identification des types d'équations à déterminer ;
- pour la phase de condensation :
  - la réalisation des calculs utiles ;
- pour la phase de réification :
  - la vérification des calculs.

Pour la question 2,

- pour la phase d'intériorisation :
  - les coordonnées des points utiles,
  - l'identification des types d'équations à déterminer,
  - l'identification du vecteur normal à un plan à partir de son équation cartésienne,
  - la formule de distance entre deux points ;
- pour la phase de condensation :
  - le choix du vecteur directeur de la droite p_M ,
  - la réalisation des calculs utiles ;
- pour la phase de réification :
  - éventuellement, la vérification de certains calculs, sinon on se reporte à la question 4.

Pour la question 3,

- pour la phase d'intériorisation :
  - les éléments à relever sont identiques à ceux de la question 2 ;
- pour la phase de condensation :
  - la réalisation des calculs utiles ;
- pour la phase de réification :

– la limitation justifiée des calculs au strict nécessaire, sinon on se reporte à la question 4.

Pour la question 4, la classification suivant les trois phases des différentes étapes de sa résolution n'a rien d'indispensable : d'abord parce que la question en elle-même est du domaine de la (seule) réification, ensuite parce que vu le temps imparti à l'épreuve en classe, il ne fallait pas s'attendre à des réponses aussi exhaustives que celles du corrigé. Les éléments suivants ont été retenus

- pour la phase d'intériorisation : les observations pertinentes,
- pour la phase de condensation : l'analyse des relations entre les observations,
- pour la phase de réification : la synthèse de cette analyse, et en particulier le choix — avec justification(s) — d'un fait géométrique qui rend compte de l'ensemble des observations.

Quelques exemples

Les extraits de copies d'élèves présentés ci-après sont l'occasion de quelques commentaires relatifs à la grille de lecture et à sa pertinence ([5]).

Une réponse à la question 1.

Sur la copie n° 1, les phases d'intériorisation et de condensation sont dans l'ensemble bien maîtrisées : les éléments utiles sont explicitement présents et la structuration (équations vectorielle, paramétriques, cartésienne) est signalée opportunément. Mais malgré la forme particulièrement parlante de l'équation cartésienne du plan choisi (ici le plan π_{ABE}), aucune vérification n'en est proposée : par exemple, pourquoi ce plan passe-t-il par l'origine des coordonnées, comme son équation $x - y + z = 0$ l'indique ?

Une réponse à la question 2 (l'équation de la droite p_M).

Des commentaires analogues à ceux apportés à la copie n° 1 s'appliquent à la copie n° 2.

Une réponse aux questions 3 et 4.

On a $Oxyz$

Face de l'octaèdre ABE

① Eq du plan π_{ABE}

On a <u>éq vectorielle</u>

$\pi_{ABE} \equiv \vec{OP} = \vec{OE} + l\vec{EB} + m\vec{EA}$

On a Coord E : $(5,5,0)$

Coord B : $(0,5,5)$

Coord A : $(5,0,5)$

Et $\vec{OE}$: $(5\vec{i} + 5\vec{j} + 0\vec{k})$

$\vec{EB}$: $(5\vec{i} + 0\vec{j} + 5\vec{k})$

$\vec{EA}$: $(0\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k})$

Donc on a $\vec{OP} = (5\vec{i} + 5\vec{j} + 0\vec{k}) + l(5\vec{i} + 0\vec{j} + 5\vec{k}) + m(0\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k})$

<u>éq param.</u>

$$\begin{cases} x = 5 + 5l + 0m \\ y = 5 + 0l - 5m \\ z = 0 + 5l + 5m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 5l \\ y = 5 - 5m \\ z = 5l + 5m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-5}{5} = l \\ -\frac{y-5}{5} = m \\ z = 5l + 5m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = \frac{x-5}{5} \\ m = \frac{5-y}{5} \\ z = 5\left(\frac{x-5}{5}\right) + 5\left(\frac{5-y}{5}\right) \end{cases}$$

<u>éq cart.</u>

$z = x - 5 + 5 - y$

$z - x + y = 0$

$\pi_{ABE} : x - y - z = 0$

question n°2

donné : . H | 5, 5, 5 |
. éq $\pi_{ABF} \equiv x - y + z - 10 = 0$
. $\vec{v}$ du plan | 1, -1, 1 |

demande : une éq vectorielle ou des paramétrique ou des cartésiennes de la droite passant par H et ⊥ plan ABF

recherche : $d \cap$ pl ABF = H'

Recherchons les éq. cartésiennes

éq. cartésienne générale d'une dr

soit - un pt de la dr | α, β, γ |
- un vecteur directeur de la dr :
| a, -b, c |

$\Leftrightarrow dr \equiv \frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b} = \frac{z-\gamma}{c}$

H ∈ dr. et $\vec{v}$ | 1 ; -1 ; 1 | est le vecteur directeur du plan ABF qui est ⊥ à d

donc :

$dr_{HH'} \equiv \frac{x-5}{1} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-5}{1}$

$\equiv x - 5 = \frac{y-5}{-1} = z - 5$

3) • point de percée avec XOZ

on a : $\begin{cases} Y = 0 \\ X - 5 = 5 - Y \\ x - 5 = z - 5 \end{cases}$

donc $\begin{cases} X = 10 \\ Y = 0 \\ Z = 10 \end{cases}$

$I\ (10, 0, 10)$

• avec YOZ

on a : $\begin{cases} x = 0 \\ x - 5 = 5 - y \\ x - 5 = z - 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 10 \\ z = 0 \end{cases}$

$I_2\ (0, 10, 0)$

L'intersection avec les quatres autres faces aura les mêmes coordonnés $(10, 0, 10)$ et $(0, 10, 0)$ car les points trouvés sont les coins du cubes et sont donc communs à trois plans.

4) Le plan ABF et le plan XOZ forment un angle de 45° donc la perpendiculaire passant par le milieu du cube doit obligatoirement passer par les 2 sommets opposés.

La copie n° 3 est intéressante parce que l'élève s'est limité au calcul des coordonnées de seulement deux points d'intersection de la droite p_M avec les plans de coordonnées avant de conclure que cela règlait la question : on peut interpréter cette observation comme un indice de réification.

Il faut aussi noter que sa réponse à la question 4 suggère d'effectuer des calculs d'angles, mais prend en compte un angle dont nous ne comprenons pas ce qu'il signifie dans la configuration à étudier. De plus, même si la diagonale principale à considérer forme un angle égal à $\arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$ avec le plan horizontal, et que le plan π_{ABF} forme un angle égal à $\arctan \sqrt{2}$ avec ce même plan horizontal, cela ne suffit pas pour montrer que la diagonale principale en question est perpendiculaire au plan π_{ABF}.

(5) Il n'est pas question de faire ici la moindre analyse critique des copies en ce qui regarde l'enseignement dispensé, puisque nous n'y avons pris aucune part et ne disposons donc d'aucune information suffisante pour une étude objective.

18.3.2 Un problème de projection orthogonale en géométrie synthétique

18.3.2.1 Le contexte du test

Le test a eu lieu le mardi 18 mai 1999 de 14 h 35 à 16 h 15, dans une classe de cinquième transition du Collège Sainte Marie à Mouscron comportant 27 élèves d'option à 6 périodes/semaine en mathématiques, avec Mr Luc Terryn comme titulaire du cours.

Le test était de type relativement classique, avait été annoncé 15 jours à l'avance et voulait vérifier les acquis des élèves sur les activités de démonstration en géométrie synthétique de l'espace. Les élèves étaient regroupés par deux, et un élève a travaillé seul ; ils pouvaient disposer de toutes leurs notes de cours. Chaque équipe avait aussi reçu une maquette d'octaèdre (réalisée avec des pailles et des cure-pipes) en début de test.

18.3.2.2 L'énoncé du problème

Dans un octaèdre régulier, il y a 6 sommets, 8 faces et 12 arêtes ; les 8 faces sont des triangles équilatéraux, qui se répartissent en 4 couples de faces opposées.

1. *Démontrez que (les plans des) deux faces opposées d'un octaèdre régulier sont parallèles.*
2. *Démontrez que la droite passant par les centres de gravité* ([6]) *de deux faces opposées est perpendiculaire à ces faces.*
3. *Déterminez la projection orthogonale d'une face sur le plan de la face opposée. Justifiez et commentez votre résultat.*

Réalisez une (ou des) figure(s) claire(s) permettant de suivre au mieux vos raisonnements.

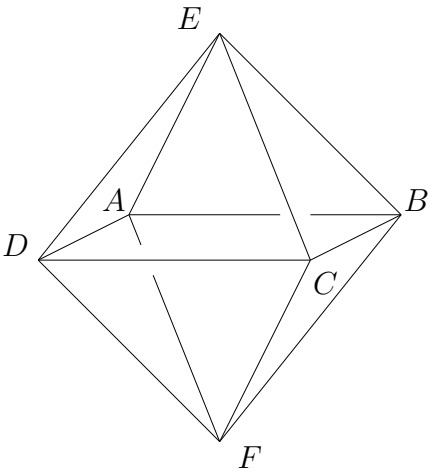
([6]) Ou barycentres : il s'agit des points d'intersection des médianes d'un triangle.

18.3.2.3 Un corrigé relatif

Dans toute la suite de ce corrigé, les sommets de l'octaèdre régulier sont notés comme dans la figure ci-contre.

Les figures partielles sont réalisées de telle sorte qu'elles puissent s'appliquer sur cette même représentation.

On considère les faces opposées ABE et CDF, dont on note les plans π_{ABE} et π_{CDF}.



La phase d'intériorisation pour la question 1

Dans un octaèdre régulier, toutes les arêtes sont de même longueur.

Pour démontrer que deux plans sont parallèles, on dispose d'un *critère de parallélisme* : la condition nécessaire et suffisante pour que deux plans soient parallèles est que l'un d'eux soit parallèle à deux droites concourantes tracées dans l'autre.

La phase de condensation pour la question 1

Apparition de losanges.

La figure $AECF$ est un losange parce que (?) l'octaèdre étant régulier, on a les égalités $|AE| = |EC| = |CF| = |FA|$.

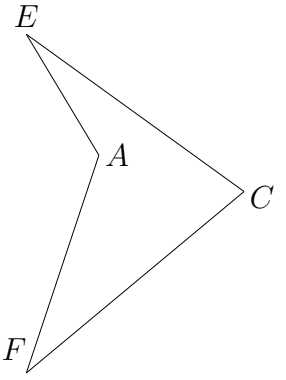
Pour des raisons analogues, la figure $BEDF$ est aussi un losange.

L'efficacité des losanges.

Si la figure $AECF$ est un losange, alors les droites d_{CF} et d_{AE} sont parallèles. Pareillement, si la figure $BEDF$ est un losange, alors les droites d_{DF} et d_{BE} sont parallèles. Le critère de parallélisme de deux plans rappelé plus haut implique alors immédiatement que les plans π_{CDF} et π_{ABE} sont parallèles, puisque les droites d_{CF} et d_{DF} concourantes en F sont toutes deux parallèles au plan π_{ABE}.

La phase de réification pour la question 1

Un regard critique sur les losanges de l'espace.



Il n'est pas évident qu'une figure de l'espace formée de quatre segments consécutifs de même longueur soit un losange ; c'est même — littéralement — faux !

Cela redevient correct dès qu'on est certain que les quatre sommets d'une telle figure sont *coplanaires*.

Et on sent confusément que c'est toute la configuration de l'octaèdre qui force la figure $AECF$ à être un vrai losange. Plus précisément, ce ne sont pas seulement les égalités $|AE| = |EC| = |CF| = |FA|$, mais aussi *toutes* les égalités $|BA| = |BE| = |BC| = |BF| = |DA| = |DE| = |DC| = |DF|$ qui font de la figure $AECF$ une figure plane.

Un *Deus ex machina* ...

Comme il s'agit de forcer une figure à être plane à partir d'égalités de distances, l'outil du plan médiateur s'impose presque naturellement.

Et en effet, les points E, C, F et A sont dans le plan médiateur du segment BD puisque dans un octaèdre régulier, on a les relations :

$$|BE| = |DE| \qquad |BC| = |DC|$$
$$|BF| = |DF| \qquad |BA| = |DA|$$

Les quatre points E, C, F et A étant coplanaires, les égalités $|AE| = |EC| = |CF| = |FA|$ impliquent alors que la figure $AECF$ est un vrai losange. De plus, suivant une propriété caractéristique du plan médiateur d'un segment de droite, la droite d_{BD} est perpendiculaire au plan π_{AECF}.

Ce raisonnement s'applique pareillement à beaucoup d'autres configurations « en losange » extraites de l'octaèdre régulier : la droite d_{EF} est ainsi perpendiculaire au plan π_{ABCD} , les losanges en question sont en fait des carrés, etc ...

La phase d'intériorisation pour la question 2

On peut faire appel à un *critère de perpendicularité d'une droite et d'un plan* : la condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan est d'être perpendiculaire à deux droites passant par son pied dans le plan.

De plus, les résultats obtenus lors de l'étude de la question 1 suggèrent d'utiliser le résultat : si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

Si on note G_1 le barycentre du triangle équilatéral ABE et G_2 le barycentre du triangle équilatéral CDF, l'énoncé de la question 2 devient alors :

> *Démontrez que la droite $d_{G_1G_2}$ passant par les centres de gravité des deux triangles équilatéraux ABE et CDF est perpendiculaire au plan π_{ABE}.*

La phase de condensation pour la question 2

Il faut une nouvelle idée !

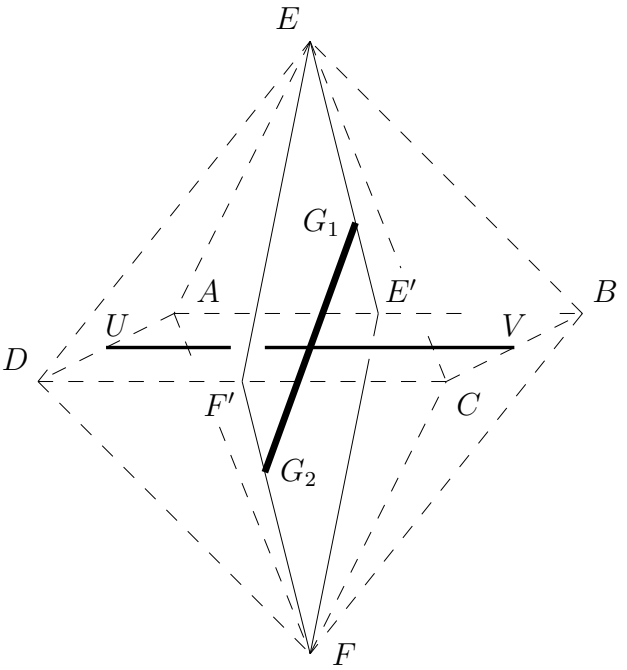
Les éléments disponibles ne permettent pas d'appliquer directement le critère de perpendicularité d'une droite et d'un plan (7) : on ne voit pas à quelle droite dans le plan π_{ABE} la droite $d_{G_1G_2}$ serait orthogonale *par hypothèse* ...

Une configuration intéressante.

On note U le milieu du segment AD, V le milieu du segment BC, E' le milieu du segment AB et F' le milieu du segment CD.

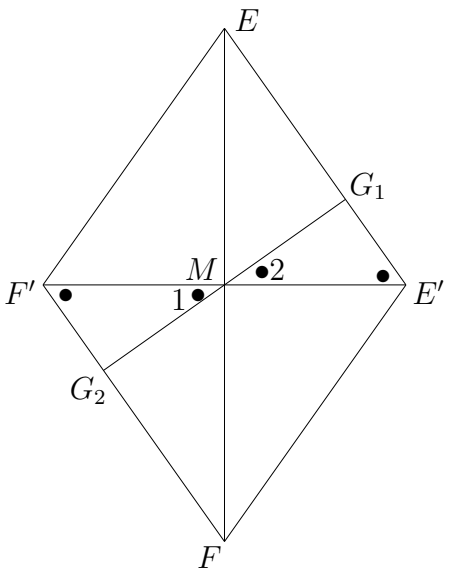
Le plan médiateur du segment UV comporte les quatre points E, E', F et F', et la droite $d_{G_1G_2}$ y est incluse. De plus, la droite d_{UV} est perpendiculaire au plan $\pi_{EE'FF'}$.

La figure $EE'FF'$ est un losange.



Un point bien placé.

(7) Mais en considérant le cube « dual » de l'octaèdre, on peut raisonner comme dans le problème précédent, et donc suivant une stratégie assez différente de celle qui suit.



Le point M, milieu du segment UV, est un point du plan médiateur $\pi_{EE'FF'}$ de ce segment.

C'est aussi le point milieu du segment $E'F'$ *dans ce plan médiateur.*

Mais les points G_1, G_2 et M sont alors alignés : en effet, les triangles $ME'G_1$ et $MF'G_2$ sont isométriques (car $|ME'| = |MF'|$, $|G_1E'| = |G_2F'|$ et $\widehat{E'} = \widehat{F'}$), donc les angles $\widehat{M_1}$ et $\widehat{M_2}$ sont égaux, d'où l'alignement annoncé.

Autrement dit, le point M est le point d'intersection de la droite $d_{G_1G_2}$ avec le plan π_{ABCD}.

Calculer pour s'en sortir !

Quelques calculs permettent alors de démontrer que, dans le plan $\pi_{EE'FF'}$, la droite $d_{G_1G_2}$ est perpendiculaire à la droite $d_{EE'}$.

Notons c la longueur d'une arête de l'octaèdre : c'est aussi la longueur du segment $E'F'$ et donc $|EM| = \frac{c}{2}$. Le triangle ABE étant équilatéral, on obtient $|EE'| = \frac{c}{2}\sqrt{3}$.

Dès lors, les triangles MG_1E' et EME' sont semblables, car ils ont l'angle en E' qui est commun, et $\frac{|ME'|}{|EE'|} = \frac{|G_1E'|}{|ME'|}$ puisque d'après les données dont on dispose :

$$\frac{\frac{c}{2}}{\frac{c}{2}\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{c}{2}\sqrt{3}}{\frac{c}{2}}$$

Mais la figure $EE'FF'$ est un losange : ses diagonales se coupent donc à angles droits. La similitude des triangles MG_1E' et EME' implique dès lors que l'angle en G_1 est un angle droit !

La phase de réification pour la question 2

Rien n'interdit de considérer que les calculs précédents soient classés dans la phase de réification. C'est d'ailleurs le point de vue qu'adopte la grille de lecture qui fait suite à ce corrigé.

Et sans calculer ...

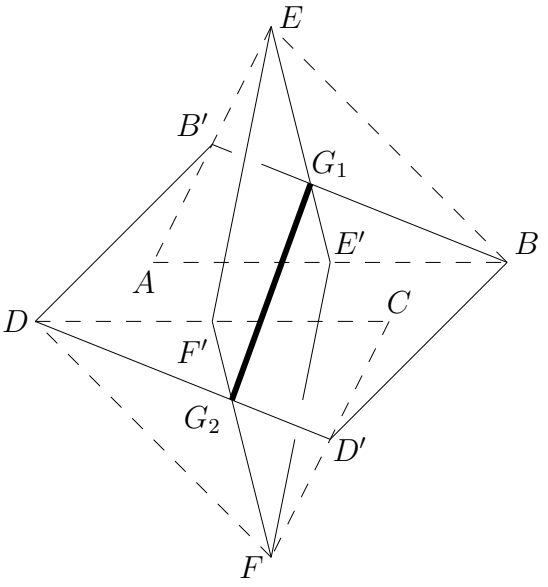
L'idée ([8]) de départ est de démontrer que le plan $\pi_{EE'FF'}$ — construit comme plan médiateur du segment UV — est perpendiculaire au plan π_{ABE}.

En effet, la droite d_{AB} est perpendiculaire à la droite $d_{E'F'}$ (comme on l'a signalé plus haut, le quadrilatère $ABCD$ est un carré) et à la droite $d_{E'F'}$ (le triangle ABE est équilatéral). Le critère de perpendicularité d'une droite et d'un plan implique donc que le droite d_{AB} est perpendiculaire au plan $\pi_{EE'FF'}$. Il s'ensuit que le plan π_{ABE} — qui contient la droite d_{AB} — est perpendiculaire au plan $\pi_{EE'FF'}$, comme souhaité !

Bis repetita placent.

Une construction et un raisonnement analogues établissent que le plan $\pi_{BB'DD'}$ — où B' et D' sont les milieux des segments AE et FC — est pareillement perpendiculaire au plan π_{ABE}.

L'intersection des deux plans $\pi_{EE'FF'}$ et $\pi_{BB'DD'}$ est donc nécessairement perpendiculaire au plan π_{ABE}. Mais cette intersection est la droite $d_{G_1G_2}$: la cause est entendue !



([8]) Cette idée est celle du *seul* groupe qui ait résolu à peu près complètement la question 2. La copie correspondante est reproduite plus loin.

La phase d'intériorisation pour la question 3

D'après les résultats obtenus, la question revient à déterminer la projection d'une figure située dans un plan

- sur un autre plan qui lui est parallèle,
- et suivant une direction perpendiculaire à ces deux plans.

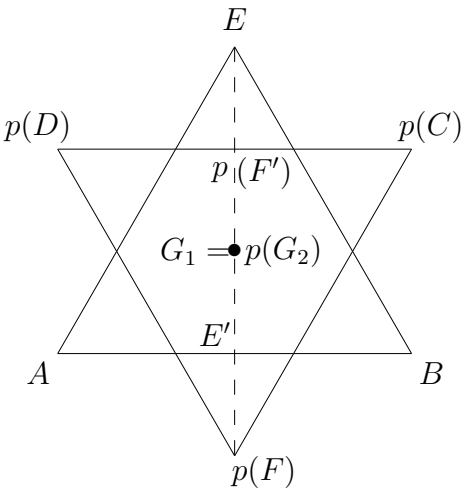
On note p l'opérateur correspondant de projection orthogonale du plan π_{CDF} sur le plan π_{ABE}.

La phase de condensation pour la question 3

Des invariants de projection.

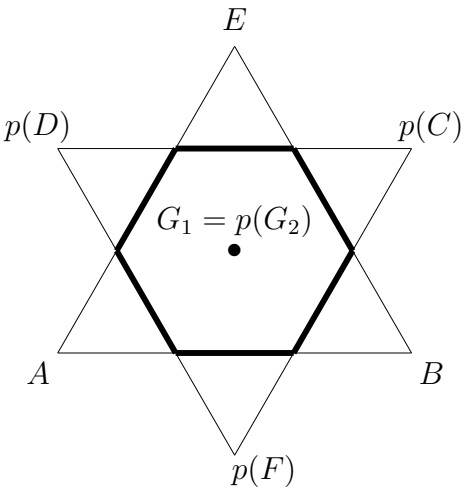
Comme il s'agit de projection parallèle, le parallélisme est conservé. Le plan π_{CDF} étant parallèle au plan π_{ABE}, les longueurs sont conservées par projection. Le triangle équilatéral CDF se projette donc en un nouveau triangle équilatéral $p(C)p(D)p(F)$ dont les côtés sont parallèles à ceux de ABE.

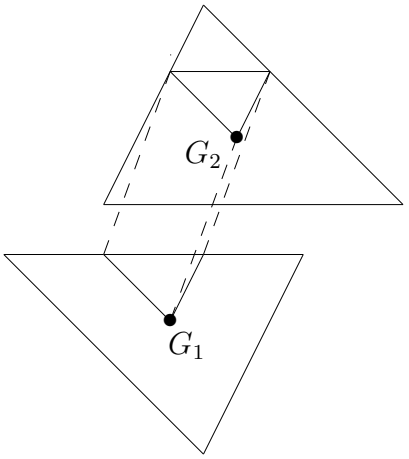
Enfin, la droite $d_{G_1G_2}$ étant perpendiculaire aux deux plans π_{ABE} et π_{CDF} , on a $p(G_2) = G_1$.
Avec un peu de bon sens, on en arrive à la figure de projection ci-contre.

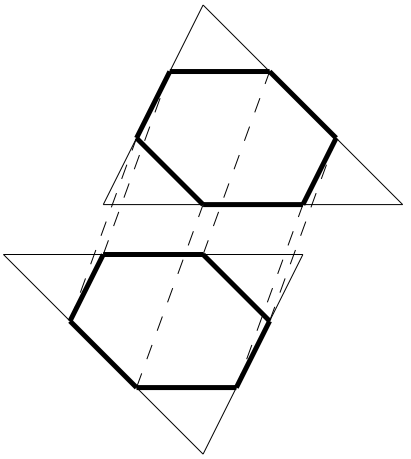


La phase de réification pour la question 3

Elle est plus visuelle que formelle, et consiste à faire voir comment les sommets de l'hexagone central dans la figure de projection correspondent à des points précis sur les côtés du triangle CDF. Comme la projection p conserve les longueurs, on vérifie facilement à l'aide du théorème de Thalès que ces points sont situés au $\frac{1}{3}$ et au $\frac{2}{3}$ de chaque côté des triangles équilatéraux considérés.
Les dessins ci-dessous démontrent — et sinon suggèrent — tout ce qu'il faut ...







18.3.2.4 La grille de lecture : son contenu particularisé au problème, et quelques exemples

Une grille de lecture.

Le corrigé relatif suggère de construire une grille de lecture qui s'attache à relever, d'après les différentes questions, les éléments suivants ([9]).

Pour la question 1,

- pour la phase d'intériorisation :
  - les éléments utiles d'un octaèdre régulier,
  - l'énoncé du critère de parallélisme de deux plans ;
- pour la phase de condensation :

([9]) Malgré le caractère déjà plus ouvert de ce problème, les éléments retenus sont raisonnablement exhaustifs puisque le corrigé est construit au départ des réponses des élèves.

  - le relevé de droites parallèles (à l'aide de losanges par exemple),
  - l'application du critère de parallélisme ;
- pour la phase de réification :
  - la démonstration de coplanarité.

Pour la question 2,

- pour la phase d'intériorisation :
  - la simplification de l'énoncé à partir des résultats de la question 1,
  - l'énoncé du critère de perpendicularité d'une droite et d'un plan ;
- pour la phase de condensation :
  - la construction d'éléments supplémentaires tels que certains plans auxiliaires,
  - l'étude de certains points caractéristiques tels que le point M ;
- pour la phase de réification :
  - les démonstrations ou calculs détaillés.

Pour la question 3,

- pour la phase d'intériorisation :
  - le détail de la situation relative des éléments à projeter ;
- pour la phase de condensation :
  - le relevé des invariants de projection pertinents,
  - la construction de la figure de projection ;
- pour la phase de réification :
  - les justifications ou la visualisation de la construction de cette figure de projection.

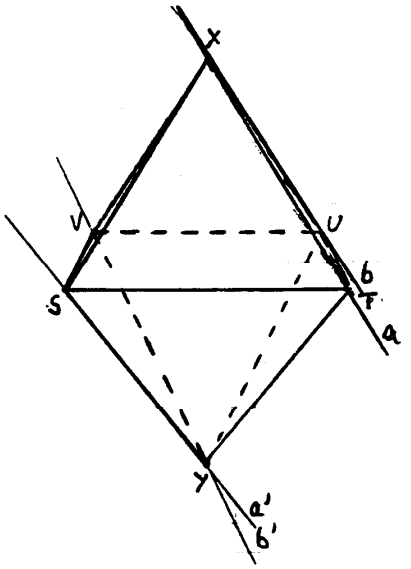
Dans le cas d'une correction effective, il ne faudrait pas perdre de vue que les élèves disposaient d'une maquette fidèle d'un octaèdre.

Quelques exemples

Les extraits de copies d'élèves présentés ci-après sont — encore une fois — l'occasion de quelques commentaires relatifs à la grille de lecture et à sa pertinence.

Une réponse à la question 1.

Ce qui fait l'intérêt — et la difficulté d'appréciation — de la copie n° 4, c'est qu'y coexistent des erreurs de logique et de représentation avec une idée correcte mais insuffisamment exploitée. Les résultats et théorèmes utilisés ne sont presque jamais explicités. On peut supposer que ce groupe d'élèves rencontre des obstacles sérieux dès la phase de condensation.



Hypothèses :

.. plan α et plan β

. droites a et b sécantes dans α. (α étant le plan contenant le triangle équilatéral SVY)

. droites a' et b' sécantes dans β (β étant le plan contenant le triangle équilatéral TUX)

Thèse :

$\alpha \parallel \beta$

Démonstration :

On va démontrer par l'absurde que α et β sont sécants car 2 plans parallèles sont en opposition avec 2 plans sécants.

Nous considérons que la droite p est l'intersection de α et β

. Soit $a \subset \alpha$

$a' \subset \beta$

$a \parallel a'$

$p = \alpha \cap \beta$

De cela on en conclu que $p \parallel a$. (1)

- de même que.

  $b \subset \alpha$

  $b' \subset \beta$

  $b \parallel b'$

  $p = \alpha \cap \beta$

  on en conclu donc que $p \parallel b$. (2).

- de (1) et (2) il en ressort que. a et b sont paralleles.

  Ceci contredit notre deuxième hypothèse qui était :

  les droites a et b sont sécantes ds α.

Conclusion: Ma supposition de départ qui était que

α et β étaient sécants est fausse.

Donc α et β sont paralléles.

Je peux aussi démontrer que dans le carré STUV.

[SV] et [UT] sont paralléles car ds un carré, les côtés sont paralléles 2 à 2.

Or $[SV] \subset \beta$ et $[UT] \subset \alpha$

Conclusion: $\alpha \parallel \beta$

Copie n° 4 (2e partie)

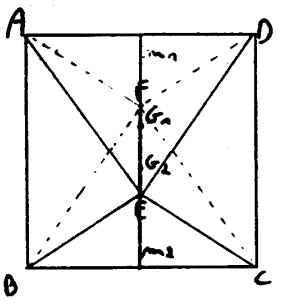
Une réponse à la question 2.

La copie n° 5 est celle qui a inspiré la réponse apportée à la question 2 dans le corrigé relatif. La plupart des éléments caractéristiques de la maîtrise de la phase de condensation sont présents. On observe qu'ici aussi les théorèmes utilisés sont rarement explicités, mais directement employés sans citation. Si les outils sont disponibles pour développer la phase de réification, on ne peut pas encore pour autant prétendre qu'elle soit achevée. En particulier, la figure n'aide à comprendre le texte que partiellement ([10]).

Une réponse à la question 3.

Avec la copie n° 6, voici un autre exemple de phases d'intériorisation bien développées, et de phase de condensation en devenir. Les éléments de raisonnement sont à la disposition des élèves et commencent à être rassemblés en (petits) îlots déductifs, mais les justifications organisées, et les démonstrations manquent encore.

([10]) Rappelons que les élèves disposaient d'une bonne maquette de l'octaèdre.



Supposons une droite p étant perpendiculaire au triangle ADE et passant par G_1 (→ barycentre du Δ ADE)

* On peut dire que la médiane (m_1) du Δ ADE passant par E est ⊥ à p (car p est ⊥ au plan ADE et $m_1 \subset$ ADE.

Elle est aussi parallèle à la médiane m_2 du Δ FBC passant par F (car plan ADE // plan FBC et AD ⊥ m_1 et BC ⊥ m_2, de plus AD // BC et m_1 // m_2)

~~donc~~

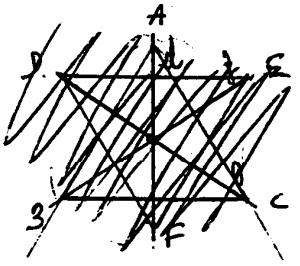
(a 2 droites m_1 et m_2 formant donc un plan (α) ⊥ aux 2 triangles ADE et FBC où p y est inclus (car le plan est ⊥ aux 2 triangles et ....

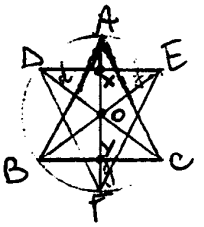
→ donc p passe par G_1 et par un des points de m_2 (1)

* On peut dire la même chose pour la médiane (m_4) du Δ ADE passant par D et celle du Δ BCF passant par B (m_3) donc p passe par G_1 et par un des points de m_3 (2)

\+ de (1) et (2) on peut dire que l'intersection des 2 plans (α et β) est la droite p et qu'elle passe par G_2 et elle est donc ⊥ aux 2 faces opposées

↓
β = plan formé de m_3 et m_4





* les 2 Δ obtenus (ABC et DEF) conservent leurs longueurs par projection orthogonale car ces 2 plans sont parallèles.

* [DE] // à [BC]
  [DF] // à [AC]
  [AB] // à [FE]
  car segments // ds l'octaèdre régulier (voir avant) ①
  Donc par projection orthogonale le parallélisme est conservé.

* La droite p par projection orthogonale devient hauteur. (étant la droite reliant les centres de gravité des 2 Δ // FBC et DAE)
  voir dessin de la 1e démonstr.

~~* les hauteurs des 2 Δ se superposent et forment des hauteurs communes d, f et g (voir dessin ci-dessus) et ces hauteurs communes~~

* lorsqu'on relie les sommets opposés (E et B) (D et C) (A et F), leur intersection (O) est ~~celle~~ le centre d'un cercle reliant ces sommets

Copie n° 6

18.3.3 Un problème concernant la fonction exponentielle en analyse

18.3.3.1 Le contexte du test

Le test a eu lieu le jeudi 3 décembre 1998, de 8 h 50 à 10 h 30 dans une classe de sixième transition de l'école Decroly, à Uccle où, suivant l'organisation propre à l'école, se retrouvaient des élèves d'option à 2 et 4 périodes/semaine en mathématiques, avec M. Francis Michel comme titulaire du cours.

Les élèves, au nombre de vingt et un, ont été regroupés par deux (un élève d'option 2 périodes/semaine avec un élève d'option 4 périodes/semaine) ; un élève de l'option à 4 périodes/semaine a travaillé seul. La résolution du problème devait se concrétiser dans un petit rapport rédigé aussi soigneusement que possible, et remis à la fin des deux périodes consacrées à l'activité.

Le contexte mathématique du problème était celui de l'approximation affine d'une fonction exponentielle décroissante. Les élèves avaient abordé une première fois quelques modèles de croissance exponentielle dans les cours du mois de septembre et octobre, mais n'avaient pas rencontré de cas correspondants de décroissance, ni donc de situations du genre de la décroissance radioactive. Par ailleurs, la notion de fonction décroissante étant connue, le problème proposé était donc un exercice de transposition relativement élémentaire.

Les élèves pouvaient disposer de leurs cours et de leurs calculatrices ([11]). A quelques occasions, le professeur a rappelé ou précisé aux élèves ce qu'il attendait d'eux, en particulier en termes de qualité de rédaction, mais il n'a jamais fourni le moindre élément de réponse dans ses interventions. L'un d'entre nous était présent en classe durant toute la durée du test.

Dans l'ensemble, le test s'est déroulé dans une ambiance de travail satisfaisante, eu égard aux motivations assez variables des élèves vis-à-vis des mathématiques. Si le bruit de fond et le bavardage (discret) n'ont jamais été absents, et si des réactions telles que : « - J'en ai marre ! », ou : « - C'est trop compliqué ! », ont été entendues à quelques reprises, tout cela n'a pas pour autant empêché que le travail se poursuive normalement. Quelques rares essais de collaboration d'un groupe avec l'autre ont été tentés, mais M. F. Michel y a rapidement fait obstacle.

([11]) Il s'agissait généralement de calculatrices scientifiques usuelles (CASIO, TI, ...) et, dans quelques cas de calculatrices graphiques du type HP 48.

Sur les deux périodes de cours dont disposaient les élèves, on peut estimer que les trois quarts ont été occupés à la résolution proprement dite du problème, et qu'un quart a été consacré à la rédaction du rapport.

18.3.3.2 L'énoncé du problème

James Fauxbond est le meilleur agent de sécurité d'une très importante firme qui fabrique des détecteurs de radiations nucléaires. Un soir, son supérieur le convoque dans son bureau.

— James, nous avons un sérieux problème sur le dos ! J'ai l'impression qu'une espèce de réseau d'espionnage industriel s'apprête à faire sortir de l'usine les caractéristiques de notre nouveau détecteur à scintillations.

— Qu'est-ce qui vous fait croire ça, Monsieur ?

— Voilà : en vidant l'armoire d'un technicien qui vient de nous quitter précipitamment, nous sommes tombés par hasard sur trois feuilles de résultats d'expériences. Ce n'est peut-être rien, mais j'ai l'intuition que ces trois feuilles pourraient bien être extraites des résultats d'une ***même*** *expérience menée avec notre tout nouveau détecteur top secret ETAT 52 AP 53. Si c'était vrai, c'est qu'il y a probablement des fuites parmi le personnel spécialisé et il faudrait agir vite.*

— Mais, Monsieur, je ne suis pas très compétent pour ce genre de problème, et ...

— James, il n'est pas question de parler de ça aux physiciens et aux ingénieurs du groupe de recherche : s'il y a des fuites, c'est de là qu'elles proviennent, et il ne faut pas alerter ceux qui en seraient la source. Vous — et vous seul ! – devez me régler ce problème : ***est-il possible que ces trois feuilles de résultats proviennent de la même expérience, et si oui, quelles en sont les caractéristiques ?***

— Mais, Monsieur ...

— Il n'y a pas de « mais », James, j'attends votre rapport complet dans une heure ! Débrouillez-vous ! Voici les feuilles ...

Temps (jours)	Activité (impulsions/min)
138.2	502
138.6	501
139	500
139.4	499
139.8	498
140.2	497
140.6	496

Temps (jours)	Activité (impulsions/min)
0	1000
30	861
60	741
90	638
120	550
150	473
180	407
210	351
240	302
270	260

Temps (jours)	Activité (impulsions/min)
0.2	999
0.4	998
0.6	997
0.8	996
1	995

— Et rappelez-vous, James, il me faut des certitudes, des preuves, des chiffres ! Pas d'à peu près ! La situation est trop grave !

18.3.3.3 Un corrigé relatif

Pour faciliter le renvoi aux feuilles de données du problème, nous avons ordonné les tableaux de manière chronologique, c'est-à-dire :

tableau 1 :

Temps (jours)	Activité (impulsions/minute)
0.2	999
0.4	998
etc.	...

tableau 2 :

Temps (jours)	Activité (impulsions/minute)
0	1000
30	861
60	741
etc.	...

tableau 3 :

Temps (jours)	Activité (impulsions/minute)
138.2	502
138.6	501
etc.	...

Pour ce qui concerne les phases d'intériorisation et de condensation dans le corrigé, l'ordre dans lequel les observations sont rapportées n'est en général pas significatif. Il n'en est plus de même pour la phase de réification.

La phase d'intériorisation

L'observation de linéarité : les tableaux 1 et 3 sont associés à des phénomènes linéaires.

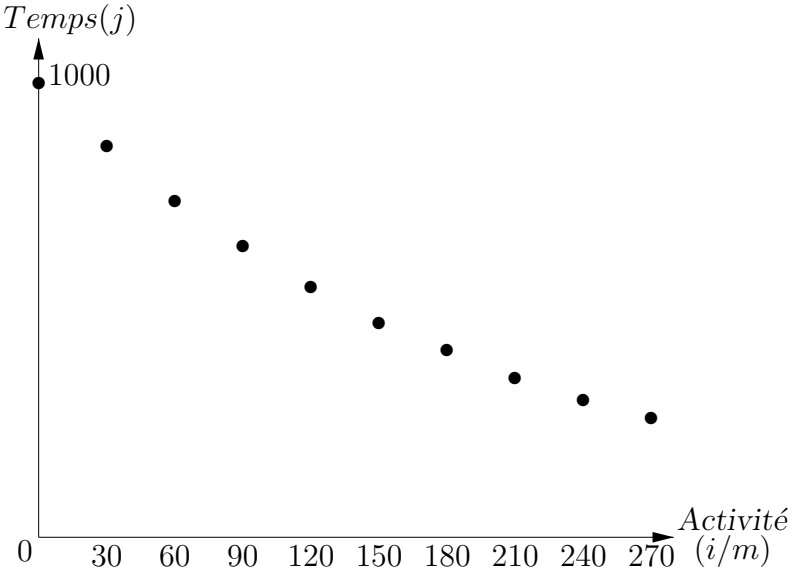
Plus précisément, sur des intervalles de temps identiques à l'intérieur de chaque tableau :

- 0,2 jours pour le tableau 1,
- 0,4 jours pour le tableau 2,

on observe des variations d'activité qui sont constantes, et valent à chaque fois -1 impulsion/minute.

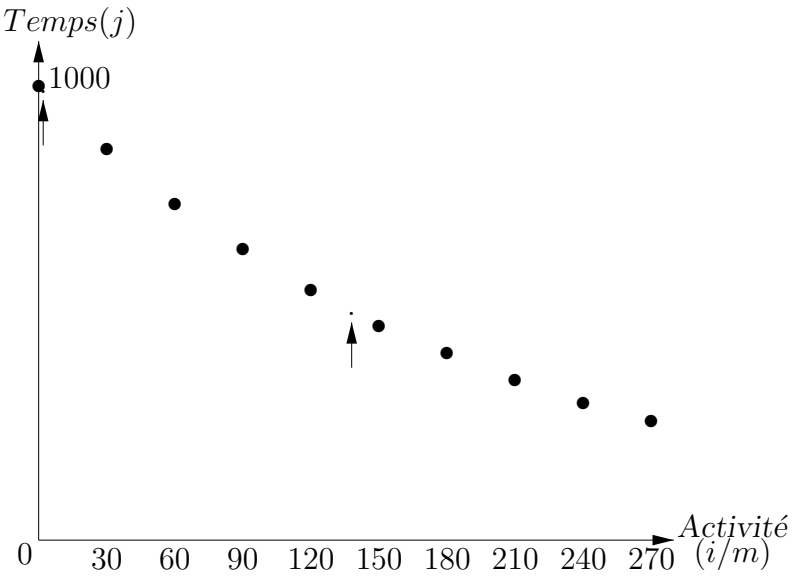
La construction des graphiques correspondant à chaque tableau : les tableaux 1 et 3 donnent lieu à des représentations graphiques qui sont des droites, ce qui n'est pas le cas du tableau 2.

Pour le tableau 2, on obtient en effet le graphique suivant :



La phase de condensation

L'observation d'insertion des graphiques : on peut insérer les positions moyennes correspondant aux tableaux 1 et 3 dans le graphique associé au tableau 2.



En particulier, on n'observe aucun « saut » dans les valeurs de l'activité lors de cette insertion.

L'observation d'approximation en termes de pentes moyennes : l'insertion graphique a un correspondant numérique en termes de pentes moyennes.

Plus précisément, le tableau 1 admet une représentation graphique sous la forme d'une droite de pente ou coefficient angulaire égal à $\frac{-1}{0,2} = -5$, tandis que la pente moyenne du graphe correspondant au tableau 2, sur l'intervalle de temps [0 ; 30], vaut $\frac{-139}{30} = -4,6333\ldots$. Ces deux valeurs de pente moyenne sont relativement proches.

Pareillement, le tableau 3 admet une représentation graphique sous la forme d'une droite de pente ou coefficient angulaire égal à $\frac{-1}{0,4} = -2,5$, tandis que la pente moyenne du graphe correspondant au tableau 2, sur l'intervalle de temps [120 ; 150], vaut $\frac{-77}{30} = -2,5666\ldots$. Ces deux valeurs de pente moyenne sont encore une fois relativement proches ([12]).

L'observation de distinction de linéarité : les tableaux 1 et 3 ne peuvent pas être associés au même phénomène linéaire.

La raison en est simple : la variation d'activité est la même dans chacun de ces tableaux, alors que l'intervalle de temps sur lequel on la mesure n'est pas le même.

L'observation de non-linéarité : le tableau 2 ne peut pas être associé à un phénomène linéaire.

En effet, sur des intervalles de temps identiques de 30 jours, la variation d'activité n'est pas constante.

Temps (jours)	Δt (jours)	Activité (imp./m)	Δ Act. (imp./m)
0		1000	
30	30	861	-139
60	30	741	-120
90	30	638	-103
120	30	550	-88
150	30	473	-77
180	30	407	-66
210	30	351	-56
240	30	302	-49
270	30	260	-42

On peut ajouter que la variation d'activité elle-même n'est pas linéaire et, plus généralement, qu'aucune variation d'ordre quelconque de cette activité n'est linéaire.

([12]) Ces approximations pourraient voir leur portée quelque peu précisée en raisonnant en terme de concavité de la « courbe » représentative des valeurs du tableau 2.

t (j.)	Δt (j.)	A (i./m)	Δ A (i./m)	Δ^2A ...	Δ^3A	Δ^4A	Δ^5A	Δ^6A	Δ^7A	Δ^8A
0		1000								
30	30	861	-139							
60	30	741	-120	19						
90	30	638	-103	17	-2					
120	30	550	-88	15	-2	0				
150	30	473	-77	11	-4	-2	-2			
180	30	407	-66	11	0	4	6	8		
210	30	351	-56	10	-1	-1	-5	-11	-19	
240	30	302	-49	7	-3	-2	-1	4	15	34
270	30	260	-42	7	0	3	5	6	2	-13

L'observation des rapports constants : dans le tableau 2, le rapport entre deux résultats d'activité successifs est approximativement constant.

On convient désormais de noter $A(t)$ l'activité mesurée, en impulsions/minute, à l'instant t mesuré en jours.

t	$A(t)$	rapport $\frac{A(t+30)}{A(t)}$	valeur arrondie du rapport
0	1000		
30	861	0,861	0,861
60	741	0,8606271777 ...	0,861
90	638	0,8609986505 ...	0,861
120	550	0,8620689655 ...	0,862
150	473	0,86	0,86
180	407	0,8604651163 ...	0,86
210	351	0,8624078624 ...	0,862
240	302	0,8603988604 ...	0,86
270	260	0,8609271523 ...	0,861

Dans la suite, on note

$$c \ := \ 0,861$$

la valeur retenue de ce rapport constant entre deux valeurs successives de l'activité.

L'observation troublante : dans les tableaux 1 et 3, le rapport entre deux résultats d'activité successifs pourrait éventuellement être assimilé à une constante ...

Cette observation provient de la volonté de disposer pour tous les tableaux d'informations comparables, mais à ce stade-ci de l'investigation, elle n'est peut-être plus très naturelle. Néanmoins, les valeurs numériques obtenues sont — à première vue — troublantes, en ce qu'elles sont très proches l'une de l'autre ...

t	$A(t)$	rapport $\frac{A(t+0,2)}{A(t)}$
0.2	999	
0.4	998	0,998998998...
0.6	997	0,998997996...
0.8	996	0,998996991...
1	995	0,9989959839...

t	$A(t)$	rapport $\frac{A(t+0,4)}{A(t)}$
138.2	502	
138.6	501	0,9980079681...
139	500	0,998003992...
139.4	499	0,998
139.8	498	0,997995992...
140.2	497	0,9979919679...
140.6	496	0,9979879276...

En fait, la comparaison des deux tableaux tels qu'ils sont repris ici, n'a pas beaucoup de sens, puisque les échelles de temps ne sont pas les mêmes. Une remarque analogue s'appliquerait à une comparaison avec le tableau reproduit plus haut, tiré de l'observation des rapports constants.

Mais on doit surtout remarquer que, la linéarité paraissant évidente pour chacun de deux tableaux précédents, le rapport entre deux résultats d'activité successifs ne saurait alors jamais être véritablement constant, puisque l'équation qui en résulterait : $\frac{A}{A-1} = \frac{A-1}{A-2}$ serait impossible.

Une première conclusion

De toutes les observations et constructions qui précèdent, on peut dégager une réponse qualitative à la première question, réponse fondée essentiellement sur : la construction des graphiques correspondant à chaque tableau, l'observation d'insertion des graphiques et l'observation d'approximation en termes de pentes moyennes.

Cet ensemble d'observations plaide pour que les trois feuilles de résultats proviennent bien de la même expérience.

Il reste bien sûr à intégrer toutes les autres observations à cette proposition de réponse. C'est un travail plus spécifiquement calculatoire, qui va être réalisé dans la phase de réification ci-après.

Enfin, et en guise de résumé, le diagramme n° 1 structure toutes les observations déjà relevées ; la ligne pointillée y sépare la phase d'intériorisation de la phase de condensation. La progression du haut vers le bas peut être interprétée en terme de complexité croissante dans la combinatoire des éléments qui fondent les observations.

La phase de réification

Une interprétation de l'observation des rapports constants : cette observation permet d'obtenir une première expression analytique de la fonction qui décrit l'activité, en accord avec les résultats du tableau 2.

Si T est un multiple de 30, l'observation des rapports constants s'écrit :

$$\frac{A(T+30)}{A(T)} = 0,861$$

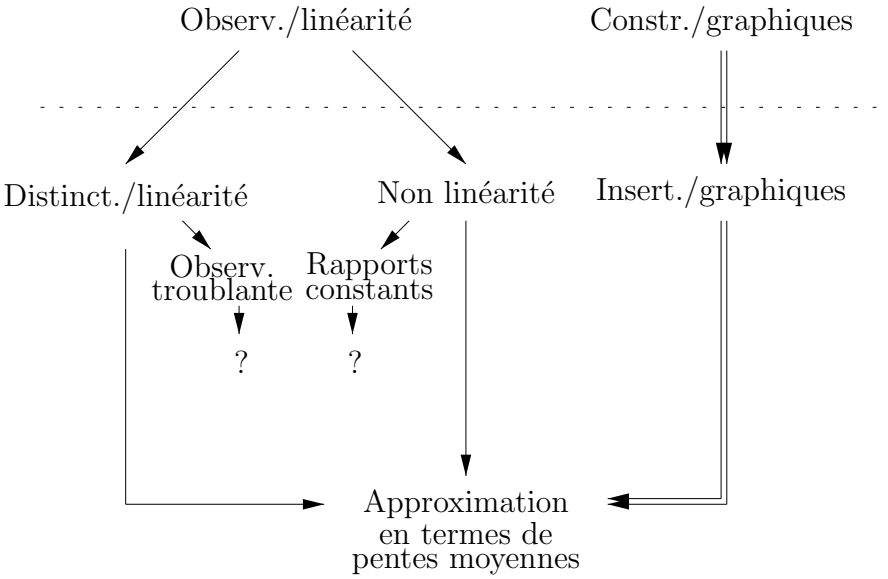


Diagramme n° 1

On en déduit, si n est un nombre entier quelconque :

$$A(T + 30 \cdot n) = 0,861^n \cdot A(T)$$

En vue de s'accorder au tableau 2, cette expression devient $A(30 \cdot n) = 0,861^n \cdot A(0)$, c'est-à-dire

$$A(30 \cdot n) = 1000 \cdot 0,861^n$$

Une comparaison détaillée entre les valeurs fournies et celles que l'expression analytique permet de calculer, illustre le degré de précision de cette expression.

$30 \cdot n$ (jours)	Activité (impulsions/minute)	$A(30 \cdot n)$ (impulsions/minutes)
0	1000	1000
30	861	861
60	741	741,32
90	638	638,27
120	550	549,55
150	473	473,16
180	407	407,39
210	351	350,76
240	302	302,01
270	260	260,03

L'accord de ce modèle avec les changements d'échelles : un changement de variable permet de décrire les trois tableaux de résultats à partir d'une même expression analytique de la fonction $A(t)$.

Si on pose $30 \cdot n = t$ dans l'expression analytique précédente, c'est-à-dire si on y fait le changement de variable $n = \frac{t}{30}$ où t est toujours exprimé en jours, on obtient :

$$A(t) = 1000 \cdot 0,861^{\frac{t}{30}} = 1000 \cdot \left(0,861^{\frac{1}{30}}\right)^t$$

On calcule

$$0,861^{\frac{1}{30}} = 0,9950237304\ldots$$

qu'on arrondit à 0,995. On obtient ainsi une formule qui permet de calculer l'activité $A(t)$ à un instant t quelconque :

$$A(t) = 1000 \cdot 0,995^t$$

A nouveau, une comparaison détaillée entre les valeurs fournies dans les tableaux 1 et 3, et celles que l'expression analytique permet de calculer, illustre le degré de précision obtenu.

t (jours)	Activité (imp./m)	$A(t)$ (imp./m)
0.2	999	999
0.4	998	998
0.6	997	997,01
0.8	996	996,01
1	995	995,02

t (jours)	Activité (imp./m)	$A(t)$ (imp./m)
138.2	502	501,85
138.6	501	500,85
139	500	499,85
139.4	499	498,86
139.8	498	497,86
140.2	497	496,87
140.6	496	495,88

Mais une telle comparaison suggère aussi que la linéarité observée au départ dans ces tableaux devient maintenant relativement « idéale ». En fait, ce seraient les arrondis qui auraient créé la linéarité ...

Une interprétation de l'observation troublante : l'expression analytique de la fonction $A(t)$ en fournit une explication raisonnable.

En effet, on obtient

$$\frac{A(t+0,2)}{A(t)} = \frac{1000 \cdot 0,995^{t+0,2}}{1000 \cdot 0,995^t} = 0,995^{0,2} = 0,9990\ldots$$

Ce rapport est donc bel et bien constant, c'est-à-dire indépendant de t. Cette propriété compense en quelque sorte le défaut de linéarité qui résulte de l'adoption générale de la fonction $A(t)$ pour décrire l'activité.

On obtient pareillement, dans le cas du tableau 3 :

$$\frac{A(t+0,4)}{A(t)} = \frac{1000 \cdot 0,995^{t+0,4}}{1000 \cdot 0,995^t} = 0,995^{0,4} = 0,9980\ldots$$

La conclusion est complètement analogue.

Et l'observation — troublante au départ — devient maintenant tout à fait compréhensible !

Conclusions générales

A la lumière de cette longue discussion, on peut raisonnablement affirmer que les trois feuilles de résultats proviennent bien de la même expérience, et que les principales propriétés observées à cette occasion s'expliquent à partir de la seule expression analytique de l'activité $A(t)$ sous la forme

$$A(t) = 1000 \cdot 0,995^t$$

où t est exprimé en jours, et $A(t)$ en impulsions/minute.

Les réserves que l'on peut être tenté de maintenir dans cette conclusion justifient que le problème soit qualifié d'« ouvert ». On dispose en effet d'une solution qui tient compte de toutes les observations, y compris de celles qui paraissaient troublantes. Mais rien ne permet de savoir *a priori* si la réponse proposée est correcte. **Seule la cohérence de l'argumentation permet de se faire une opinion !**

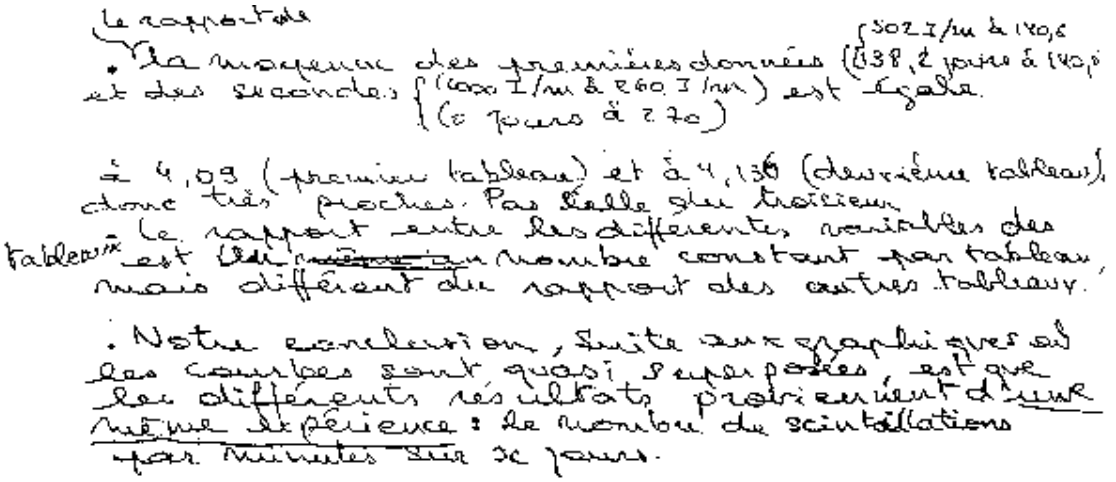
Ce dernier critère permet souvent de détecter le caractère « ouvert » d'un problème.

18.3.3.4 La grille de lecture : son contenu particularisé au problème, et quelques exemples

Une grille de lecture.

Le corrigé relatif suggère de construire une grille de lecture qui s'attache à relever les éléments suivants,

- pour la phase d'intériorisation :
  - les types de calculs (numériques, algébriques, ...) effectivement présents, ou évoqués,
  - les types de représentations graphiques effectivement présentes, ou évoquées ;
- pour la phase de condensation :
  - les observations réalisées, en essayant de les relier à celles énumérées dans le corrigé relatif ;
- pour la phase de réification :
  - les relations explicitées entre les observations réalisées,
  - la structuration logique de la conclusion.



Copie n° 7

Quelques exemples.

Le déroulement de l'expérience a privilégié la recherche d'une solution au problème sur la production d'un rapport. Les commentaires sur les copies sélectionnées concernent donc aussi les brouillons ([13]) préliminaires, souvent très intéressants et plus fouillés que ces rapports.

Les extraits de copies d'élèves présentés ci-après sont — une dernière fois — l'occasion de quelques commentaires relatifs à la grille de lecture et à sa pertinence.

Une copie difficile.

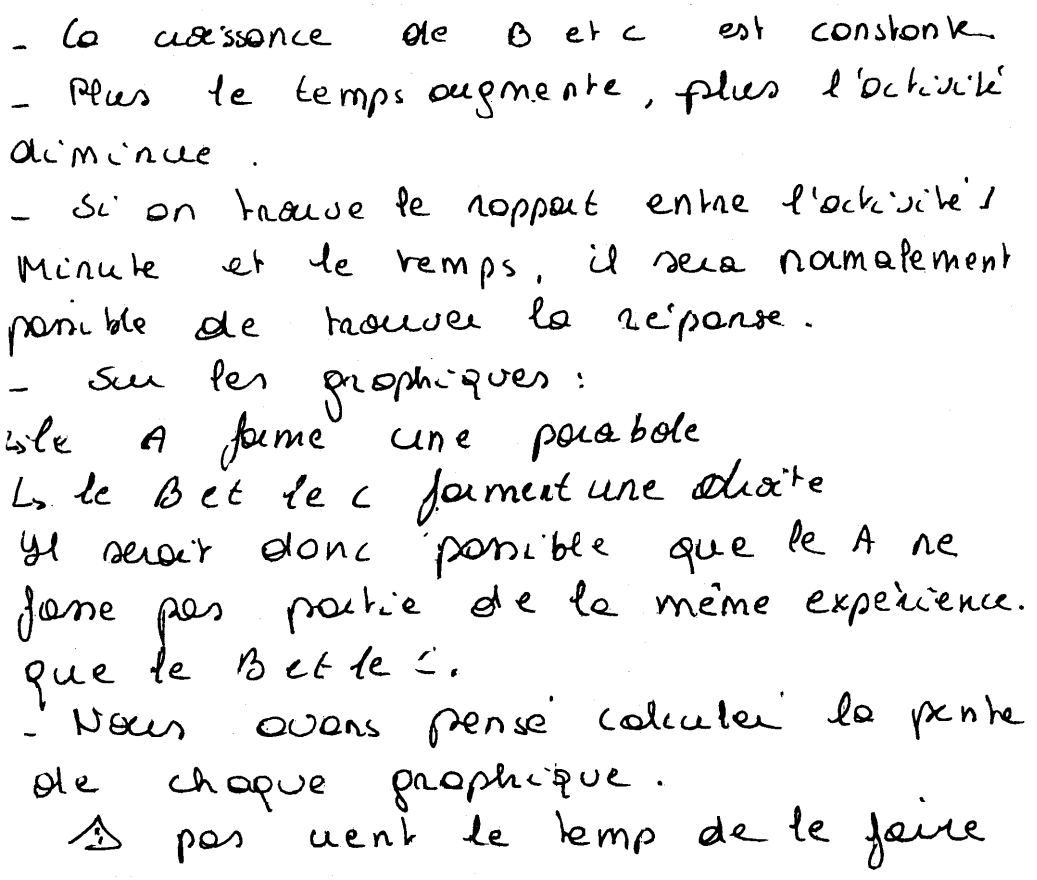
La copie n° 7 et les brouillons qui l'accompagnent renferment des calculs « incantatoires ([14]) » : moyennes (et les moyennes en jours sont transformées en minutes, ...), quotient de l'activité par le temps, activité transformée systématiquement en impulsions/jours, ... La conclusion du rapport est exprimée sous une forme d'apparence argumentée, mais en dehors de cela, le rapport est difficile à interpréter. Il ne nous semble pas évident que la phase d'intériorisation ait été atteinte, au sens où les données mêmes du problème ne paraissent pas bien comprises.

Une copie intéressante.

On relève dans les brouillons associés à la copie n° 8 des calculs de différences finies poussés jusqu'au troisième ordre.

([13]) La qualité de ces brouillons, trop mauvaise en vue d'une reproduction, n'a pas permis de les insérer ici.

([14]) Nous appelons ainsi les calculs qui ne semblent être présents dans les copies que pour donner l'illusion d'un habillage mathématique, sans avoir aucune relation sensée avec le problème.


- La croissance de B et C est constante
- Plus le temps augmente, plus l'activité diminue.
- Si on trouve le rapport entre l'activité / Minute et le temps, il sera normalement possible de trouver la réponse.
- Sur les graphiques :
↳ le A forme une parabole
↳ le B et le C forment une droite
Il serait donc impossible que le A ne fasse pas partie de la même expérience. que le B et le C.
- Nous avons pensé calculer la pente de chaque graphique.
⚠ pas assez le temps de le faire

Copie n° 8

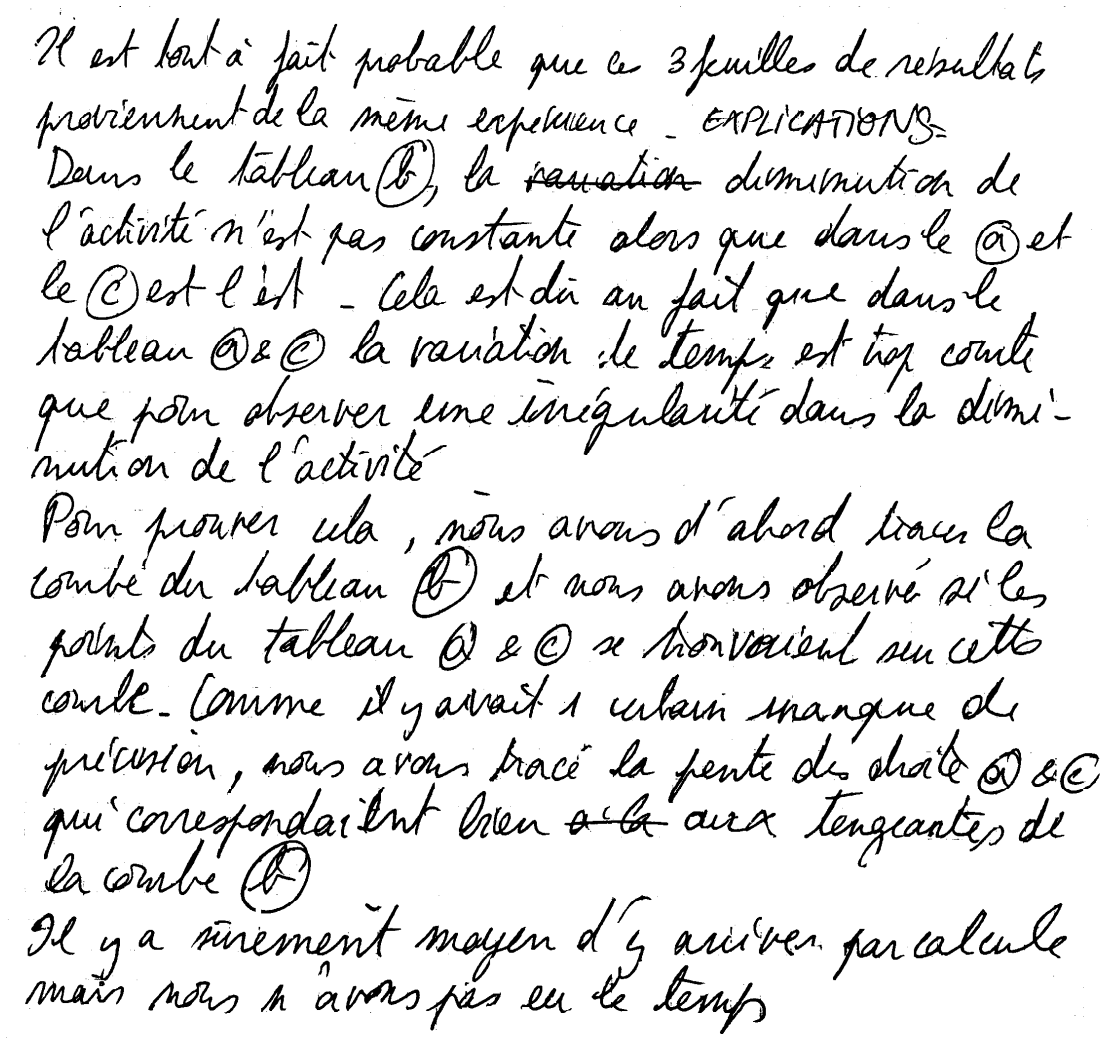
Tous les graphiques présents dans ces brouillons sont ceux du temps considéré comme fonction de l'activité. Les droites qui correspondent aux tableaux 1 et 3 sont correctement représentées, le graphique correspondant au tableau 2 est assimilé à une parabole.

La construction des graphiques correspondant à chacun des tableaux est présenté dans les brouillons. Les calculs de différences finies et les droites associées au tableaux 1 et 3 indiquent que les observations de linéarité, de distinction de linéarité et de non-linéarité ont été faites. Les phases d'intériorisation et de condensation semblent donc bien maîtrisées.

Quelques éléments propres à la phase de réification apparaissent : la conclusion est exprimée sous une forme argumentée, mais les liens entre les arguments sont peu explicités.

Une copie qui va loin ...

On retrouve dans les brouillons de la copie n° 9 des calculs de pentes relatifs aux droites associées aux tableaux 1 et 3, ainsi que des calculs de différences finies relatifs au tableau 2 et ce, jusqu'au deuxième ordre.


Il est tout à fait probable que ces 3 feuilles de résultats proviennent de la même expérience - EXPLICATIONS -
Dans le tableau (b), la ~~variation~~ diminution de l'activité n'est pas constante alors que dans le (a) et le (c) est l'est - Cela est dû au fait que dans le tableau (a) & (c) la variation de temps est trop courte que pour observer une irrégularité dans la diminution de l'activité
Pour prouver cela, nous avons d'abord tracé la courbe du tableau (b) et nous avons observé si les points du tableau (a) & (c) se trouvaient sur cette courbe. Comme il y avait un certain manque de précision, nous avons tracé la pente des droite (a) & (c) qui correspondaient bien ~~à la~~ aux tangeantes de la courbe (b)
Il y a surement moyen d'y arriver par calcule mais nous n'avons pas eu le temps

Copie n° 9

Des graphes du genre droite et courbe sont esquissés dans ces brouillons, et associés aux tableaux correspondants ; ils sont fournis comme graphes de l'activité en fonction du temps. Un dessin assez soigné du temps considéré comme fonction de l'activité comporte aussi des tracés approximatifs de tangentes aux points utiles. Aucune équation de ces lignes n'est présente.

L'observation de linéarité, la construction des graphiques correspondants à chaque tableau, les observations d'insertion des graphiques, de distinction de linéarité, de non-linéarité sont présentes dans le rapport ou dans les brouillons, ainsi que l'assimilation d'une pente sur un intervalle de temps assez petit à une (pente de) tangente. Les phases d'intériorisation et de condensation sont donc quasiment achevées.

Quant à la phase de réification, des éléments encourageants sont présents : la conclusion repose sur une argumentation relativement valable, même si les justifications sont presque exclusivement qualitatives.

18.3.4 Quelques conclusions (provisoires)

Tant dans l'amorce d'une analyse théorique des questions d'évaluation qu'à travers les expériences résumées ci-dessus, il semble bien que le découpage en trois phases de la résolution d'un problème peut présider à la mise au point d'un corrigé relatif, et fournir une grille de lecture des productions d'élèves.

En se limitant aux problèmes considérés, il est rare que la phase d'intériorisation ne soit pas atteinte. La phase de condensation est celle dont le niveau de développement est — assez naturellement — le plus variable. La phase de réification n'est quasiment jamais achevée, même si dans certains cas, des éléments déterminants soient solidement présents.

18.4. Peut-on envisager une certification de la résolution de problèmes ?

Le schéma d'évaluation précédent, éventuellement modifié, a très probablement un sens en terme d'*évaluation formative*.

Mais il serait paradoxal que ce qui est considéré comme l'activité mathématique par excellence — la résolution de problèmes — et qui est présentée ici comme une compétence terminale importante, échappe à l'*évaluation certificative*.

La définition d'une évaluation certificative de la résolution de problèmes apparait donc comme un objectif incontournable, ... mais hérissé de difficultés multiples. La résolution de problèmes est en effet une activité tellement globale et complexe, tant de paramètres seraient à mesurer qu'un objectif de certification semble effrayant, dangereux ou hors de portée.

La crainte des difficultés ne résout pas une question ! Nous avons tenté une première analyse, qui est résumée ci-après, avec comme résultat un mode d'évaluation que l'on peut qualifier de certificatif.

Sur quoi conviendrait-il donc de fonder une évaluation certificative de la résolution de problèmes ?

Il semble d'abord assez clair que la résolution de problèmes est une activité relativement nouvelle dans les classes, et que les données dont nous disposons quant à ses modalités d'évaluation ne sont pas encore décisives. Il est néanmoins permis de croire que cette évaluation ne sera pas de type « classique » et, en particulier, qu'il ne faut pas trop essayer de transposer à ce genre d'activité des épreuves de certification classiques, telles que les examens à temps limité, ...

Plus fondamentalement, l'évaluation certificative à définir doit être basée sur les spécificités de la résolution de problèmes. Or, cette activité est une activité globale, complexe et éminemment dynamique. Ce qu'il faut donc « mesurer » c'est son caractère dynamique, évolutif. Cela suggère de ne pas se limiter à une (seule) épreuve, mais bien de prendre en compte tout un ensemble d'épreuves dont il s'agirait d'évaluer divers indices de progression.

En conséquence, parmi les trois fonctions ([15]) que l'on reconnait à l'évaluation (sommative, prédictive, formative), la fonction prédictive est probablement à privilégier dans le cadre qui nous occupe.

Le principe d'évaluation pourrait alors être le suivant :

- un certain nombre d'épreuves de résolution de problèmes — de modalités appropriées — seraient organisées tout au long de l'année,
- chaque élève se verrait attribuer pour chaque épreuve un *vecteur de cotation* suivant un schéma d'évaluation tel que celui décrit par exemple plus haut,
- pour chaque élève, certains indices (ou facteurs, ou coefficients) de progrès seraient alors calculés à partir de ses vecteurs de cotation, ces indices étant les rapports entre deux notes (vectorielles) attribuées à certaines épreuves dont les objectifs sont comparables ([16]).

Ces différents indices constitueraient le renseignement certificatif recherché. Par exemple, un certain nombre bien défini de tels facteurs seraient de nature à autoriser le passage d'une classe à la suivante, en conformité avec les exigences attachées à l'option suivie.

Il est bien clair que ces indices ne seraient pas le seul critère de certification à retenir. Les épreuves bien connues de restitution des acquis ou de reproductions ou transpositions d'activités de routines gardent leur pertinence, mais — du moins faut-il le souhaiter ! — dans leur seul champ de compétences propres.

([15]) Nous empruntons en partie à G. Glaeser (cfr. [77], pp. 35-37) cette distinction de trois types d'évaluation d'après leur fonction. Dans le cadre des compétences terminales, il nous semble néanmoins judicieux de considérer l'évaluation sommative et l'évaluation prédictive comme les deux composantes de ce que nous avons appelé l'évaluation certificative : elles seraient en effet les deux facettes terminales de la réussite d'un apprentissage, l'évaluation sommative relevant l'aspect statique des acquis, l'évaluation prédictive relevant l'aspect dynamique des acquis. En particulier, les décisions d'orientation, qui entrent dans le domaine de l'évaluation prédictive, nous paraissent étroitement liées à la certification dès qu'on souhaite échapper à une évaluation minimaliste des compétences.

([16]) Par exemple, une suite de tests sur la démonstration en géométrie peuvent constituer des épreuves d'objectifs comparables.

18.5. Il reste du pain sur la planche ...

La définition d'une forme d'évaluation certificative adaptée à la résolution de problèmes présenterait l'intérêt de consolider un enseignement organisé autour de ce type d'activité.

Nous avons proposé une solution possible, mais le débat n'est évidemment pas clos !

Il reste à insister encore sur la nécessité du caractère opérationnel de ce type d'évaluation : si on veut agir sur la vie quotidienne des classes, aider les enseignants à approfondir la logique de la résolution de problèmes, il importe que toute procédure d'évaluation de la résolution d'un problème soit fondamentale — c'est-à-dire englobe l'essentiel de l'activité — et reste néanmoins simple. Une cotation vectorielle qui ne dépasse pas trois composantes semble réaliste dans ce contexte.

Enfin, il faut revenir sur la nécessité de promouvoir un enseignement de la résolution de problèmes, pour lui-même et dans la durée ([17]) : le développement d'activités du type « laboratoire de mathématiques », où le caractère profondément expérimental de la résolution de problèmes serait à l'honneur semble une voie à explorer en priorité.

Il reste du pain sur la planche ...

Référence

[77]

([17]) On pourrait comparer la résolution de problèmes à un sport : l'entraînement, le progrès, la reconnaissance ne prennent leur sens que dans la durée.

Chapitre 19

L'évaluation lors d'une séquence d'enseignement sur les probabilités

19.1 Introduction 651
19.2 Une interrogation 652
19.3 Un modèle de correction 653
19.4 Remarques générales et cas particuliers 654
19.4.1 Pour la question du « pile ou face » 655
19.4.2 Pour la question du « pick-pocket » 657
19.5 Comportements significatifs 659
19.6 Une tentative d'évaluation « vectorielle » 661
19.7 Exploitation des résultats par analyse factorielle 663
19.8 Exploitation des résultats par une méthode d'aide à la décision 668
19.9 Conclusion 672

19.1. Introduction

L'analyse qui suit porte sur une interrogation faite dans le contexte de la séquence de cours concernant les probabilités (voir chapitre 14). Son but est avant tout d'ouvrir des voies vers de nouvelles techniques d'évaluation.

Nous sommes bien conscients qu'il n'est pas concevable de demander aux enseignants de réaliser régulièrement de telles études. Nous voulons au moins montrer qu'une simple cote attribuée à un travail d'élève est loin d'être objective et représentative.

Avant d'aller plus loin, il nous paraît important de citer quelques différences majeures entre les groupes testés, à savoir ceux de M. Paul Dechamps (DP) et de M. Pierre Lepourcq (LP).

CHEZ DP	**CHEZ LP**
• Les élèves n'ont reçu que la figure 14.1 sous forme de photocopie et ont pris note du reste.	• Les élèves ont reçu l'intégralité des notes photocopiées.
• La classe comptait vingt élèves.	• La classe comptait dix élèves.
• Les élèves ne connaissaient pas encore les notions de dépendance et d'indépendance au moment du test.	• L'interrogation s'est déroulée à la fin de la séquence.
• La question du *pick-pocket* clôturait l'interrogation.	• L'interrogation commençait par la question du *pick-pocket*.

Signalons encore que :

- les élèves de DP ont disposé de moins de temps que ceux de LP pour répondre aux questions ;
- les élèves de Pierre Lepourcq ont répondu aux questions de ce test une première fois avant que ne débute notre séquence de cours, et une seconde fois à la fin (sans avoir été prévenus de cette redite).
  Les élèves de Paul Dechamps n'y ont répondu qu'une seule fois, au milieu de la séquence.

19.2. Une interrogation

L'interrogation dont nous parlons ici s'est déroulée pendant près d'une séance de cours dans les deux classes testées.

Les constatations et les analyses qui suivent portent sur l'ensemble des élèves des deux classes, ce qui représente une trentaine d'individus. Il ne nous était pas possible de scinder l'analyse en deux, vu la petitesse de l'échantillon, bien que les conditions du test n'aient pas été les mêmes dans les deux classes.

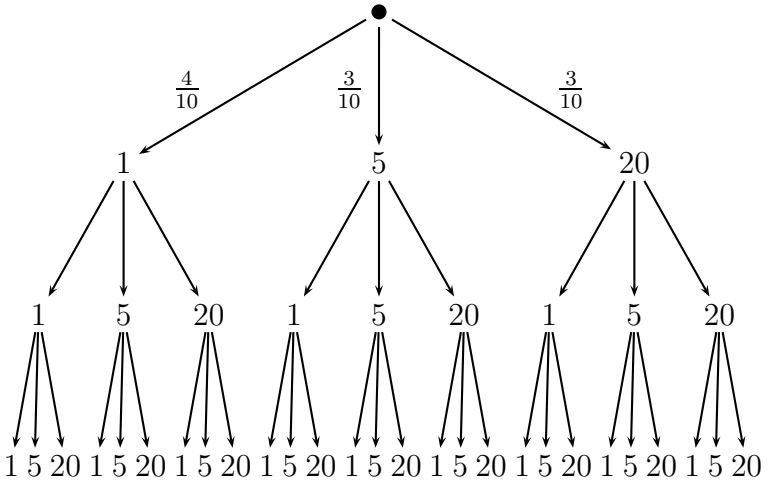
Les questions du test sont les suivantes, elles émanent de Paul Dechamps.

1. On jette trois fois une pièce :
   (a) calculer la probabilité d'avoir trois fois « face » ;
   (b) calculer la probabilité d'avoir un nombre impair de fois « pile ».
2. Un pick-pocket plonge la main dans une poche contenant quatre pièces de 1 fb, trois pièces de 5 fb et 3 pièces de 20 fb. Il en subtilise trois. Calculer la probabilité que la somme volée soit :
   (a) 60 fb ;
   (b) 30 fb ;
   (c) > 3 fb.

19.3. Un modèle de correction

Pour la résolution de la première question, un arbre binaire peut être utilisé. La suite est triviale.

Pour résoudre la seconde question, nous suggérons d'employer l'arbre suivant :



Pour répondre aux trois sous-questions, il reste à extraire les chemins adéquats en y indiquant les probabilités.

$$
\begin{aligned}
\bullet\ \mathbb{P}(60) &= \mathbb{P}(20,20,20) = \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{120} \\
\bullet\ \mathbb{P}(30) &= \mathbb{P}(20,5,5) + \mathbb{P}(5,20,5) + \mathbb{P}(5,5,20) \\
&= \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{8} + \frac{3}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8} + \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{8} \\
&= \frac{3}{40} \\
\bullet\ \mathbb{P}(>3) &= 1 - \mathbb{P}(3) = 1 - \mathbb{P}(1,1,1) = \frac{29}{30}
\end{aligned}
$$

19.4. Remarques générales et cas particuliers

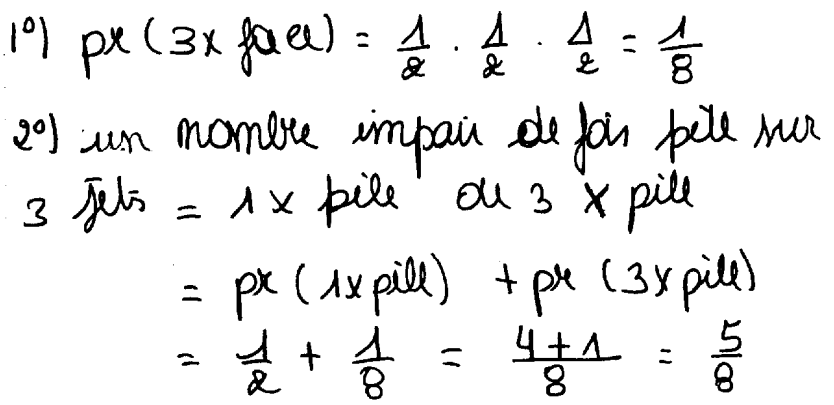
La lecture des travaux d'élèves nous a permis d'observer quelques comportements importants, ainsi que des cas particuliers interpellants :

19.4.1 Pour la question du « pile ou face »

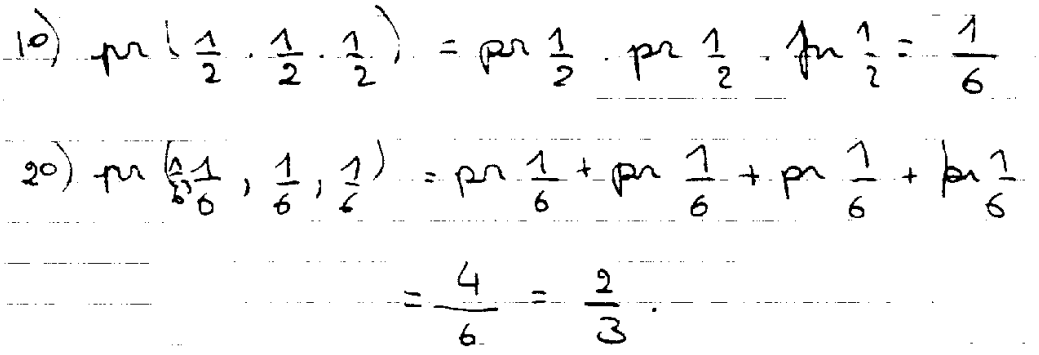
- L'arbre binaire est généralement dessiné.
- Un sérieux problème algébrique :

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

  qui eût pu être corrigé par une meilleure lecture de l'arbre.
- Des élèves confondent la probabilité d'obtenir 1× pile sur 1 lancer et sur 3 lancers. Ce lapsus peut entraîner des erreurs de calculs comme celles-ci :



- Un certain flou sur l'utilisation des lois du produit et de la somme. Dans des cas extrêmes, cette confusion peut conduire à de tels calculs :

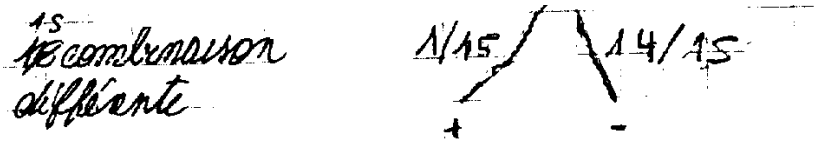


- Signalons un élève qui répond bien à la première partie de la question et qui, pour la deuxième partie, se retrouve dépourvu d'idées.
  Il écrit alors une réponse que l'on peut qualifier d'« incantatoire » :

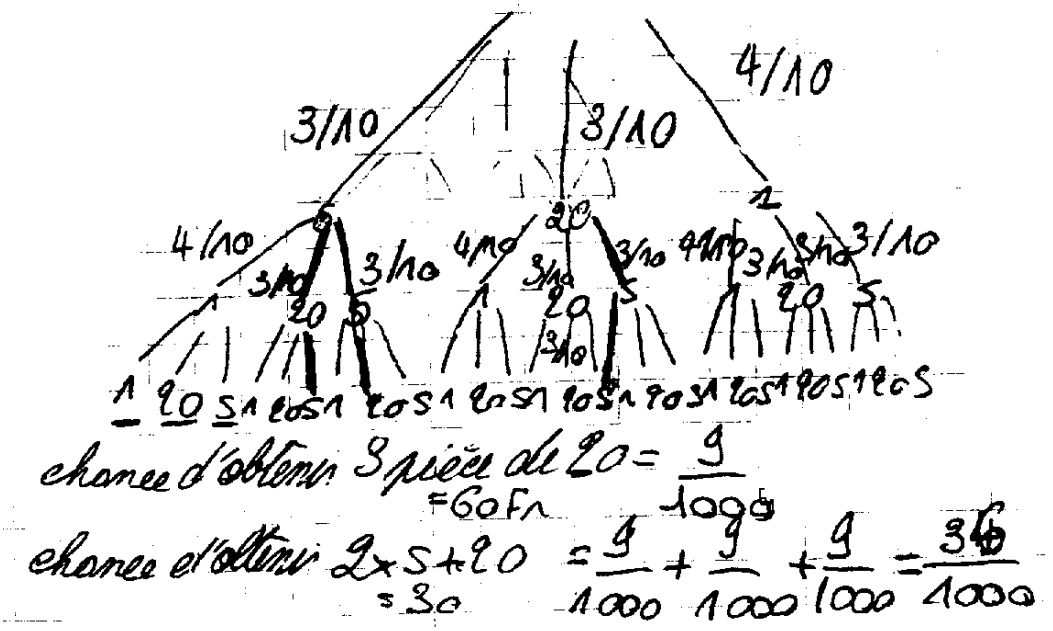
2) ~~On peut avoir~~ Cette expérience est une expérience aléatoire, elle dépend du hasard. Elle peut avoir plusieurs issues différentes et on ne peut prévoir laquelle ça va être. C'est pourquoi nous ne pouvons pas calculer cette probabilité

19.4.2 Pour la question du « pick-pocket »

- Des erreurs d'utilisation des lois du produit et de la somme.
- Une vision macroscopique des événements : pas de différence entre les triplets $(20, 5, 5)$, $(5, 20, 5)$ et $(5, 5, 20)$. Du point de vue des arbres, une telle vision est évidemment dangereuse.
- Des difficultés à dessiner un arbre utile. Certains élèves s'en sont même passé.
- Une généralisation de l'équiprobabilité et de l'indépendance des événements. Notons que beaucoup d'élèves ont imité la construction du premier arbre dans cette seconde question.
- Voici un extrait de la copie d'un élève qui a tout d'abord esquissé un arbre binaire basé sur 15 combinaisons possibles, dont une « bonne » :



Il dessine ensuite l'arbre suivant, dans lequel l'indépendance est flagrante :



- Signalons que l'un des élèves aboutit — tout en restant fidèle à sa propre logique — à une probabilité supérieure à 1 et une autre négative :

3°) $p_n(3F) = p_n(1F) + p_n(1F) + p_n(1F)$

$= \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$

proba d'avoir plus que 3F $= 1 - p_n(3)$

$= \frac{5}{5} - \frac{6}{5} = -\frac{1}{5}$

19.5. Comportements significatifs

Dans l'optique d'une évaluation « vectorielle », chaque élève reçoit — pour chacun des comportements décrits ci-dessous — un code correspondant à son attitude. Il est à noter que la liste de ces comportements a été mise au point en fonction d'une analyse des copies. Une version primitive de la liste présentait des comportements qui se sont avérés être redondants et ont conséquemment été supprimés.

Pour la première question

Compatibilité entre les calculs et l'arbre : variable com1
(trois modalités)

PA1 ..... pas d'arbre
COM1 ..... compatibilité
INC1 ..... incompatibilité

Distinction entre les lois de la somme et du produit : variable dis1
(quatre modalités)

O1 ..... oui
N1 ..... non
NU1 ..... aucune de ces lois n'est utilisée
NC1 ..... pas de conclusion possible

Réussite à la sous-question a

OKA1 ..... réussite
KOA1 ..... échec
ABA1 ..... abstention

Réussite à la sous-question b

OKB1 ..... réussite
KOB1 ..... échec
ABB1 ..... abstention

Pour la deuxième question

Construction des arbres probabilisés : variable con2

(cinq modalités)

NON ..... absence d'arbre
CONB ..... arbres concis bien conçus
CONM ..... arbres concis mal conçus
ACB ..... arbre complet bien conçu
ACM ..... arbre complet mal conçu

Dépendance des événements : variable dep2

(trois modalités)

PNDI . les notions de dépendance et d'indépendance n'apparaissent pas
INDE ..... indépendance systématique des événements
BON ..... bonne utilisation de cette dépendance

Compatibilité entre les calculs et l'arbre : variable com2

(trois modalités)

PA2 ..... pas d'arbre
COM2 ..... compatibilité
INC2 ..... incompatibilité

Distinction entre les lois de la somme et du produit : variable dis2

(quatre modalités)

O2 ..... oui
N2 ..... non
NU2 ..... aucune de ces lois n'est utilisée
NC2 ..... pas de conclusion possible

Réussite à la sous-question a

OKA2 ..... réussite
KOA2 ..... échec
ABA2 ..... abstention

Réussite à la sous-question b

OKB2 ..... réussite
KOB2 ..... échec
ABB2 ..... abstention

Réussite à la sous-question c

OKC2 ..... réussite
KOC2 ..... échec
ABC2 ..... abstention

19.6. Une tentative d'évaluation « vectorielle »

Le tableau ci-après reprend les résultats des élèves de DP (de 1 à 20) suivis de ceux de LP (de 21 à 30).

	1re question				**2e question**						
Elève	Compatibilité entre les calculs et l'arbre	Distinction lois de la somme et du produit	Réussite à la sous-question a	Réussite à la sous-question b	Construction des arbres	Dépendance des événements	Compatibilité entre les calculs et l'arbre	Distinction lois de la somme et du produit	Réussite à la sous-question a	Réussite à la sous-question b	Réussite à la sous-question c
1	COM1	O1	OKA1	OKB1	NON	PNDI	PA2	NU2	KOA2	KOB2	KOC2
2	INC1	NU1	KOA1	ABB1	CONM	BON	COM2	N2	OKA2	KOB2	ABC2
3	PA1	N1	KOA1	KOB1	NON	PNDI	PA2	NU2	KOA2	KOB2	ABC2
4	INC1	N1	KOA1	KOB1	CONM	INDE	COM2	O2	KOA2	KOB2	KOC2
5	COM1	NC1	OKA1	ABB1	NON	INDE	PA2	NC2	KOA2	KOB2	KOC2
6	COM1	O1	OKA1	KOB1	CONM	BON	COM2	O2	OKA2	KOB2	KOC2
7	COM1	O1	OKA1	OKB1	ACM	BON	COM2	N2	KOA2	KOB2	KOC2
8	COM1	O1	OKA1	KOB1	ACB	BON	COM2	O2	OKA2	KOB2	ABC2
9	INC1	O1	KOA1	KOB1	CONM	INDE	INC2	N2	KOA2	KOB2	KOC2
10	COM1	O1	OKA1	OKB1	CONM	PNDI	COM2	NU2	KOA2	KOB2	KOC2
11	COM1	O1	OKA1	KOB1	NON	INDE	PA2	O2	KOA2	KOB2	KOC2
12	INC1	N1	KOA1	KOB1	CONM	INDE	COM2	O2	KOA2	KOB2	ABC2
13	INC1	O1	KOA1	KOB1	CONM	INDE	INC2	N2	KOA2	KOB2	KOC2
14	INC1	N1	KOA1	KOB1	NON	PNDI	PA2	NU2	KOA2	KOB2	ABC2
15	COM1	NC1	OKA1	ABB1	CONM	BON	COM2	O2	KOA2	KOB2	KOC2
16	COM1	O1	OKA1	OKB1	CONM	INDE	PA2	N2	KOA2	KOB2	ABC2
17	COM1	O1	OKA1	OKB1	CONM	BON	COM2	O2	KOA2	KOB2	KOC2
18	COM1	O1	OKA1	OKB1	NON	BON	PA2	O2	OKA2	KOB2	KOC2
19	COM1	O1	OKA1	OKB1	CONM	INDE	COM2	O2	KOA2	KOB2	KOC2
20	COM1	O1	OKA1	OKB1	ACB	BON	INC2	N2	KOA2	KOB2	KOC2
21	COM1	O1	OKA1	OKB1	CONB	BON	COM2	O2	OKA2	OKB2	OKC2
22	COM1	O1	KOA1	KOB1	CONM	BON	COM2	NC2	OKA2	KOB2	KOC2
23	INC1	N1	KOA1	KOB1	ACM	PNDI	INC2	NC2	KOA2	KOB2	KOC2
24	INC1	N1	KOA1	KOB1	ACB	BON	COM2	N2	KOA2	KOB2	KOC2
25	COM1	O1	KOA1	OKB1	ACB	BON	COM2	O2	OKA2	KOB2	OKC2
26	INC1	N1	KOA1	KOB1	ACB	BON	COM2	NC2	OKA2	KOB2	OKC2
27	COM1	O1	OKA1	OKB1	ACM	INDE	COM2	O2	KOA2	KOB2	KOC2
28	COM1	O1	OKA1	OKB1	CONB	BON	COM2	O2	OKA2	KOB2	OKC2
29	COM1	O1	OKA1	OKB1	CONB	BON	COM2	O2	OKA2	OKB2	OKC2
30	COM1	O1	OKA1	OKB1	ACB	BON	COM2	O2	OKA2	OKB2	KOC2

19.7. Exploitation des résultats par analyse factorielle

Nous utilisons ci-après l'*analyse factorielle des correspondances multiples*, présentée dans l'annexe A.

Nous avons encodé le tableau précédent à l'aide du logiciel CHADOC VS ([1]). Seules les colonnes concernant les échecs et les réussites aux diverses sous-questions ont été considérées comme variables principales.

Nous nous sommes contentés d'interpréter les deux premiers axes, qui représentent respectivement $53,72\%$ et $26,12\%$ de l'inertie totale. Les autres axes ne sont pas représentatifs.

Voici les résultats fournis par le logiciel :

modalités	axe 1	axe 2	cos 1	cos 2	poids
OKA1	0,35	-0,30	54,65	39,46	18
KOA1	-0,52	0,44	54,65	39,46	12
ABA1					0
OKB1	0,55	-0,22	76,12	12,58	14
KOB1	-0,53	0,32	64,05	23,29	13
ABB1	-0,27	-0,34	3,88	6,10	3
OKA2	0,53	0,44	53,07	35,99	11
KOA2	-0,31	-0,25	53,07	35,99	19
ABA2					0
OKB2	1,52	0,42	80,02	6,27	3
KOB2	-0,17	-0,05	80,02	6,27	27
ABB2					0
OKC2	1,00	0,71	60,99	31,20	5
KOC2	-0,04	-0,36	0,84	77,40	18
ABC2	-0,62	0,42	44,66	20,84	7

Voici ces mêmes résultats présentés sous la forme de graphiques.

([1]) Ce logiciel de traitements statistiques est réalisé et diffusé par le Département Informatique de l'IUT de Nice.

Le premier graphique représente les diverses modalités des variables principales.

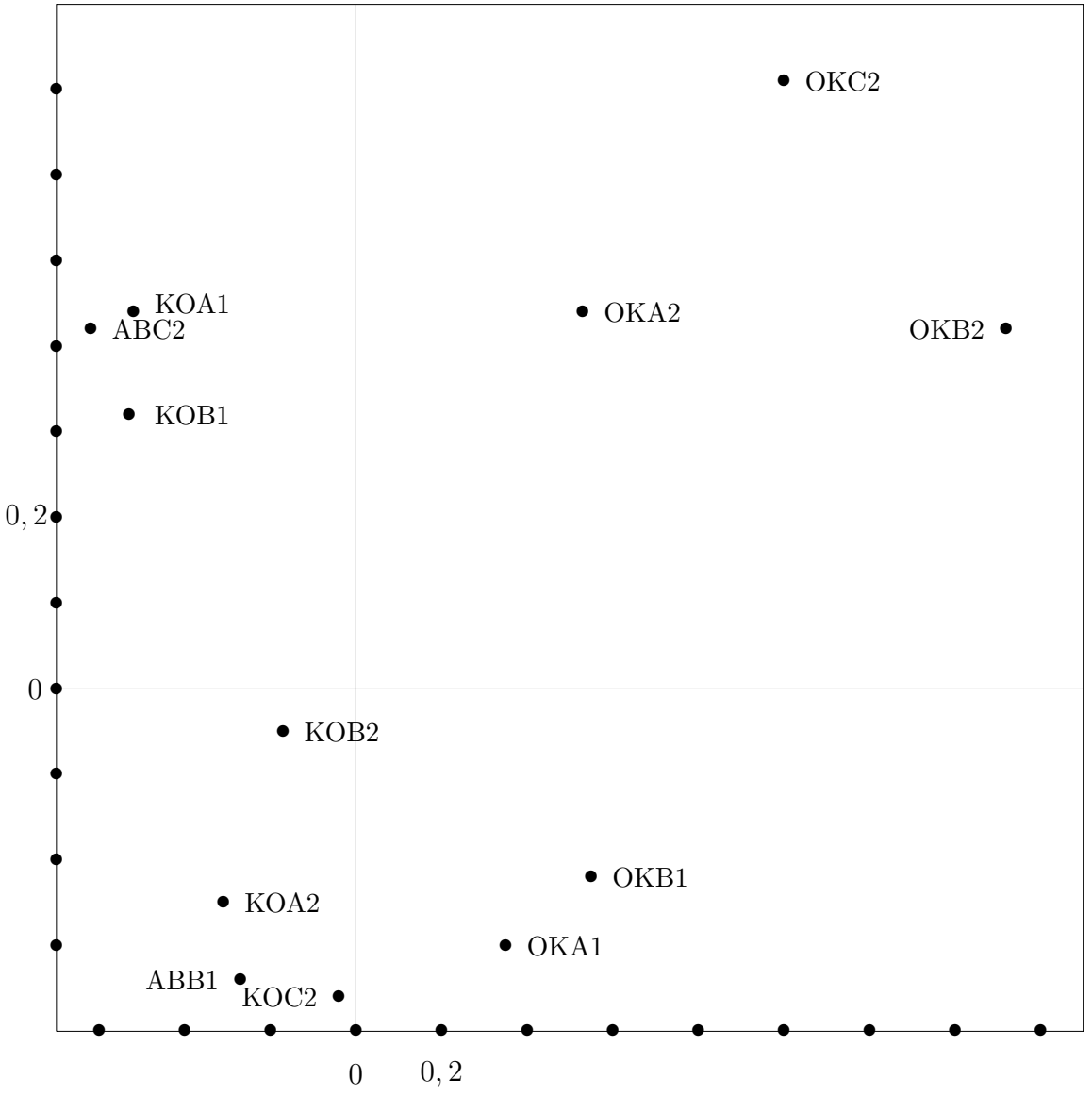


Figure 19.1

Le deuxième représente, projetées sur les mêmes axes, les modalités des variables supplémentaires.

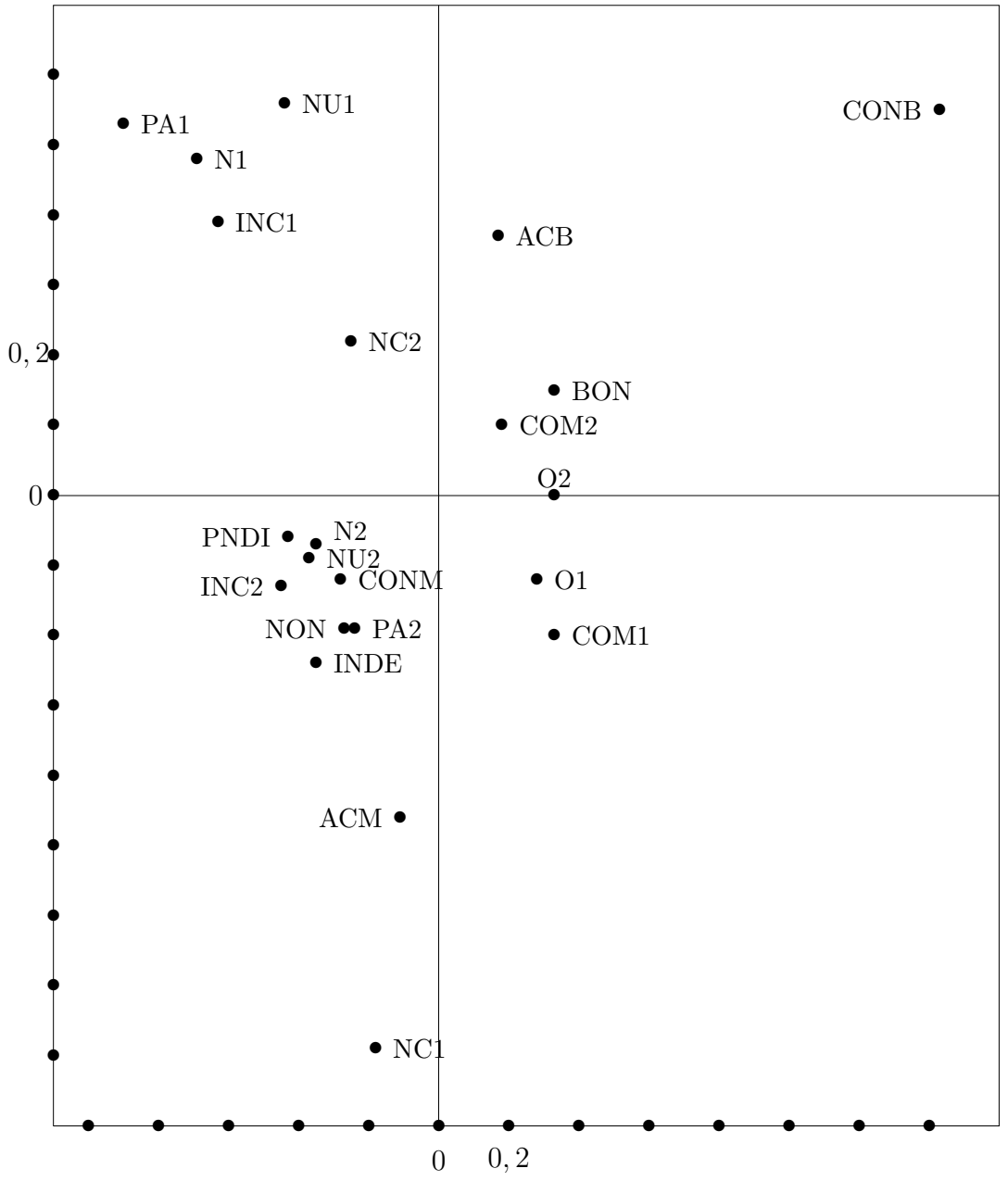


Figure 19.2

Quant au troisième, il nous montre la situation des élèves par rapport à ces axes. Il est susceptible d'aider à l'évaluation.

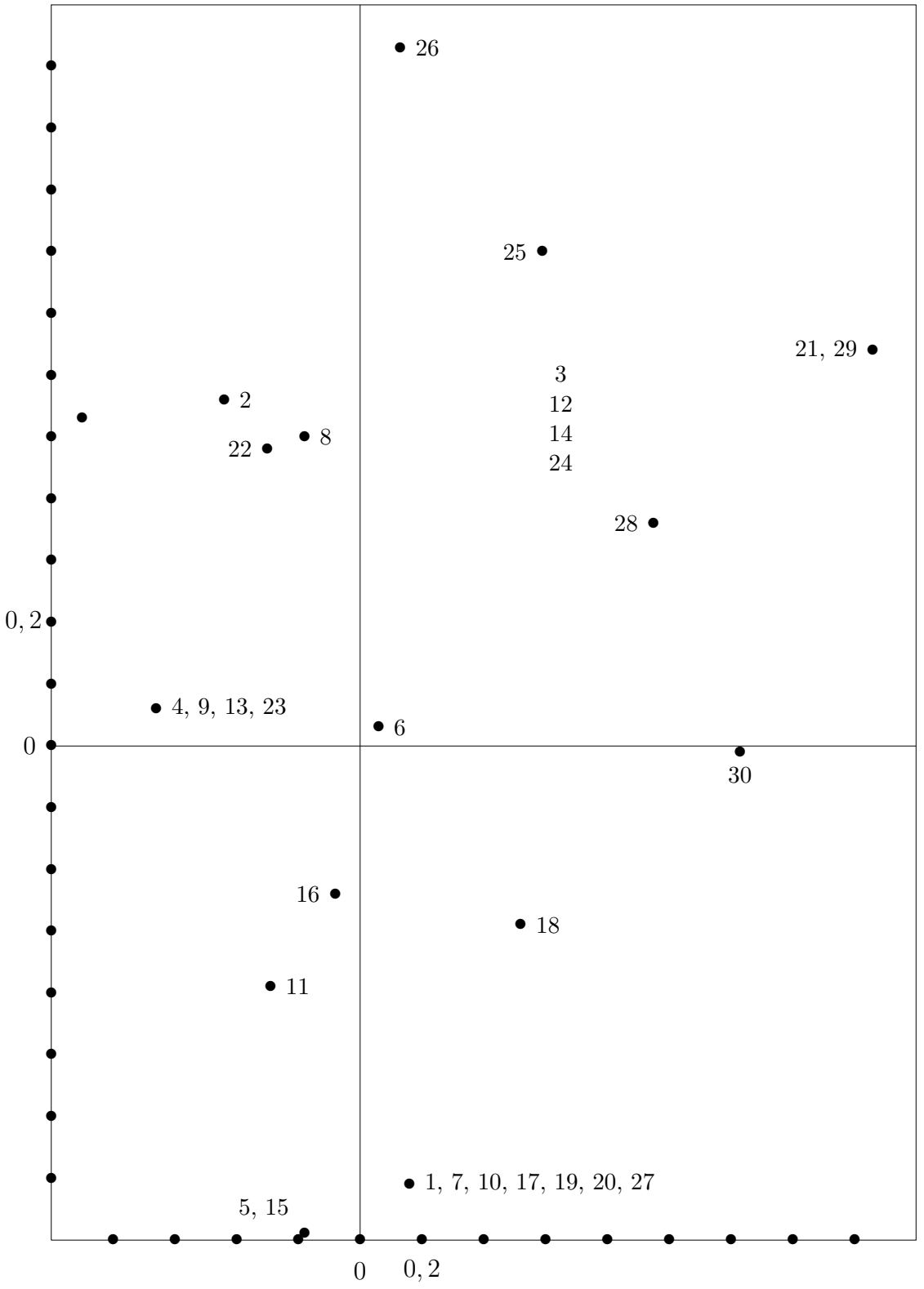

26
25
21, 29
3
12
14
24
2
22
8
28
0, 2
4, 9, 13, 23
6
0
30
16
18
11
1, 7, 10, 17, 19, 20, 27
5, 15
0
0, 2

Figure 19.3

Interprétation du premier axe

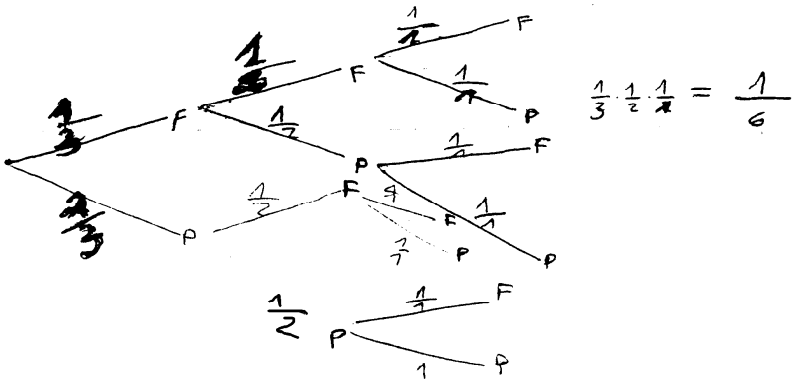
Il apparaît clairement que cet axe opère la scission entre les comportements de réussite, d'une part, et les comportements d'échec et d'abstention, d'autre part.

Interprétation du second axe

Ce second axe est moins évident à interpréter. Nous avons dû recourir aux copies d'élèves pour mettre en évidence les caractéristiques des comportements impliqués.

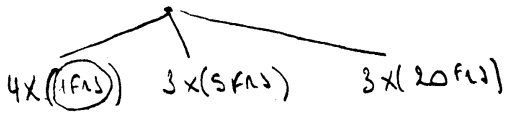
Du côté positif semblent se situer les comportements des élèves qui ont osé se dégager des modèles enseignés. Cette attitude peut, ou peut ne pas, mener vers la réussite. Les élèves se situant dans le premier quadrant ont de plus visiblement compris — voire maîtrisé pour certains — les concepts enseignés. Ils ont dépassé la phase d'intériorisation (de Sfard). Les élèves que l'on trouve dans le deuxième quadrant ont, quant à eux, des raisonnements parfois complètement farfelus.

Par exemple,



Du côté négatif, par contre, on trouve des comportements propres aux élèves qui se sont contenté de reproduire des modèles établis en classe en les adaptant — avec plus ou moins de bonheur — à la situation proposée. Ces élèves n'ont probablement pas dépassé la phase d'intériorisation.

Dans l'exemple suivant, l'élève a tenté de reproduire un arbre comme ceux qui ont été faits en classe, simplement pour faire plaisir au professeur. Il n'a visiblement pas compris l'utilité des arbres et ne les exploite pas. Nous sommes clairement en présence d'une réponse incantatoire :



19.8. Exploitation des résultats par une méthode d'aide à la décision

Nous utilisons ici le logiciel d'aide à la décision MacBeth (voir [157]), développé à l'UMH par Jean-Claude Vansnick, Jean-Marie De Corte et Carlos Bana e Costa.

Les variables prises en compte ici sont celles qui ne concernent pas l'échec, la réussite ni l'abstention (à savoir com1, dis1, con2, dep2, com2 et dis2) pour des raisons que nous donnons ci-après.

Voici les étapes successives dans notre analyse MacBeth :

Première partie : élaboration d'une cote vectorielle

- parmi les modalités de chacune des variables, nous en choisissons une « bonne » et une « neutre » ;

Variable	Modalité neutre	Bonne modalité
com1	PA1	COM1
dis1	NU1	O1
con2	NON	CONB
dep2	PNDI	BON
com2	PA2	COM2
dis2	NU2	O2

- pour chaque variable, nous comparons les modalités deux par deux en signalant au logiciel *notre* préférence de l'une par rapport à l'autre selon un critère ([2]) préalablement choisi.

  Sept nuances allant de *nulle* à *extrême* sont proposées par MacBeth pour incarner cette préférence ;
- MacBeth convertit ces jugements qualitatifs en appréciations quantitatives, en attribuant une cote α à chacune des modalités (la modalité *neutre* reçoit toujours la cote 0 et la *bonne* la cote 10) ;

([2]) Ici, notre critère est la capacité de la modalité à mener l'élève vers la réussite de façon efficace.

com1	COM1 : 10	PA1 : 0	INC1 : -7,51		
dis1	O1 : 10	NU1 : 0	NC1 : 0	N1 : -10	
con2	CONB : 10	ACB : 8,46	CONM : 3,08	ACM : 0,77	NON : 0
dep2	BON : 10	PNDI : 0	INDE : -5		
com2	COM2 : 10	PA2 : 0	INC2 : -7,51		
dis2	O2 : 10	NU2 : 0	NC2 : 0	N2 : -10	

- chaque modalité est à présent munie d'une cote, on obtient donc pour les élèves l'évaluation vectorielle suivante :

	1re question		**2e question**			
Elève	com1	dis1	con2	dep2	com2	dis2
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
1	10	10	0	0	0	0
2	-7,51	0	3,08	10	10	-10
3	0	-10	0	0	0	0
4	-7,51	-10	3,08	-5	10	10
5	10	0	0	-5	0	0
6	10	10	3,08	10	10	10
7	10	10	0,77	10	10	-10
8	10	10	8,46	10	10	10
9	-7,51	10	3,08	-5	-7,51	-10
10	10	10	3,08	0	10	0
11	10	10	0	-5	0	10
12	-7,51	-10	3,08	-5	10	10
13	-7,51	10	3,08	-5	-7,51	-10
14	-7,51	-10	0	0	0	0
15	10	0	3,08	10	10	10
16	10	10	3,08	-5	0	-10
17	10	10	3,08	10	10	10
18	10	10	0	10	0	10
19	10	10	3,08	-5	10	10
20	10	10	8,46	10	-7,51	-10
21	10	10	10	10	10	10
22	10	10	3,08	10	10	0
23	-7,51	-10	0,77	0	-7,51	0
24	-7,51	-10	8,46	10	10	-10
25	10	10	8,46	10	10	10
26	-7,51	-10	8,46	10	10	0
27	10	10	0,77	-5	10	10
28	10	10	10	10	10	10
29	10	10	10	10	10	10
30	10	10	8,46	10	10	10

Seconde partie : élaboration d'une cote scalaire unique

- On définit :
  - des élèves fictifs présentant chacun une seule « bonne modalité », leurs autres comportements étant « neutres » ;
  - un élève fictif « neutre » vis-à-vis de toutes les variables ;
- on compare ensuite ces élèves fictifs deux par deux, et MacBeth établit — comme pour les modalités — un classement global en attribuant une cote β à chacun d'eux ;

L'élève fictif ...	est neutre ...	et reçoit la cote ...
A_0	partout	0
A_1	partout sauf com1 = COM1	$\beta_1 = 4$
A_2	partout sauf dis1 = O1	$\beta_2 = 10$
A_3	partout sauf con2 = CONB	$\beta_3 = 6$
A_4	partout sauf dep2 = BON	$\beta_4 = 10$
A_5	partout sauf com2 = COM2	$\beta_5 = 5$
A_6	partout sauf dis2 = O2	$\beta_6 = 10$

- à partir de l'évaluation vectorielle obtenue par chaque élève « réel » dans la première partie, on calcule une cote numérique via un produit scalaire : la cote d'un élève vaut la somme des produits des α_i correspondant à cet élève et des β_i ;
  par exemple, l'élève (réel) n°1 reçoit la cote

$$10 \times 4 + 10 \times 10 + 6 \times 0 + 10 \times 0 + 5 \times 0 + 10 \times 0$$

  qui sera ramenée dans l'intervalle $[0, 10]$ via une affinité (on attribue les cotes 0 et 10 respectivement aux élèves ayant obtenu la plus petite et la plus grande cote MacBeth).

Élève	Cote MACBETH $[0,10]$	Cote professeur (sur 10)
21	10	9
28	10	8,5
29	10	10
8	9,849	4
25	9,849	4,5
30	9,849	8,5
6	9,323	6
17	9,323	6
18	8,205	6
15	7,691	2

Élève	Cote MACBETH $[0,10]$	Cote professeur (sur 10)
22	7,691	3,5
19	6,876	6
27	6,649	3,5
10	6,060	5
7	5,834	4
11	5,758	4
20	5,158	4
1	4,943	6
26	3,812	1,5
2	3,286	1

Élève	Cote MACBETH $[0,10]$	Cote professeur (sur 10)
16	2,797	5
5	2,496	3
4	2,470	0
12	2,470	2
24	2,181	2
9	1,042	2
13	1,042	2
3	1,027	2
14	0,537	0
23	0	1,5

Lorsque l'on compare les classements donnés respectivement par MACBETH et les professeurs, on observe une forte corrélation. Globalement, les deux classements sont assez semblables.

Cependant, il existe certaines discordances. Des élèves sont en effet classés parmi les meilleurs pour MACBETH alors qu'ils obtiennent moins de la moitié des points auprès de leurs professeurs.

Mais l'explication en est simple : une correction « standard » et notre correction MACBETH ne portent pas sur les mêmes variables. En effet, plutôt que de nous intéresser à la réussite globale à chaque question, nous avons analysé les comportements plus précis décrits par les variables com1 à dis2.

19.9. Conclusion

Des méthodes de correction différentes mettent l'emphase sur des comportements différents. Les évaluations qui en découlent peuvent conduire à des conclusions différentes également.

La méthode la plus objective n'est pas nécessairement celle qui est habituellement utilisée.

Nous avons voulu ici mettre en évidence deux autres techniques qui, si elles ne sont pas faciles d'emploi, éliminent manifestement une bonne dose de subjectivité. Celle-ci ne se manifeste plus que dans l'établissement des critères ([3]) de jugement.

Ces méthodes présentent également l'avantage de mettre un peu plus en évidence les lacunes à combler chez l'apprenant, et permettent de le mieux situer au sein d'un groupe.

Références

[106], [75], [154], [134], [20], [32], [47], [92], [95], [97], [140], [148], [57], [157].

([3]) A savoir les variables et leurs diverses modalités.

Chapitre 20

Une autre évaluation, au départ de dossiers-projets

20.1 Une dimension transversale 674
20.2 Le dossier-projet 675
20.3 Un exemple venu des U.S.A. 676
20.4 Un exemple en Belgique francophone 677
20.5 Une version de dossier-projet sur CD-ROM 679
20.5.1 Le point de départ : des expériences venues d'Italie 680
20.5.2 Les nombres complexes sur CD-ROM 681
20.5.3 L'évaluation du dossier-projet 685
20.6 Une autre expérience de dossier-projet sur CD-ROM 686
20.6.1 Les acteurs et leur contexte 687
20.6.2 Collecte et traitement des informations 688
20.6.3 L'aspect pratique 689
20.6.4 Postérité 690
20.7 L'évaluation et les dossiers-projets 691
20.8 Quelques questions ... à explorer encore 692

20.1. Une dimension transversale

Comme nous l'avons déjà relevé dans les chapitres précédents, la résolution de problèmes demande qu'on y consacre du temps pour que ses effets se marquent chez les élèves.

D'autre part, dès que le problème est suffisamment complexe — et donc qu'il demande du temps pour être résolu — tous les aspects liés à la communication des résultats (présentation et structuration d'un rapport écrit, rédaction d'un texte descriptif, d'une légende d'illustration, d'une démonstration complète ou incomplète, qui met en valeur les idées autant que les calculs, mise au point d'un bref exposé oral, ...) revêtent bien vite une importance cruciale, en particulier dans le cadre de l'évaluation de l'ensemble du travail. On sait de plus que les problèmes de communication rencontrés à cette occasion par les élèves ne sont en réalité pas limités aux seules mathématiques.

Il est donc intéressant de définir des types d'activités qui rencontrent ces deux caractéristiques — majeures et différentes — de l'activité mathématique de résolution de problèmes : la complexité d'une situation et la qualité de la communication.

D'autant plus que lorsqu'il s'agit de considérer les compétences terminales dans leur ensemble, et donc de prendre en compte leurs articulations les unes par rapport aux autres — c'est-à-dire leurs relations transversales — de telles caractéristiques sont essentielles !

20.2. Le dossier-projet

Nous appellerons dans la suite « dossier-projet » toute activité — liée ici à l'apprentissage des mathématiques et si possible à la résolution de problèmes — proposée à un élève ou à un groupe d'élèves, et dans laquelle

- l'élève ou le groupe d'élèves prend en charge l'organisation complète du travail,
- le temps accordé à la réalisation dépasse la contrainte habituelle de quelques périodes de cours,
- la part réservée à la communication des résultats est prépondérante.

Par exemple, on peut proposer aux élèves des problèmes personnalisés à résoudre en quelques semaines et qui, en plus du travail proprement mathématique, demandent une recherche de documentation en bibliothèque ou sur Internet (données statistiques ou scientifiques diverses, renseignements historiques, ...), et dont les résultats doivent être remis sous forme d'un rapport dactylographié, de présentation attrayante.

En fait, des exemples de ce type d'activité se développent de plus en plus.

20.3. Un exemple venu des U.S.A.

Il s'agit d'une expérience menée (voir [50]) par M. Cohen, E.D. Gaughan, A. Knoebel, D.S. Kurtz, et D. J. Pengelley. Elle accompagnait un enseignement classique du « calculus » et concernait plusieurs *College* (les deux premières années après l'enseignement secondaire aux USA) de l'est des Etats-Unis. Comme l'expliquent les auteurs du rapport :

> *. . . Les problèmes étaient rédigés de façon à éviter que les élèves s'engagent dans des voies très différentes. Ils pouvaient ainsi les résoudre en une ou deux semaines avec un minimum de renseignements (des problèmes de maximisation en géométrie, de convergence de série,. . .). Le professeur ne fournissait de l'aide, sous forme de courtes indications que lorsque l'élève était bloqué.*
>
> *Il fut ainsi possible de proposer un à cinq projets par semestre. Lors de l'expérience s'est fait ressentir le phénomène d'inflation des problèmes : peu à peu, les projets supportés par les classes sont devenus de plus en plus difficiles. Le niveau s'est élevé, et les élèves en voulaient encore plus. Ils avaient appris à apprendre.*

Nous renvoyons au document [50] pour plus de détails quant à la façon dont les enseignants ont géré l'ensemble et les détails de l'expérience dans les classes.

20.4. Un exemple en Belgique francophone

Les dossiers-projets se développent de plus en plus en Belgique francophone, souvent sous l'appellation de « travail de fin d'études » (ou TFE en abrégé) ; une littérature d'accompagnement pédagogique commence d'ailleurs à voir le jour sur le sujet (cfr. par exemple [6]).

L'un d'entre nous a été partie prenante dans cette aventure depuis bientôt 10 ans, puisque la première expérience de travail de fin d'études pour des élèves de sixième transition à l'Institut Notre Dame de Comines date de 1988-1989.

Dans les grandes lignes, son principe est le suivant. Sur un sujet déterminé en début d'année scolaire et en relation avec une de ses options principales, l'élève doit réaliser au terme de l'année un document qui synthétise l'ensemble de son travail sur ce sujet, sous une présentation aussi soignée que possible. A la fin de la session de juin ([1]), il en assure aussi une défense orale devant un jury comportant souvent des personnes étrangères à l'Institut. Afin de mener à bien ce travail difficile — réalisé presque entièrement en dehors des heures de cours — l'élève est accompagné pendant toute l'année par un ou plusieurs professeurs qui, en plus de leurs compétences particulières dans le sujet choisi, s'emploient à développer chez lui des solutions efficaces à ses problèmes de compréhension du sujet, et aussi de communication et d'expression écrite ou orale. Dans ce contexte, et depuis septembre 1994, une semaine de préparation au travail de fin d'études est organisée à la rentrée scolaire pour les élèves qui entament la sixième transition, afin d'installer toute la méthodologie du travail de fin d'études ([2]). Les thèmes abordés pendant cette semaine spéciale sont, pour l'essentiel :

- les techniques de prises de notes,
- les bases de la structure et de l'articulation logique des textes,
- les méthodes de synthèse de fardes de documentation,
- les techniques d'exposé oral,
- le perfectionnement (ou l'initiation pour certains) en ce qui concerne l'utilisation d'un traitement de texte.

([1]) Depuis cette année, cette défense a lieu vers la mi-mai.
([2]) C'est en même temps l'occasion de développer un certain nombres de compétences utiles pour la réussite de la dernière année du cycle secondaire, et de dégager déjà quelques stratégies d'apprentissage efficaces pour les études supérieures.

De plus, les activités centrées sur les techniques d'expression orale sont reprises et amplifiées à différents moments de l'année scolaire.

Les mathématiques n'ont pas fourni les thèmes de beaucoup de travaux de ce genre, peut-être parce que les sujets scientifiques, économiques, historiques, ... présentent souvent plus d'attraits immédiats. Néanmoins quelques uns de ces dossiers ont porté sur des sujets mathématiques, et parmi ceux-ci on peut citer :

- une étude de quelques équations différentielles (oscillations, mouvement des planètes, ...) y compris leur traitement numérique,
- une initiation à la théorie des fractions continuées,
- une étude des ombres et des cadrans solaires,
- une traduction du latin en français d'extraits du « De methodis Serierum et Fluxionum » de Isaac Newton, en collaboration avec le professeur de latin (ce travail a fait l'objet d'une publication, cfr. [146]),
- une traduction du latin en français, avec commentaires, du traité « Liber Mensurationum » d'Abû Bekr, toujours en collaboration avec le professeur de latin (ce travail a valu à l'élève qui l'avait réalisé l'octroi d'une bourse d'études spéciale de l'UCL).

De manière générale, les élèves sont motivés par un objectif de cette ampleur qui, au delà du travail dans leur spécialité, les pousse à développer leurs compétences dans les registres de la communication écrite et parlée. Les anciens élèves aiment signaler à quel point l'expérience a enrichi leur formation et leur a été utile dans la suite de leurs études.

Si le bilan de cette (déjà longue) expérience est donc nettement positif, il n'est pourtant pas inutile d'essayer encore de l'enrichir.

20.5. Une version de dossier-projet sur CD-ROM

20.5.1 Le point de départ : des expériences venues d'Italie

Le 11 mars 1998, Mme E. Borromeo (Dr. Math., Scuola Media « Leonardo da Vinci », Guidonia-Roma) a fait à l'Université de Mons-Hainaut une conférence intitulée « Information Sciences and Technologies in education : some experiences and perspectives in primary and middle school » (cfr. [16], [38] et [39] pour des comptes-rendus détaillés).

Elle y présentait quelques exemples de CD-ROM réalisés dans le cadre du projet IMPARA ([3]) avec des élèves de 11 à 14 ans dans diverses écoles secondaires d'Italie. Parmi les différents CD-ROM réalisés, on relevait :

- la découverte de quelques principes de classification en botanique,
- la génétique élémentaire (cellule, lois de Mendel, mutations, maladies héréditaires, ...),
- le système solaire (une petite histoire de l'astronomie, la description des planètes et de leurs lois de mouvement, ...).

Mme Borromeo mettait en évidence que ces réalisations n'avaient pas de postérité en tant qu'outils pédagogiques, mais que leur valeur résidait dans ce qu'ils permettaient de faire apprendre. Un des aspects les plus intéressants de cette conférence était l'analyse des relations que développaient les élèves avec les processus d'écriture et de structuration d'un texte au départ du logiciel de réalisation du CD-ROM.

L'idée nous est dès lors venue d'étudier comment les spécificités de la réalisation d'un CD-ROM pouvaient influencer la qualité de rédaction et de présentation de textes mathématiques. Nous espérions dégager en termes de technologies modernes et attractives quelques éléments de solution à ce problème important, difficile et ingrat : comment apprendre aux élèves à rédiger en mathématiques ?

Les possibilités pédagogiques de ces expériences nous ont donc paru suffisamment significatives dans le contexte de notre recherche pour essayer de les transposer dans le cadre d'un travail de fin d'études.

([3]) Abréviation de « Informatica : Metodologia Pluridisciplinare in Attività di Recupero ed Approfondimento » ; le département d'Informatique de l'Université de Pise était une des chevilles ouvrières du projet.

20.5.2 Les nombres complexes sur CD-ROM

Début septembre 1998, B. Desbuquoit, un élève de 6e transition de l'Institut Notre Dame s'est déclaré prêt à réaliser son travail de fin d'études de cette manière, malgré le caractère relativement expérimental de l'aventure.

Le choix du sujet s'est porté sur les nombres complexes, leurs significations algébriques et géométriques ([4]) et une introduction à la formule d'Euler.

20.5.2.1 Les objectifs

Dès le début du travail, un objectif central a été retenu : l'élève devait reconstruire l'ensemble de ses notes du cours de théorie d'une manière adaptée aux contraintes de lecture d'un CD-ROM, en profitant au maximum des nouveaux moyens dont il disposait afin de rendre le résultat final aussi convivial et attrayant que possible.

Beaucoup d'insistance avait été apportée à ces objectifs de présentation. Les contraintes caractéristiques du média (espace-écran, nombre et taille des cellules, créations des liens hypertexte, etc ...) avaient été présentées en détail afin de mettre en évidence leurs implications dans la structure, le découpage, la phraséologie, la présentation, ... du produit fini. Tout devait être utilisé pour aboutir à une lisibilité, une intelligibilité maximale !

Par ailleurs, il avait été convenu tout de suite qu'il ne s'agissait pas de réaliser un support d'enseignement interactif, ni même une petite banque d'exercices avec corrigés. La partie proprement pédagogique de ce genre de travail nous paraissait beaucoup trop lourde à gérer par un élève, en plus des difficultés d'une première expérience.

20.5.2.2 L'apprentissage du contenu mathématique

L'ensemble du contenu mathématique pour le sujet retenu a fait l'objet d'un cours supplémentaire d'une heure/semaine, organisé en dehors de l'horaire normal, et ce jusqu'à la fin février. Le contenu de ce cours se découvre en lisant la table des matières du CD-ROM reproduite ci-dessous.

([4]) Dans le programme de mathématiques de 6eme transition de l'enseignement libre subventionné, (option à 6 périodes/semaine), les nombres complexes font partie des matières au choix. L'enseignant titulaire du cours n'avait pas retenu ce sujet dans sa répartition des matières pour l'année scolaire 1998-1999.

Ce n'est pas parce qu'ils ne sont quasiment pas reproduits dans le CD-ROM que les exercices et problèmes (très) divers ont été absents du cours, loin de là ! Dans la grande majorité des cas, ils ont été tirés des ouvrages des collections TERRACHER ou DIMATHEME (cfr. [22] et [102].)

20.5.2.3 L'élaboration d'un scénario

La structure de base a bien sûr été la table des matières, dont voici le détail.

Chapitre 1 :
Les notions de base sur les nombres complexes

1.1. Un nombre complexe : qu'est-ce que c'est ?
1.2. Conventions, règles de calcul
1.3. Origine historique des nombres complexes
Les nombres complexes et la géométrie

1.4. Représentation géométrique
1.5. Opérations sur des vecteurs
1.6. Calcul du module et de l'argument
1.7. Elever à la m^{e} puissance
1.8. La formule de de Moivre
1.9. Les racines n^{e} d'un nombre complexe

Chapitre 2 : Un petit air de série ...

2.1. Introduction
2.2. Un premier exemple : $\frac{1}{1-x}$
2.3. Un deuxième exemple : e^x
2.4. Deux autres exemples : $\sin x$ et $\cos x$
2.5. A propos d'une formule de Leibniz ...

Chapitre 3 : La série de Taylor-Maclaurin

3.1. Introduction
3.2. La série de Taylor-Maclaurin
3.3. La formule du reste $R_n(x)$

Chapitre 4 : La formule d'Euler

4.1. Une formule extraordinaire
4.2. Conséquences intéressantes (formule fondamentale, $\cos 2x$, ...)
4.3. Démonstration de la formule de de Moivre grâce à la formule d'Euler

Bibliographie

Mais cette table des matières est loin de régler la question de la structure du CD-ROM. Le scénario de l'ensemble du sujet doit être rédigé dans les moindres détails avant de passer à la réalisation informatique du projet : c'est l'aspect difficile et ingrat du travail. Sans cette lente déconstruction/reconstruction, le projet s'enlise dans une structure approximative que les exigences de l'informatique rendent rapidement ingérable.

Cette impatience a été tempérée par des exercices d'apprentissage du logiciel, qui ont permis au fur et à mesure de l'écriture du scénario de mieux intégrer toutes les possibilités et les richesses de ce logiciel. Ainsi la décomposition en unités de structure

- le livre (ou chapitre), les sections, les écrans (ou pages), les boîtes (ou fenêtres), les images, leurs dimensions et les contraintes qui s'ensuivent, ...

a imposé une logique forte, incarnée dans

- les (hyper)liens entre écrans, les boutons, les retours, les notes, les rappels locaux, les aides, ...

et d'autant mieux acceptée qu'elle était imposée par la machine. En ce sens, l'expérience d'apprentissage de la rédaction de textes mathématiques au départ d'un logiciel de réalisation d'un CD-ROM a été tout à fait concluante : l'outil tient ses promesses !

20.5.2.4 La réalisation du CD-ROM

Suivant l'expérience de Mme E. Borromeo, le CD-ROM a été réalisé au départ du logiciel ASYMETRIX MULTIMEDIA TOOLBOOKCBT EDITION 4.0 (cfr. [103]), avec — pour certaines parties — l'appui des logiciels MAPLE V (Release 4) et POWERPOINT 97.

Le programme a été conçu et testé sur un Pentium II MMX 333 Mhz équipé de Windows 98 (32 Mb Ram), d'un lecteur de CD-ROM 36×, et pourvu d'un écran $800 \times 600/16$ bits. La configuration requise (pour le CD-ROM originel ([5])) consiste en un Pentium 133 Mhz (recommandé) équipé de Windows 95/98 (9 Mb sur disque dur, 16 Mb Ram), d'un lecteur de CD-ROM 4×, et pourvu d'un écran 800×600, 65536 couleurs (16 bits) ; pour visionner l'introduction, il faut en plus disposer d'une carte son et de POWERPOINT 97.

La navigation dans le programme est relativement simple ! Des boutons insérés dans le texte permettent de circuler d'un écran à l'autre. De plus, en bas de chaque écran, quatre boutons caractéristiques permettent

- de quitter le programme à tout moment,
- de retourner à l'écran précédent,

([5]) La version finale du travail de Benjamin Desbuquoit est incorporée au CD-ROM qui accompagne la version papier de ce rapport final de notre projet de recherche.

- de rappeler certaines notions utiles, qui se complèteront au fur et à mesure de la progression dans le dossier,
- d'avoir accès à la table des matières pour entamer la lecture de n'importe quelle autre section.

Enfin, lors d'un clic sur un des mots marqués en rouge dans le texte, une fenêtre se superpose à l'écran et fournit quelques explications supplémentaires relatives au mot concerné, sans effacer l'écran principal. Un simple clic fait disparaître la fenêtre.

Cliquez ici pour lancer le dossier.

20.5.3 L'évaluation du dossier-projet

L'ampleur du travail réalisé par Benjamin Desbuquoit est assez impressionnante ! En particulier, le temps consacré tant à l'apprentissage du contenu mathématique, qu'à l'écriture du scénario et à la réalisation effective du CD-ROM a été presque hors de proportion. Il n'y a pas de doute que le caractère expérimental de l'activité, et l'exigence très forte attachée à la rédaction de textes mathématiques sont responsables de cet état de choses, ... ainsi que l'ambition de Benjamin de faire un travail de très bonne qualité !

Quant à l'évaluation proprement dite, elle s'est déroulée en plusieurs étapes.

Comme pour tous les travaux de fin d'études à l'Institut Notre Dame, celui-ci a fait l'objet de notes d'évaluation (à l'occasion des bulletins de Toussaint, Noël et Carnaval) qui ont rendu compte de l'état d'avancement du projet et de la manière dont l'élève progressait dans l'exercice des compétences (transversales) qu'on lui demandait d'exercer.

L'épreuve orale de défense du dossier-projet s'est déroulée l'après-midi du mercredi 19 mai 1999, devant un jury comprenant, outre deux membres de notre équipe, des professeurs de mathématiques et de sciences économiques de l'Institut Notre Dame, et des personnes extérieures à l'Institut. Elle a porté sur une présentation rapide des grands axes du sujet mathématique, sur les spécificités techniques de la réalisation du CD-ROM et sur son mode d'emploi, avant d'en proposer une démonstration assez exhaustive, avec réponse à toutes les questions qui pouvaient se poser.

Le jury a été très favorablement impressionné.

20.6. Une autre expérience de dossier-projet sur CD-ROM

Nous avons eu l'occasion de suivre la réalisation d'un autre projet de ce type, mais cette fois dans le cadre de la physique. Les élèves concernés viennent de l'Athénée Royal Jean Rey, de Couvin. Nous nous bornerons ici à décrire la manière dont les acteurs ont agi, et ce qu'ils en ont tiré.

20.6.1 Les acteurs et leur contexte

Les élèves ont eu l'opportunité de participer à deux concours multimédia ([6]).

Une équipe ([7]) s'est formée, composée de deux élèves de 6e transition (option à 3 heures de physique/semaine), d'un élève de 5e transition (3 h/semaine), d'une élève de 6e transition (1 h/semaine) et d'un élève de 5e technique de transition (option électronique).

Les élèves se sont réparti les tâches : les deux élèves de 6e (3 h/s) se sont bornés à couvrir le sujet théorique des trous noirs — sujet qu'ils ont choisi après la lecture d'*Une brève histoire du temps* de Stephen Hawking — tandis que l'élève de 6e (1 h/s) s'est vue confier une partie historique, et que l'élève de 5e (3 h/s) s'est consacré aux conséquences scientifiques et philosophiques de nouvelles découvertes sur ce sujet. Quant au futur électronicien, son sort était de travailler sur la réalisation technique et la présentation du travail (il avait déjà réalisé quelques présentations via PowerPoint auparavant).

Deux professeurs de sciences ont suivi les élèves et les ont conseillés tout au long de la réalisation.

([6]) L'un organisé par l'ULB-Parentville, et l'autre par les Jeunesses Scientifiques de Belgique.
([7]) Citons les noms de ces élèves : Kevin Parizel, Olivier Deville, Ludwig Jossieaux, Mélanie Mathieu, et Olivier DePauw.

20.6.2 Collecte et traitement des informations

Notons que la spécialisation de chacun n'empêchait en rien une coordination efficace : par de nombreuses réunions, chaque élève était au courant en permanence de l'état d'avancement du travail des autres. La collecte de renseignements a été de trois types :

- recherche d'articles et de livres traitant du sujet en bibliothèque (ce qui a valu des déplacements à l'extérieur de l'école, et notamment dans une bibliothèque universitaire),
- recherche sur Internet (notamment pour acquérir et visionner des fichiers animés de type *.avi),
- interviews *filmées* de personnes spécialisées (notamment des astronomes) répondant — de façon synthétique — aux questions des élèves.

Les élèves ont, par cette collecte, pu voir qu'une même information pouvait être présentée de plusieurs manières différentes, et apprécier la richesse de points de vues multiples. Ils ont pu construire ainsi leurs propres opinions. Signalons que leur bibliographie est devenue assez impressionnante par la force des choses !
De plus, ils ont compris qu'un travail de ce type peut parfois amener le chercheur à parcourir des sentiers imprévus au départ, voire en découvrir de nouveaux. En effet, au fil de leurs recherches, les élèves sont tombés sur des articles très récents parlant de découvertes à propos du sujet choisi ; découvertes qui les ont amenés à revoir et remettre en question certaines parties de leur projet.

Parallèlement à la synthèse qu'ils faisaient des renseignements collectés, le squelette de leur travail final se mettait également en place : la mise sur papier de l'arborescence des chapitres, et des nombreux hyperliens à prévoir entre eux.

20.6.3 L'aspect pratique

20.6.3.1 Réalisation du software

Une fois les divers morceaux de textes mis par écrit et prévues les nombreuses illustrations (vidéos et images fixes), ainsi que la place de tous ces éléments, il fallait encore tout rassembler sur un seul support ([8]).

L'élève d'électronique, aidé par les autres, a élaboré une présentation basée sur le logiciel PowerPoint avec des rehaussements dûs à de la programmation en VisualBasic. Le résultat final tient sur un cd-rom intitulé « Par delà les étoiles ».

20.6.3.2 Evaluation(s)

Il n'était pas question ici de considérer ce travail comme partie intégrante des demandes scolaires, mais comme un à-côté. Le but était de présenter le travail devant les jurys des deux concours, et les organisations en étaient différentes :

- d'une part, une défense orale devant le jury, avec des questions posées à la fin de l'exposé ;
- d'autre part, les élèves devaient être présents lors d'une exposition, et les membres du jury sont venus séparément au stand tenu par les élèves, afin d'utiliser le logiciel et recevoir des commentaires supplémentaires.

Deux manières de juger, donc, l'une formelle et rapide et l'autre plus détendue mais plus profonde.

L'évaluation s'incarne ici dans les conseils et les avis donnés par les jurys, ainsi que par leur décision face au concours. Le projet « Par delà les étoiles » a ainsi obtenu le deuxième prix à l'Expo Sciences'99 des Jeunesses Scientifiques de Belgique.

([8]) Notons que le temps passé à cette réalisation « technique » a égalé le temps mis pour l'élaboration « théorique » du projet.

20.6.4 Postérité

Les élèves en ont surtout tiré un apprentissage de la débrouillardise !

Plus précisément, voici ce qu'ils ont pu acquérir ou développer au sein de ce projet :

- une facilité à rechercher des renseignements épars autour d'un sujet ;
- une aptitude à synthétiser ces renseignements ;
- un certain recul et un sens critique face aux informations ;
- un sens développé de la pluridisciplinarité ;
- la faculté de se remettre en question ;
- des facilités à structurer leurs savoirs, et à les communiquer à d'autres ;
- des connaissances dans L'UTILISATION de logiciels informatiques.

Tout ceci est resté à l'état embryonnaire, ou est même totalement absent, chez beaucoup d'autres élèves.

20.7. L'évaluation et les dossiers-projets

Les dossiers-projets constituent un type d'activité qui nous semble tout-à-fait au cœur des compétences terminales. En effet, ils mettent en valeur quelques comportements essentiels dans ce contexte : l'ampleur de la situation à prendre en charge, la gestion du temps et de l'organisation qui en résulte, la transversalité qui doit s'y exprimer, ...

Quelle type d'évaluation peut-on associer à ce type d'activité ?

Cette évaluation peut d'abord être vectorielle, parce qu'elle a à rendre compte d'un grand nombre de compétences raisonnablement distinctes, dans les points de vue disciplinaire, de la communication, de l'organisation, ... Il est par exemple assez clair que la réalisation d'un travail de fin d'études sous forme de CD-ROM permet une évaluation assez fine — qui peut donc s'exprimer vectoriellement — des compétences associées à la rédaction et à la structuration des textes.

Cette évaluation peut aussi s'exprimer à intervalles réguliers durant la progression du travail, et tenir compte à chaque fois des progrès réalisés dans l'un ou l'autre domaine précis. On peut même imaginer que cette évaluation consisterait en un vecteur — ou une succession de vecteurs — dont chaque composante serait un indice de progression, au sens donné à ce mot dans le chapitre 18.

Chaque évaluation de ce genre, à différents moments du projet, a évidemment une valeur formative, dont l'effet sur le travail de l'élève peut se vérifier rapidement. Mais de plus l'ensemble de toutes ces évaluations s'incarne à la fin du travail dans le produit fini du projet (le CD-ROM, le rapport écrit, ...) sans pour autant gommer les différentes composantes de l'évaluation vectorielle : un travail peut présenter d'excellents qualités de présentation et manquer d'originalité dans son contenu disciplinaire. Un défaut ne doit pas faire oublier une qualité !

La valeur prédictive d'une évaluation d'un dossier-projet telle que nous venons de la décrire nous semble en tout cas significative.

20.8. Quelques questions . . . à explorer encore

Les dossiers-projets permettent à l'élève d'être l'acteur principal dans les processus de compréhension, d'application et de communication des connaissances mathématiques.

Mais lorsqu'on se penche sur les aspects plus pratiques d'une telle démarche, quelques questions viennent encore à l'esprit.

- Quel temps faut-il leur consacrer ? Vaut-il mieux proposer des projets qui explorent en profondeur une petite partie des mathématiques (comme c'est le cas par exemple dans l'expérience américaine) ou des projets d'envergure plus large (comme les travaux de fins d'études à l'Institut Notre Dame) ?

  Quelle que soit l'importance du projet, il importe en tout cas de ne pas laisser l'élève seul face à ce genre de travail : l'enjeu est de trop d'importance !
- Si le dossier-projet est de taille réduite, quel peut en être la fréquence ? Faut-il les intégrer dans l'organisation générale des matières ?

  Il devrait être possible par exemple, dans une classe de sixième, d'avoir 3 ou 4 tels projets sur l'année, associés aux matières les plus significatives du programme, en distinguant suivant les cas, des projets théoriques et des projets plus appliqués.

Il nous semble que, quelles qu'en soient les modalités, le dossier-projet est une (autre) activité à privilégier dans le cadre d'une problématisation du cours de mathématiques, et qu'il faut essayer de la rendre possible : elle entre tout à fait dans le cadre des compétences terminales.

Références

[16], [38], [39], [102], [22], [6], [103], [50], [146].

Chapitre 21

Un examen à l'université

21.1 Introduction 694
21.2 Les questions et les comportements observés 696
21.2.1 Les énoncés et les variables principales 697
21.2.2 Les variables supplémentaires 702
21.2.3 Commentaires sur les énoncés 709
21.3 Evaluer le questionnaire 711
21.3.1 Le plan des deux premiers facteurs 712
21.3.2 Le troisième facteur 721
21.4 Evaluer les étudiants 723
21.4.1 Un groupe de questions représentatif de l'examen 725
21.4.2 Une comparaison avec l'évaluation traditionnelle 727
21.4.3 Une contribution à l'évaluation formative 729
21.4.4 Une contribution à l'évaluation certificative 731

21.1. Introduction

Les problèmes d'évaluation ne sont pas fondamentalement différents à l'université ou dans une école secondaire. A titre d'exemple, nous présentons dans ce chapitre les résultats d'un examen portant sur le cours d'analyse mathématique de 1re candidature en sciences mathématiques et physique. Cet examen s'est déroulé en janvier 1999. Les étudiants ont à ce moment de l'année reçu un enseignement portant essentiellement sur les concepts de limites de suites et de séries. Il ne s'agit pas seulement de suites ou séries numériques mais aussi de suites ou séries de fonctions ou de vecteurs. En particulier on a abordé les concepts de convergence simple ou uniforme d'une suite ou d'une série de fonctions. Les séries de Fourier ont également été rencontrées.

Trente et quatre étudiants ont présenté l'examen : 19 de section mathématique et 15 de section physique. La taille de cet échantillon est un peu trop faible pour que l'on puisse le considérer comme représentatif de la catégorie d'étudiants concernée. Nous nous sommes cependant autorisés à traiter les résultats par la méthode statistique d'analyse des correspondances (voir l'annexe A), tout en restant très prudents dans l'interprétation des résultats et en ne cherchant à dégager que les tendances dominantes. Si des conclusions sont tirées, il convient de ne les considérer que comme des hypothèses qui devraient être vérifiées sur un échantillon plus grand.

Nous cherchons notamment à dégager quelles sont les questions les plus significatives de l'examen, celles auxquelles on pourrait se limiter tout en ne modifiant que faiblement les résultats individuels des étudiants. D'autres questions pourraient aussi se révéler inopportunes et susceptibles de biaiser les résultats. On le voit, c'est autant à l'évaluation de l'examen qu'à celle des comportements des étudiants que nous voulons procéder. Il est d'autant plus nécessaire d'évaluer l'examen lui-même que les résultats fournis par la méthode statistique utilisée ne peuvent pas sans précautions être généralisés à d'autres catégories d'étudiants ou à d'autres sujets d'examen.

Les étudiants disposaient de 4 heures pour répondre aux 20 questions de l'examen. Ils ne pouvaient utiliser leurs notes de cours. Il ne s'agissait pas d'un examen pratique et on n'y a donc pas proposé de véritable problème à résoudre, tout au plus — en-dehors de questions de restitution ou de compréhension — quelques exercices d'application immédiate.

Les étudiants ont été notés sur 100, à la façon traditionnelle : les 100 points ont été répartis sur les 20 questions et une grille de correction établie pour chaque question ou sous-question. Nous appliquons ci-dessous une autre procédure d'évaluation où, en ordre principal, on ne considère pour chaque question ou sous-question que les comportements de réussite, d'échec et d'abstention. On dispense ainsi le correcteur d'une bonne partie des difficultés résultant des nuances à apporter en vue de classer des réponses de 1 à 10 (ou 20). En supplément, on s'intéresse aussi aux types d'erreurs qui sont présentes dans les copies. Vu ce qui a été indiqué ci-dessus, notre essai d'un autre type d'évaluation ne porte pas sur la résolution de problèmes, mais plutôt sur l'acquisition de compétences relativement limitées.

21.2. Les questions et les comportements observés

Les questions sont numérotées de 1 à 20, les sous-questions sont désignées par le numéro de la question suivi d'une lettre majuscule (A, B, ...). Chaque question ou sous-question est codée selon DEUX points de vue :

1. On distingue ici, en tant que variables principales, les comportements de réussite, d'erreur ou d'abstention aux différentes questions ou sous-questions. En tant que variable principale, nous ne définissons pour chaque question ou sous-question qu'un seul comportement d'erreur. Nous rassemblons donc ici les différentes erreurs possibles en une seule variable. Les codes utilisés pour les comportements sont les lettres R, E ou A suivies du numéro de la question ou de la sous-question.
2. Des « Comportements détaillés » sont placés en variables supplémentaires. Leur code ne peut débuter par aucune des lettres R, E, A. La première lettre indique (grossièrement) si le comportement est jugé (plus ou moins) bon ou mauvais. Les lettres suivantes sont formées du numéro de la (sous)-question suivi d'une autre lettre permettant de distinguer les divers comportements associés à une question. Cette fois, plusieurs comportements d'erreurs, placés en variable supplémentaire, peuvent correspondre à une seule question. On peut ainsi affiner l'analyse. Le comportement « Abstention » à la question n est alors codé Zn.

Les paragraphes qui suivent présentent les énoncés soumis aux étudiants, la liste des comportements placés en variables principales ou en variables supplémentaires, ainsi que les fréquences de ces comportements. On ne perdra pas de vue que, l'effectif total des étudiants étant 34, une différence d'un seule unité en chiffres absolus se traduit dans les pourcentages par une différence d'environ 3%. Ceci a pour première conséquence que tous les pourcentages mentionnés sont arrondis à l'unité.

21.2.1 Les énoncés et les variables principales

1. (a) *Représenter graphiquement la fonction* $f(x) = |x-1| + |x+1|$. *Préciser son domaine, ses asymptotes éventuelles.*

   (b) *Démontrer que toute fonction du type* $f(x) = |x+a| + |x+b|$ $(a < b)$ *est constante entre* $-b$ *et* $-a$. *Quelle est la valeur de la constante ?*

   Nous laissons tomber la sous-question concernant le domaine. Il reste trois sous-questions :

Code	Description	R	E	A
1A	Représentation graphique	82%	15%	3%
1B	Asymptotes	15%	50%	35%
1C	Constance de f	26%	56%	18%

   A la sous-question B, nous ne nous intéressons qu'aux asymptotes obliques.

---

2. *Trouver un nombre irrationnel compris entre* $\frac{1}{10}$ *et* $\frac{1}{11}$.

Code	Description	R	E	A
2	Trouver un irrationnel	38%	38%	24%

---

3. (a) *Définir la borne inférieure d'un ensemble de nombres réels.*

   (b) *En appliquant la définition, montrer que la borne inférieure de l'ensemble* $P = \{x \in \mathbb{R}_+^* | \sin \frac{1}{x} = 1\}$ *vaut 0.*

   Nous avons deux sous-questions :

Code	Description	R	E	A
3A	Enoncer la définition	65%	35%	0%
3B	Appliquer la définition	26%	59%	15%

---

4. *Énoncer le principe de la borne supérieure.*

Code	Description	R	E	A
4	Enoncer le principe	38%	62%	0%

---

5. *(a) Qu'est-ce qu'un ensemble dénombrable ?*
   (b) Donner un exemple d'ensemble dénombrable (autre que $\mathbb{N}$*). Justifier.*

   Nous avons deux sous-questions :

Code	Description	R	E	A
5A	Définir la dénombrabilité	76%	24%	0%
5B	Donner un exemple	56%	35%	9%

---

6. *Définir*
   - *la limite d'une suite de nombres réels*
   - *la limite supérieure d'une suite de nombres réels*
   - *la limite inférieure d'une suite de nombres réels*

   La troisième sous-question donne des résultats analogues à la deuxième. Nous ne la retenons donc pas.

Code	Description	R	E	A
6A	Définir la limite d'une suite	62%	35%	3%
6B	Donner la limite supérieure	47%	41%	12%

---

7. *Donner un exemple de suite de nombres réels* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *pour laquelle les quatre nombres* $\liminf_{n\to\infty} x_n$, $\limsup_{n\to\infty} x_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *et* $\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *ont quatre valeurs différentes, et non infinies. Indiquer ces valeurs et justifier.*

Code	Description	R	E	A
7	Exemple	24%	32%	44%

---

8. *Énoncer le critère de Cauchy de convergence d'une* SUITE *de nombres réels. (Ne pas confondre avec le critère de Cauchy de convergence d'une série positive.)*

Code	Description	R	E	A
8	Critère de Cauchy	50%	47%	3%

9. *On considère la suite de nombres réels définis par les conditions initiales* $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ *pour* $n \geqslant 2$.
   - *Calculer les 6 premières valeurs de la suite* (x_0 *à* x_5) *et les cinq premiers rapports* $\frac{x_1}{x_0}$, $\frac{x_2}{x_1}$, …, $\frac{x_5}{x_4}$.
   - *Posons* $u_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$. *Admettant que la suite* u_n *est convergente, calculer sa limite.*
   - *La suite* (u_n) *est-elle croissante, décroissante, oscillante ? Justifier.*

   Nous ne retenons que deux sous-questions :
   9A Calculer la limite de la suite
   9B La suite est-elle croissante, décroissante, oscillante ?

Code	Description	R	E	A
9A	Calculer la limite	24%	41%	35%
9B	Etudier la croissance	9%	71%	21%

10. *Donner un exemple d'une suite convergeant quadratiquement vers sa limite. Justifier.*

Code	Description	R	E	A
10	Suite à convergence quadratique	21%	50%	29%

11. *Énoncer les critères de Cauchy et d'Alembert de convergence d'une série positive.*

Code	Description	R	E	A
11	Cauchy et d'Alembert	44%	53%	3%

12. *Calculer la norme* $\|f\|_\infty$ *de la fonction* $f : [-1, 3] \to \mathbb{R} : x \mapsto x(1 - x)$.

Code	Description	R	E	A
12	Norme d'une fonction	62%	26%	12%

13. *Pourquoi, sur un espace vectoriel complexe, n'impose-t-on pas au produit scalaire d'être symétrique ?*

Code	Description	R	E	A
13	Symétrie hermitienne	35%	47%	17%

---

14. *Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz.*

    On distingue deux sous-questions.
    14A : Enoncer l'inégalité
    14B : La démontrer

Code	Description	R	E	A
14A	Enoncer l'inégalité	56%	24%	21%
14B	La démontrer	41%	18%	41%

---

15. *Donner un exemple d'une suite de fonctions de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui converge simplement mais non uniformément vers 0 sur* $[0,1]$*. Expliquer soigneusement cet exemple.*

Code	Description	R	E	A
15	Convergence simple non uniforme	6%	65%	29%

---

16. *Définir la fonction exponentielle dans le domaine complexe, déterminer son domaine et démontrer la formule* $e^{z+w} = e^z e^w$ *pour tous complexes* z *et* w*.*

    Nous avons distingué deux sous-questions :
    16A Définir e^z
    16B Démontrer $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$

Code	Description	R	E	A
16A	Définir e^z	41%	26%	32%
16B	Démontrer $e^{z+w} = e^z e^w$	24%	32%	44%

---

17. *Quelle est la série de Fourier complexe de la fonction* $\sin x$ *?*

Code	Description	R	E	A
17	Série de Fourier complexe de $\sin x$	3%	59%	38%

---

18. *Calculer* $\cos(\pi + i\frac{\pi}{2})$.

Code	Description	R	E	A
18	$\cos(\pi + i\frac{\pi}{2})$	26%	47%	26%

---

19. *Calculer* $\log(5 + 5i\sqrt{3})$.

Code	Description	R	E	A
19	$\log(5 + 5i\sqrt{3})$	29%	29%	41%

---

20. *Sur un même graphique, représenter soigneusement les fonctions* e^x, e^{-x}, *ch* x, *sh* x. *Expliquer.*

Code	Description	R	E	A
20	Graphique des fonctions hyperboliques	41%	53%	6%

21.2.2 Les variables supplémentaires

Pour chaque question, les tableaux ci-après dressent l'inventaire des comportements intéressants qui ont été observés, notamment des comportements d'erreurs. Nous donnons aussi la fréquence de chacun d'entre eux.

1. Question 1

1A	Graphique	
B1AJ	Bon avec justifications	18%
B1AN	Bon sans justifications ou avec justifications insuffisantes	65%
M1A	Mauvais	15%
Z1A	Pas de réponse	3%

1B	Asymptotes obliques	
B1BJ	Bon avec justifications	6%
B1BN	Bon sans justifications	9%
N1B	N'existent pas	50%
Z1B	Pas de réponse	35%

1C	Constance sur $[-b, -a]$	
B1CJ	Bon avec justifications	26%
B1CN	Bon sans justifications	3%
M1CE	Justification par des exemples	35%
M1CD	Justification par le dessin	3%
M1C	Mauvais	15%
Z1C	Pas de réponse	18%

A la sous-question 1C, on considère le comportement comme mauvais (M1C) s'il y a des erreurs de calcul.

---

2. Question 2

2	Irrationnel entre $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{11}$	
B2	Bon	38%
M2RI	Rationnel intérieur à l'intervalle	21%
M2RE	Rationnel extérieur à l'intervalle	6%
M2I	Nombre « inconnu » dans l'intervalle	6%
N2	N'existe pas	6%
Z2	Pas de réponse	24%

On n'a pas tenu compte de l'erreur (fréquente) $\frac{1}{10} < \frac{1}{11}$.

---

3. Question 3

3A	Définition de borne supérieure	
B3A	Bon	59%
M3AI	Définition incohérente	18%
M3AC	Deux définitions contradictoires	3%
M3AM	Confusion min – inf	3%
M3Am	Confusion avec minorant	15%
M3A	Définition d'autre chose	3%

3B	$\inf_{\sin \frac{1}{x}=1} x$	
B3BJ	Bon avec justifications	26%
B3BN	Bon sans justifications	9%
M3BC	Erreurs de calcul	9%
M3BS	Confusion avec $\inf_x \sin(1/x)$	15%
M3BP	Confusion avec $\inf_{x \geqslant 0} x$	21%
M3BI	Phrases incohérentes	3%
M3B	Autres erreurs	3%
Z3B	Pas de réponse	15%

Remarque : Une erreur de calcul qui se présente à plusieurs reprises est $\frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi} = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{k\pi}$

---

4. Question 4

4	Principe de la borne supérieure	
B4	Bon	38%
M4I	Énoncé faux ou incohérent	41%
M4A	Énoncé d'un autre théorème ou définition	21%

5. Question 5

5A	Définition de la dénombrabilité	
B5A	Bon	76%
M5AA	Enoncé cohérent mais définissant autre chose	3%
M5AI	Énoncé incohérent	21%

5B	Exemple de dénombrabilité	
B5BJ	Bon exemple bien justifié	56%
B5BM	Bon exemple mal justifié	18%
B5BN	Bon exemple non justifié	53%
M5B	Mauvais exemple	3%
Z5B	Pas de réponse	9%

6. Question 6

6A	Définition de limite	
B6A	Bon	62%
M6AT	Tautologie	21%
M6AR	Se rapproche de plus en plus	6%
M6A	Divers	9%
Z6A	Pas de réponse	3%

6B	Définition de limite supérieure	
B6B	Bon	47%
M6BS	Confusion lim sup – sup	9%
M6BD	lim sup = « valeur à droite »	6%
M6BI	Incohérence	21%
M6BC	Confusion avec limite de suite croissante	6%
Z6B	Pas de réponse	12%

7. Question 7

7	Suite ayant 4 caractéristiques différentes	
B7	Bon	24%
M7D	Les quatre nombres ne sont pas distincts	6%
M7I	Réponse incohérente	18%
M7C	Réponses contradictoires(sup $<$ inf)	3%
M7N	Aucune suite n'est fournie	3%
M7	Divers	3%
Z7	Pas de réponse	44%

8. Question 8

8	Critère de Cauchy	
B8	Bon	47%
M8D	Confusion avec la définition d'une suite de Cauchy	29%
M8C	Confusion avec la définition d'une suite convergente	3%
M8N	Uniquement la condition nécessaire	6%
M8R	Confusion avec le critère de Cauchy de convergence d'une série positive	3%
M8S	Confusion suite–série	3%
M8F	Formalisme erroné	3%
Z8	Pas de réponse	6%

9. Question 9

9A	Limite du rapport de deux termes consécutifs de la Suite de Fibonacci	
B9A	Bon	24%
M9AI	Calcul inachevé	41%
Z9A	Pas de réponse	25%

9B	Suite oscillante	
B9BJ	Bon avec justification correcte	9%
B9BE	Bon, justifié par des valeurs particulières	15%
B9BN	Bon sans justification	35%
M9BC	Suite croissante ou suite décroissante	21%
Z9	Pas de réponse	21%

10. Question 10

    On ne relève pas de comportements particuliers intéressants (la question est visiblement mal maîtrisée par l'ensemble des étudiants).

11. Question 11

11	Cauchy et d'Alembert	
B11	Bon	44%
M11C	Permutations des conditions <1 et >1 chez d'Alembert	32%
M11S	Emploi de lim au lieu de limsup et liminf	12%
M11R	Confusion d'Alembert-Raabe	6%
M11	Autre erreur	3%
Z11	Pas de réponse	3%

12. Question 12

12	Norme de $x(1-x)$ sur $[-1,3]$	
B12	Bon	62%
M12Q	Valeur 1/4	12%
M12P	Autre valeur positive erronée	6%
M12N	Valeur négative	3%
M12I	Réponse incohérente	6%
Z12	Pas de réponse	12%

13. Question 13

    Il ne paraît pas utile de distinguer des comportements d'erreurs. Il s'agit uniquement du manque de compréhension de la raison demandée (à moins qu'il ne s'agisse d'un manque d'intérêt, ce qui revient au même). Les réponses erronées peuvent revêtir des formes variées sans être pour autant fondamentalement différentes.

---

14. Question 14

    Tant les erreurs d'énoncé que les erreurs de démonstration sont trop variées pour qu'on essaie de les classer. Au surplus, le principal comportement erroné est l'absence de démonstration.

---

15. Question 15

    Le comportement d'erreur (mis à part la non-réponse) est quasi-toujours le même : l'exemple donné est la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$. Elle converge vers 0 simplement sur $[0, 1[$ mais pas en 1.

---

16. Question 16

    En 16A, les comportements erronés consistent à définir autre chose : e^{ix}, ou z^w ou $e^{i\pi}$.

    En 16B, on relève les comportements suivants :

16B	$e^{(z+w)} = e^z.e^w$	
B16B	Bon	24%
M16CQ	Calculs incorrects ou incohérents	12%
M16I	Calculs inachevés	12%
M16T	Calculs qui utilisent la thèse	9%
Z16	Pas de réponse	44%

---

17. Question 17

17	Série de Fourier complexe de $\sin x$	
B17	Bon	3%
M17P	Production d'une série de puissances de x	18%
M17N	Production d'une série numérique	3%
M17R	Production d'une série de Fourier réelle (et fausse)	3%
M17I	Enoncé plus ou moins correct et calculs inachevés ou erronés	35%
Z17	Pas de réponse	38%

18. Question 18

18	Calculer $\cos(\pi + i\frac{\pi}{2})$	
B18	Bon	26%
M18A	Arrêt du calcul à $-\cos(i\pi/2)$	15%
M18E	Erreur sur le calcul de $-\cos(i\pi/2)$	15%
M18F	Erreurs sur les valeurs de $\cos\pi$ ou $\sin\pi$	6%
M18D	Divers	12%
Z18	Pas de réponse	26%

19. Question 19

19	Calculer $\log(5 + 5i\sqrt{3})$	
B19	Bon	29%
M19P	$\log(a+b) = \log a.\log b$	12%
M19S	$\log(a+b) = \log a + \log b$	3%
M19F	Erreur sur $\arccos 1/2$	6%
M19D	Divers	9%
Z19	Pas de réponse	41%

20. Question 20

20	Graphiques de e^x, e^{-x}, ch x et sh x	
B20	Bon	41%
M20E	Graphique limité à e^x et e^{-x}	18%
M20F	Les graphes de e^x et e^{-x} sont faux.	6%
M20C	Les graphes de ch x et sh x se coupent.	12%
M20I	Un des graphes de sh x et ch x est faux ou absent.	15%
M20D	Divers	3%
Z20	Pas de réponse	6%

21.2.3 Commentaires sur les énoncés

Lors de la rédaction du questionnaire, nous nous étions efforcés de le rendre assez équilibré. On y trouve ainsi :

I des questions de restitution d'énoncé (définition ou résultat) : questions 3A, 4, 5A, 6A, 6B, 8, 11, 14A, 16A.

II des questions de restitution de justification ou de démonstration : questions 5B, 7, 10, 14B, 15, 16B.

III des exercices pouvant se résoudre de façon procédurale : questions 1B, 1C, 9A, 9B, 12, 17, 18, 19.

IV des questions pouvant être traitées par appel à des considérations de type structural : questions 1B, 1C, 2, 3B, 13, 17.

V des exercices de représentation graphique : questions 1A, 20.

Certaines exercices pouvaient se résoudre soit de façon procédurale, soit de façon structurale. Il en est ainsi des questions 1B, 1C, et 17.

Le premier d'entre eux (1B) a été traité de façon structurale par tous les étudiants sauf un. Malheureusement, le modèle mental le plus fréquent parmi les étudiants pour le concept d'asymptote est celui de « droite tangente à l'infini ». Et la notion de tangente a été inventée pour s'appliquer à des courbes, non à des droites. Ce modèle mental est donc insatisfaisant dans le cas présent. Il ne correspond pas à une conceptualisation achevée. Il en résulte un nombre important d'échecs ou d'abstentions. Un phénomène de ce genre peut se présenter chaque fois qu'un concept a été généralisé au delà de son domaine d'« utilité naturelle » quelles que soient par ailleurs la nécessité et l'efficacité d'une telle généralisation.

La résolution des exercices 1C et 17 par une méthode structurale est immédiate :

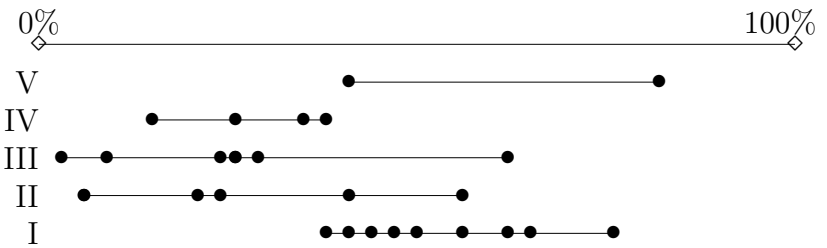
Question 1C : Dire que $f(x) = |x - a| + |x - b|$ est constante sur le segment $[-b, -a]$ est équivalent à dire que la somme des distances d'un point intérieur à un segment aux extrémités de celui-ci est toujours égale à la longueur du segment.

Question 17 : La série de Fourier complexe de la fonction $\sin x$ est directement donnée par un corollaire de la formule d'Euler : $\sin x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2i}$. Cette expression avait été vue au cours (sans que soit effectué le rapprochement avec les séries de Fourier complexes).

Ces deux questions ont été traitées de façon procédurale par tous les étudiants, ce qui dans le cas de la question 17 les a amenés à des calculs complexes qui n'ont été menés à bien que par une seule d'entre eux. Ce fait montre de façon très claire la difficulté pour les étudiants d'établir par eux-mêmes des liens entre des chapitres distincts du cours.

Vu ces remarques, nous retirons les questions 1C et 17 de la catégorie IV et la question 1B de la catégorie III.

Nous pouvons représenter graphiquement les taux de réussite des différentes questions et sous-questions, en regroupant celles qui sont classées ci-dessus dans une même catégorie.



On remarque la très grande dispersion des questions de type procédural (catégorie III) : de 3% (question 17) à 62% (question 12). Celle-ci porte sur un concept (la fonction du second degré) assez bien maîtrisé à la fin du secondaire.

Visiblement, « procédural » (catégorie III) n'est pas nécessairement plus facile que « structural » (catégorie IV). Tout dépend de la complexité des procédures et des concepts.

La « restitution de démonstration » (catégorie II) est plutôt moins bien réussie que la « restitution d'énoncés » (catégorie I). Restituer une démonstration nécessite une certaine compréhension, un énoncé peut plus facilement être mémorisé. Pour la même raison, il n'est pas étonnant non plus que les questions de type structural soient systématiquement moins bien réussies que celles de restitution d'un énoncé.

Enfin les exercices de représentation graphique (catégorie V) pourraient être rapprochés de la restitution d'énoncés, mais vu qu'il n'y en avait que deux, il convient de rester très prudent à cet égard.

21.3. Evaluer le questionnaire

Le premier codage, en réussite–erreur–abstention [1], des résultats de notre questionnaire nous a mis en possession d'un tableau binaire totalement disjonctif comportant 34 lignes et 84 colonnes (correspondant au 28 questions ou sous-questions). Trois des colonnes sont entièrement constituées de 0 (aucun étudiant ne s'est abstenu de répondre aux questions 3A, 4 et 5A). Ceci nous a amenés à retirer également les comportements de réussite et d'erreur associés à ces questions 3A, 4 et 5A de la liste des variables principales.

Nous voulions en effet déterminer un triangle « Réussite-Échec-Abstention » en introduisant, en individus supplémentaires, des étudiants fictifs (notés **r**, **e** et **a**) qui auraient des comportements « purs » : **r** réussit toutes les questions, **e** échoue toujours et **a** remet une feuille complètement blanche. Mais la considération d'un étudiant fictif qui s'abstient toujours n'est techniquement possible que si pour toute question, au moins un étudiant réel s'est abstenu.

L'analyse des correspondances multiples [2] (voir annexe A) a donc été appliquée à un tableau de 25 questions ou sous-questions, chacune donnant lieu à trois comportements de réponse distincts et effectivement observés chacun au moins une fois.

Nous nous occuperons ci-dessous uniquement des trois premiers facteurs. Ils expliquent respectivement 53,73%, 11,79% et 6,21% de l'inertie totale du nuage de points. Ensemble ces trois facteurs expliquent 71.73% de l'inertie totale, ce qui est loin d'être négligeable.

---

[1] Nous préférons utiliser le terme « erreur » plutôt que « échec ». Ce dernier mot est en effet ambigü : ne pas répondre à une question ne peut être assimilé à commettre une erreur. C'est cependant vécu comme un échec.

[2] Nous utilisons le logiciel CHADOC réalisé et diffusé par le Département Informatique de l'IUT de Nice.

21.3.1 Le plan des deux premiers facteurs

21.3.1.1 Les variables principales

La figure 21.1 représente la projection du nuage des points-questions sur le plan des facteurs n° 1 et 2.

Pour éviter la surcharge de la figure, nous nous sommes contentés de désigner les comportements de réussite (resp. erreur, abstention) de la lettre R (resp. E, A). Un simple coup d'œil permet de constater que les points représentant les comportements de réussite sont situés dans le demi-plan de gauche cependant que les points représentant les erreurs ou les abstentions sont essentiellement, les premiers dans le premier quadrant, les seconds dans le quatrième quadrant. En superposant à la figure le triangle **rea**, issu de la prise en compte des étudiants fictifs ayant des comportements « purs », on obtient une confirmation du phénomène. Pour l'instant, ce triangle ne nous servira que de repère.

Rappelons que l'origine des axes est le centre de gravité du nuage. Un point très lourd — c'est-à-dire un comportement très fréquent — est donc situé assez près de l'origine. Par contre les points éloignés de l'origine sont ceux qui sont les plus légers (mais ils contribuent à déterminer les axes d'inertie). Une réussite éloignée de l'origine est donc signe d'un exercice pour lequel beaucoup d'étudiants ont éprouvé des difficultés, cependant qu'un comportement d'erreur situé loin de l'origine révèle un exercice facile. Une abstention éloignée de l'origine pourrait s'interpréter comme une question qui ne fait pas peur. Bien entendu, ces appréciations de difficulté n'ont guère de sens dans l'absolu, elles n'en ont que relativement à la population d'étudiants concernée par l'examen.

Le tableau suivant classe les différents comportements selon les abscisses croissantes, donc *grosso-modo* par ordre décroissant de difficulté.

Il permet de situer chaque comportement sur la figure 21.1. Le premier facteur oppose les comportements de réussite, situés du côté négatif de l'axe aux comportements d'erreur ou d'abstention situés dans leur très grosse majorité du côté positif. L'ordre des comportements de réussite est proche de celui des fréquences croissantes.

R17 : $(-1.43, -0.06)$	R7 : $(-0.82, 0.04)$	R18 : $(-0.70, -0.08)$
R15 : $(-1.14, 0.01)$	R9A : $(-0.73, -0.02)$	R3B : $(-0.68, -0.06)$
R9B : $(-1.09, -0.05)$	R16B : $(-0.72, -0.01)$	R13 : $(-0.66, -0.01)$
R10 : $(-0.85, 0.00)$	R1C : $(-0.71, -0.03)$	R14B : $(-0.62, -0.02)$

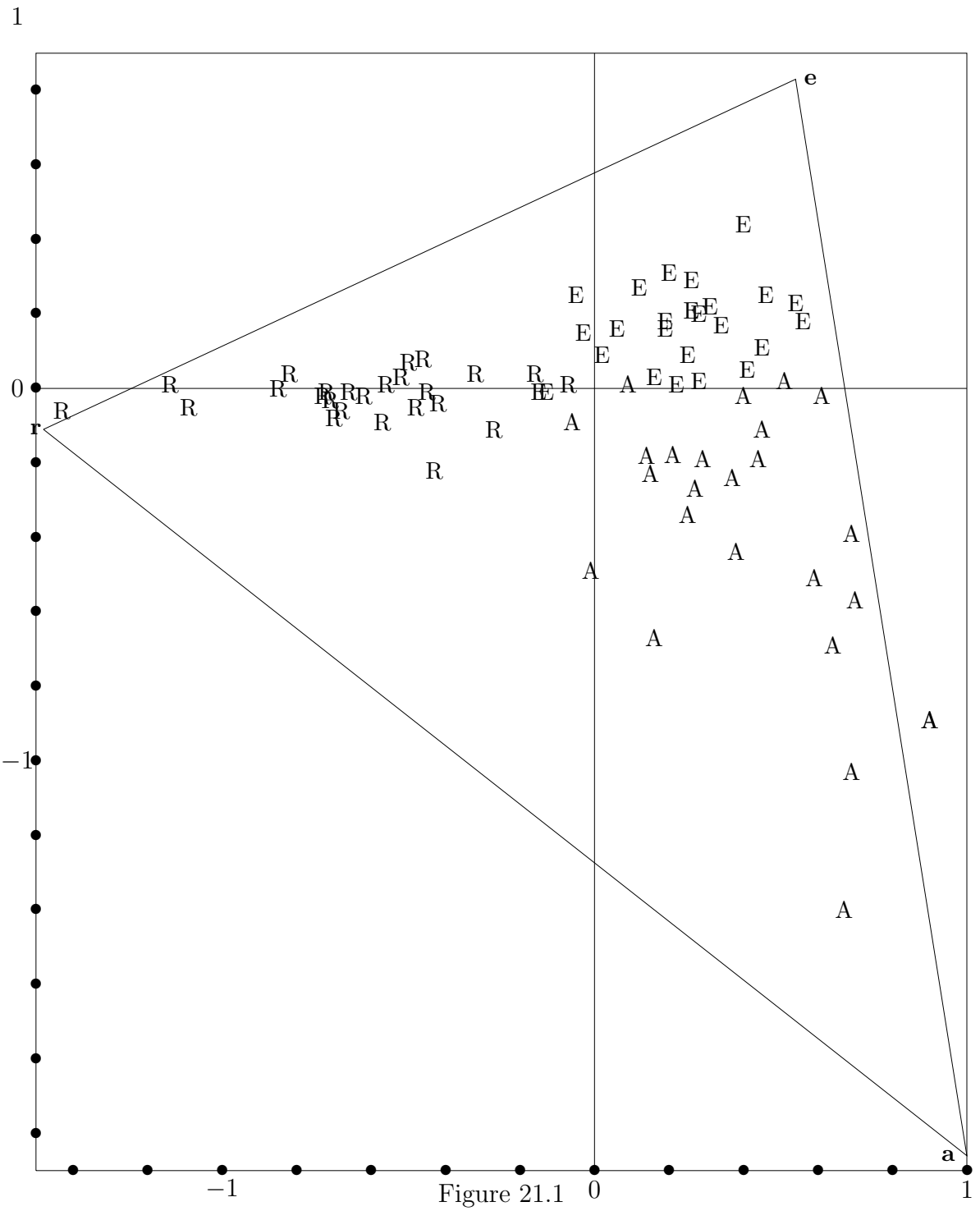


Figure 21.1

R6B : $(-0.57, -0.09)$	A3B : $(0.09, 0.01)$	A18 : $(0.37, -0.24)$
R19 : $(-0.56, 0.01)$	E16B : $(0.12, 0.27)$	A6B : $(0.38, -0.44)$
R16A : $(-0.52, 0.03)$	A2 : $(0.14, -0.18)$	A1B : $(0.40, -0.02)$
R2 : $(-0.50, 0.07)$	A17 : $(0.15, -0.23)$	E14A : $(0.40, 0.44)$
R8 : $(-0.48, -0.05)$	A6A : $(0.16, -0.67)$	E2 : $(0.41, 0.05)$
R1B : $(-0.46, 0.08)$	E9B : $(0.16, 0.03)$	A19 : $(0.44, -0.19)$
R5B : $(-0.45, -0.01)$	E10 : $(0.19, 0.16)$	A16A :$(0.45, -0.11)$
R20 : $(-0.43, -0.22)$	E18 : $(0.19, 0.18)$	E8 : $(0.45, 0.11)$
R14A : $(-0.42, -0.04)$	E9A : $(0.20, 0.31)$	E6A : $(0.46, 0.25)$
R11 : $(-0.32, 0.04)$	A7 : $(0.21, -0.18)$	A15 : $(0.51, 0.02)$
R6A : $(-0.27, -0.11)$	E11 : $(0.22, 0.01)$	E6B : $(0.54, 0.23)$
R12 : $(-0.16, 0.04)$	A9A : $(0.25, -0.34)$	E5B : $(0.56, 0.18)$
E1B : $(-0.15, -0.01)$	E16A : $(0.25, 0.09)$	A13 : $(0.59, -0.51)$
E15 : $(-0.13, -0.01)$	E1A : $(0.26, 0.21)$	A14B : $(0.61, -0.02)$
R1A : $(-0.07, 0.01)$	E20 : $(0.26, 0.29)$	A5B : $(0.64, -0.69)$
A9B : $(-0.06, -0.09)$	A10 : $(0.27, -0.27)$	A1A : $(0.67, -1.40)$
E19 : $(-0.05, 0.25)$	E3B : $(0.28, 0.02)$	A20 : $(0.69, -1.03)$
E17 : $(-0.03, 0.15)$	E13 : $(0.28, 0.20)$	A14A : $(0.69, -0.39)$
A1C : $(-0.01, -0.49)$	A16B : $(0.29, -0.19)$	A12 : $(0.70, -0.57)$
E14B : $(0.02, 0.09)$	E7 : $(0.31, 0.22)$	A8 : $(0.90, -0.89)$
E12 : $(0.06, 0.16)$	E1C : $(0.34, 0.17)$	A11 : $(0.90, -0.89)$

Tableau 21.1

Les abstentions et les erreurs sont plus dispersées autour de l'axe des abscisses. En fait, le deuxième facteur oppose les abstentions aux erreurs. On voit ainsi les trois types de comportements fondamentaux se distinguer très clairement.

L'attention est attirée par la position de certaines erreurs du même côté de l'origine que les réussites. C'est notamment le cas de E17 et E19, mais ces points ont une abscisse proche de 0, leur position du côté négatif n'est pas nécessairement significative. Plus intéressants sont les cas de E1B et E15, d'autant plus qu'on trouve encore une réussite à droite de ces deux erreurs.

Au paragraphe suivant, nous examinerons les résultats de l'analyse en ce qui concerne les étudiants. Mais nous pouvons déjà rappeler que l'analyse des correspondances étudie le degré de dépendance entre des « individus » (ici les étudiants) et des « variables » (ici les questions et sous-questions de l'examen. Plus un individu dépend d'une variable, plus cet individu et cette variable auront des points représentatifs proches. Les comportements de réussite ont donc des positions proches de celles des étudiants les plus performants. Et si ceux-ci commettent fréquemment une erreur particulière, celle-ci — bien qu'il s'agisse d'une erreur — sera classée parmi les réussites.

La position d'une erreur parmi les réussites pourrait révéler une discordance entre l'enseignement dispensé aux étudiants et l'évaluation pratiquée à la suite de cet enseignement.

Nous avons déjà parlé de la question 1B précédemment. La position parmi les réussites de l'erreur à cette question vient corroborer ce que nous disions alors. L'enseignement dispensé aux étudiants a mis en place chez beaucoup d'entre eux un modèle mental moins élaboré que celui qui est testé par le présent questionnaire. Il n'est pas étonnant que dans ces conditions, de nombreux étudiants, qui par ailleurs sont de bons étudiants, commettent une erreur à cette occasion.

La question 15 pose également un problème. La suite de fonctions $f_n(x) = x^n$ a, à plusieurs reprises, été utilisée au cours pour illustrer soit la convergence simple, soit la non-convergence uniforme. Mais sa limite n'est la fonction nulle que sur l'intervalle semi-ouvert $[0, 1[$ et non sur l'intervalle fermé $[0, 1]$. Des exemples de suites convergeant simplement mais non uniformément sur une intervalle fermé avaient également été rencontrés, mais ils sont plus difficiles à assimiler. On peut se demander si ce n'est pas la non-maîtrise en profondeur des différences entre les propriétés des fonctions définies sur un intervalle ouvert et celles définies sur un intervalle fermé qui est à la base de l'erreur commise par la plupart des étudiants. Ici aussi, il s'agirait de modèles mentaux insuffisants.

Quoi qu'il en soit, si le comportement d'erreur associé à une question se positionne parmi les réussites, une évaluation basée sur une analyse des correspondances ne pénalisera pas les élèves ayant échoué à cette question. Mais elle pénaliserait les élèves ayant réussi à une question si d'aventure la réussite à celle-ci était placée parmi les erreurs. Pour procéder à une évaluation certificative, il vaut sans doute mieux éviter d'incorporer de telles questions à un examen puisqu'elles ne contribuent pas à une évaluation fiable.

Si nous considérons à présent les cinq catégories d'énoncés que nous avions définies au paragraphe 21.2.3, nous constatons que l'analyse des correspondances permet moins encore de les distinguer que les fréquences de réussite : les points qui représentent les réussites aux exercices des cinq catégories se mélangent plus encore que nous ne l'avions précédemment repéré. La seule chose qui reste valable est la faible dispersion des catégories 1 et 4. Ces catégories n'apparaissent pas être de bons indicateurs pour l'évaluation.

Rechercher les questions les plus significatives du test, peut se faire en examinant quels sont les comportements ayant les contributions absolues les plus élevées aux différents facteurs. Ces contributions se calculent à l'aide des formules indiquées à la section A.10. La contribution absolue de la variable $V_{\star j}$ au h^{e} facteur vaut $\frac{p_{\bullet j}}{\lambda_h}|(g_h|V_{\star j})|^2$.

Le tableau 21.1 nous fournit les valeurs des produits scalaires $(g_h|V_{\star j})$ pour $h = 1, 2$. Les $p_{\bullet j}$ sont les fréquences des différents comportements et les λ_h sont les valeurs propres des différents facteurs. Nous pouvons ainsi calculer toutes les contributions absolues des différents comportements aux deux premiers facteurs.

Comme nous avons analysé un ensemble de 75 comportements, la contribution absolue moyenne est de $\frac{1}{75} = 1,33\ldots10^{-2}$. La figure 21.2 représente le plan des deux premiers facteurs où nous n'avons placé que les comportements ayant une contribution absolue particulièrement significative à au moins l'un de ces deux facteurs. De façon tout à fait arbitraire, nous avons placé la limite à 3.10^{-2}. Les comportements sont écrits en **gras** s'ils sont associés au premier facteur, en *italique* s'ils sont associés au second ([3])

On constate la présence sur la figure de 7 comportements de réussite situés « dans un mouchoir » : R1C, R6B, R7, R10, R13, R14B et R18. (R1C, R13 et R14B sont quasiment superposés). Ensemble ces comportements contribuent à 25% de la variance expliquée par le premier facteur. Du côté positif de l'axe des abscisses, seule l'abstention à la question 14B a une contribution absolue au premier facteur du même ordre de grandeur que les comportements de réussite mentionnés précédemment.

On note que la question 14B intervient à la fois par la réussite R14B et par l'abstention A14B. Cette question demandait aux étudiants de produire la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Il s'agit là d'une question de cours par excellence et s'adaptant bien à la forme choisie pour l'examen : la propriété est importante, la démonstration n'est ni trop longue, ni trop complexe. Tant la réussite que l'abstention à cette question sont significatives. L'échec par contre l'est moins. Cela est lié au fait, déjà signalé, de la grande variété des erreurs commises.

Les questions 6B, 7, 10 et 13 étaient des questions de restitution nécessitant une bonne compréhension d'un concept un peu sophistiqué (les limites inférieure et supérieure d'une suite de nombres, la vitesse de convergence, le produit scalaire dans le domaine complexe). Enfin les questions 1C et 18 étaient des questions essentiellement techniques mais portant sur des sujets (valeur absolue et nombres complexes) encore mal maîtrisés par nombre d'étudiants. L'ensemble apparaît en effet bien équilibré et représentatif des intentions de l'examinateur.

Le deuxième facteur est associé de façon significative à trois comportements d'erreur, E9A, E14A et E20 et à huit comportements d'abstention, A1A, A1C, A5B, A9A, A12, A13, A14A et A20. Les questions 9A, 14A et 20 jouent un rôle particulièrement important vis à vis du deuxième facteur puisqu'elles interviennent tant via leur comportement d'erreur que via leur comportement d'abstention. Ensemble ces trois questions contribuent pour près de 30% à la variance expliquée par le deuxième facteur.

([3]) Nous aurions pu avoir à écrire certains comportements en gras-italique, mais le cas ne se présente pas.

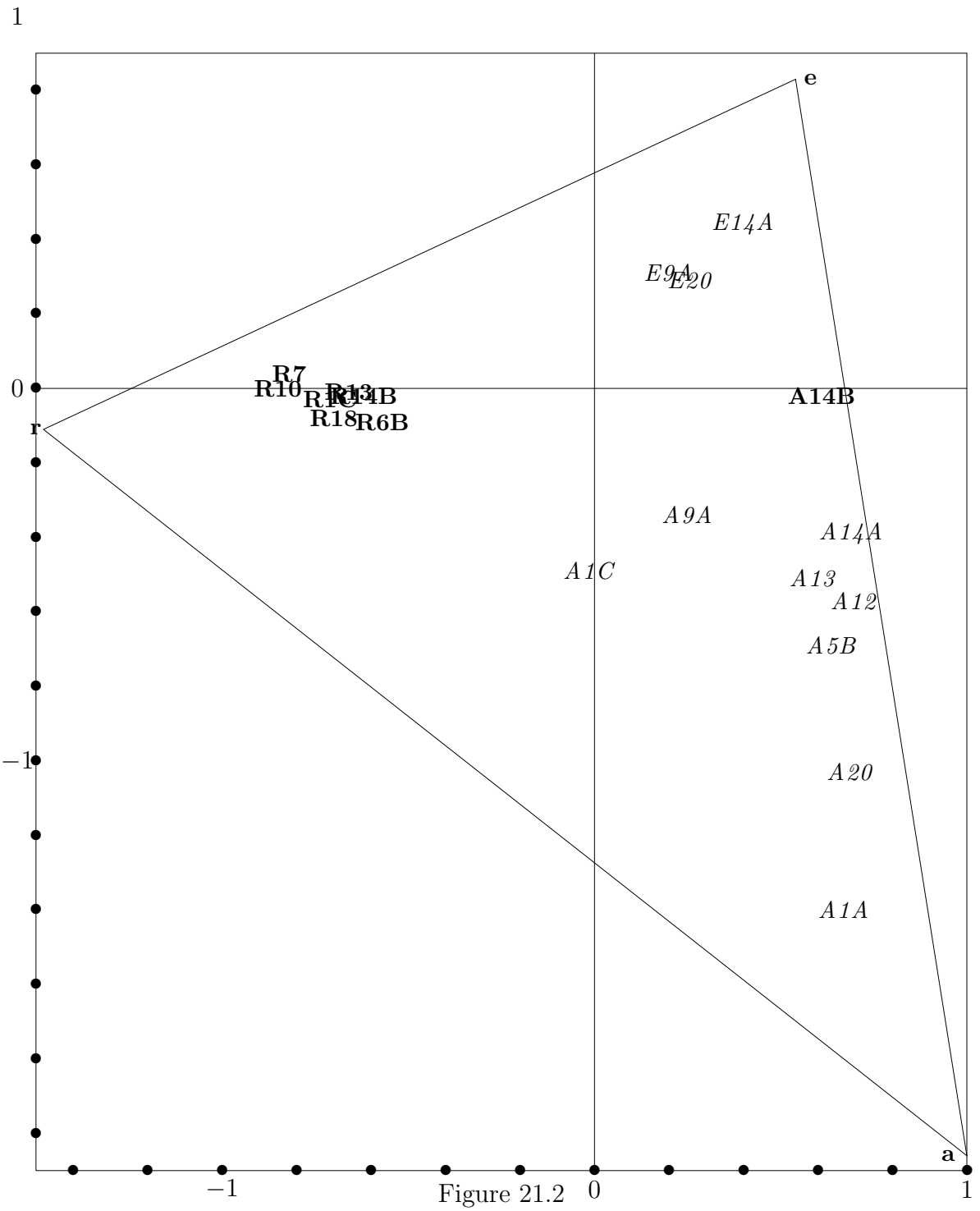

1
0
−1
−1
0
1
e
r
a
E14A
E9A
E20
R7
R10
R14B
R18
R6B
A14B
A9A
A14A
A1C
A13
A12
A5B
A20
A1A

Figure 21.2

Ces questions portent, la première sur le calcul de la limite du rapport de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci, la deuxième sur l'énoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et la troisième sur le dessin des graphiques des fonctions exponentielles et hyperboliques. Il s'agit de deux petites applications de la théorie et d'une restitution d'énoncé. Les comportements d'erreur ou d'abstention à l'une ou l'autre de ces questions sont significatifs d'une tendance à l'erreur ou à l'abstention.

Toutefois le fait de dessiner les graphiques de ch x et sh x se coupant (comme si l'équation sh x = ch x avait une solution) n'est pas considéré comme une erreur par l'analyse des correspondances : la variable supplémentaire qui rend compte de cette erreur est classée du côté des réussites. Les autres variables supplémentaires associées aux erreurs apparaissant aux questions 9A et 20 se classent du côté des échecs (voir la figure 21.3).

Quant aux comportements d'abstention A1A, A1C, A5B, A12, et A13, ils concernent des applications de la théorie (A1A, A1C, A12) ou des restitutions (A5B et A13). Tout en étant souvent plus proches du comportement (fictif) d'abstention pure, ces comportements sont peut-être moins significatifs que les précédents car ils ne sont le fait que de petits nombres d'étudiants (par exemple, un seul étudiant s'abstient de répondre à la question 1A).

21.3.1.2 Les variables supplémentaires

Représenter sur un seul graphique les 89 variables supplémentaires que nous avons distinguées n'aboutirait qu'à une figure illisible. Aussi, nous nous contenterons de représenter d'une part celles des variables supplémentaires qui sont le fait de plusieurs étudiants et qui sont situées du côté des réussites tout en étant des erreurs ou du côté des échecs tout en n'étant pas des erreurs complètes. Nous obtenons ainsi la figure 21.3.

Notons d'abord les comportements d'erreur situés du côté des réussites : M19F, M7D, M19D, M20C, M17I, M18F, M6A, M12P, N1B, M18D, M12Q, M2I, M16C. Le cas de M19F est simple à comprendre : il s'agit d'une erreur de calcul de $\arccos \frac{1}{2}$. Cette erreur grossière a été commise notamment par deux étudiants dont celle qui a obtenu le meilleur résultat à l'examen. ceci explique la position de M19F parmi les réussites. La position de plusieurs des autres réponses s'explique de façon analogue.

M7D (2 étudiants) consiste à ne pas donner quatre nombres distincts (comme on le demandait) à la question 7. Les réponses ne sont pas nécessairement fausses pour autant. M19D (3 étudiants) est constitué d'erreurs diverses au calcul de $\log(5 + i\sqrt{3})$. M20C (4 étudiants) consiste à dessiner les graphes de sh x et ch x de façon qu'ils se coupent. Cela provient vraisemblablement d'un manque de soin (que l'on constate fréquemment) lors de la réalisation du dessin plutôt que d'un manque de connaissances.

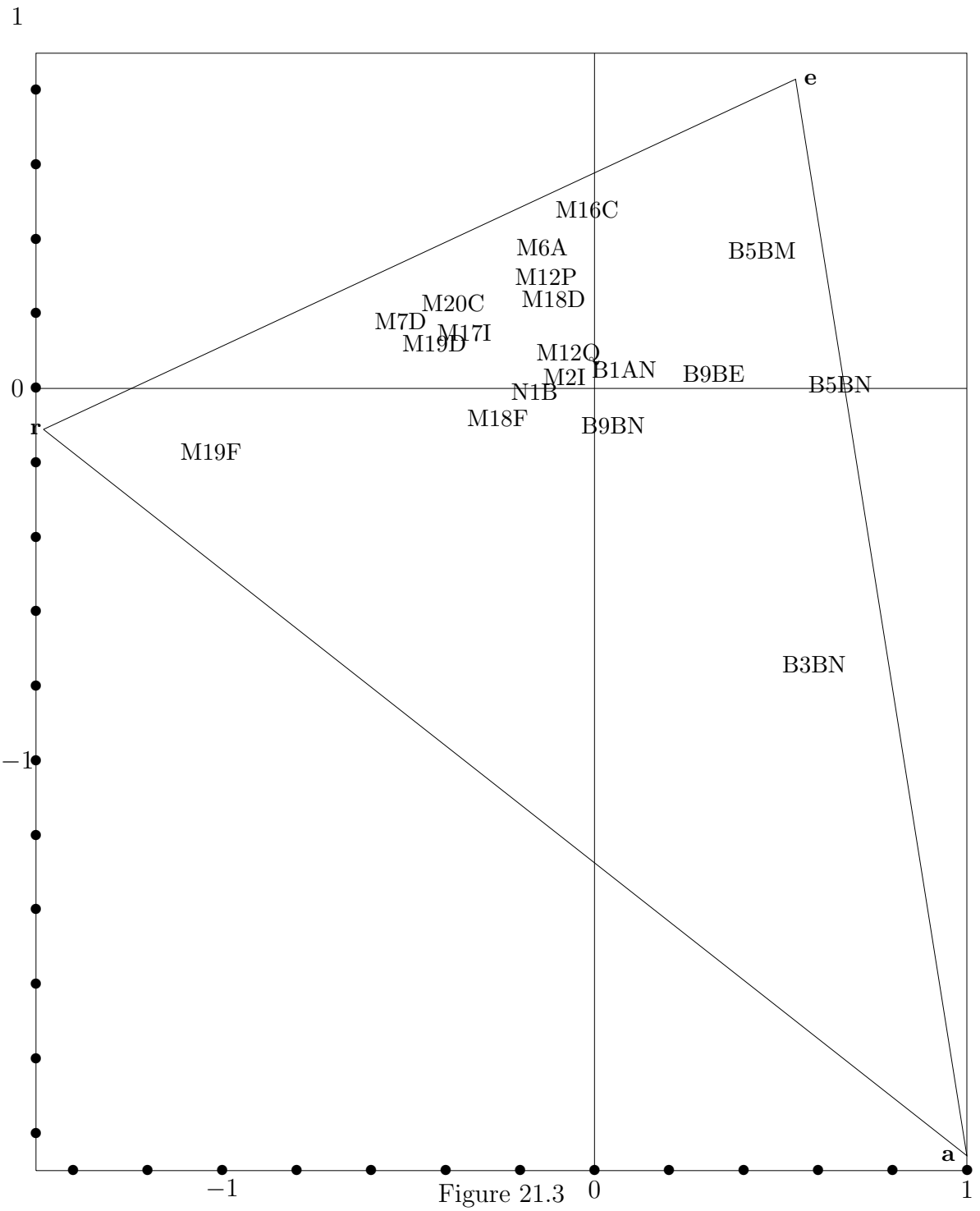

1
0
−1
−1
0
1
e
r
a
M16C
M6A
M12P
M18D
M20C
M7D
M17I
M19D
M12Q
M2I
B1AN
B9BE
B5BN
N1B
M18F
B9BN
M19F
B5BM
B3BN

Figure 21.3

M18F (2 étudiants) consiste à se tromper sur les valeurs de $\cos\pi$ ou $\sin\pi$. M18D (4 étudiants) est constitué d'erreurs diverses à la même question 18. Quant à M6A (trois étudiants), il s'agit d'erreurs diverses à la définition de la limite d'une suite.

M12P (2 étudiants) résulte d'erreurs de calcul lors de la détermination du maximum de $|x(1-x)|$. Cependant que M12Q (4 étudiants) consiste à répondre $\frac{1}{4}$ (qui est le maximum de $x(1-x)$ à cette question. M16C (4 étudiants) est également formé d'erreurs de calcul variées dans la démonstration de $e^{z+w} = e^z e^w$.

M2I (2 étudiants) consiste à produire un nombre décrété irrationnel à la question 2, sans qu'on puisse être sûr de cette irrationnalité. Une telle réponse est du type $0,913264698236574114788756 3\ldots$. Il est vraisemblable que les auteurs d'une telle réponse pensaient à un développement non périodique mais ont négligé de le préciser.

Jusqu'ici, nous n'avons rencontré que des erreurs parfois grossières mais dont aucune n'est le fait de plus de 4 étudiants. Elles peuvent être dues au manque de précision ou de soin, au stress de l'examen ou à d'autres raisons qui nous échappent. Les auteurs de ces erreurs ne sont pas nécessairement tous des étudiants faibles (sans quoi ces comportements seraient classés dans le demi-plan de droite). Mais leur rendement n'est pas optimal et c'est dommage pour eux.

Les deux derniers comportements N1B et M17I sont d'une autre nature. N1B (17 étudiants) est l'affirmation de non-existence d'asymptotes à la fonction $|x-1| + |x+1|$. Nous avons déjà analysé cette réponse. Quant à M17I (12 étudiants), il s'agit d'erreurs de calcul ou d'un calcul inachevé lors de la détermination de la série de Fourier complexe de $\sin x$. Ici aussi nous pouvons constater un manque de conceptualisation qui amène les étudiants à réaliser des calculs complexes dont ils pourraient se passer facilement. Nous avons dit plus haut que de telles questions ne sont pas en concordance avec les modèles mentaux véhiculés par l'enseignement.

Les cinq comportements B1AN (22 étudiants), B9BN (12 étudiants), B9BE (5 étudiants), B5BN (5 étudiants) et B5BM (6 étudiants) sont classés parmi les échecs alors qu'ils ne sont pas entièrement mauvais. Dans chacun de ces cas, il s'agit de réponses correctes mais soit non justifiées (B1AN, B9BN, B5BN), soit justifiées par la considération de cas particuliers (B9BE) soit encore justifiées incorrectement (B5BM). Que ces comportements soient classés parmi les échecs montre que les étudiants qui les produisent ont des résultats moins bons que la moyenne. Cela confirme l'importance de les habituer à produire des justifications complètes. Remarquons aussi la finesse de l'analyse (malgré le petit nombre d'étudiants) qui parmi les cinq comportements considérés, place B5BM, le seul à contenir de vraies erreurs, le plus près d'un comportement (fictif) d'erreur totale.

21.3.2 Le troisième facteur

Contentons-nous de quelques mots à propos du troisième facteur. Son importance est déjà beaucoup plus faible puisqu'il n'explique plus que 6,21% de la variance totale du nuage. Les variables principales dont les contributions absolues à ce facteur sont supérieures à 3.10^{-2} sont les variables A1C, A6A, A7, R9B, A9B, E11, A12, E14B, R15, E15, A15, et R17. La figure 21.4 représente le plan des 1er (en abscisse) et 3e facteurs (en ordonnée). On y a indiqué les variables ci-dessus explicitement cependant que, par souci de lisibilité, les autres variables ne sont indiquées que par leur initiale R, E ou A.

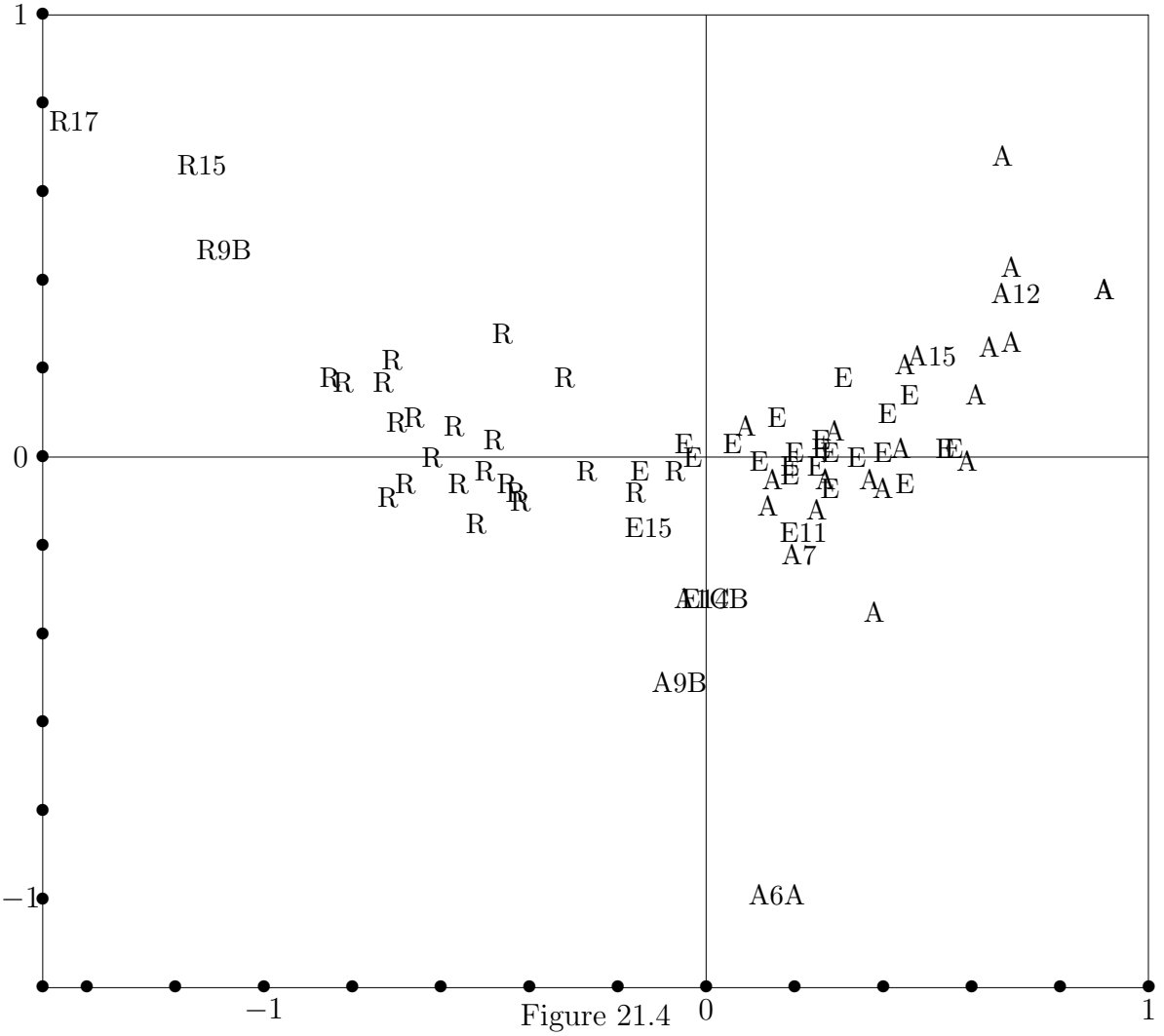


Figure 21.4

L'axe des abscisses désignant — comme précédemment — le 1er facteur, il est normal que l'on retrouve les réussites du côté des abscisses négatives, les erreurs et abstentions du côté des abscisses positives. La représentation plane ne sert ici qu'à améliorer la lisibilité du graphique, mais seules les ordonnées nous intéressent.

On remarque immédiatement l'importance de la question 15 par rapport au troisième facteur : ensemble, ses trois modalités (R, E, A) représentent 11,5% de la variance du nuage expliquée par ce facteur, la réussite et l'abstention s'opposant à l'erreur. Cette remarque mise à part, il est difficile — si nous restons dans le domaine mathématique — de trouver des points communs entre les différents comportements mentionnés qui permettraient de donner une interprétation au troisième facteur.

Peut-être ce facteur mesure-t-il une attitude générale telle que la persévérance dans l'effort s'opposant à la production immédiate mais insuffisamment réfléchie d'une réponse ? Cela expliquerait en particulier la présence des comportements R17, R15 et R9B qui tous trois s'accommodent mal d'une réponse immédiate. Cela serait aussi en accord avec la présence des erreurs E15 et E11 qui peuvent résulter d'un manque de réflexion. Pour réussir à la question 15, il faut avoir présente à l'esprit la condition imposée : la suite de fonctions doit converger simplement *vers 0* partout. En ce qui concerne la question 11, qui n'était qu'une simple question de restitution, la plupart des erreurs (11 sur 18) proviennent de la permutation des conditions < 1 et > 1 dans le critère de d'Alembert. Les erreurs à la question 14B sont trop variées pour que nous puissions les classer, avons-nous écrit précédemment. C'est vrai sur le plan mathématique. Peut-être pourraient-elles aussi provenir d'attitudes impulsives empêchant leurs auteurs de produire une réponse suffisamment réfléchie.

On pourrait objecter à une interprétation de type psychologique qu'on retrouve des comportements d'abstention tant du côté positif de l'axe des ordonnées que du côté négatif. Mais toutes les abstentions sont-elles de la même nature ? A la question 15 par exemple, celui qui s'abstient a vraisemblablement perçu que l'exemple de la suite x^n ne convient pas. Faute de trouver un meilleur exemple, il s'abstient. L'abstention à cette question n'est pas nécessairement associée à un abandon immédiat ni à un manque de réflexion. Par contre l'étudiant qui sait qu'il ne connaît pas la définition d'une suite convergente ou celui qui n'a pas intégré l'existence de suites convergentes qui ne sont ni croissantes ni décroissantes peut laisser tomber les bras dès la lecture de la question 6A pour l'un, 9B pour l'autre.

Il n'est pas inutile de souligner que nous sommes ici dans le domaine des hypothèses et que d'autres analyses devraient être réalisées pour les infirmer ou les confirmer. Nous pensons que ce que nous avons écrit ci-dessus a le mérite de rappeler — si besoin est — que la réussite ou l'échec d'un étudiant au cours de mathématique ne sont pas nécessairement dus à la matière elle-même, mais parfois aussi à des attitudes générales encore plus difficiles à évaluer avec précision.

21.4. Evaluer les étudiants

Après avoir évalué l'examen, nous pouvons passer à l'évaluation des étudiants eux-mêmes. Dans un premier temps, nous projetterons sur le plan des deux premiers facteurs les points qui représentent les divers étudiants.

Nous obtenons ainsi la figure 21.5. Les étudiants de la section mathématique sont désignés par M1, ..., M19, ceux de la section physique par P1, ..., P15. Rappelons que l'origine du système d'axes représente le point moyen du nuage de points massifs analysé. Ce serait donc là la position d'un « étudiant moyen » de la population considérée (il est bien entendu fictif). Nous avons également placé sur le graphique, en les représentant seulement par des •, les comportements **R1C**, **R6B**, **R7**, **R10**, **R13**, **R14B** et **R18** dont nous avons estimé précédemment qu'ils sont largement représentatifs de la réussite à l'ensemble du questionnaire.

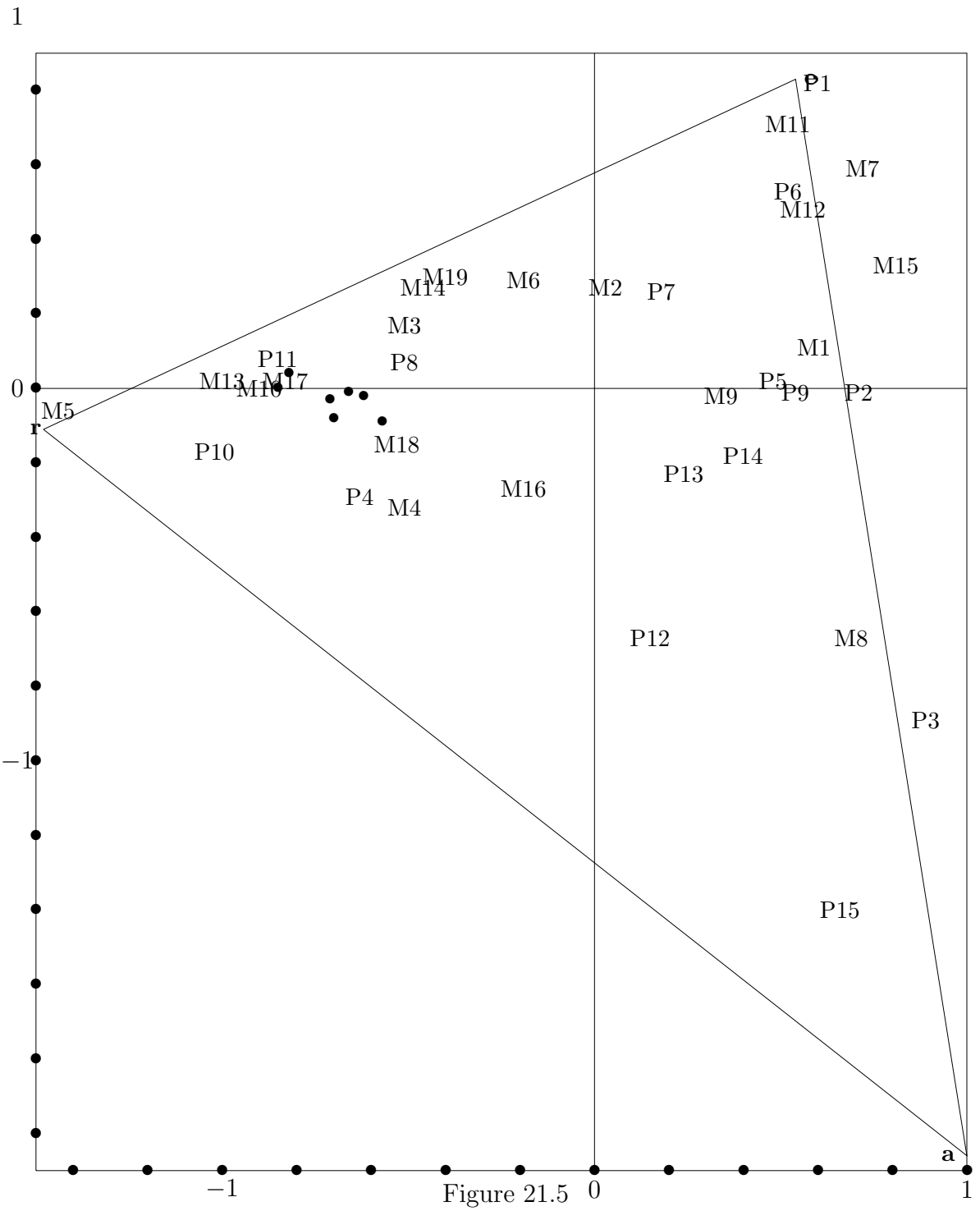

1
0
−1
−1
0
1
r
a
P1
M11
M7
P6
M12
M15
M19
M14
M6
M2
P7
M3
M1
P11
P8
M13
M10
M17
P5
M9
P9
P2
M5
P10
M18
P14
P13
M16
P4
M4
P12
M8
P3
P15

Figure 21.5

21.4.1 Un groupe de questions représentatif de l'examen

Avant d'approfondir notre évaluation des étudiants, voyons si nous pouvons étayer l'hypothèse selon laquelle le groupe de comportements **R1C**, **R6B**, **R7**, **R10**, **R13**, **R14B** et **R18** est représentatif de la réussite à l'ensemble du questionnaire. Pour étudier cette hypothèse, nous avons relevé, pour chaque étudiant, à combien des 7 questions du groupe il avait fourni de bonnes réponses. Sur la figure 21.6, nous avons remplacé les symboles désignant les étudiants par des nombres de 0 à 7 qui représentent leur score à ce groupe de 7 questions.

La figure 21.6 est édifiante : deux sous-populations apparaissent, aucun étudiant ne réalise un score égal à 2. A une exception près, les étudiants ayant un score de 0 ou 1 sont situés largement du côté des erreurs ou des abstentions.

L'exception est l'étudiante M18, de score 1 que l'analyse place parmi ceux de score au moins 3. On pourrait conclure ce point en se contentant de dire que les statistiques n'ont jamais qu'une valeur ... statistique et ne peuvent pas s'appliquer aux cas individuels. Ceci reviendrait à proscrire toute évaluation basée sur des statistiques.

Une autre interprétation serait que l'étudiante M18 était dans une phase de transition, qu'elle a éprouvé des difficultés pour résoudre les questions du groupe considéré mais qu'elle a compensé ces difficultés en répondant à d'autres questions. La suite de l'histoire, c'est-à-dire l'évolution de l'étudiante M18 au cours du second semestre de l'année académique 1998-99, les résultats qu'elle a obtenus à d'autres examens, montrent que cette interprétation est la bonne. L'étudiante M18 s'est révélée finalement être une étudiante brillante.

> Dans une optique d'évaluation formative, déterminer un groupe de questions considéré comme représentatif de l'ensemble d'un examen permet éventuellement d'apporter une aide à des étudiants dont les résultats à ce groupe de questions ne sont pas en accord avec leur résultat d'ensemble.

Le graphique montre aussi que les étudiants ayant un score d'au moins 5 sur 7 sont incontestablement du côté des réussites. Le doute peut exister pour les étudiants ayant un score de 3 ou 4. Ainsi, le groupe de comportements **R1C**, **R6B**, **R7**, **R10**, **R13**, **R14B** et **R18** apparaît effectivement comme significatif de la réussite. Il serait cependant dangereux de remplacer l'ensemble du questionnaire par les questions 1C, 6B, 7, 10, 13, 14B et 18 : cette diminution de l'information recueillie pourrait conduire dans des cas particuliers à des erreurs d'évaluation.

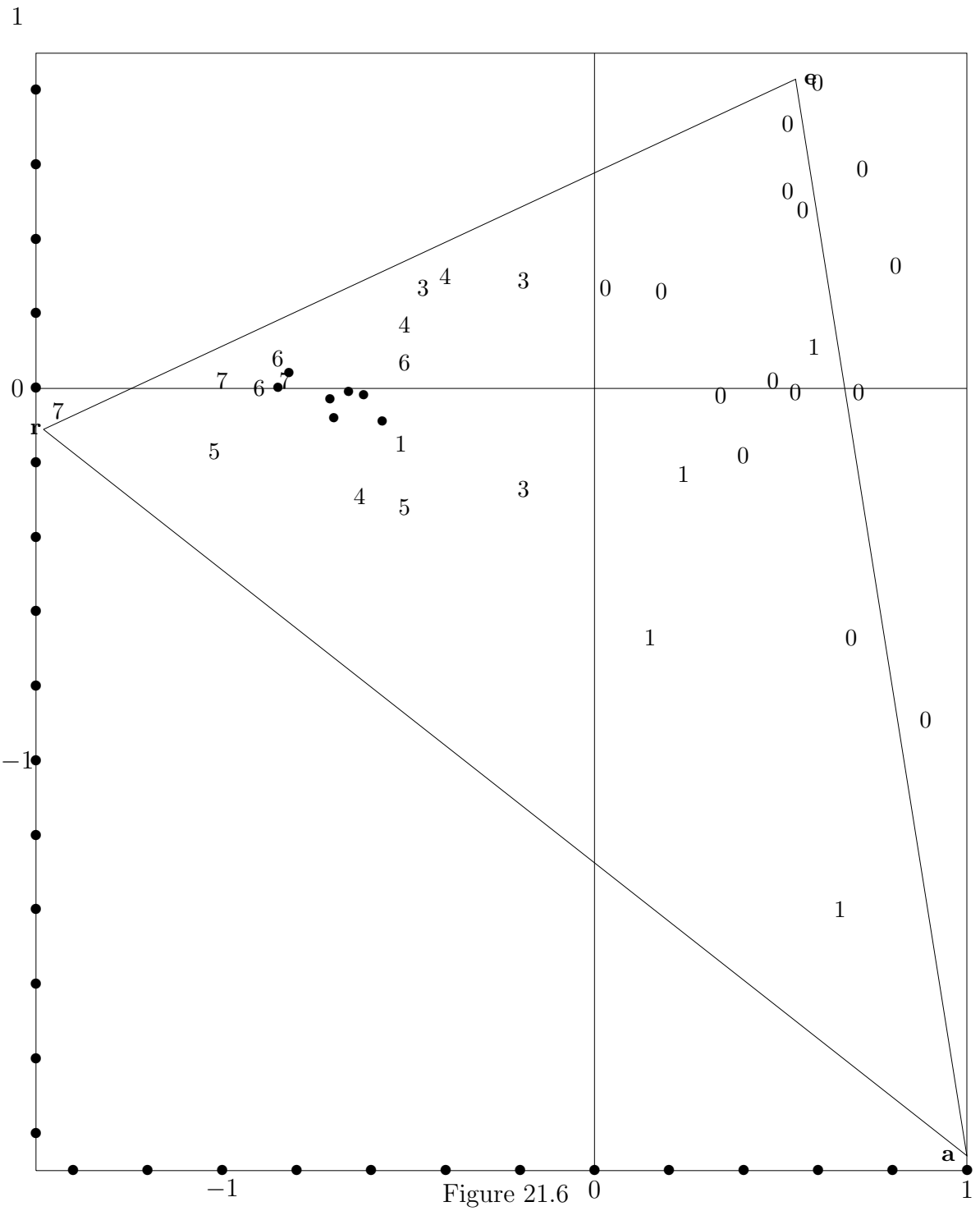


Figure 21.6

21.4.2 Une comparaison avec l'évaluation traditionnelle

Cette comparaison est facile à effectuer. Nous avons signalé au début de ce chapitre que nous avions procédé à une correction traditionnelle de l'examen. Nous disposons donc pour chaque étudiant d'une note de 0 à 100. La note moyenne est de 44,05. Inscrivons ces notes dans notre graphique à la place du symbole représentatif de l'étudiant : nous obtenons la figure 21.7.

Nous retrouvons d'abord les deux sous-populations mises en évidence au point précédent : aucun étudiant n'a de note comprise entre 36 et 48. De plus cet intervalle contient la note moyenne de la section. Du point de vue de l'évaluation traditionnelle, nous sommes dans une situation confortable.

De plus, il est clair que l'évaluation traditionnelle et l'évaluation par l'analyse des correspondances ne sont pas contradictoires. Le contraire aurait été plus qu'inquiétant. Mais il faut se demander si l'évaluation par l'analyse des correspondances fournit des renseignements que ne fournit pas l'analyse traditionnelle, sinon il n'y aucune raison d'abandonner celle-ci.

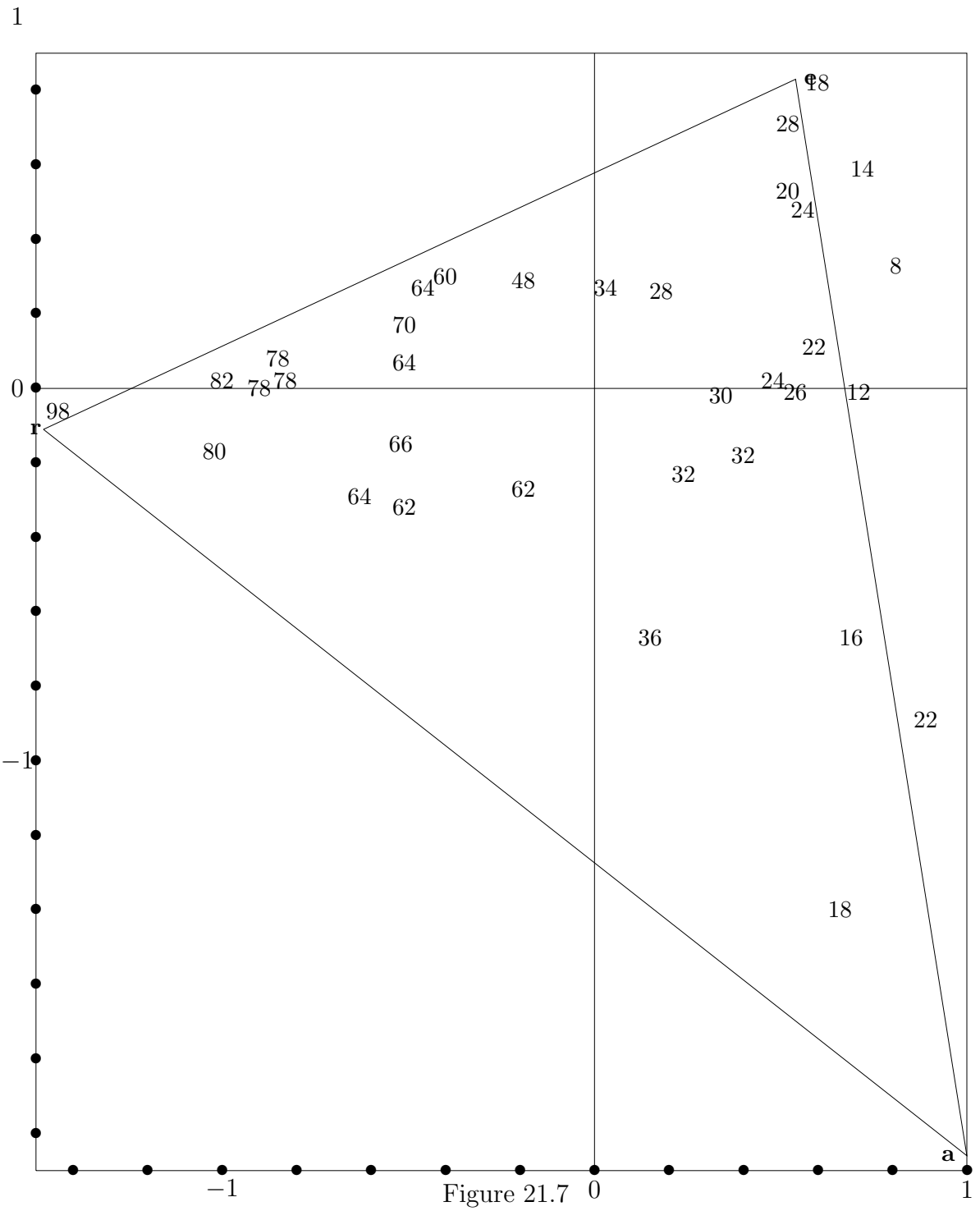

1
0
−1
−1
0
1
r
q
a
98
18
28
14
20
24
8
64
60
48
34
28
70
22
78
64
82
78
78
24
30
26
12
80
66
32
32
64
62
62
36
16
22
18

Figure 21.7

21.4.3 Une contribution à l'évaluation formative

Dans une optique d'évaluation formative, nous pouvons d'abord faire apparaître visuellement des renseignements concernant les étudiants et les erreurs qu'ils commettent. Par exemple, représentons sur le même graphique (figure 21.8) les positions des élèves ayant une note inférieure à la moyenne de la section et les comportements d'erreur ou d'abstention.

Notre examen comportait beaucoup de questions ou sous-questions de sorte que la figure 21.8 est quelque peu encombrée. Des techniques existent permettant d'alléger une telle figure en évitant de superposer les codes de variables différentes. Laissant cette question de côté, remarquons d'abord que parfois le point représentant un étudiant est exactement superposé à celui représentant un comportement. Par exemple P15 et A1A sont superposés. Une telle situation signifie que P15 est le seul étudiant à avoir eu le comportement A1A. P3 est superposé à A8 et A11. Il est également le seul à s'être abstenu tant à la question 8 qu'à la question 11. De telles situations sont extrèmes, mais elles nous rappellent qu'un étudiant est d'autant plus « dépendant » d'un comportement que son point représentatif est proche de celui du comportement.

Ainsi, nous lisons aussi sur la figure que l'étudiant M1 est spécialement attiré par les erreurs aux questions 5B, 6B, et 8. Il s'est cependant trompé à beaucoup d'autres questions : 3B, 4, 5A, 6A, ... Certaines de ces erreurs sont sans doute moins significatives.

Si l'examen d'une figure issue de l'analyse des correspondances peut attirer l'attention sur des phénomènes didactiques qui autrement passeraient inaperçus, il convient néanmoins de conserver à tout instant une attitude critique. Nous ne devons pas oublier en effet que la projection sur un plan d'un nuage de points qui est situé dans une espace de grande dimension s'accompagne d'une importante perte d'informations. En particulier, les projections de deux points peuvent être proches sans que les points eux-mêmes le soient. La fiabilité des observations ainsi réalisées dépend fortement de la part d'inertie du nuage expliquée par le plan sur lequel on projette.

L'utilisation à des fins didactiques de l'analyse des correspondances nécessite beaucoup d'expérience et de prudence.

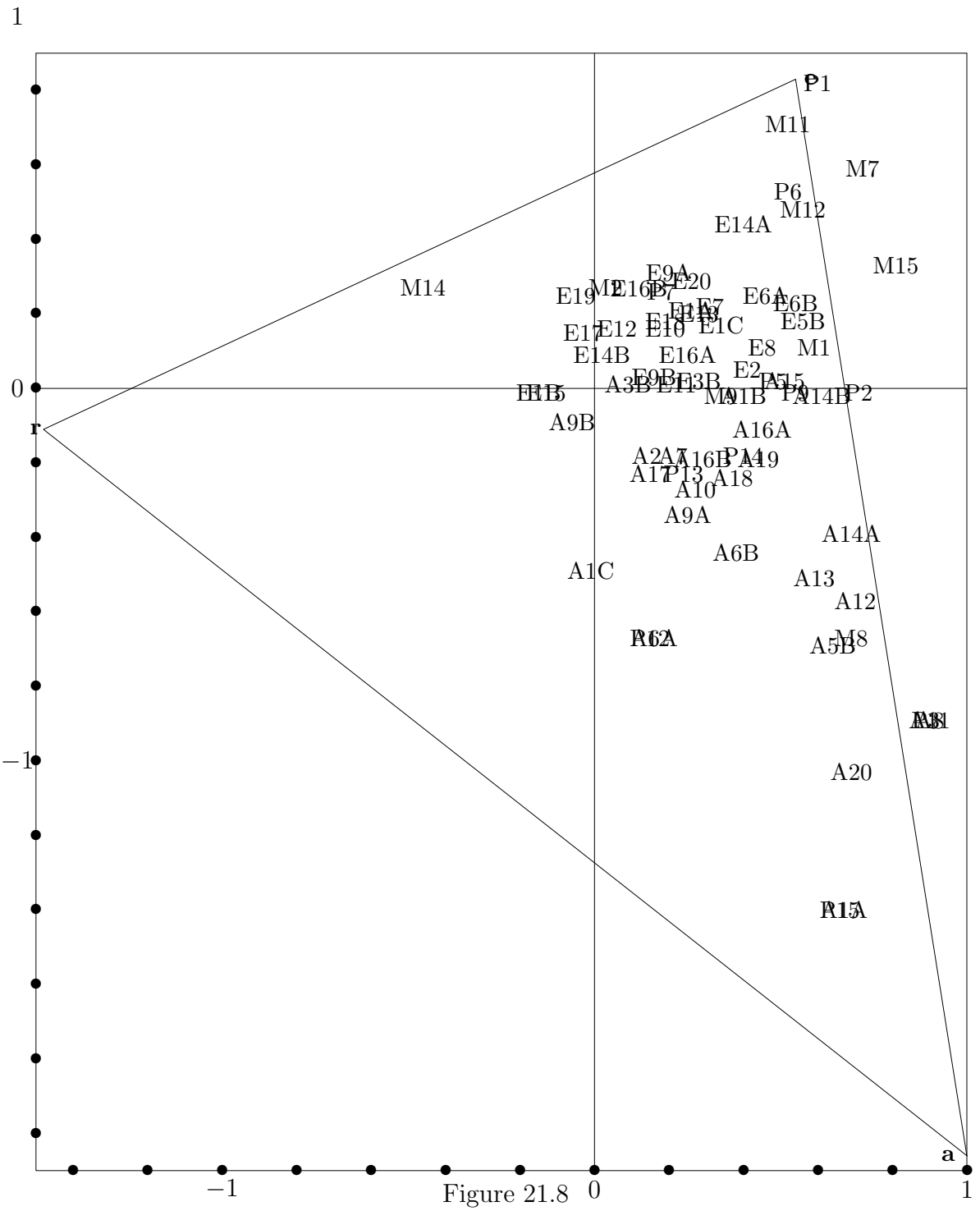

1
0
−1
−1
0
1
r
a
P1
M11
M7
P6
M12
E14A
M15
M14
E19
E20
E6A
E6B
E5B
E1C
E12
E14B
E16A
E8
M1
E2
A3B
A14B
P2
A9B
A16A
A18
A10
A9A
A14A
A6B
A1C
A13
A12
A5B
M8
A20

Figure 21.8

21.4.4 Une contribution à l'évaluation certificative

L'analyse des correspondances peut aussi être utilisée en vue d'une évaluation certificative, surtout dans le cas où, comme nous l'avons fait, on choisit comme variables principales des comportements de réussite, erreur et abstention. L'analyse nous a permis de mettre en évidence un triangle **rea** sur lequel nous situons à la fois les questions et les étudiants.

L'évaluation traditionnelle amalgame les abstentions et les erreurs, en attribuant même souvent des notes plus faibles aux abstentions qu'à certaines erreurs. Or pour certaines questions, ne pas répondre est un indice que l'étudiant a perçu des difficultés que d'autres — qui fournissent des réponses incorrectes — n'ont pas perçues. Non seulement il n'est pas indiqué d'amalgamer les abstentions et les erreurs, mais il est des abstentions qui peuvent être proches des réussites !

La position d'un étudiant par rapport aux sommets du triangle **rea** fournit plus d'informations qu'une évaluation traditionnelle. Par exemple un étudiant situé sur le côté **re** est un étudiant qui répond toujours. S'il est sur le côté **ra**, il ne répond qu'à coup sûr. Et s'il est sur le côté **ea**, ... il a besoin d'une aide immédiate. Les trois cas sont très différents, mais l'évaluation traditionnelle peut masquer ces différences. Par exemple les étudiants P1 et P15 ont la même note de 18 sur 100 par l'évaluation traditionnelle. Mais l'un est situé quasiment au sommet **e** tandis que l'autre est proche du sommet **a**.

Il peut paraître étrange que certains étudiants soient représentés sur la figure 21.5 par des points situés à L'EXTÉRIEUR du triangle **rea**. La raison en est que cette figure 21.5 est la projection du nuage de points sur le plan des deux premiers facteurs. Mais ce plan n'est pas celui du triangle **rea**.

Si nous voulons savoir avec un peu plus de précision comment les étudiants se situent par rapport au triangle, il est bon de projeter orthogonalement sur le plan de celui-ci. Connaissant les coordonnées de tous les étudiants par rapport aux différents facteurs ainsi que celles des étudiants fictifs **r**, **e** et **a**, il n'est pas très difficile de mener les calculs à bien. La précision sera d'autante meilleure qu'on utilisera un grand nombre de facteurs. Pour réaliser la figure 21.9, nous avons utilisé les 31 premiers facteurs issus de l'analyse des correspondances. Ensemble, ils expliquent plus de 99% de la variance totale du nuage. La perte de précision est alors minime ([4]), le triangle **rea** est quasiment en vraie grandeur. L'idée de manipuler des vecteurs de $\mathbb{R}^{31}$ ne doit pas rebuter : il ne faut rien de plus qu'un tableur de type EXCEL pour mener les calculs à bien.

([4]) En n'utilisant que les 5 premiers facteurs, certains étudiants se projetaient encore en-dehors du nuage.

La méthode la plus simple pour fixer la position d'un point par rapport aux sommets d'un triangle est encore d'utiliser un système de coordonnées barycentriques. C'est la raison pour laquelle nous avons tracé sur la figure des segments parallèles aux côtés. Nous les avons choisis passant par les points situés aux $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{7}{10}$ et $\frac{9}{10}$ des côtés. En cas de besoin un réseau plus dense peut être tracé. À titre d'exemple, l'étudiant P10 a, par rapport à **(r,e,a)**, les coordonnées barycentriques $(0,6; 0,3; 0,1)$. Pour autant qu'elle soit bien comprise, cette note « vectorielle » est plus informative que sa note « traditionnelle » de 80 (sur 100).

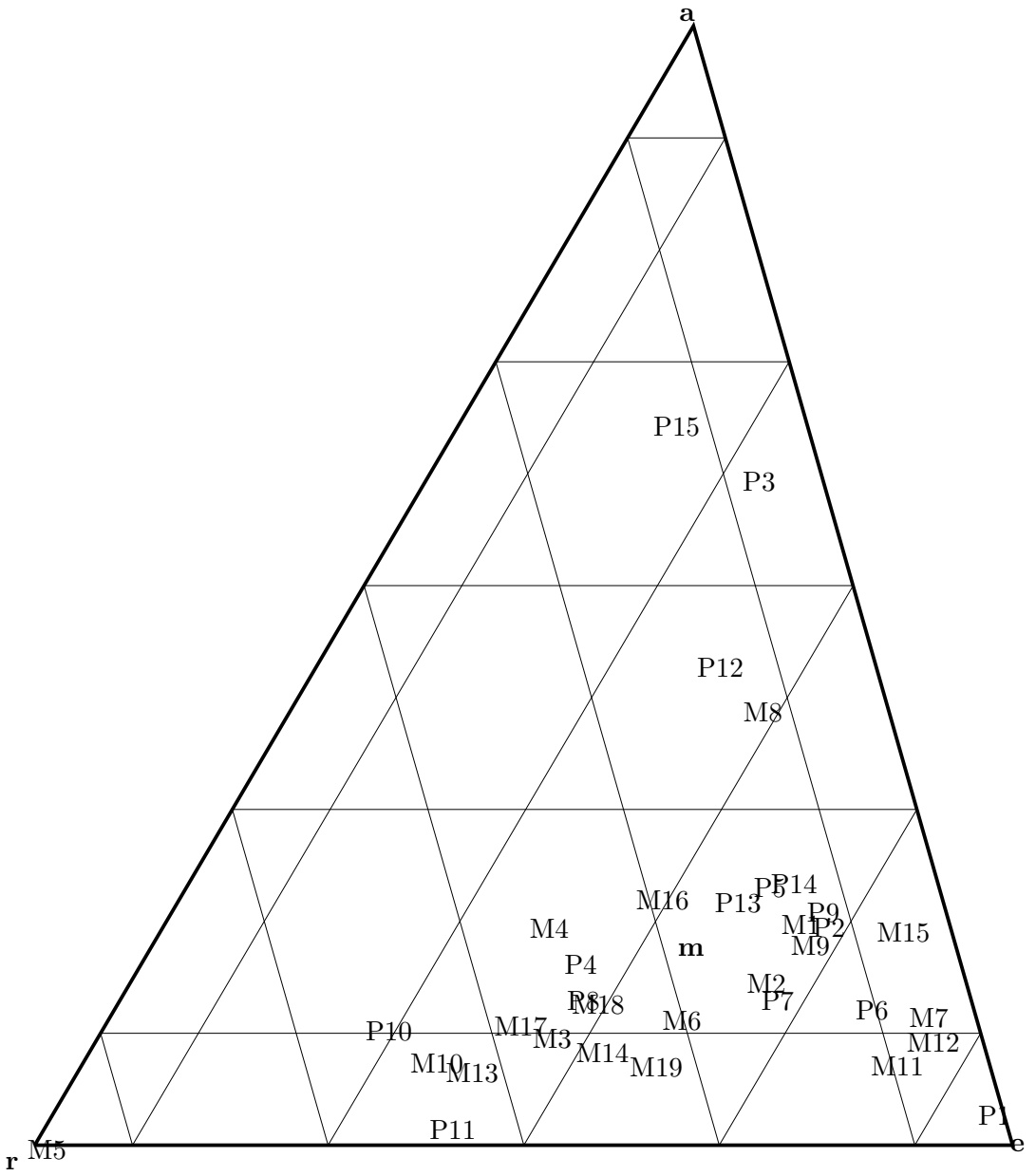


Figure 21.9

Sixième partie

Annexes

Annexe A

L'analyse des correspondances

A.1 Introduction 735
A.2 Rappels de mécanique 736
A.3 Le problème de l'analyse des tableaux de nombres positifs 740
A.3.1 Les principes généraux 741
A.3.2 Le cas des tableaux binaires totalement disjonctifs 743
A.4 Nuages et produits scalaires dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ 745
A.5 L'analyse dans $\mathbb{R}^p$ 746
A.6 L'analyse dans $\mathbb{R}^n$ 749
A.7 Lien entre les analyses dans $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ 750
A.8 Retour à la dépendance 754
A.9 Le problème de l'interprétation 755
A.10 Contributions absolues et relatives 756
A.11 Des variables supplémentaires 758

A.1. Introduction

Des techniques d'analyse statistique variées sont souvent utilisées lors d'études didactiques réalisées à l'aide de questionnaires soumis à une population importante d'élèves. Le but est de découvrir des idées significatives parfois dissimulées dans des résultats expérimentaux touffus. Il s'agit pour l'essentiel de techniques classificatoires : analyse en composantes principales, analyse des correspondances, analyse hiérarchique ou encore analyse implicative. On consultera à ce sujet les ouvrages mentionnés dans la bibliographie.

A l'aide de ces techniques statistiques on obtient parfois des résultats fins nous permettant d'éclairer en profondeur notre compréhension des phénomènes d'apprentissage. Il importe cependant de signaler qu'il s'agit de techniques lourdes nécessitant un investissement important en temps de travail ainsi que l'emploi de logiciels spécialisés. De plus, quand on dispose des résultats d'une de ces analyses, il reste encore à les interpréter, ce qui n'est pas nécessairement l'opération la plus facile. On se rend compte alors de ce que le questionnaire de départ doit avoir été conçu avec beaucoup de soin, de façon à faire apparaître les réponses à des questions que l'on se pose. Avec le risque de ne rien extraire d'autre des résultats que ce que l'on y a mis soi-même à travers les questionnaires.

Mais même si les questionnaires ont été rédigés avec tout le soin et la rigueur nécessaires, l'interprétation des résultats reste délicate et doit être menée avec beaucoup de prudence. C'est encore plus vrai si les questionnaires, comme c'est le cas de ceux que analysons dans ce travail, n'ont pas été conçus en vue de faire l'objet d'une telle analyse et si de plus ils n'ont été soumis qu'à une population limitée d'individus.

A.2. Rappels de mécanique

Soit V un espace vectoriel de dimension p muni d'un produit scalaire euclidien noté $(x|y)$. La norme du vecteur x est notée $\|x\|$ (et définie par $\|x\|^2 = (x|x)$).

Un point *massif* de V est un couple (x, m) où $x \in V$ et $m \in \mathbb{R}_+$. On se donnera ci-dessous une famille finie $\mathcal{E} = (x_i, m_i)_{i=1}^n$ de points massifs de V, encore appelée un *nuage* de points massifs.

Le *centre de gravité* g de $\mathcal{E}$ est le vecteur $g = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^n m_i x_i$, où $M = \sum_{i=1}^n m_i$.

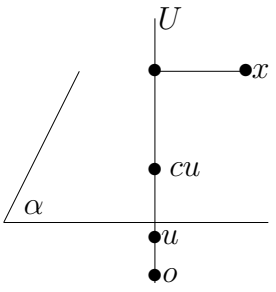
Si α est un *hyperplan affine* (c'est-à-dire le translaté d'un hyperplan vectoriel), on notera $d(x, \alpha)$ la distance de x à α.

Le *moment d'inertie* de $\mathcal{E}$ par rapport à un hyperplan affine α est

$$\mathcal{M}(\alpha) = \sum_{i=1}^n m_i d^2(x_i, \alpha)$$

Il existe une formule plus commode pour exprimer $\mathcal{M}(\alpha)$. Pour l'obtenir, notons u un vecteur perpendiculaire à α, de longueur 1 : $\|u\| = 1$.

L'équation de l'hyperplan α est du type $(u|x) = c$ où $c \in \mathbb{R}$. Faire varier c revient à remplacer α par un hyperplan parallèle. Notons U la droite vectorielle engendrée par u. Quel que soit $p \in V$, la projection de p sur U est le vecteur $(p|u)u$. Le point de percée de U dans α est le vecteur cu. La distance de p à α vaut donc $|c - (p|u)|$.



Ainsi $d^2(p, \alpha) = c^2 - 2c(p|u) + (p|u)^2$ et

$$\mathcal{M}(\alpha) = \sum_{i=1}^n m_i(c^2 - 2c(x_i|u) + (x_i|u)^2)$$

$$= \quad Mc^2 - 2M(g|u)c + \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i|u)^2$$

Translatons α : cela revient à considérer c comme variable. $\mathcal{M}(\alpha)$ est un trinôme du second degré en c. Il admet un minimum pour $c = (g|u)$. L'hyperplan correspondant est d'équation $(u|x) = (u|g)$. Ainsi :

L'hyperplan d'une direction donnée pour lequel le moment d'inertie est minimum est celui qui comprend le centre de gravité g.

Dans la suite de cette annexe, on suppose $g = o$ ce qui revient à dire que nous avons effectué la translation $p \mapsto p - g$. Tous les hyperplans passant par g sont alors vectoriels. On va à présent essayer de déterminer quel est celui d'entre eux pour lequel le moment d'inertie est maximum.

Puisque $g = 0$, on a

$$\mathcal{M}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i|u)^2$$

Si u et v sont deux vecteurs de V, définissons une fonction M sur $V \times V$ en posant

$$M(u, v) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i|u)(x_i|v)$$

Il est clair que M est une forme bilinéaire symétrique, semi-définie positive sur V. De plus $\mathcal{M}(\alpha) = M(u, u)$. Rappelons qu'on appelle *grammienne* de M par rapport à une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de V, la matrice M^e donnée par $M^e_{k\ell} = M(e_k, e_\ell)$.

On sait que l'espace V admet une base orthonormée $(f_1, \ldots, f_p)$ par rapport à laquelle la grammienne M^f de M est diagonale :

$$M^f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_p \end{pmatrix}$$

Les droites-supports des vecteurs $(f_1, \ldots, f_p)$ sont en mécanique appelées les *axes principaux d'inertie* du nuage de points massifs. Les λ_i sont les moments d'inertie par rapport aux hyperplans vectoriels perpendiculaires aux axes principaux d'inertie. Ce sont donc des nombres positifs ou nuls.

Nous supposons toujours que les vecteurs $f_1, \ldots, f_p$ sont numérotés de façon à avoir $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_p$.

La détermination des vecteurs $f_1, \ldots, f_p$ se ramène au calcul des vecteurs propres et valeurs propres d'une transformation linéaire. En effet, on peut écrire

$$M(u,v) = \left(u \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i|v) x_i \right)$$

Par abus de notation, posons $M(v) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i|v) x_i$. On a pour tout $u \in V$:

$$M(u,v) = (u|M(v))$$

L'application $v \mapsto M(v)$ est visiblement linéaire. De plus, elle est symétrique, ce qui signifie qu'on a, quels que soient u et v :

$$(u|M(v)) = (M(u)|v)$$

En effet $(M(u)|v) = (v|M(u)) = M(v,u) = M(u,v) = (u|M(v))$. Par rapport à n'importe quelle base orthonormée, $(e_1, \ldots, e_p)$, la grammienne de la forme bilinéaire M coïncide avec la matrice de l'application linéaire M. En effet, les colonnes de cette dernière matrice sont les composantes des vecteurs $M(e_1), \ldots, M(e_p)$. Ce sont donc bien les produits scalaires $(e_i|M(e_j)) = M(e_i, e_j)$.

Les vecteurs $f_1, \ldots, f_p$ sont donc les vecteurs propres de l'application linéaire M. Si u est le vecteur de norme 1, perpendiculaire à l'hyperplan vectoriel α, notons $(u_1, \ldots, u_p)$ sa coordonnée par rapport à $(f_1, \ldots, f_p)$. On a

$$\mathcal{M}(\alpha) = M(u,u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i^2$$

Puisque $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1$, le nombre $\mathcal{M}(\alpha)$ est compris entre λ_p et λ_1. La valeur maximum de $\mathcal{M}(\alpha)$ est λ_1. Elle est atteinte pour $u = f_1$. Le même raisonnement montre que la valeur minimum de $\mathcal{M}(\alpha)$ vaut λ_p et est atteinte pour $u = f_p$.

Il existe d'autres moments d'inertie :

Le moment d'inertie de $\mathcal{E}$ par rapport à l'origine est $K = \sum_{i=1}^{n} m_i \|x_i\|^2$. Il est immédiat que K est la trace de la matrice M^e, c'est-à-dire $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j$.

Le moment d'inertie de $\mathcal{E}$ par rapport à une droite vectorielle D est

$$\mathcal{M}(D) = \sum_{i=1}^{n} m_i d^2(x_i, D)$$

Si $D^\perp$ est l'hyperplan vectoriel perpendiculaire à D, on a d'après le théorème de Pythagore $\|x_i\|^2 = d^2(x_i, D) + d^2(x_i, D^\perp)$.

Donc

$$\boxed{K = \mathcal{M}(D) + \mathcal{M}(D^\perp)}$$

La valeur minimum de $\mathcal{M}(D)$ vaut $K - \lambda_1$. Elle est atteinte lorsque D est la droite vectorielle engendrée par le vecteur propre f_1. Cette droite — le premier axe principal d'inertie — est celle qui approche le mieux le nuage.

Quelle signification attribuer aux autres vecteurs propres $f_2, \ldots, f_p$ et valeurs propres λ_2, λ_p ? Projetons $\mathcal{E}$ sur l'hyperplan perpendiculaire H_1 à f_1 : nous obtenons une nouvelle famille $\mathcal{E}'$ de points massifs. Soit $\mathcal{M}'$ la forme bilinéaire sur H_1 associée à $\mathcal{E}'$. Sa matrice par rapport à $(f_2, \ldots, f_p)$ est

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p \end{pmatrix}$$

La plus grande valeur propre de cette matrice est λ_2. Ainsi, λ_2 et f_2 jouent par rapport à $\mathcal{E}'$ le même rôle que λ_1 et f_1 par rapport à $\mathcal{E}$. On interprète $f_3, \ldots, f_p$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de façon analogue en projetant sur des sous-espaces de plus en plus petits.

Rappelons encore que, la base $(f_1, \ldots, f_p)$ étant orthonormée, le développement d'un vecteur x dans cette base est donné par

$$x = \sum_{j=1}^{p} (f_j|x) f_j$$

A.3. Le problème de l'analyse des tableaux de nombres positifs

La statistique fournit souvent des tableaux de nombres dont il faut essayer d'extraire le plus d'informations possibles de la façon la plus synthétique possible. Ce qui suit s'appliquera aux tableaux de nombres positifs.

A.3.1 Les principes généraux

On dispose donc d'un tableau P de taille $n \times p$, constitué de nombres positifs notés k_{ij}, $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots p)$. L'origine de ce tableau peut être très variée : il peut s'agir de la liste des résultats d'élèves aux différents items d'un test, de n observations de p variables etc. D'une façon générale, les lignes représentent des « variables » d'une certaine espèce, les colonnes des « variables » d'une autre espèce.

Deux variables d'espèces différentes « interagissent », les résultats de toutes les interactions possibles étant les nombres k_{ij} consignés dans le tableau donné. Deux variables de même espèce peuvent être bien corrélées ou non. Le but recherché est de décrire aussi simplement que possible les interactions entre variables d'espèces différentes, ainsi que les corrélations entre variables de même espèce. Si le tableau est de grandes dimensions, cela nécessite un traitement mathématique destiné à réduire le nombre de paramètres en ne conservant que les plus significatifs.

On va commencer par donner aux éléments du tableau une signification probabiliste. Dans ce but, introduisons une probabilité sur l'ensemble $\Omega = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, p\}$ en divisant chaque nombre k_{ij} par $S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} k_{ij}$. On pose $p_{ij} = k_{ij}/S$. Les p_{ij} sont positifs, de somme 1, ils définissent donc bien une probabilité sur Ω. Choisir un élément de Ω revient à choisir une case du tableau P, avec la probabilité associée à cette case.

A la ligne n^{o} i, associons l'événement

$$A_i = \{(i, 1), \ldots, (i, p)\}$$

De même, à la colonne n^{o} j, associons l'événement

$$B_j = \{(1, j), \ldots (n, j)\}$$

On pose ensuite $p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{p} p_{ij}$ et $p_{\bullet j} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$.

Les événements A_1, …, A_n constituent une partition de Ω en n classes (une par ligne du tableau de données). De même B_1, …, B_p constituent une deuxième partition de Ω dont les classes sont associées aux colonnes du tableau. Les nombres $p_{i\bullet}$ et $p_{\bullet j}$ sont respectivement la probabilité de A_i et celle de B_j, ce sont les probabilités marginales sur l'ensemble Ω. Le nombre p_{ij} est la probabilité de $A_i \cap B_j$. Notons au passage les relations

$$\sum_{i=1}^{n} p_{i\bullet} = 1 \qquad \sum_{j=1}^{p} p_{\bullet j} = 1$$

qui montrent que les probabilités marginales constituent bien des probabilités sur $\{A_1, \ldots, A_n\}$ et $\{B_1, \ldots, B_p\}$.

Comme on le sait, ces partitions sont indépendantes si et seulement si quels que soient i et j :

$$\mathbb{P}(A_i \cap B_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(B_j)$$

c'est-à-dire si

$$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$$

Nous pouvons admettre qu'aucun des nombres $p_{i\bullet}$ ou $p_{\bullet j}$ n'est nul : si on avait par exemple $p_{i\bullet} = 0$, alors tous les nombres k_{ij} de la i^{e} ligne du tableau T seraient nuls et on supprimerait cette ligne (sans intérêt) du tableau. Les deux partitions sont alors indépendantes si et seulement si le tableau U donné par

$$U_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}}$$

ne contient que des nombres 1. En général, ce ne sera pas le cas, et on cherchera à analyser ce tableau.

Considérons la colonne n^{o} j du tableau U. Nous la notons $U_{\star j}$. Nous pouvons la considérer comme un vecteur de $\mathbb{R}^n$ ou comme les valeurs d'une variable aléatoire définie sur la catégorie d'épreuves $\{A_1, \ldots, A_n\}$. L'espérance mathématique de cette variable aléatoire est

$$\sum_{i=1}^{n} p_{i\bullet} U_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} = 1$$

De même, chaque ligne $U_{i\star}$ du tableau U peut être considérée comme une variable aléatoire d'espérance 1 sur la catégorie d'épreuves $\{B_1, \ldots, B_p\}$. En fait, n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^p$ peut être considéré comme une variable aléatoire sur $\{B_1, \ldots, B_p\}$ et n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^n$ comme une variable aléatoire sur $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

A.3.2 Le cas des tableaux binaires totalement disjonctifs

Nous n'appliquerons les principes énoncés au point précédent que dans un cas très particulier : celui de tableaux binaires disjonctifs.

Il s'agira en l'occurrence de résultats de questionnaires soumis à un ensemble de n élèves et comportant un certain nombre q de questions. Confronté à une question, chaque élève produit un et un seul des trois comportements suivants ([1])

1. Il fournit une réponse considérée comme bonne.
2. Il fournit une réponse considérée comme mauvaise.
3. Il ne fournit pas de réponse.

A chacun de ces comportements va correspondre une colonne du tableau de données P. Celui-ci aura donc $p = 3q$ colonnes. Si l'élève n° i réussit la question n° h, on placera le nombre 1 dans la case située à l'intersection de la ligne n° i et de la colonne n° $3h$, et 0 dans les cases de la même ligne situées dans les colonnes n° $3h + 1$ et $3h+2$. On procède de façon analogue si l'élève a échoué ou s'est abstenu à la question n° h.

Les données sont binaires : chacun des nombres du tableau vaut 0 ou 1. Elles sont aussi totalement disjonctives en ce sens que dans toute ligne, on a toujours un et un seul nombre 1 dans un triple de cases portant les numéros $3h$, $3h + 1$, $3h + 2$.

Ainsi, dans toute ligne figurent exactement q nombres 1, de sorte que la somme S de tous les éléments du tableau vaut nq et toutes les probabilités p_{ij} (voir le point précédent) valent 0 ou $\frac{1}{nq}$.

Il est clair que dans ce modèle, nous pouvons identifier un événement élémentaire $(i, j) \in \Omega$ à une « observation » : nous observons le comportement n° j chez l'élève n° i. L'événement A_i s'identifie à l'élève n° i (plus exactement à l'ensemble des comportements qu'il a eus). L'événement B_j s'identifie au comportement n° j (à l'ensemble des élèves qui ont eu le comportement n° j). $\mathbb{R}^p$ est ainsi l'espace des élèves, cependant que $\mathbb{R}^n$ est l'espace des comportements de réponse.

Puisque dans toute ligne figurent exactement q nombres 1, toutes les probabilités marginales $p_{i\bullet}$ valent $\frac{1}{n}$: tous les élèves ont même probabilité d'être choisis. Il n'en est pas de même pour les comportements : certains sont plus fréquents que d'autres. Comme dans le cas général, nous supprimons du tableau les comportements qui ne sont jamais observés c'est-à-dire les colonnes pour lesquelles la probabilité marginale $p_{\bullet j}$ vaut 0. Cela ne change rien ni à la valeur de S ni à celle des $p_{i\bullet}$.

([1]) On se limite souvent à deux comportements : la réussite et l'échec.

Le tableau U mesure l'indépendance des deux partitions, l'une constituée par les élèves, l'autre par les comportements. Dire que ces deux partitions sont indépendantes signifie qu'en fait tous les élèves ont répondu de la même façon à toutes les questions :

$$U_{ij} = 1 \Leftrightarrow p_{ij} = \frac{1}{n} p_{\bullet j}$$

Comme $p_{\bullet j} \neq 0$, on a $p_{ij} \neq 0$ et par conséquent $p_{ij} = \frac{1}{nq}$. Ainsi toutes les données k_{ij} du tableau T épuré des colonnes qui ne contenaient que des 0, valent 1. Autrement dit tous les élèves ont choisi le même comportement à toutes les questions. On ne passera évidemment pas son temps à appliquer une quelconque technique statistique à un tel tableau.

Le but de l'analyse des correspondances est de dégager des conclusions à partir de l'observation des dépendances (au sens probabiliste du terme) entre élèves et comportements.

A.4. Nuages et produits scalaires dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$

Nous reprenons notre description de l'analyse des correspondances dans le cas général. Nous allons étudier les corrélations entre les colonnes $U_{\star j}$ d'une part, entre les lignes $U_{i\star}$ d'autre part. Commençons par choisir dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ des produits scalaires ayant une signification statistique : soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ et $x, y \in \mathbb{R}^p$. Alors

$$(u|v) = \sum_{i=1}^{n} p_{i\bullet} u_i v_i, \text{ et } (x|y) = \sum_{j=1}^{p} p_{\bullet j} x_j y_j$$

Si u et v sont des variables aléatoires de moyenne nulle, $(u|v)$ est simplement la covariance de u et v. Deux vecteurs orthogonaux sont des variables aléatoires non corrélées. Le carré de la norme d'un vecteur est la variance de ce vecteur considéré comme étant une variable aléatoire.

- Dans $\mathbb{R}^p$, muni du produit scalaire ci-dessus, nous disposons d'un nuage de n points : les n lignes $U_{i\star}$. Ces points deviennent massifs si nous attribuons a chaque $U_{i\star}$ le poids $p_{i\bullet}$. Le nuage $(U_{i\star}, p_{i\bullet})_{i=1}^{n}$ est un bon représentant de l'ensemble des événements $A_1, \ldots, A_n$. La technique décrite au point A.2 va permettre de trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^p$ qui soit adaptée à ce nuage. On décomposera ainsi les lignes $U_{i\star}$ en combinaisons linéaires de variables aléatoires non corrélées.
- Dans $\mathbb{R}^n$, nous disposons d'un nuage de p points massifs $(U_{\star j}, p_{\bullet j})$, qui représente l'ensemble des événements B_1, …, B_p. On lui appliquera également la technique du point A.2, et on obtiendra une décomposition des colonnes $U_{\star j}$ en combinaisons linéaires de variables aléatoires non corrélées.

A.5. L'analyse dans $\mathbb{R}^p$

Commençons par ramener à l'origine le centre de gravité des points du nuage $(U_{i\star}, p_{i\bullet})_{i=1}^n$.

Ce centre de gravité (qu'on appellera en statistique le vecteur moyen) est

$$m = \sum_{i=1}^{n} p_{i\bullet} U_{i\star}$$

Donc pour tout j, $m_j = \sum_{i=1}^n p_{i\bullet} U_{ij} = 1$. Ainsi $m = (1, 1, \ldots, 1)$. On remplacera donc le nuage $(U_{i\star}, p_{i\bullet})$ par le nuage $(V_{i\star}, p_{i\bullet})$ où

$$V_{ij} = \frac{p_{ij} - p_{i\bullet} p_{\bullet j}}{p_{i\bullet} p_{\bullet j}}$$

En tant que variable aléatoire, $V_{i\star}$ est d'espérance nulle puisque nous avions vu que $U_{i\star}$ était d'espérance 1.

Nous ne manipulerons plus que des variables aléatoires de moyenne nulle, c'est-à-dire des vecteurs u appartenant à l'hyperplan α_0 d'équation $\sum_{j=1}^p p_{\bullet j} u_j = 0$ (par rapport à la base canonique).

Le moment d'inertie du nuage $(V_{i\star}, p_{i\bullet})$ par rapport à l'origine sera appelé la *variance totale* du nuage :

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^{n} p_{i\bullet} \|V_{i\star}\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_{i\bullet} \sum_{j=1}^{p} p_{\bullet j} \left(\frac{p_{ij} - p_{i\bullet} p_{\bullet j}}{p_{i\bullet} p_{\bullet j}} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \frac{(p_{ij})^2}{p_{i\bullet} p_{\bullet j}} - 1 \end{aligned}$$

Le moment d'inertie par rapport à un hyperplan vectoriel α sera appelé la variance au long de la droite $\alpha^\perp$, ou encore la *part de la variance* due à la droite $\alpha^\perp$. Cette quantité mesure en effet la dispersion des projections des points du nuage sur la droite $\alpha^\perp$.

Rechercher les axes d'inertie du nuage, c'est diagonaliser la forme bilinéaire symétrique et semi-définie positive $\mathcal{M}$ donnée par

$$\mathcal{M}(u,v) = \sum_{i=1}^{n} p_{i\bullet}(V_{i\star}|u)(V_{i\star}|v)$$

où le produit scalaire est celui qui a été défini précédemment :

$$(V_{i\star}|u) = \sum_{j=1}^{p} p_{\bullet j} V_{ij} u_j$$

C'est aussi diagonaliser la transformation linéaire M donnée par

$$M(u) = \sum_{i=1}^{n} p_{i\bullet}(V_{i\star}|u) V_{i\star}$$

On notera $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de $\mathbb{R}^p$ constituée de vecteurs propres normés de M, et $\lambda_1, \ldots \lambda_p$ les valeurs propres correspondantes. Ces vecteurs propres seront appelés des *facteurs*. On les numérote dans l'ordre décroissant des valeurs propres : $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots$.

Comme on l'a vu au point A.2, la somme des λ_i est la variance totale du nuage, cependant que λ_i est la part de la variance expliquée par le i^{e} facteur.

Comme tous les vecteurs $V_{i\star}$ appartiennent à l'hyperplan α_0 d'équation $\sum_{j=1}^{p} p_{\bullet j} u_j = 0$, nous connaissons automatiquement une direction propre de M la direction perpendiculaire à α_0. En effet, si $u \perp \alpha_0$, on a $M(u) = 0$. La p^{e} valeur propre est donc $\lambda_p = 0$. Le vecteur propre normé correspondant est sans intérêt : la part de variance qu'il explique est nulle.

Parmi les valeurs propres de M, d'autres que λ_p pourraient être nulles. Supposons qu'il y ait exactement ρ valeurs propres non nulles. Chaque variable aléatoire $V_{i\star}$ est alors une combinaison linéaire des variables deux à deux non corrélées $f_1, \ldots, f_\rho$:

$$V_{i\star} = \sum_{j=1}^{\rho} (V_{i\star}|f_j) f_j$$

Calculons la variance totale K dans le cas du tableau binaire disjonctif considéré précédemment. On a alors $p = 3q$, $S = nq$, pour tout i $p_{i\bullet} = \frac{1}{n}$ et $p_{ij} = \frac{k_{ij}}{S}$ où tous les k_{ij} valent 0 ou 1. Il vient ainsi

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \frac{(p_{ij})^2}{p_{i\bullet} p_{\bullet j}} - 1 \\ &= n \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{p_{\bullet j}} \sum_{i=1}^{n} \frac{k_{ij}^2}{n^2 q^2} - 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{nq^2}\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{p_{\bullet j}}\sum_{i=1}^{n}k_{ij} - 1 \\
&= \frac{1}{nq^2}\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{p_{\bullet j}}nqp_{\bullet j} - 1 \\
&= \frac{1}{nq^2}npq - 1 = 2
\end{aligned}
$$

La variance totale vaut dans le cas d'un questionnaire prévoyant pour chaque question trois comportements de réponse vaut 2 ([2]).

([2]) Si on ne s'intéressait qu'à deux comportements de réponse (réussite et échec), la variance totale vaudrait 1.

A.6. L'analyse dans $\mathbb{R}^n$

Dans $\mathbb{R}^n$, l'analyse est évidemment semblable à celle de $\mathbb{R}^p$: on permute le rôle des lignes et colonnes. On considère donc cette fois le nuage de points massifs $(U_{\star j}, p_{\bullet j})_{j=1}^{p}$ de $\mathbb{R}^n$. Son centre de gravité est le point $(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. On le translate à l'origine. On est ramené à considérer le nuage $(V_{\star j}, p_{\bullet j})$ où comme au point précédent

$$V_{ij} = \frac{p_{ij} - p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}}{p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}}$$

Le nouveau nuage est inclus à l'hyperplan α_0 d'équation $\sum_{i=1}^{n} p_{i\bullet} u_i = 0$. Sa variance totale est la même que celle du nuage de $\mathbb{R}^p$. La forme bilinéaire à diagonaliser est cette fois

$$\mathcal{M}'(u, v) = \sum_{j=1}^{p} p_{\bullet j} (V_{\star j}|u)(V_{\star j}|v)$$

Il revient au même de diagonaliser la transformation linéaire de $\mathbb{R}^p$ donnée par

$$M'(v) = \sum_{j=1}^{p} p_{\bullet j} (V_{\star j}|v) V_{\star j}$$

Une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de M' sera notée $(g_1, \ldots, g_n)$. De même qu'au paragraphe précédent, la dernière valeur propre vaut 0, le facteur correspondant est sans intérêt.

A.7. Lien entre les analyses dans $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$

Les deux transformations linéaires M et M' étant toutes deux définies par le tableau V, il doit exister un lien entre vecteurs propres de M et vecteurs propres de M'.

Ce lien permettra de n'appliquer qu'une fois la technique de diagonalisation. Pour le décrire, rappelons d'abord ce qu'est la transposée d'une application linéaire A de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$: c'est une application linéaire, notée A^τ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, \forall v \in \mathbb{R}^p : (A(u)|v) = (u|A^\tau(v))$$

On montre sans peine qu'une telle transformation linéaire existe et est unique, et cela quelle que soit A ; mais nous n'aurons besoin de ce résultat que dans le cas particulier suivant :

$$A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n : u \mapsto \sum_{i=1}^{n} (V_{i\star}|u) e_i$$

où $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique $\mathbb{R}^n$. Calculons A^τ. Si $v \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(A(u)|v) = \sum_{i=1}^{n} (V_{i\star}|u)(e_i|v) = \left(\sum_{i=1}^{n} (e_i|v) V_{i\star} \,\middle|\, u \right) = \left(u \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} (e_i|v) V_{i\star} \right)$$

Ainsi

$$A^\tau(v) = \sum_{i=1}^{n} (e_i|v) V_{i\star}$$

Calculons à présent $A^\tau \cdot A$ (application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$) et $A \cdot A^\tau$ (application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$) :

1. Si $u \in \mathbb{R}^p$:

$$\begin{aligned} A^\tau A(u) &= \sum_{i=1}^{n} (V_{i\star}|u)\ A^\tau(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (V_{i\star}|u) \sum_{j=1}^{n} (e_j|e_i) V_{j\star} \end{aligned}$$

Or $(e_j|e_i) = 0$ si $j \neq i$ et $(e_i|e_i) = p_{i\bullet}$. Donc

$$A^\tau A(u) = \sum_{i=1}^{n} p_{i\bullet}(V_{i\star}|u)V_{i\star} = M(u)$$

2. Si $v \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} AA^\tau(v) &= \sum_{i=1}^{n}(e_i|v)A(V_{i\star}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(e_i|v)(V_{j\star}|V_{i\star})e_j \end{aligned}$$

Comme $(e_i|v) = p_{i\bullet}v_i$ et $(V_{j\star}|V_{i\star}) = \sum_{h=1}^{p} p_{\bullet h}V_{jh}V_{ih}$, il vient

$$\begin{aligned} AA^\tau(v) &= \sum_{h=1}^{p} p_{\bullet h}\left(\sum_{i=1}^{n} p_{i\bullet}v_iV_{ih}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} V_{jh}e_j\right) \\ &= \sum_{h=1}^{p}(V_{\star h}|v)V_{\star h} = M'(v) \end{aligned}$$

Ainsi $M = A^\tau A$ et $M' = AA^\tau$. Ces relations ont plusieurs conséquences importantes.

- Si $u \in \mathbb{R}^p$ est vecteur propre de M ; de valeur propre $\lambda \neq 0$, alors $A(u)$ est vecteur propre de M' de même valeur propre λ.
  En effet : $M(u) = \lambda u \Rightarrow A^\tau A(u) = \lambda u \Rightarrow AA^\tau A(u) = \lambda A(u)$. Donc $M'A(u) = \lambda A(u)$. Pour montrer que $A(u)$ est vecteur propre de M', de valeur propre λ, il reste à établir $A(u) \neq 0$. Or si on avait $A(u) = 0$, il viendrait $M(u) = 0$, u serait vecteur propre de M de valeur propre nulle alors que $\lambda \neq 0$.
- De même, si v est vecteur propre de M', de valeur propre non nulle, alors $A^\tau(v)$ est vecteur propre de M, avec la même valeur propre.
- On déduit de ce qui précède que l'application linéaire A induit un isomorphisme du sous-espace propre E_λ de $\mathbb{R}^p$ associé à une valeur propre λ de M sur le sous-espace propre E'_λ de $\mathbb{R}^n$ associé à la même valeur propre λ de M'.
  En effet, on vient de voir que A applique E_λ dans E'_λ. Cette application est injective puisque, si $u \in E_\lambda$, on a prouvé l'implication $u \neq 0 \Rightarrow A(u) \neq 0$. Elle est aussi surjective : si $v \in E'_\lambda$, alors $v = \frac{1}{\lambda}M'(v) = A\left(\frac{1}{\lambda}A^\tau(v)\right)$.
- Puisque les sous-espaces E_λ et E'_λ ont même dimension, les applications linéaires M et M' ont même rang (même nombre de valeurs propres non nulles).

Connaissant les facteurs $f_1, \ldots, f_\rho$ dans $\mathbb{R}^p$, nous allons maintenant pouvoir trouver les facteurs $g_1, \ldots, g_\rho$ dans $\mathbb{R}^n$. En effet, $A(f_i)$ est vecteur propre de M' de même valeur propre λ_i que f_i. Donc $A(f_i)$ est un multiple de g_i. En fait, puisque g_i est normé, et n'est défini qu'à un nombre de module 1 près, on peut choisir : $g_i = \frac{A(f_i)}{\|A(f_i)\|}$.

Or $\|A(f_i)\|^2 = (A(f_i)IA(f_i)) = (A^\tau A(f_i)If_i) = (M(f_i)|f_i) = \lambda_i\|f_i\|^2$.

Donc pour tout $i = 1, \ldots, \rho$, $g_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A(f_i)$. De même $f_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A^\tau(g_i)$.

Reprenons alors la formule $V_{i\star} = \sum_{h=1}^{\rho} (V_{i\star}|f_h) f_h$. Si on note f_{hj} la h^{e} composante de f_h par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^p$, on en déduit

$$V_{ij} = \sum_{h=1}^{\rho} (V_{i\star}|f_h) f_{hj}$$

Or, si $(e_1, \ldots, e_p)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^p$, on a $(f_h|e_j) = p_{\bullet j} f_{hj}$ et

$$\begin{aligned}
(f_h|e_j) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} (A^\tau(g_h)|e_j) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} (g_h|A(e_j)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} \left(g_h \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} (V_{i\star}|e_j) e_i \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} \left(g_h \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} p_{\bullet j} V_{ij} e_i \right) \\
&= p_{\bullet j} \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} \left(g_h | \sum_{i=1}^{n} V_{ij} e_i \right) \\
&= p_{\bullet j} \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} (g_h|V_{\star j})
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\boxed{f_{hj} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} (g_h|V_{\star j})}$$

De même

$$\boxed{g_{hi} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} (f_h|V_{i\star})}$$

(où les g_{hi} sont les composantes de g_h par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Donc

$$\boxed{V_{ij} = \sum_{h=1}^{\rho} \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} (V_{i\star}|f_h)(V_{\star j}|g_h)}$$

ou

$$\boxed{V_{ij} = \sum_{h=1}^{\rho} \sqrt{\lambda_h} g_{hi} f_{hj}}$$

Retournant aux p_{ij}, on obtient

$$\begin{aligned} p_{ij} &= p_{i\bullet}p_{\bullet j}\left(1+\sum_{h=1}^{\rho}\frac{1}{\sqrt{\lambda_h}}(V_{i\star}|f_h)(V_{i\star}|g_h)\right) \\ &= p_{i\bullet}p_{\bullet j}\left(1+\sum_{h=1}^{\rho}\sqrt{\lambda_h}g_{hi}f_{hj}\right) \end{aligned}$$

On peut donc reconstruire le tableau initial, connaissant les probabilités marginales et les facteurs.

A.8. Retour à la dépendance

Comme on l'a déjà noté, l'égalité $p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j}$ est vraie si et seulement si les événements A_i et B_j sont indépendants. Le terme $\sum_{h=1}^{\rho} \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}}(V_{i\star}|f_h)(V_{i\star}|g_h)$ est donc une mesure de la dépendance mutuelle de A_i et B_j. Il se décompose en termes $\frac{1}{\sqrt{\lambda_h}}(V_{i\star}|f_h)(V_{i\star}|g_h)$.

On peut donner une interprétation de ces termes en introduisant fictivement des « événements modèles de type A », correspondant aux facteurs f_i et des « événements modèles de type B », correspondant aux facteurs g_j. Dans le cas d'un questionnaire administré aux élèves d'une classe, osera-t-on parler d'« élèves modèles » et de « comportements modèles » ?

$V_{i\star}$ étant une combinaison linéaire des f_j, on pourrait dire que A_i est une « superposition » des événements modèles de type A. B_j serait une superposition des événements modèles de type B. La dépendance entre l'événement modèle de type A associé à f_i et l'événement modèle de type B associé à g_j serait dans cette optique mesurée par 0 si $i \neq j$ et $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ si $i = j$. La dépendance entre A_i et B_j s'obtient alors par combinaison linéaire.

Mathématiquement, cela revient à définir sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ une nouvelle forme bilinéaire :

$$D(u,v) = \sum_{h=1}^{\rho} \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}}(u|f_h)(v|g_h)$$

Par exemple

$$D(V_{i\star}, V_{j\star}) = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}p_{\bullet j}} - 1 \quad D(V_{i\star}, g_h) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}}(V_{i\star}|f_h)$$
$$D(f_i, g_j) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\delta_{ij} \qquad D(f_h, V_{\star j}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}}(g_h|V_{\star j})$$

A.9. Le problème de l'interprétation

Décomposer un événement en une superposition d'événements modèles n'est intéressant que s'il est possible de donner une signification « claire » à ces derniers.

Par exemple si on parvient à décomposer le comportement d'un élève lors d'un examen en une superposition de comportements élémentaires faciles à étudier, on a progressé d'un pas important dans la connaissance que l'on a de cet élève, sur le type d'erreurs qu'il commet, sur son stade de développement mathématique.

Attribuer une signification aux événements élémentaires est donc un objectif important, mais pour lequel aucune technique (statistique ou autre) ne s'impose clairement.Dans la pratique on se contente d'essayer de trouver une telle signification pour les facteurs qui expliquent une partie non négligeable de la variance totale, considérant les autres comme une sorte de « bruit de fond ». Cela se fait en cherchant des caractéristiques communes aux événements dont la composante suivant le facteur considéré n'est pas négligeable.

Pour faire cette recherche, on s'aide généralement de graphiques cartésiens plans tel celui représentant les projections des vecteurs $V_{i\star}$ sur le plan (f_1, f_2) et les projections des vecteurs $V_{\star j}$ sur le plan (g_1, g_2).

Dans la pratique, on identifie les plans (f_1, f_2) et (g_1, g_2) (on identifie f_1 à g_1, et f_2 à g_2). Cette identification se justifie par les formules qui viennent d'être établies. Par exemple, on note que si $u \in \mathbb{R}^p$, on a $D(u, g_h) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}}(u|f_h)$. La position du vecteur u dans le plan des deux premiers facteurs fournit donc des renseignements tant sur les corrélations de ce vecteur u avec les facteurs f_1 et f_2 que sur ses dépendances avec g_1 et g_2.

On réalise aussi parfois les graphiques correspondant aux facteurs 1 et 3 ou 2 et 3, etc. Mais, comme on l'a écrit plus haut, on ne va généralement pas très loin de cette façon vu la difficulté grandissante d'interprétation. De plus, la part de variance expliquée par les facteurs de rang élevé est généralement très faible, l'influence individuelle d'aucun de ces facteurs n'est importante et c'est bien pourquoi leur interprétation est difficile.

A.10. Contributions absolues et relatives

Pour interpréter plus facilement les différents facteurs on considère souvent les *contributions absolue et relative* des différents événements. Elles sont définies comme suit.

Notons $f_{h1}, \ldots, f_{hp}$ les composantes du facteur f_h par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Puisque f_h est un vecteur normé, on a

$$\sum_{j=1}^{p} p_{\bullet j} |f_{hj}|^2 = 1$$

(cela signifie encore que, en tant que variable aléatoire, f_h est de variance 1).

Le nombre $p_{\bullet j}|f_{hj}|^2$ est appelé la contribution absolue de l'événement B_j $(1 \leqslant j \leqslant p)$ au facteur f_h $(1 \leqslant h \leqslant \rho)$.

Ce nombre exprime le pourcentage de la variance de f_h, dû à l'événement B_i . Il permet de mesurer l'importance de cet événement par rapport à ce facteur. D'après les formules établies précédemment, on a :

$$p_{\bullet j}|f_{hj}|^2 = \frac{p_{\bullet j}}{\lambda_h}|(g_h|V_{\star j})|^2 = p_{\bullet j}\left(D(f_h, V_{\star j})\right)^2$$

Ainsi, le fait que la contribution absolue de B_j à f_h soit importante peut provenir de deux causes (bien entendu non exclusives l'une de l'autre) : l'événement B_j, peut être de grande probabilité ou très dépendant de f_h et bien corrélé avec g_h.

On définit de façon analogue la contribution absolue de l'événement A_i, $(1 \leqslant i \leqslant n)$ au facteur g_h $(1 \leqslant h \leqslant \rho)$: c'est

$$p_{i\bullet}|g_{hi}|^2 = \frac{p_{i\bullet}}{\lambda_h}|(f_h|V_{i\star})|^2 = p_{i\bullet}\left(D(V_{i\star}, g_h)\right)^2$$

Pour attribuer une signification à un facteur, on est clairement amené à s'intéresser aux événements (type A ou type B) qui en sont les plus proches (donc les plus dépendants ou les mieux corrélés). On peut dans ce but utiliser les contributions absolues, en éliminant les événements ayant une probabilité très grande. En effet, ceux-ci sont proches du centre de gravité du nuage et ne déterminent donc que faiblement la position des axes d'inertie. Il est à noter que dans le cas particulier des analyses binaires totalement disjonctives, tous les événements de type A (les élèves) ont même probabilité, de sorte que leurs contributions absolues sont proportionnelles aux carrés des dépendances.

Les contributions absolues expriment les parts de chaque événement dans chaque facteur. Les contributions relatives expriment plutôt les parts de chaque facteur dans chaque événement.

Puisque $V_{i\star} = \sum_{h=1}^{\rho} (V_{i\star}|f_h) f_h$ et $\|f_h\| = 1$, on a

$$\|V_{i\star}\|^2 = \sum_{h=1}^{\rho} |(V_{i\star}|f_h)|^2$$

Le nombre $\dfrac{|(V_{i\star}|f_h)|^2}{\|V_{i\star}\|^2}$ est appelé la *contribution relative* ([3]) de l'événement A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ au facteur f_h, $(1 \leqslant h \leqslant \rho)$ (on devrait plutôt dire de f_h à A_i). Il exprime le pourcentage de la variance de $V_{i\star}$ due à f_h. C'est aussi le carré du coefficient de corrélation de $V_{i\star}$ et f_h. Notons la formule

$$\frac{|(V_{i\star}|f_h)|^2}{\|V_{i\star}\|^2} = \frac{\lambda_h |g_{hi}|^2}{\|V_{i\star}\|^2}$$

De même, la contribution relative de B_j $(1 \leqslant j \leqslant p)$ à g_h $(1 \leqslant h \leqslant \rho)$ est

$$\frac{|(V_{\star j}|g_h)|^2}{\|V_{\star j}\|^2} = \frac{\lambda_h |f_{hj}|^2}{\|V_{\star j}\|^2}$$

([3]) On parle aussi des « $\cos^2$ »

A.11. Des variables supplémentaires

Réaliser une analyse des correspondances consiste en définitive à choisir dans les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ des bases orthonormées qui soient adaptées à l'étude des nuages de points massifs associés à des variables de deux espèces en interaction.

Une fois ces changements de base effectués, rien n'empêche de décomposer un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^p$ ou $\mathbb{R}^n$ par rapport à la nouvelle base, et de le positionner sur les différents graphiques réalisés. On dit qu'un tel vecteur est placé en *variable supplémentaire*.

L'intérêt d'introduire des variables supplémentaires réside dans la possibilité de prendre en considération certains comportements sans les faire intervenir dans la détermination des facteurs constituant la nouvelle base orthonormée.

Supposons par exemple qu'un examen soit corrigé en réussite–erreur–abstention : à chaque question nous associons trois variables principales. Mais le comportement d'erreur peut être dû à des erreurs différentes selon les élèves. La variable principale « erreur » ne tient pas compte de ces différences.

On ne peut cependant placer chaque type d'erreur en variable principale sans risquer de fausser l'analyse puisque ce comportement intervient déjà dans la variable erreur globale associée à la question. En plaçant un type d'erreur en variable supplémentaire, on peut le prendre en considération pour l'interprétation des résultats sans fausser l'analyse. Nous avons appliqué ce système au chapitre 21.

Références

[20], [32], [81], [94].

Annexe B

Bibliographie

[1] *Décret du 24 juillet 1997 définissant les missions prioritaires de l'enseignement fondamental et de l'enseignement secondaire et organisant les structures propres à les atteindre*, Moniteur Belge du 23 septembre 1997, 24653–24674, 1997. 7, 8, 8, 8, 9, 11, 22, 23, 472, 478

[2] *Socles de compétences dans l'enseignement fondamental et au premier degré de l'enseignement secondaire*, Cabinet du Ministre de l'Education et de l'Audiovisuel, Bruxelles, 160 pages, 1994. 7, 8, 8, 8, 9, 11, 11, 11, 23

[3] *Mathématiques de 10 à 14 ans, continuité et compétences*, Cellule de Pilotage du Ministère de l'Education, de la Recherche et de la Formation, 1996. 8, 9, 9, 11, 11, 23, 30, 31

[4] *Quelle philosophie pour l'enseignement des mathématiques au Secondaire*, Commission Pédagogique de la SBPMef, Mathématique et Pédagogie, 102, 5–28, 1995. 8, 11, 23, 28, 31, 60, 68

[5] Commission pédagogique de la SBPMef, *Produit scalaire, matrices et applications*, Dossier d'explorations didactiques n°5, SBPMef, 1997. 101, 142

[6] Formation Pédagogique des Enseignants, *Le travail de fin d'études : un point d'orgue pour le secondaire, un tremplin vers le supérieur*, Diocèse de Liège, 1996, 79 pp. 677, 692

[7] *Jeux 4, de l'intérêt des problèmes de rallye*, Publication de l'APMEP, n°97, 1995. 237, 249

[8] *Réflexions sur ce que pourrait être un renouvellement de l'enseignement des mathématiques au Collège*, Supplément au Bulletin de l'APMEP, n°345, octobre 1984. 14, 23

[9] *Une approche des contenus d'enseignement par des problématiques pour le second cycle*, Supplément au Bulletin de l'APMEP n°401, décembre 1995. 13, 14, 15, 23, 87, 90, 222, 226

[10] Groupe Perspective Bac, *Bac mathématique Horizon 2000*, supplément au bulletin n°414 de l'APMEP, France, février-mars 1998.

[11] *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, Ed. NCTM, Reston (USA), 258 pages, 1989. 13, 17, 17, 23

[12] *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans. Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques*, Ed. CREM, Nivelles, 1995. 8, 11, 23

[13] *GCE advanced and advanced subsidiary examinations subject cores for mathematics*, Ed. School curriculum and assessment authority, London, 1997. 13, 21, 23

[14] *Plan d'études cadre pour les écoles de maturité du 9 juin 1994*, Ed. Conférence suisse des directeurs cantonaux de l'instruction publique, Berne, 139 pages, 1994. 13, 20, 20, 23

[15] M. Akkar, M.-T. Akkar et A.I. El Mossadeq, *Les mathématiques par les problèmes*, éd. Sochepress. 209, 209

[16] C. Alberti, E. Borromeo, P. Carosi, F. Celli, M.-R. Lagana, E. Morreale, *Information sciences and technologies in education : some experiences and perspectives in primary and middle school*, Proceedings of the 14th International Congress on Cybernetics (Namur, Belgium, 21st-25th August 1995), Association Internationale de Cybernétique, Belgique, 737-742. 680, 692

[17] *La Alhambra*, Numéro spécial de la revue *Epsilon*, Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía, 129 p., Granada, 1987. 276, 291

[18] M. Annoye, *Des polygones pour construire la géométrie*, Ed. CIACO, Proposition 13 du GEM, 55 p., Louvain la Neuve, 1987. 283, 291

[19] H. Anton, C. Rorres, *Applications of Linear Algebra*, John Wiley and Sons, New York, 1977.

[20] A.P.M.E.P., *Analyse des données*, Vol. 1, Brochure APMEP n°28, Vol. 2, Brochure APMEP n°40. 672, 758

[21] G. Arsac, G. Germain et M. Mante, *Problème ouvert et situation-problème*, IREM de Lyon, 1991. 209, 209, 223, 226

[22] C. Artigues, Y. Bellecave, R. Ferachoglou, P.-H. Terracher, *Collection* TERRACHER. MATH. *Livres de Première et de Terminale (Géométrie)*, Hachette, Paris, 1991. 682, 692

[23] J. Bair, R. Hinnion, D. Justens, *Applications économiques au service de la mathématique*, S.B.P.M.e.f., 1989. 429

[24] M. Bakar and D. Tall, *Students' Mental Prototypes for Functions and Graphs*, PME, 104–111. 49, 53

[25] T. Banchoff, J. Wermer, *Linear Algebra Through Geometry* ; Undergraduate Texts in Math., Springer V., New York, ..., 1992. 429

[26] E. Barbin, *Sur la conception des savoirs géométriques dans les Éléments de géométrie*, in *Histoire et enseignement des mathématiques*, Rapport Erasmus ICP-93-G-2011/11, Ed. A. Gagatsis, Edition bilingue, Collaboration Institut français de Thessalonique, Thessalonique, 1994. 222, 226

[27] B. Baton, R. Giot et Y. Noël-Roch, *Des difficultés de l'algèbre*, Mathématique et Pédagogie, 116, 61–73, 1998. 38, 53

[28] B. Baton, R. Giot et Y. Noël-Roch, *Des difficultés de l'algèbre : en deuxième secondaire*, Mathématique et Pédagogie, 117, 5–16, 1998. 38, 53, 137, 142

[29] B. Beauzamy, *La France a besoin de mathématiciens*, Pour la Science, n°176, 6–7, 1992. 28, 31

[30] J. Beckers, *Analyse des enjeux et des changements requis par les nouvelles missions de l'école*, Puzzle, n° 4, 15–22, Université de Liège, 1997. 22, 23, 586, 588, 596

[31] A. Begg, *Statistics and the mathematical process*, Teaching Statistics, Volume 17, n°2, 1995.

[32] Benzécri, J.P., L'analyse des données, Dunod, Paris, 1972. 672, 758

[33] H. Benson, *Physique I. Mécanique*, Ed. Renouveau Pédagogique, 1993.

[34] M. Bern, R. Graham, *Le réseau le plus court*, Pour la Science, n°137, 70–75, 1989. 182, 196

[35] P. Bierler, *Algorithmes de résolution d'équations diophantiennes linéaires*, Mémoire de licence, UMH 1982. 209, 209

[36] B.S. Bloom, *Taxonomy of educational objectives : the classification of educational goals*, Handbook 1, Cognitive domain, Ed. Mc Kay, New York, 1956. 89, 90

[37] G. Bontemps, P. Compagnon, M. Nouet, B. Randé, R. Seroux, *Collection* FRACTALE. MATHEMATIQUES. *Livre de Première S. et E. (Géométrie)*, Bordas, Paris, 1991.

[38] E. Borromeo, P. Carosi, M.-C. Maffei, E. Morreale, *Realizzazione di ipertesti multimediali nella scuola media : spunti da alcune esperienze*, à paraître. 680, 692

[39] E. Borromeo, *Realizzazione di un ipertesto multimediale sulla genetica nella scuola media per il recupero di abilità scientifiche*, à paraître. 680, 692

[40] Y. Bossard, *Rosaces, frises et pavages*, Ed. CEDIC, Vol. 1 : Etude pratique, 190 p., 1977 ; Vol 2 : Etude théorique, 168 p . 1979, Paris. 291

[41] A. Bouvier, *La mystification mathématique*, Hermann, Paris, 1971. 264, 274

[42] R. Bramald, *Teaching Probability*, Teaching Statistics, Volume 16, n°3, 1994. 300

[43] Briot, C. et Bouquet, J.-C., *Leçons de géométrie analytique*, Quatorzième édition revue et commentée par M. Appell, Ed. Delagrave, Paris, 1890. 95, 142

[44] W.F. Burger and J.M. Shaughnessy, Characterising the van Hiele levels of development in geometry, *Journal for Research in Mathematics Education*, 17, 31–48, (1986). 192, 194, 194, 196

[45] H. Burkhardt, A. Schoenfeld, S. Groves and K. Stacey, *Theme Group 7 : Problem solving*, in Proceedings of the fifth international congress on mathematical education, edited by Marjorie Carss, Birkhäuser, Boston, 1986. 73, 90

[46] J. Callahan, D. Cox, K. Hoffman, D. O'Shea, H. Pollatsek, L. Senechal, *Calculus in Context. The Five College Calculus Project*. W. H. Freeman and Company, New York, 1995. 429

[47] J. Cardinet, *Où mènent les recherches sur la notation scolaire ?*, Texte à la mémoire d'Y. Tourneur, Neuchâtel 1995. 672

[48] CEPEC, sous la direction de C. Delorme, *L'évaluation en questions*, Collection Pédagogies, ESF éditeur, Paris 1992. 591, 596

[49] A. Clairaut, *Élémens de géométrie*, Ed. David, Paris, 1753, Rééd. Siloë, Laval, 1987. 222, 226

[50] M. Cohen, E.D. Gaughan, A. Knoebel, D.S. Kurtz, D.J. Pengelley, *Student research projects in calculus*, Mathematical Association of America, 1991. 676, 676, 692

[51] M.P. Collonge et F. Trehard, *Mosaïques et isométries*, Ed. CEDIC, 99 p., Paris, 1982. 135, 291

[52] L. Colot (coordonnateur), *La géométrie hors des sentiers battus, essai d'une approche de la mathématique par la tortue de « Logo »*, Ministère de l'Education Nationale, Bruxelles, (1988). 142

[53] S. Courtois et F. Denis, *Découpages, translations, rotations et Cabri-géomètre*, Mathématique et Pédagogie, n° 102, 29–40, (1995). 132, 142

[54] S. Courtois et F. Denis, *Fonctions, extremums et Cabri II*, Mathématique et Pédagogie, n° 108, 55–69, (1997). 132, 142

[55] S. Courtois et F. Denis, *Pavages et papiers peints*, Mathématique et Pédagogie, n° 113, 15–28, (1997). 132, 142

[56] S. Courtois et F. Denis, *Coup d'oeil actualisé sur la droite de Simson et sur la géométrie*, Mathématique et Pédagogie, n° 117, 59–71, (1998). 132, 142

[57] CRAM sud-est Marseille, *logiciel CHADOC VS*, Marseille, 1995. 672

[58] M. Crowley, The van Hiele model of the development of geometric thought, in *Learning and teaching geometry, 1987 yearbook of the NCTM*, 1–16, National Council of Teachers of Mathematics, Reston , USA, (1987).

[59] M. Crowley, Criterion referenced reliability indices associated with the van Hiele geometry test, *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 238–241, (1990).

[60] R. Cuppens, *Faire de la géométrie en jouant avec Cabri-Géomètre*, Tomes 1 et 2, Brochures n° 104 et n° 105 de l'APMEP, Paris, (1996). 132, 142

[61] A. Dalle, *2000 théorèmes et problèmes de géométrie avec solutions*, Editions A. Wesmael-Charlier, Namur, 1947. 182, 196

[62] G. Dethier, *Les isométries de l'espace. Traité suivi d'exercices résolus*, Brochure 316/71, Ministère de l'Education Nationale, Organisation des Etudes, Bruxelles, (1987).

[63] R. Douady, *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*, Recherches en didactique des mathématiques, 7, n°2, 5–31, 1986. 44, 53, 84, 85, 90, 142

[64] R. Douady, *De la didactique des mathématiques à l'heure actuelle*, Cahiers de didactique des mathématiques N°6, IREM de Paris VII, 223, 226

[65] E. Dubinsky, *A theory and practice of learning college mathematics*, Mathematical thinking and problem solving, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, USA, 1987.

[66] R. Duval, *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, n°5, 37–65, 1993. 87, 90

[67] H. M. Edwards, *Fermat's last theorem. A genetic introduction to algebraic number theory.*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, 1977. 225, 226

[68] S.S. Epp, *The role of proof in problem solving*, Mathematical thinking and problem solving, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, USA, 1987.

[69] B. J. Fraser, *Two decades of classroom environment research*, Educational environments : evaluation,antecedents and consequences, Pergamon Press 1991.

[70] R. Foster, D. O. Tall, *Can all children climb the same curriculum ladder ?*, Mathematics In School, 25, 8–12, 1996.

[71] M. Frédérickx, M. Parker, *Les dérivées et les boîtes de conserve*, Cahiers du Cedop, UREM, ULB, 1995. 315

[72] H. Freudenthal, Mathematics as an educational task, *Ed. Reidel*, Dordrecht, Pays-Bas, (1973). 189, 190, 196

[73] H. Freudenthal, Revisiting Mathematics Education, *Ed. Kluwer*, Dordrecht, Pays-Bas, (1991). 41, 53

[74] R. Gibbons, *A primer in Game theory*, Harvester Wheatsheaf, UK, 1992. 306

[75] G. Giles, *The Stirling recording sheet for experiments in probability*, Teaching statistics, V. 1, n°3, 84–91, 1979. 454, 467, 672

[76] G. Glaeser, *Mathématiques pour l'élève professeur*, Ed. Hermann, Paris, 1971. 27, 31

[77] G. Glaeser, *Fondements de l'évaluation en mathématiques*, Brochure APMEP n° 96, Paris, 1995. 590, 596, 648, 649

[78] G. Glaeser, *Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques*, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, 1999.

[79] S. Goldberg, *Introduction to Difference Equations. With Illustrative Examples from Economics, Psychology and Sociology*, Dover Publications, New York, 1986. 429

[80] R. Gras, *D'une classification d'objectifs opérationnalisables à des exercices divers du premier cycle*, in Activités Mathématiques en quatrième-troisième, Brochure n°33 de l'APMEP, 101–108, 1979. 89, 90, 184, 196

[81] R. Gras (coord.), *Méthodes d'analyses statistiques multidimensionnelles en didactique des mathématiques*, A.R.D.M., 1995. 758

[82] R. Gras, B. Parzysz et Ph. Bardy, *Echanges SBPM–APMEP : une autre entrée dans les programmes d'enseignement*, Mathématique et Pédagogie, 113, 35–56, 1997. 87, 90

[83] E. M. Gray, D. O. Tall, *Duality, ambiguity and flexibility : a "proceptual" view of simple arithmetic*, Journal for Research in Mathematical Education, 25, 116–140, 1994. 42, 44, 45, 52, 53, 217, 226

[84] J.G. Greeno, *Instructional representations based on research about understanding*, Cognitive science and mathematics education, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, USA, 1987.

[85] L. Grugnetti and F. Jaquet, *Senior secondary school practices*, International handbook of mathematics education, Kluwer Academic Publishers, 1996.

[86] B. Grünbaum and G.C. Shephard, *Tilings and patterns*, Ed. W.H. Freeman, ix + 700 pp., New York, 1987. 291

[87] A. Gutierrez, A. Jaime and J.M. Fortuny, An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels, *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 237–251, (1991). 192, 195, 196

[88] P. Halmos, *The teaching of problem solving*, The American Mathematical Monthly, 82, 446–470, 1975.

[89] P. Halmos, *The heart of mathematics*, The American Mathematical Monthly, 87, 518–524, 1980. 26, 31

[90] F. Hitt, *Comportement de retour en arrière après la découverte d'une contradiction*, Thèse de 3e cycle, Université de Strasbourg, 1978. 581, 596

[91] J. Høyrup, *Dynamis, the Babylonians and Theaetetus 147c7–148d7*, Historia Mathematica, 17, 201–222.

[92] R. Isaac, *The Pleasures of Probability*, Undergraduate Texts in Math. Readings in Math., Springer V., New York, ..., 1995. 467, 672

[93] J. Kilpatrick, *Problem formulating : where do good problems come from ?*, in « Cognitive science and mathematics education », Lawrence Erlbaum Associates Publishers, USA, 1987.

[94] L. Lebart et J.-P. Fenelon, *Statistique et informatique appliquées*, Dunod, Paris, 1975. 758

[95] S. Lipschutz, *Probability*, Schaum's outline series, McGrawhill Book Company, 1968. 467, 672

[96] F. W. Luttmann, *Selected applications of mathematics in finance and investment*, EDC/Project UMAP, unit 381, 1979.

[97] R. W. Madsen, *Secondary student's concept of probability*, Teaching Statistics, Volume 17, n°3, 1995. 300, 467, 672

[98] G. E. Martin, *Transformation Geometry. An Introduction to Symmetry*, Springer Verlag, New York, Heidelberg, ..., 1982.

[99] J. Mason et co., *L'esprit mathématique*, De Boeck, 1997. 161, 176

[100] S.B. Maurer, *New knowledge about errors and new views about learners*, in « Cognitive science and mathematics education », Lawrence Erlbaum Associates Publishers, USA, 1987.

[101] J. Mayberry, The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers, *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, 58–69, (1983). 192, 194, 196

[102] N. Nakatani, J.-C. Perrinaud, D. Porte, *Collection DIMATHEME. Livres de Première et de Terminale. (Géométrie/Algèbre)*, Les Editions Didier, Paris, 1991-1992. 682, 692

[103] D. Natal, E. Reitan, *Using Asymetrix Multimedia Toolbook 4*, QUE Corporation, Indianapolis, USA, 1995. 683, 692

[104] G. Noël (coordonnateur), *Premiers rendez-vous probabilistes*, Ed. CDS (Université de Mons-Hainaut), 1981. 101, 142, 467

[105] G. Noël, *L'intuition probabiliste*, Bull. Soc. Math. Belg, XLIII, 291 – 311, 1991. 581, 596

[106] G. Noël, *Seconds rendez-vous probabilistes*, Ed. CDS (Université de Mons-Hainaut), 1993. 101, 142, 293, 300, 467, 672

[107] G. Noël, *Des programmes et des problèmes, en France et ailleurs*, Mathématique et Pédagogie, 108, 71–77, 1996.

[108] G. Noël, *Du procédural au structural*, à paraître dans les Compte-rendus du groupe de contact FNRS « Enseignement des mathématiques », Ed. CREM, 1997. 35, 53

[109] G. Noël et P. Point , *Programmer en Logo*, Université de Mons-Hainaut, Centre de Didactique des Sciences, (1988). 135, 142

[110] G. Noël, *Groupes d'isométries des polyèdres*, notes rédigées par N. Lambelin, Université de Mons-Hainaut (octobre 1981), 53 pp.

[111] G. Noël, F. Pourbaix, P. Tilleuil, *L'algèbre linéaire au troisième degré du secondaire*, Rapport final d'un contrat de recherche financé par le Ministère de la Communauté Française à l'université de Mons-Hainaut (1996-1997), 266 pp. 474, 478

[112] G. Noël, F. Pourbaix et P. Tilleuil, *L'algèbre linéaire au troisième degré du secondaire*, Le Point sur la Recherche en Éducation, N°4, 11–27, 1997. 474, 478

[113] S. Papert, *Jaillissement de l'esprit*, Ed. Flammarion, Paris, 1981. 133, 142

[114] I. Pays, *Empilements de sphères et codes correcteurs d'erreur*, Journée de Mathématique et de Sciences, Université de Mons–Hainaut, 1995. 315

[115] K. Pavlopoulou, *Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire : la coordination des registres de représentation*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, n°5, 67–93, 1993. 87, 90

[116] M. Pécal (coord.) L'évaluation en mathématiques : perspectives institutionnelles, pédagogiques et statistiques, Brochure de l'APMEP n°102, Paris, 1995.

[117] M. Peltier, N. Rouche, M. Manderick, *Contre-Manuel de Statistique et Probabilité*, Vie Ouvrière, Bruxelles, 1982.

[118] R. Penrose, *Pentaplexity*, The Mathematical Intelligencer, Vol. 2, 32–37, 1979/80. 276, 291

[119] L. Pereira-Mendoza, B. Kaur, *Statistics education in Singapore Schools*, Teaching Statistics, Volume 20, n°2, 1998.

[120] J. Piaget, *Problèmes de psychologie génétique*, in Six Etudes de Psychologie, Ed. Gonthier, Genève, (1964). 33, 53

[121] F. Pluvinage, *Difficultés des exercices scolaires en mathématiques*, Thèse de Docteur ès Sciences, Université de Strasbourg, 1977. 581, 596

[122] G. Polya, *Comment poser et résoudre un problème*, Ed. Dunod, Paris, 1989. 10, 23, 63, 68

[123] G. Polya, *La découverte des mathématiques*, deux tomes, Ed. Dunod, Paris, 1967.

[124] L. Råde, *Tentez votre chance avec votre calculateur programmable*, Ed. CEDIC, Paris, 1977. 128, 142

[125] L. Radford, *La résolution de problèmes : comprendre puis résoudre ?*, Bulletin AMQ, XXXVI, n°3, 19–30, 1996.

[126] L. Radford, *The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra : historical remarks from a didactic perspective*, in « Approaches to algebra – Perspectives for research and teaching », Edited by N. Bednarz, C. Kieran qand L. Lee, Ed. Kluweer, Dordrecht, 1996. 103, 142

[127] A. Robert, *L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur*, Recherches en didactique des mathématiques, 3 (3), 305–341, 1982. 49, 53

[128] T.A. Romberg, *Classroom instruction that fosters mathematical thinking and problem solving : connections between theory and practice*, Mathematical thinking and problem solving, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, USA, 1987.

[129] A.H. Schoenfeld, *Reflections on doing and teaching mathematics*, Mathematical thinking and problem solving, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, USA, 1987.

[130] A.H. Schoenfeld, *Mathematical problem solving*, Academic Press Inc., Orlando USA, 1985. 63, 68, 145, 146, 175, 176, 242, 249

[131] A.H.Schoenfeld, *Learning to think mathematically*, Handbook of research on mathematics teaching and learning, NCTM, MacMillan Publishing Company, USA.

[132] A. Schoenfeld, *Explicit heuristic training as a variable in problem-solving performance*, Journal for Research in Mathematics Education, 10, n°3, 173–187, 1979. 73, 90

[133] B. Sénéchal, *Groupes et géométries*, Ed. Hermann, xx + 128 p., Paris, 1979. 291

[134] A. Sfard, *On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin*, Educational Studies in Mathematics, 22, 1–36, 1991. 35, 45, 53, 672

[135] A. Sierpinska, *La compréhension en mathématiques*, Ed. Modulo, Montréal.

[136] E.-A. Silver, *Student perceptions of relatedness among mathematical verbal problems*, Journal for Research in Mathematics Education, 10, n°3, 195–210, 1979. 73, 90

[137] E.-A. Silver, *Recall of mathematical problem information : solving related problems*, Journal for Research in Mathematics Education, 12, n°1, 54–64, 1981. 73, 90

[138] E.A. Silver, *Foundations of cognitive theory and research for mathematics problem-solving instruction*, Cognitive science and mathematics education, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, USA, 1987.

[139] Y. Sortais, R. Sortais, *Géométrie de l'espace et du plan. Synthèse de cours. Exercices résolus*, Hermann, Paris, 1993.

[140] M. R. Spiegel, *Statistics*, Schaum's outline series, McGrawhill Book Company, 1968. 467, 672

[141] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 1993.

[142] D. Tall, *Understanding the processes of advanced mathematical thinking*, L'enseignement mathématique, 42, 395–415, 1996. 35, 45, 53

[143] Cl. Thelot, *Comment déterminer et évaluer les compétences, orientations méthodologiques ?*, Puzzle, 25–30, n° 4, 15–22, Université de Liège, 1997. 15, 23, 75, 90

[144] W.P. Thurston, *Mathematical Education*, Notices of the American Mathematical Society, 37, (7), 844–850, 1990. 50, 53

[145] W. P. Thurston, *On proof and progress in mathematics*, Bulletin of the American Mathematical Society, 30, 161–177, 1994. 225, 226

[146] P. Tilleuil, F. Verslype, *A la rencontre d'Isaac Newton ...en latin*, Mathématique et Pédagogie, 98, 5-27, 1994. 678, 692

[147] O. Toeplitz, *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, 1949. 225, 226

[148] S. Tomlinson, R. Quinn, *Understanding Conditional Probability*, Teaching Statistics, Volume 19, n°1, 1997. 300, 467, 672

[149] P. Tougne, *Jeux mathématiques, trois problèmes de combinatoire proposés par le postier et le dessinateur*, Pour la Science, décembre 1981. 209, 209

[150] P. M. Tuchinsky, *Mercator's world map and the calculus*, EDC/Project UMAP, unit 206, 1978.

[151] J. C. Turner, *Using spreadsheet to calculate* $P(X + Y = w)$, Teaching Statistics, Volume 20, n°2, 1998.

[152] Z. Usiskin, van Hiele levels and achievement in secondary school geometry, (Final report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project), Univ. of Chicago, Dep. of Education, *ERIC Document Reproduction Service, N° ED 220 288*, (1982). 188, 192, 196

[153] Z. Usiskin and S. Senk, Evaluating a test of van Hiele levels : a response to Crowley and Wilson, *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 242–245, (1990).

[154] A. Vander Linden, *L'arbre, outil pédagogique en calcul des probabilités*, Mathématique et Pédagogie, n°25, 29–51, SBPMef, 1980. 467, 672

[155] F. Van Dieren-Thomas, N. Rouche, J. Ottevaere, M. Vilanoy-Schul, Groupe d'Enseignement Mathématique, *Mathématiques 1 à 4. De question en question*, Didier Hatier, Bruxelles, 1993 à 1997. 214, 226

[156] P.M. van Hiele, La signification des niveaux de pensée dans l'enseignement par la méthode déductive, *Mathematica & Paedagogia*, 16, 25—34, (1958/59). 89, 90, 188, 191, 196

[157] J.-C. Vansnick, J.-M. De Corte, C. Bana e Costa, *logiciel MacBeth*, UMH, 1997. 668, 672

[158] C. Villers, *Pour une pédagogie des situations*, Mathématique et Pédagogie, n°95, 5–33, 1994. 308, 315

[159] W. Wickelgren, *How to solve problems*, Ed. Freeman, San Francisco, 1974. 158, 176

[160] M. Wilson, Measuring a van Hiele geometry sequence : a reanalysis, *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 230–237, (1990).

Annexe C

Index

abscisse, 495
accroissements
    finis, 110
aire, 237, 240
    d'un quadrilatère, 269
    d'un triangle, 270
    orientée, 270
algèbre, 481
algébrisation, 262
algébriser, 95
algorithme, 256
analogie, 167
analyse
    des correspondances, 711
    du problème, 63, 146
    factorielle, 663
apprentissage, 20, 21, 33
approcher, 109
approximation, 255, 259, 262
arbre, 296, 299, 460, 461
asymptote, 709
axes
    principaux d'inertie, 737

Bachet-Bézout, 199
barycentre, 265, 505
Bayes, 293, 294, 297
Beauzamy, 28
Beckers, 22, 586, 588
behaviouriste, 579
bijection, 96
Bloom, 89
Buekenhout, 29, 179
but, 148

Cabri, 265
cadre, 15, 92, 163
    algébrique, 16
    changement de, 75
    géométrique, 16
    vectoriel, 16
calcul
    d'erreur, 109
    incantatoire, 643
    linéaire, 489
    matriciel, 415, 482
    vectoriel, 474
calculatrice, 21
    graphique, 533
centre
    de gravité, 736
certification, 583
chaîne
    d'encadrements, 359
    de Markov, 101
chance, 138
changement
    de cadre, 15, 16, 75, 84, 235, 602
    de registre, 15, 75, 87, 235, 248, 602
    de stratégie, 247, 248
coefficient
    de corrélation, 525
combinaison
    linéaire, 199
    naturelle, 199
communication, 18, 63, 146, 154

communications
téléphoniques, 497
comparaison, 60
compétence, 7, 184, 235
de communication, 20
de personnalité, 20
disciplinaire, 8
d'intégration, 11
spécifique, 11
globale, 65
hiérarchisation, 75
intellectuelle, 20
méthodologique, 20
sociale, 20
terminale, 1, 22, 66
transversale, 8
comportement, 235, 246, 595
observable, 63, 579
compression
des idées, 50
concept, 21, 33
conceptuel, 35, 235
condensation, 34, 46, 64, 89, 232
confetti, 308, 312
configuration
plane, 15
spatiale, 15
conflit
cognitif, 48
conique, 252
conjecture, 15, 602
connaissance, 235
connexion, 18
contenu, 15, 17, 20, 75, 77
continuité, 40
contribution
absolue, 715, 756
relative, 757
contrôle, 153, 174
corde, 252
corrigé
relatif, 600
cotation, 584
vectorielle, 600, 602
cote, 584
Cournot, 302
croyance, 145
cube
standard, 484, 492, 497
cuboctaèdre, 548
curriculum, 15

Darboux, 349, 388
démarche
scientifique, 222
Derive, 272
dérivée, 252, 303, 305
Descartes, 95
dévalorisation, 586
dévolution, 148
diagramme
échec-succès, 453
dialectique
outil-objet, 44
discrétisation

en escaliers, 348
dimension
de Hausdorff, 308
discrétisation, 262
discrétiser, 116, 252
distribution
binômiale, 81
normale, 81
poissonnienne, 81
données
représentation, 15
traitement, 15
dossier-projet, 4
Douady, 92
drill
intelligent, 478
droite
propre, 419

égalité, 37
élève
fictif, 670
élimination, 166
ellipse, 251, 252, 254, 255, 259–261
longueur d'une, 251
encadrement, 109, 260, 261
probabiliste, 141
épisode, 146, 242
d'analyse, 146, 242, 243, 248
d'apparition d'information, 244
d'exploration, 146, 244, 245, 248, 249
de lecture, 242, 248
de planification, 146, 242, 243
de Schoenfeld, 242, 246
de vérification, 147, 244, 245, 247, 249
nouvelles informations, 147
équation, 39
cartésienne, 495
erreur
relative, 119
état
absorbant, 98
d'un problème, 149
d'un système, 98
Euler, 116
évaluation, 3, 18, 21, 66, 235, 471
certificative, 584, 647
formative, 584, 648
prédictive, 648
sommative, 648
vectorielle, 661
événement, 294, 299
élémentaire, 459
composé, 459
contraire, 459
indépendant, 141, 464
évolution, 415
excentricité, 251, 255
expérience, 242, 317
aléatoire, 459
reproductible, 139
expérimentation, 117, 235
exploration, 151
extremum, 303, 304

facteur, 747
faits
    mathématiques, 21
femelle
    immature, 528
Fermat, 95
feuille, 460
figure
    flottante, 136
flexibilité, 38
fonction, 39, 49
    d'évaluation, 158
    d'accumulation, 368, 403
fonctionnement
    du modèle, 60
fonctions
    osculatrices, 114
    tangentes, 113
formation
    continue, 472
formule, 37
fraction, 36
fréquence, 127, 294, 453, 460

Gauss, 160
GEM, 283
géométrie, 481
    algébrique, 95
    analytique, 95
    locale, 133
géométriser, 102
Glaeser, 27, 590
grammienne, 737
graphe, 99
    de flux, 98
    des états, 159
graphique
    en escalier, 418
Gras, 89, 184
grille
    de lecture, 600

Halmos, 26
heuristique, 156
hiérarchisation, 12, 23, 75
hill climbing, 158
Hirsch, 29
Høyrup, 103
HP48, 415
huile, 321
hyper-texte, 4
hyperplan
    affine, 736
    vectoriel, 736

Icafoc, 474
image
    mentale, 33, 36, 50
implication, 40
    contraposée, 40
incertitude, 109
indépendant, 742
indien
    Natchez, 568
inégalité d'encadrement, 354
information
    communication, 15

consultation, 15
recueil, 15
traitement, 15
informatique, 41
institutionnalisation, 74, 154, 214
intégrale, 252, 259, 360
elliptique, 251, 252
intériorisation, 46, 64, 89, 232
intervalle
de confiance, 81, 141
invariant, 15
isobarycentre, 504

Laborde, 131
Laisant, 97
Leibniz, 481
Leontief, 560
limite, 39, 252
linéariser, 114
linéarité
de l'intégrale, 373
litanie
des nombres, 33
logiciel
pédagogique, 117
scientifique, 117
loi
de Poisson, 141
de probabilité, 141
des grands nombres, 139
du produit, 464
normale, 142
longueur
d'une ellipse, 254

MacBeth, 668
maille, 357, 387
mantisse, 119
Maple, 415, 423
marche
arrière, 157
avant, 158
marge
d'erreur, 109
Markov, 101
Mason, 161
massification, 17
maximiser, 303
médiane, 265
mélange
homogène, 321
mesure
des grandeurs, 319
méthamathématique, 40
méthode, 234
axiomatique, 60, 222
mathématique, 75
méthodologique, 230
micro-objectif, 184
modalité, 664
modèle, 92
géométrique, 102
mental, 41, 48
modélisation, 15, 21, 60, 127, 319, 323, 482
numérique, 129

moment
    d'inertie, 736
mouche, 465, 466

nœud, 460, 461
Nash, 302
    équilibre de, 305
neutre, 670
Newton, 115
nombre
    aléatoire, 128
    complexe, 96
notation, 234, 584
    vectorielle, 596
note, 584, 585
nuage
    de points massifs, 736
numériser, 117, 262

objectif, 17, 20
    cognitif, 75, 89, 184
    général, 7, 15
objet, 44
octaèdre, 485
opérateur, 36
    binaire, 40
opération
    permise, 148
opérationnaliser, 184
optimisation, 308
ordinateur, 21
ordonnée, 495
outil, 44

palindrome, 161
Papert, 133
papier
    triangulé, 265
paramètre
    statistique, 80
Parisot, 591
partition, 741
pavage, 276
    du plan, 308
Penrose, 276
pgcd, 207
phase
    d'intériorisation, 252
    de condensation, 252, 259
phénomène
    aléatoire, 138
Piaget, 33
pile ou face, 453
planification, 151
point
    fixe, 115
    massif, 736
Polya, 63
polygone
    inscrit, 261
    inscrit (à une ellipse), 254
polynôme
    du second degré, 305
postérité, 79
précision
    de l'approximation, 354

preuve, 15, 21
probabilité, 80, 293–297, 299, 453, 456, 461
  addition et multiplication, 295
  conditionnelle, 293, 294, 296, 297, 463, 464
  de transition, 98
problématique, 14
problématisation, 15
problème, 1, 15, 18, 21
  analyse, 148
  d'application, 224
  d'introduction, 222
  parasite, 323
problèmothèque, 168
procédural, 35, 235
procédure, 18, 33
procept, 41, 44
processus, 42
produit
  matriciel, 415
  scalaire, 509, 537
  vectoriel, 270
programmation
  itérative, 41
  orientée objet, 41
  récursive, 41
  spaghetti, 41
  structurée, 41
programmer, 260
prolongements, 235
proportion, 320, 321, 324, 325, 329

quantificateur, 40
quantification, 323
quasi-cristal, 276

racine, 460, 461
Radford, 103
raffinement, 359, 394
raisonnement, 18, 21
registre, 15, 87, 163
  changement de, 75
régression, 581
régularité
  globale, 128
réification, 38, 46, 64, 89, 232, 583
relation
  de Chasles, 488
repérage, 15
représentation, 18
  graphique, 164
ressource, 148, 174
retour
  en arrière, 581
richesse
  combinatoire, 602
roue, 457
ruine
  d'un joueur, 98

savoir, 77
savoir-faire, 77
Schoenfeld, 63, 242, 248
sélectionner, 586
semence, 128
séquence

d'apprentissage, 216
simulation, 128
simuler, 128
situation, 230, 232, 234
situation-problème, 222, 230, 472
solution
incantatoire, 667
locale, 114
sommation, 255
somme
de Darboux, 160
inférieure, 349
supérieure, 349
de Riemann, 259–261
stabilisation
des décimales, 125
stabilité, 583
stade
conceptuel, 248, 249
procédural, 248
standard, 17
statistiques, 80
stratégie, 73, 75, 145, 151, 156, 249
élaboration, 63, 146
vérification, 63, 146
validation, 63, 146
structural, 35
subdivision, 349
régulière, 356, 387
suite, 314
convergente, 49
emboîtée, 359, 397
symbolisme, 51, 234
symétrie, 239
système
dynamique, 415

tableau
binaire, 743
tableur, 112, 122, 384
tangente, 252
taxonomie, 75, 89, 184
technique, 21
algorithmique, 15
technologie, 21
test
d'hypothèse, 81
Thelot, 15, 75
théorème
de Pythagore, 524
théorie
de la mesure, 308
tours de Hanoï, 160
transfert, 9, 16, 73, 261, 262
transformation, 15
du plan, 39
linéaire, 415
translation, 203, 488
travaux
d'élèves, 654
trinôme
du second degré, 304, 305

unité
de sens, 601

valeur
    absolue, 111
validation, 60
valider, 128
valorisation, 586
van Hiele, 89
variabilité
    locale, 128
variable, 37
    aléatoire, 81, 742
    globale, 41
    locale, 41
    principale, 663
    supplémentaire, 758
variance
    totale, 746
variante, 235
vecteur, 489, 500
    libre, 500
vin, 318, 319, 321, 324, 327
vodka, 325
volume, 324, 325, 329

Wickelgren, 158
Wilgame, 461

Young, 112